

**FUNCIÓN: PROCESO DE OBJETIVACIÓN Y SUBJETIVACIÓN EN CLASES DE  
MATEMÁTICAS**

**LUZ ADRIANA CADAVID MUÑOZ  
CLAUDIA PATRICIA QUINTERO QUINTERO**

**DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
MEDELLÍN**

**2011**

**FUNCIÓN: PROCESO DE OBJETIVACIÓN Y SUBJETIVACIÓN EN CLASES DE  
MATEMÁTICAS**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
MAGISTER EN EDUCACIÓN**

**LUZ ADRIANA CADAVID MUÑOZ  
CLAUDIA PATRICIA QUINTERO QUINTERO**

**ASESORA:  
DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO**

**DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
MEDELLÍN**

**2011**

**UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN**

**TESIS DE MAESTRÍA**

**FUNCIÓN: PROCESO DE OBJETIVACIÓN Y SUBJETIVACIÓN EN CLASES DE  
MATEMÁTICAS**

**Luz Adriana Cadavid Muñoz  
Claudia Patricia Quintero Quintero**

**Asesora: Diana Victoria Jaramillo Quiceno**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

---

**Firma del presidente del jurado**

---

**Firma del jurado**

---

**Firma del jurado**

**Medellín  
2011**

## **AGRADECIMIENTOS**

*En el proceso de esta investigación comenzamos siendo maestras, con muchas ilusiones de avanzar en un proceso de formación. Fue así, que nos adentramos en el camino de la investigación con muchas expectativas como maestras e investigadoras.*

*Este camino fue posible recorrerlo gracias al compromiso y profesionalismo de los profesores que estuvieron en los cursos y seminarios de la maestría; a nuestros compañeros que con sus aportes nos complementaron y nos posibilitaron otros horizontes.*

*Gracias a COLCIENCIAS por el apoyo financiero brindado en al proyecto colaborativo del cual hizo parte esta investigación.*

*Gracias al grupo de investigación “Matemáticas, Educación y Sociedad – MES”, por acogernos, escuchando nuestras exposiciones y dialogando desde nuestros planteamientos académicos.*

*Gracias al grupo colaborativo, constituido a partir del proyecto El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clases. Llevamos en el corazón todos aquellos encuentros, dedicados a planear, revisar, y analizar este trabajo de investigación.*

*Mil gracias a las instituciones educativas Ramón Múnera Lopera y El Hatillo, representadas por sus rectores y coordinadores. De manera especial, gracias a los estudiantes de los grupos de noveno grado que con tanto cariño recibieron y decidieron participar de este proyecto. Así mismo, gracias a Leidy, Marcela, Jorge, Marj a Eugenia, Elizabeth y Juan Felipe, los estudiantes protagonistas de esta investigación, por darle vida a este estudio; pues fueron sus acciones y sus voces, la columna vertebral de nuestro trabajo de investigación.*

*Gracias mil.*

*A Yolanda Beltrán, por su apoyo constante, y por enseñarnos que desde la sencillez los lazos se hacen más fuertes, y el camino más agradable.*

*Al profesor Oriosvaldo de Moura y al grupo GEPAPe, así como a la profesora Gloria García, por sus aportes en nuestro proceso de cualificación.*

*A Diana Jaramillo, nuestra orientadora, por todo lo que nos permitió aprender desde su ser como maestra pero, ante todo, como ser humano, consciente de su inconclusión.*

*A nuestras familias y amigos por su apoyo incondicional; por su paciencia para entender nuestros afanes y ausencias.*

*A Angel, por estar... siempre ahí (Claudia).*

## RESUMEN

Mediante esta investigación pretendimos analizar el proceso de objetivación del concepto de *función*, en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural. Para tal fin, analizamos dicho proceso en seis estudiantes de dos instituciones de carácter público; tres pertenecientes a una institución ubicada en la zona urbana del municipio de Medellín, y los otros tres pertenecientes a una institución rural del municipio de Barbosa. Las actividades que planteamos, y a través de las cuales pudimos interpretar la forma en que los estudiantes, protagonistas de la investigación, se aproximaron progresivamente al concepto de *función*, estuvieron enmarcadas en la *Teoría de la Actividad*.

En el camino para responder nuestra pregunta de investigación, ¿cómo es el proceso de objetivación del concepto de *función*, en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural?, empleamos una metodología a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico y desde una investigación participante. En esa misma búsqueda, nos apoyamos en autores que tienen una mirada sociocultural de la educación y de la educación matemática como Bajtín (2004, 2009), Caraça (1984), Moura (2001, 2010) y Radford (2004, 2006, 2008) que nos permitieron comprender —entre otros aspectos— la importancia de la intersubjetividad a la hora de la constitución del sujeto, así como la importancia de los aspectos sociales, culturales, históricos y políticos en el proceso de objetivación del conocimiento matemático.

Fue así que, en el camino recorrido, entendimos cómo las diversas aproximaciones al objeto *función*, hechas por los estudiantes protagonistas de la investigación— en permanente interacción con *otros*—, mediante el desarrollo de las actividades propuestas, les permitió apreciar las representaciones del objeto de diferentes formas y hacer una objetivación del mismo. En esa dirección, las reflexiones de los estudiantes, realizadas desde las subjetividades de cada uno —constituidas en la dialéctica individuo-grupo— estuvieron asociadas, siempre, a la realidad que les pertenece y de la que hacen parte. Así,

el concepto que cada uno objetivó con respecto al objeto *función* no fue único; como no pueden serlo el proceso de objetivación, ni el concepto mismo.

**Palabras-clave:** perspectiva sociocultural, *Teoría de la Actividad*, sujeto, intersubjetividad, fluencia, transformación,

## ABSTRACT

With this research we intended to analyze the concept of objectification of the *function* concept, in ninth grade students, through activities oriented by a sociocultural approach. To such end, we analyzed that process in six students from two public schools, three from the urban area of Medellin and three from the rural area of the municipality of Barbosa. The activities we proposed and through which we could interpret the way students engaged in the research progressively seized the function concept were framed in the activity theory.

As part of our path to answer our research question, How is the process of objectification of the function concept in students of ninth grade, mediated by activities oriented by a sociocultural approach? We utilized a methodology in the light of the qualitative paradigm, through a critical-dialectical approach from a participatory research. In this study we based on authors who belong to a sociocultural view, such as Bakhtin, Caraça, Moura, and Radford who helped us understand, among other aspects, the importance of intersubjectivity as a constitutive element of the subject, as well as the importance of social, cultural, historical, and political factors in the process of objectification of mathematical knowledge. Along this path, we understood how the diverse views of the function concept, given by the students objectified in the study, interacting each other in the activities allowed see the dimensions of the object in different ways and its objectification. In the same way, the students' reflections from their subjectivities embodied in the individual-group dialectics were always associated with their own realities. Therefore, particular concepts regarding function were not unique, as are not the process and the objectification concept itself.

**KEYWORDS:**, sociocultural perspective, Activity Theory, subject, intersubjectivity, fluency, transformation.

## CONTENIDO

|  |     |
|--|-----|
| EL CAMINO SEGUIDO .....  | 1   |
| NUESTRO PUNTO DE PARTIDA .....                                   | 5   |
| EL NORTE.....  | 8   |
| Sobre los participantes y el contexto.....                       | 9   |
| Sobre el trabajo de campo .....                                  | 10  |
| Sobre las Actividades Orientadoras de Enseñanza.....             | 12  |
| Sobre la Producción de Registros y Datos .....                   | 45  |
| Sobre el Análisis de los Datos.....                              | 45  |
| “NO TODO SE VA A QUEDAR IGUAL” .....                             | 47  |
| “TODO ESTÁ VIVO, TODO ESTÁ VINCULADO, EL AIRE, EL AGUA...” ..... | 64  |
| “FUNCIÓN: INSTRUMENTO PARA INTERPRETAR LEYES CUANTITATIVAS”..... | 94  |
| CONCLUSIONES .....   | 136 |
| REFERENCIAS.....   | 140 |

## LISTA DE ILUSTRACIONES

|   |    |
|---|----|
| <i>Ilustración 1. Ideograma, Marcela. Febrero 16 de 2010</i>  | 16 |
| <i>Ilustración 2. Todo cambia. Juan Felipe, 24 de febrero de 2010</i>   | 17 |
| <i>Ilustración 3. Transcripción canción "Todo Cambia"</i>   | 18 |
| <i>Ilustración 4 Una carta al Futuro, Elizabeth, Febrero 26 de 2010</i>   | 19 |
| <i>Ilustración 5. Conclusiones, Muñeco de Pelos. Marcela y Jorge. Marzo 9 de 2010.</i>  | 21 |
| <i>Ilustración 6. Análisis del documental Home, María Eugenia, Marzo 3 de 2010</i>  | 22 |
| <i>Ilustración 7. Constitución de investigación, Elizabeth, Marzo 11 de 2010</i>  | 24 |
| <i>Ilustración 8. Tallerr. ¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?, Leidy, Abril 12 de 2010</i>  | 26 |
| <i>Ilustración 9. Taller, Tarifas para Servicios de Acueducto en Medellín. Marcela, Febrero 16 De 2010</i>  | 29 |
| <i>Ilustración 10. Actividad del baño diario. María Eugenia, abril 13 de 2010</i>   | 32 |
| <i>Ilustración 11. Uso de agua en la industria, Elizabeth, abril 20 de 2010</i>   | 35 |
| <i>Ilustración 12. Tanque para el almacenamiento de agua, Taller realizado por Marcela. Mayo de 2010</i>  | 38 |
| <i>Ilustración 13. Taller de la Activida. Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia</i>   | 39 |
| <i>Ilustración 14. Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, Juan Felipe, Abril 29 de 2010</i>   | 40 |
| <i>Ilustración 15. Agua de consumo para el hogar, Juan Felipe, mayo 4 de 2010</i>   | 41 |
| <i>Ilustración 16. Taller de la actividad, ¿cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?</i>  | 42 |
| <i>Ilustración 17. ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, Juan Felipe, mayo 11 de 2010</i>  | 43 |
| <i>Ilustración 18. Actividad, ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?</i>   | 44 |
| <i>Ilustración 19. ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, María Eugenia,</i>  | 44 |
| <i>Ilustración 20. Ideograma, María Eugenia, febrero de 2010</i>  | 50 |
| <i>Ilustración 21. Ideograma de Juan Felipe, febrero de 2010</i>  | 51 |
| <i>Ilustración 22. Ideograma de Elizabeth, febrero de 2010</i>  | 52 |
| <i>Ilustración 23. Una carta al futuro, febrero de 2010</i>   | 57 |
| <i>Ilustración 24. Información sobre las tarifas para el cobro de acueducto, Empresas Públicas de Medellín. Mayo 10 de 2010.</i>  | 71 |
| <i>Ilustración 25. Completación de la columna del valor a pagar por el servicio de agua del mes de mayo. Marcela, 10 de mayo de 2010</i>  | 73 |
| <i>Ilustración 26. Cálculo del valor a pagar por el servicio de agua del mes de mayo. Marcela, 10 de mayo de 2010</i>   | 73 |
| <i>Ilustración 27. Preguntas del grupo Las Conservadoras del Planeta, marzo 5 de 2010</i>   | 80 |
| <i>Ilustración 28. Preguntas del grupo Las Ecológicas, marzo 5 de 2010</i>  | 81 |
| <i>Ilustración 29. Preguntas de, grupo Los Biodiversos, marzo 5 de 2010</i>   | 82 |
| <i>Ilustración 30. Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, María Eugenia, abril 9 de 2010</i>   | 83 |
| <i>Ilustración 31. variables de las cuales depende el consumo de agua en la familia en la práctica del baño diario, equipos de María Eugenia y Juan Felipe, abril 13 de 2010.</i> | 88 |
| <i>Ilustración 32. Izquierda, Juan Felipe, Derecha, María Eugenia. Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010</i>                       | 89 |
| <i>Ilustración 33. Ejemplos de dos industrias para análisis de consumo de agua</i>  | 92 |
| <i>Ilustración 34. Cálculo del área de la base del tanque de almacenamiento. Jorge, Mayo 31 de 2010</i>   | 96 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Ilustración 35. Representación grafica de la variación del área &amp; variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Jorge, Mayo 31 de 2010</i>                                   | 101 |
| <i>Ilustración 36. Representación grafica de la variación del área &amp; variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Marcela, Mayo 31 de 2010</i>                                 | 101 |
| <i>Ilustración 37. Representación grafica de la variación del área &amp; variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Leidy, Mayo 31 de 2010.</i>                                  | 102 |
| <i>Ilustración 38. Volumen de agua consumido por cierta familia de estrato 1 &amp; valor a pagar por el servicio de agua, de acuerdo al volumen consumido, en el mes de mayo. Marcela, Mayo 10 de 2010.</i> | 103 |
| <i>Ilustración 39. Volumen de agua consumido por cierta familia de estrato 1 &amp; valor a pagar por el servicio de agua, de acuerdo al volumen consumido, en el mes de mayo. Leidy, Mayo 10 de 2010</i>    | 103 |
| <i>Ilustración 40. Representación, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, Elizabeth, abril 29 de 2010</i>   | 113 |
| <i>Ilustración 41. Representación, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia,</i>   | 113 |
| <i>Ilustración 42. Criterio de cobro del agua en el corregimiento</i>   | 116 |
| <i>Ilustración 43. Actividad, el agua de consumo para el hogar, Juan Felipe mayo 4 de 2010</i>  | 118 |
| <i>Ilustración 44. Actividad, el agua de consumo para el hogar, cálculo del costo de agua, Juan Felipe, mayo 4 de 2010</i>  | 119 |
| <i>Ilustración 45. Actividad, el agua de consumo para el hogar, gráfica de costo del servicio de agua, Juan Felipe, mayo 4 de 2010</i>  | 119 |
| <i>Ilustración 46. Representación gráfica, taller de mayo 4, una fuga de agua en el colegio</i>   | 122 |
| <i>Ilustración 47. Representación tabular de una fuga de agua en el colegio, María Eugenia y Juan Felipe, mayo 11 de 2010</i>   | 126 |
| <i>Ilustración 48. Representación analítica, una fuga de agua en el colegio, Juan Felipe, Mayo 11 de 2010</i>   | 129 |
| <i>Ilustración 49. Interpretación de Juan Felipe de la ley de cobro, mayo 18 de 2010</i>  | 132 |
| <i>Ilustración 50. El concepto de función, Elizabeth, Junio 10 de 2010</i>  | 135 |

## LISTA DE TABLAS

|  |     |
|--|-----|
| <i>Tabla 1. Actividad, ¿Quién he sido?</i>   | 15  |
| <i>Tabla 2. Actividad. Todo cambia</i>   | 16  |
| <i>Tabla 3. Actividad. Una carta al futuro</i>   | 19  |
| <i>Tabla 4. Actividad. Muñeco de pelos.</i>  | 20  |
| <i>Tabla 5. Análisis del documental HOME</i>   | 21  |
| <i>Tabla 6. Actividad. Constitución de equipos de investigación</i>  | 23  |
| <i>Tabla 7. Actividad. ¿Cuánta agua nos gastamos cepillándonos los dientes?</i>  | 24  |
| <i>Tabla 8. Actividad. Tarifas de servicio de acueducto en Medellín</i>  | 27  |
| <i>Tabla 9. Actividad Rutina del baño diario</i>   | 30  |
| <i>Tabla 10. Actividad. Uso de agua en la industria</i>  | 33  |
| <i>Tabla 11. Actividad. Tanque para almacenamiento de agua</i>   | 36  |
| <i>Tabla 12. Actividad. Nuevo criterio para el cobro de agua en Colombia</i>   | 39  |
| <i>Tabla 13. Actividad. Agua de consumo para el hogar</i>  | 41  |
| <i>Tabla 14. Actividad. ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio</i>   | 42  |
| <i>Tabla 15. Ideas destacadas del documental HOME, marzo 3 de 2010</i>   | 78  |
| <i>Tabla 16. Actividad, el agua de consumo para el hogar, mayo 4 de 2010</i>   | 117 |
| <i>Tabla 17. ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, elaboración conjunta en entre toda la clase, mayo 18 de 2010</i> | 131 |

## **EL CAMINO SEGUIDO**

El concepto de *función*, fundamental en el desarrollo de las matemáticas y de otras ciencias, está asociado a diversas dificultades de alumnos y profesores en los procesos de aprendizaje y en los procesos de enseñanza, respectivamente. Estas dificultades han venido siendo identificadas a partir de varias investigaciones en educación matemática, como lo señalaremos más adelante. Es nuestro interés en este trabajo aportar a estas investigaciones, analizando el proceso de objetivación del concepto de *función*, en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural.

Coincidimos con García, Serrano y Espitia (1997) en que la enseñanza fragmentada del concepto de *función*, respecto a sus diferentes representaciones, genera restricciones a la hora de su conceptualización como objeto matemático. Así mismo, consideramos la importancia de las posturas epistemológicas que el maestro debe ir construyendo y asumiendo de tal concepto, de manera que pueda superar la idea de un conocimiento matemático estático e inmutable y que, al mismo tiempo, le posibiliten la generación de espacios de interacción en el aula, donde el estudiante, como lo plantea Radford (2008), pueda hacer aproximaciones progresivas, y con sentido, al objeto matemático, mediante un proceso creativo.

En nuestro recorrido teórico nos apoyamos en autores como Bajtín (2009), Caraça. (1984), Moura (2001), Radford (2006, 2008), Sierpinska (1992), entre otros. Autores que nos posibilitaron hacer un abordaje epistemológico del concepto de *función*. En este abordaje, entre otros aspectos, comprendimos la importancia de la intersubjetividad como elemento

constitutivo del sujeto, y entendimos la importancia de los aspectos sociales, culturales, históricos y políticos en el proceso de objetivación del conocimiento matemático.

El diseño metodológico de esta investigación lo realizamos desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. El trabajo de campo lo realizamos con estudiantes de noveno grado de dos instituciones educativas de carácter oficial, una urbana en el municipio de Medellín y otra rural en el corregimiento El Hatillo, en el municipio de Barbosa, instituciones en las que éramos las maestras de estos estudiantes. La producción de registros y datos la realizamos a partir de las interacciones directas con nuestros estudiantes, mediadas por situaciones enmarcadas dentro de la Teoría de la Actividad (Moura 2001). Su respectivo análisis lo realizamos desde diferentes momentos, emergiendo así, tres categorías que nos permitieron analizar el proceso de objetivación del concepto de *función*. La primera categoría, respecto a la fluencia, llamada: “No todo se va a quedar Igual”; la segunda, respecto al concepto de variable e interdependencia, llamada “Todo Está Vivo, Todo Está Vinculado, El Aire, El Agua...”; y, la tercera, respecto a la *función* llamada: “*Función: Instrumento para interpretar leyes cuantitativas*”. Este análisis lo realizamos con seis estudiantes, protagonistas de la investigación; aunque las actividades las propusimos para todos los estudiantes de los dos grupos.

Es importante destacar que este proyecto de investigación hizo parte de un proyecto colaborativo de investigación, más amplio, intitulado *El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clases*, el cual se desarrolló cofinanciado por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación COLCIENCIAS y La Universidad de Antioquia. En dicho proyecto nosotras actuamos como maestras colaboradoras y protagonistas; de modo que las interrelaciones generadas en nuestras aulas

contribuyeron a construir los datos que posibilitaron desde el análisis, dar respuestas a la pregunta formulada en dicho proyecto.

El primer paso que dimos para este trabajo de investigación, lo explicamos en el primer capítulo, el cual denominamos “Nuestro Punto de Partida”. En él, argumentamos el problema que nos motivó a realizar la investigación y que nos llevó a plantear tanto la pregunta como el objetivo. Así mismo, argumentamos sucintamente las bases epistemológicas en que nos apoyamos —un abordaje sociocultural— y la metodología que utilizamos para dar respuesta a la pregunta de investigación formulada.

El segundo paso dado en el camino de este estudio es el que denominamos “El Norte”, refiriéndonos al diseño metodológico que utilizamos. En este capítulo explicamos la visión epistemológica con que soportamos el diseño de las actividades realizadas para la investigación y, a la vez para la clase, las cuales estuvieron, además, a la luz de la *Teoría de la Actividad*, y fueron implementadas en el aula, desde las *actividades orientadoras de enseñanza* (GEPAPe, 2010). Así, explicamos las actividades desarrolladas por los estudiantes protagonistas, en las dos instituciones educativas consideradas en la investigación. En este capítulo también explicitamos los instrumentos para la producción y de datos, así como las categorías emergentes.

El tercer capítulo es el que llamamos “No Todo se va a Quedar Igual” el cual es, además, el nombre de la primera categoría emergente. En él desarrollamos la tesis referente a que los estudiantes reconocieron, mediante las actividades realizadas, el movimiento y el cambio existentes en el mundo. Reconocimiento hecho por ellos, desde sus condiciones individuales y sociales, en fenómenos naturales, sociales y en sus vidas.

El cuarto capítulo presentado en el texto es el correspondiente a la segunda categoría, “Todo está Vivo, Todo está Vinculado, el Aire, el Agua...”. En este capítulo mostramos nuestro análisis de la forma cómo los estudiantes protagonistas percibieron sus realidades cambiantes, desde las cualidades involucradas en las actividades propuestas en el aula de clase. Además, introducimos en este capítulo una discusión acerca de los conceptos de variable, interdependencia y correspondencia, los cuales constituyen un marco para la objetivación del concepto de *función*.

El quinto capítulo también lleva el nombre de la categoría que contiene: “Función: Instrumento para Interpretar Leyes Cuantitativas”. En él analizamos la forma como los estudiantes protagonistas, a través de un proceso de intersubjetivación, objetivaron el objeto *función*, en diferentes momentos de las actividades desarrolladas.

Finalmente, presentamos el último paso que dimos en la realización del trabajo de investigación: las conclusiones. En este capítulo, presentamos los hallazgos a los que llegamos sobre el proceso de objetivación del concepto de *función*, respondiendo, así, a la pregunta que nos formulamos para dar inicio a este proceso investigativo.

## **NUESTRO PUNTO DE PARTIDA**

Todo proceso de objetivación de conocimiento involucra una relación epistemológica, ontológica y gnoseológica entre el sujeto y el objeto. Relación que, como lo plantea Vigotski (1995), es mediada por la cultura en la que se encuentra sumido el sujeto, en una dialéctica en la cual el entorno cultural lo transforma y, a su vez, el sujeto transforma su entorno cultural. En esta medida, la cultura posibilita, de una manera no mecanicista, la forma en que el individuo interpreta el mundo y, por ende, la forma en que genera conocimiento.

Las dificultades con las que nos encontramos en el aula, en cuanto a la apropiación de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes, particularmente en lo que respecta al concepto de *función* como objeto de conocimiento, nos llevaron a reflexionar sobre aspectos relacionados con nuestra práctica pedagógica. Una práctica como posibilitadora de ambientes de aprendizaje, en los cuales se tejen a diario interacciones que pueden generar, desde el desarrollo de conocimiento matemático, hasta la inhibición del mismo. Práctica que conlleva, además, relaciones entre los sujetos que objetivan el conocimiento.

Nuestra reflexión se centró en el análisis de la objetivación del concepto de *función*. La elección por este tema se debió, en primer lugar, al hecho de que consideramos la *función* como uno de los conceptos fundamentales en las matemáticas, en tanto que su aplicabilidad ha permitido, a través de la historia, repercutir en el desarrollo de las matemáticas mismas y en el de otras ciencias. En segundo lugar, nos motivamos como investigadoras a abordar un estudio sobre la *función* a partir de los recuerdos venidos de nuestra experiencia estudiantil, sobre un aprendizaje de poco sentido con relación a dicho concepto. Estos hechos nos

incitaron a la búsqueda de otros caminos que nos condujeran ahora, como docentes, a una enseñanza en la que no se perpetuara tal error; desde una enseñanza que se practica, y de eso somos conscientes, a un nivel instrumental, en la cual las raíces del concepto mismo no están ligadas a los procesos de objetivación de conocimiento en los estudiantes.

Pensamos que se hace necesario (re)significar<sup>1</sup>, al interior de las prácticas escolares, el proceso de objetivación del concepto de *función*. Aquí entendemos la objetivación en el sentido de Radford (2008), como un proceso en el cual el conocimiento no sólo surge a través de una apropiación desde lo externo, pues la interacción social es consubstancial al proceso de aprendizaje y a la constitución del mismo sujeto; por tanto, el conocimiento y las formas como el sujeto accede a ese conocimiento hacen parte de lo que él es.

Entendemos la perspectiva sociocultural, como una postura que se fundamenta en aspectos filosóficos, ontológicos, gnoseológicos y epistemológicos, donde el sujeto es reconocido como un ser en la cultura; que la transforma de alguna manera, y que a su vez, él se transforma, en ese proceso de constitución de “ser con los otros” (Radford, 2004).

Consideramos que un abordaje desde una perspectiva sociocultural, en el cual se diseñen actividades, en el sentido de la *Teoría de la Actividad* (Leontiev 1981, referenciado por Moura, 2001), caracterizadas por tener objetivos claros e intencionados, al igual que los medios para alcanzarlos, puede brindar, en primer lugar, elementos que poco se han considerado en el análisis del proceso de objetivación del tal concepto. En esta misma línea, creemos que es importante adoptar una mirada hacia el concepto de *función*, desde

---

<sup>1</sup>Empleamos la palabra (re)significar, para darle fuerza al hecho de que la objetivación debe posibilitar la transformación del significado de una práctica escolar enmarcada en el paradigma cognitivista, a un significado, enmarcado desde una perspectiva diferente, en este caso, sociocultural.

fundamentos epistemológicos como los planteados por Caraça (1984), en los cuales la idea de movimiento es un pilar fundamental para su objetivación; idea que, a su vez, está asociada a nociones como interdependencia, fluencia y ley. Desde dichas nociones se posibilita entender el concepto de *función* de una manera coherente con la historia del desarrollo de la humanidad y de las ciencias. Esto es, entender un desarrollo motivado por el requerimiento de satisfacer necesidades de cada cultura, las cuales se presentan en determinados momentos sociohistóricos.

En segundo lugar, un abordaje desde una perspectiva sociocultural posibilita comprender que es el propio sujeto quien objetiva su conocimiento.

De esta manera, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo es el proceso de objetivación del concepto de *función*, en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural?

## **EL NORTE**

La investigación la realizamos a la luz del paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico, desde una investigación participante. Tomamos esta opción metodológica porque fue nuestro interés interpretar una realidad particular. Realidad producto de un devenir histórico que, como lo afirman Denzin, Guba y Lincoln (1994), está constituida por factores sociales, económicos y políticos; realidad que transforma al sujeto que le pertenece, y que, a su vez, es transformada por éste; evidenciándose así la dialéctica existente entre el sujeto y su realidad. Es este sujeto, alumno, en su contexto natural, el que nosotras, como sujetos investigadores, desde nuestras realidades, estudiamos por medio de una participación activa en el aula.

No entendemos las matemáticas escolares como un conjunto de conceptos y contenidos para reproducir en el aula de clases, ni a los estudiantes como receptores cognitivos de un saber disciplinar. En esa medida, la elección por el enfoque cualitativo para el estudio, nos permitió indagar por un proceso de objetivación de un concepto, desde las subjetividades propias de los sujetos y sus contextos. Así, desde lo metodológico, nos propusimos superar las descripciones e interpretaciones generalizadas de fenómenos presentes en los procesos de enseñanza y en los procesos de aprendizaje, para intentar descubrir aquellas cosas que en el proceso de investigación cobraron sentido y que fueron objetivadas por el sujeto.

En armonía con el abordaje crítico-dialéctico, nuestros presupuestos ontológicos gnoseológicos, referidos a las concepciones de sujeto y objeto, y a su relación con el proceso de conocimiento, como lo menciona Sánchez (1998), se centraron precisamente en el proceso de objetivación del concepto de *función*.

### **Sobre los participantes y el contexto**

Los participantes de la investigación fueron dos grupos de estudiantes de noveno grado, de dos instituciones públicas del departamento de Antioquia. Todas las actividades las realizamos con el grupo de clase completo; sin embargo, para el análisis de los datos, elegimos tres estudiantes de cada una de las instituciones en las cuales nos desempeñamos, cada una de nosotras, como maestras de matemáticas.

Leidy, Marcela y Jorge pertenecen a la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera, ubicada en la comuna tres de la ciudad de Medellín<sup>2</sup>. María Eugenia, Elizabeth y Juan Felipe pertenecen a la Institución Educativa Rural El Hatillo, ubicada en el corregimiento El Hatillo del municipio de Barbosa<sup>3</sup>. Los seis estudiantes se destacaron por su interés en el proyecto y por su disposición para realizar las actividades. Cada uno, dentro del grupo al cual pertenecía, manifestaba, antes del inicio del trabajo de campo, diferentes acercamientos con respecto a las matemáticas que se trabajaban en la escuela: algunos se destacaban por indagar y participar constantemente en clase, otros, en cambio, expresaban tener dificultad en la comprensión del área. Sin embargo, al comenzar el proceso de investigación, estos estudiantes se mostraron motivados, entre otras razones, al ver a sus

---

<sup>2</sup> En Colombia, el término comuna, se refiere a una unidad administrativa de una ciudad media o principal del país que agrupa sectores o barrios determinados, de acuerdo a las necesidades de la población y el territorio que habitan. La finalidad de las comunas es la administración de los servicios que se brindan a una población urbana determinada.

<sup>3</sup> Es de aclarar, que tanto los nombres de las instituciones como los de los estudiantes son reales ya que, en primer lugar, contamos con las respectivas autorizaciones de los representantes legales de las instituciones, de los estudiantes y de los padres de familia. Estas autorizaciones nos permitieron el acercamiento a los protagonistas de la investigación en los contextos escolares particulares. Y, en segundo lugar, porque desde un abordaje sociocultural consideramos fundamental referirnos y nombrar a los sujetos reales de la investigación, como parte del acercamiento a sus singularidades y a sus realidades.

maestras llegar a las clases con propuestas diferentes a las que tradicionalmente desarrollaban. Fueron esas las razones principales por las cuales los elegimos como estudiantes protagonistas de nuestro proyecto, como nos referiremos a ellos durante el trabajo.

### **Sobre el trabajo de campo**

Como estrategia metodológica para nuestro trabajo en el aula de clase, diseñamos un conjunto de actividades, en el sentido de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* (GEPAPe, 2010) las cuales, a su vez, tienen su fundamento teórico en la *Teoría de la Actividad*. En esa dirección, vemos pertinente hacer algunas consideraciones de orden teórico, en primer lugar, de la *Teoría de la Actividad*, y en segundo lugar, de las *Actividades de Orientadoras de Enseñanza*, para luego pasar a presentar las actividades que desarrollamos con los estudiantes.

Leontiev, referenciado por Davidov (1998), plantea que hablar de actividad significa referirse a las acciones de un individuo en una comunidad. Acciones dirigidas al trabajo colectivo, las cuales, en muchos casos, son subordinadas incluso a fines parciales en los cuales es posible distinguir un fin u objetivo general. Desde lo anterior, la actividad nos habla de las formas de organización al interior de una cultura, orientadas a un fin determinado.

Consideramos que la actividad no puede verse, entonces, como una reunión de personas que se encuentran para resolver una tarea; una actividad, en el sentido de Leontiev referenciado por Davidov (1988), debe considerarse como:

Una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana.

Haciendo referencia a los elementos constitutivos de la *Teoría de la Actividad*, comenzaremos por hablar de la necesidad, la cual pensamos que es el motor que impulsa la apropiación de un conocimiento que, según Davidov (1988), surge en el proceso de desarrollo psíquico del hombre. La necesidad, a su vez, genera motivos, acciones y finalidades, las cuales están en permanente interacción, dándole sentido, así, al conocimiento del cual el sujeto se va apropiando.

Consideramos que al hablar de la *Teoría de la Actividad*, en relación con el desarrollo humano desde un enfoque histórico-cultural, es necesario considerar el papel del trabajo como la “actividad humana por excelencia” (GEPAPe, 2010), pues desde la actividad del trabajo, el hombre ha tejido relaciones que le permiten desde lo individual y lo colectivo tornarse humano. Desde el trabajo que implica la lucha por sobrevivir, hasta el trabajo que involucra diversas necesidades que el hombre ha ido creando, se abre un abanico de posibilidades para que entre a plenitud la actividad material y, con ella, la constitución de una conciencia individual y social que necesita apropiarse del conocimiento construido durante miles de años.

De acuerdo con lo planteado por GEPAPe (2010): “La Educación es entendida [...] como una vía para el desarrollo psíquico y principalmente humano”. En esa dirección, nuestras posturas se direccionaron más a buscar la objetivación de los conceptos desde su esencia, que en llenar contenidos curriculares. Es decir, pensamos el trabajo del maestro enfocado a la propuesta de actividades creadoras —o potencializadoras de sentidos—, desde acciones,

operaciones y tareas que estén impulsadas por un motivo que sea importante para los estudiantes, el maestro y el conocimiento matemático.

### **Sobre las Actividades Orientadoras de Enseñanza**

*Las Actividades Orientadoras de Enseñanza* proponen pensar, planear y desarrollar los encuentros en el aula de clase procurando interacciones que posibiliten retomar el conocimiento matemático socialmente construido, desde los elementos constitutivos de la *Teoría de la Actividad*; que según GEPAPe (2010), referenciando a Leontiev, presupone una estructura compuesta por dos características centrales: la de orientación y la de ejecución.

Cuando se hace referencia a la característica de orientación se tienen en cuenta, por un lado, las necesidades, los motivos, el objeto y las tareas. Por otro lado, la característica de ejecución, hace referencia a las acciones y sus operaciones. Al tratarse de la actividad de la escuela, se espera que el conocimiento que allí circule tenga sentido para el estudiante y posibilite su (re)constitución como sujeto. En esta interacción, las voces de los estudiantes y del maestro producidas desde las esferas de las prácticas sociales, entran en un movimiento que permite también el conocimiento colectivo. Prácticas sociales que de acuerdo con Miguel y Miorín (2005) las prácticas sociales son:

Un conjunto de actividades o acciones físico-afectivo-intelectuales que se caracterizan por ser: (1) conscientemente orientadas por ciertas finalidades; (2) espacio-temporalmente configuradas; (3) realizadas sobre el mundo natural y/o cultural por grupos sociales cuyos miembros establecen entre sí relaciones interpersonales que se caracterizan por ser relaciones institucionales de trabajo organizado; (4) productoras de conocimiento, saberes, tecnologías, discursos, artefactos culturales o, en una palabra, de un conjunto de normas simbólicas (p.27).

Bajo esta dinámica, el maestro es considerado creador de sentido, donde su herramienta principal es la palabra y, también lo es, el mundo natural con sus actores y las relaciones que se tejen entre ellos. El sentido y el significado, desde los planteamientos de Leontiev, referenciado por Davidov (1988), están relacionados con el concepto de actividad como el fundamento del desarrollo humano. La actividad tiene un sentido personal, ya que de alguna manera es desencadenada por un motivo. Así, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, el papel del maestro se dirige a la “creación” de motivos, que orienten los encuentros en el salón de clase.

Las interacciones entre el conocimiento, los estudiantes y profesores, así como los contenidos, deben tener significados para los estudiantes, partiendo de sus propios referentes, en los cuales tienen sentido unas necesidades y unos motivos reales. En este orden de ideas, se hace necesario que el maestro propicie situaciones adecuadas a tal fin. En esa dirección, Moura (2001, p.156) llama *Actividad Orientadora de Enseñanza* “a la actividad que se estructura de modo que permita a los sujetos interrelacionarse, mediados por un contenido negociado de significados, con el objetivo de solucionar colectivamente una situación problema”.

A la luz de este marco, diseñamos unas *Actividades Orientadoras de Enseñanza* que les posibilitaran, a los estudiantes protagonistas de la investigación, el proceso de objetivación de un concepto —el concepto de *función*—. El motivo que consideramos para objetivar la *función* como instrumento para interpretar leyes cuantitativas, fue el **uso del agua**. Este motivo, el del agua, surgió de los estudiantes en el aula de clase, a partir de reflexiones hechas sobre los cambios planetarios que están ocurriendo, generados en su mayoría por

prácticas sociales. Las actividades que los estudiantes desarrollaron en el aula fueron planteadas, en su mayoría, por nosotras como investigadoras, y las otras surgieron de las inquietudes y consultas de los estudiantes.

Para la planeación de cada actividad, tuvimos en cuenta tres aspectos fundamentales de toda *Actividad Orientadora de Enseñanza*. En primer lugar, planteamos una intencionalidad, es decir, lo que pretendíamos lograr en ese proceso de objetivación del concepto desde dicha propuesta; en segundo lugar, unas acciones que los estudiantes debían llevar a cabo, representadas en consultas, tareas, observaciones, talleres, exposiciones, elaboración de afiches, entre otras y, en tercer lugar, la necesidad particular de cada actividad para el proceso que se estaba desarrollando.

El trabajo de campo fue desarrollado entre el 15 de febrero de 2010 y el 11 de junio de 2010. Planeamos quince actividades diferentes para este proceso de investigación. Para efectos del análisis de los datos producidos, agrupamos estas actividades en cuatro momentos. A continuación enunciamos cada actividad, planteando la intencionalidad, las acciones y la necesidad, además de algunos talleres que hicieron parte de ellas.

El primer momento estuvo conformado por actividades dirigidas a un auto reconocimiento de cada estudiante frente a su pasado, a su presente y a sus sueños. Un auto reconocimiento, que nos permitió identificar la existencia e importancia del cambio en las vidas de estos estudiantes como factor esencial en su visualización de futuro. A este grupo pertenecieron actividades como:

- *¿Quién he sido?*
- *Todo cambia.*
- *Una carta al futuro.*

En la actividad “¿Quién he sido?” propusimos a los estudiantes realizar un ideograma por medio del cual ellos representarían sus gustos, ideales, sueños y proyectos de vida. Explicamos a los estudiantes, que un ideograma es una representación gráfica, donde se involucran símbolos y/o imágenes para representar ideas. En el caso particular de esta actividad, los estudiantes representaron algunos aspectos de su vida que consideraron importante para dar a conocer a sus compañeros. Las maestras investigadoras también realizamos nuestro ideograma, a manera de ilustración y de creación de cercanías con los estudiantes. A continuación presentamos la intencionalidad, las acciones y la necesidad de la actividad propuesta:

| <i>¿QUIÉN HE SIDO?</i>  |  |   |
|---|--|---|
| <b>Intencionalidad</b>  | <b>Acciones</b>  | <b>Necesidad</b>  |
| Conocer sobre la historia de vida de los sujetos participantes de la investigación. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elaborar un ideograma que posibilite representar aspectos relevantes sobre la vida de los participantes, su esencia; lo que han sido y lo que son.</li> <li>• Socializar el ideograma a toda la clase.</li> </ul> | Percibir la manera como los sujetos identifican los cambios que han vivido hasta el momento y cómo los pueden interpretar y plasmar significativamente por medio de una representación gráfica. |

**Tabla 1. Actividad, ¿Quién he sido?**

A continuación, presentamos el ideograma realizado por Marcela.



Ilustración 1. Ideograma, Marcela. Febrero 16 de 2010

En la segunda actividad presentamos a los estudiantes la canción “Todo Cambia” (Numhauser, 1982), interpretada por Mercedes Sosa<sup>4</sup>. Colocando varias veces la canción, a los estudiantes les fue posible copiarla completa. Posteriormente, los estudiantes expresaron sus opiniones y reflexiones sobre los elementos que planteaba la canción y el sentido que cobró para ellos. Veamos los elementos que constituyeron la actividad:

| TODO CAMBIA  |   |  |
|--|---|--|
| Intencionalidad  | Acciones  | Necesidad  |
| Destacar cambios de tipo cualitativo pensado en aspectos cotidianos de la vida de los seres humanos, para luego generar una discusión en torno al uso la palabras <i>cambio</i> y <i>transformación</i> , desde el lenguaje natural. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escuchar la canción</li> <li>• Copiar por partes la canción</li> <li>• Cantar.</li> <li>• Intercambiar comentarios y opiniones con el grupo acerca del sentido de la canción.</li> </ul> | Hacer una elaboración profunda sobre la importancia del cambio como fenómeno natural y social; como motor del devenir del mundo. |

Tabla 2. Actividad. Todo cambia

<sup>4</sup> Cantora Argentina de la canción social latinoamericana (1935-2009).

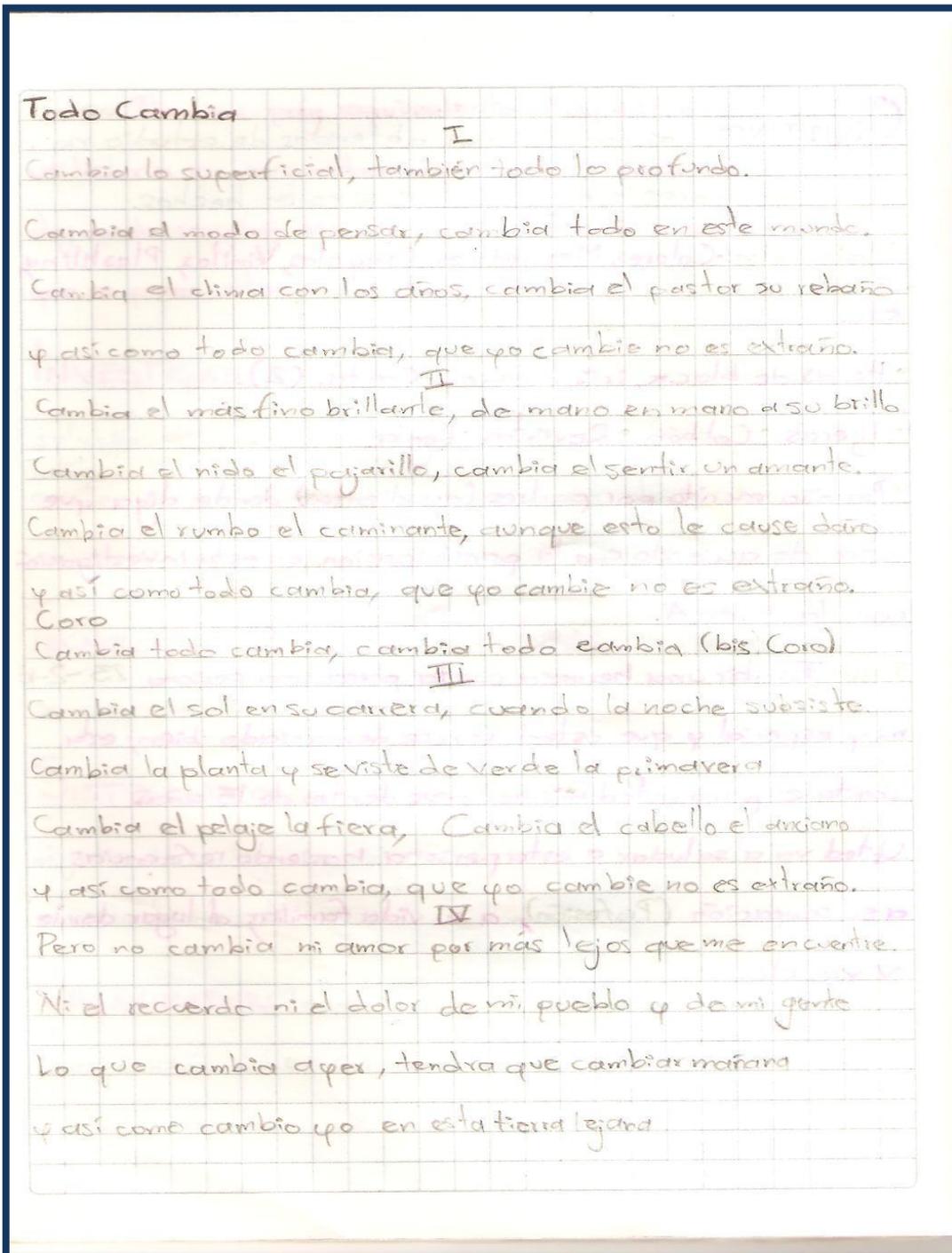


Ilustración 2. Todo cambia. Juan Felipe, 24 de febrero de 2010

Todo cambia  
Cambia lo superficial  
Cambia también lo profundo  
Cambia el modo de pensar  
Cambia todo en este mundo  
Cambia el clima con los años  
Cambia el pastor su rebaño  
Y así como todo cambia  
Que yo cambie no es extraño.

Cambia el más fino brillante  
De mano en mano su brillo.  
Cambia el nido el pajarillo.  
Cambia el sentir un amante  
Cambia el rumbo el caminante  
Aunque esto le cause daño.  
Y así como todo cambia  
Que yo cambie no es extraño.

Cambia, todo cambia  
Cambia, todo cambia  
Cambia el sol en su carrera  
Cuando la noche subsiste.  
Cambia la planta y se viste  
De verde en la primavera.  
Cambia el pelaje la fiera  
Cambia el cabello el anciano.  
Y así como todo cambia  
Que yo cambie no es extraño.

Pero no cambia mi amor  
Por más lejos que me encuentre  
Ni el recuerdo ni el dolor  
De mi pueblo, de mi gente.  
Y lo que cambio ayer  
Tendrá que cambiar mañana  
Así como cambio yo  
En esta tierra lejana.  
Cambia, todo cambia  
Cambia, todo cambia.

Ilustración 3. Transcripción canción "Todo Cambia"

La tercera actividad de este primer momento la llamamos: “Una carta al futuro”. En ella se propuso a los estudiantes escribir una carta en la cual los destinatarios fueran ellos mismos, pero después de 15 años. En la carta ellos escribieron, para sí mismos, cómo se imaginaban, desde aspectos como la ocupación que tendrían, con quiénes vivirían, dónde, el aspecto físico y el estado de salud que tendrían.

| UNA CARTA AL FUTURO  |  |   |
|--|--|---|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad   |
| <p>Conocer algo sobre los sueños y proyección de vida, de los estudiantes.</p> <p>Así mismo, percibir desde lo personal, la disposición para las cosas que implican cambio, movimiento, devenir, fluencia, variabilidad.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escribir la carta, la cual puede ir ilustrada, de acuerdo al deseo y gustos de los estudiantes</li> <li>• Compartir con toda la clase algunas de las cartas.</li> </ul> | <p>Conocer los sueños y/o proyectos de los estudiantes, así como su disposición a visualizar el cambio como agente dinamizador en nuestras vidas y la de los otros.</p> |

Tabla 3. Actividad. Una carta al futuro

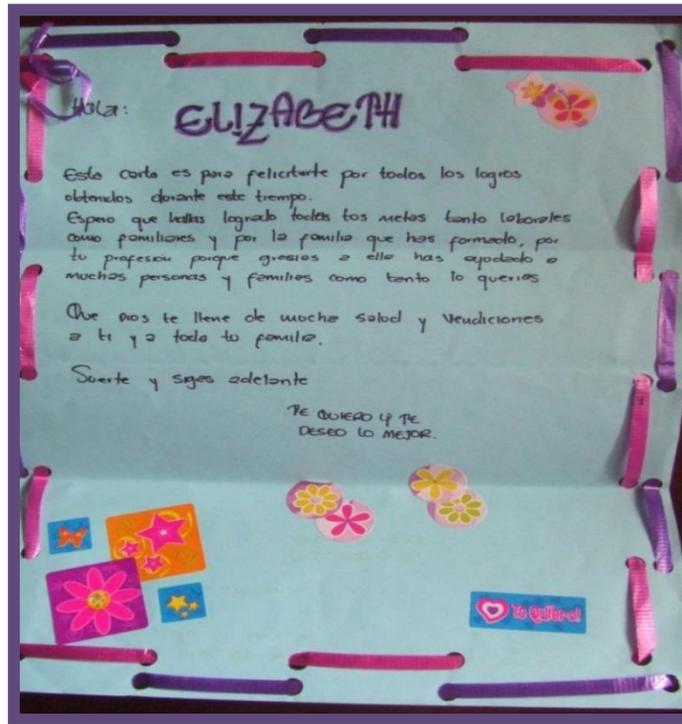


Ilustración 4 Una carta al Futuro, Elizabeth, Febrero 26 de 2010

Un segundo momento estuvo constituido por actividades referentes al concepto de fluencia, y por lo tanto referidas al cambio y a la transformación como condiciones inherentes al desarrollo no sólo individual sino social; cambios generados en y por la interacción con el otro. Pertenecieron a este momento, actividades como:

- *La construcción de un “Muñeco de Pelos”.*
- *Análisis del documental “Home”.*

La construcción de un Muñeco de Pelos consistió en la elaboración de un muñeco, a partir de cierta cantidad de aserrín, que hace la función de sustrato, a la que se le agregan semillas de alpiste, dentro de una media de nylon. Además, se les sugirió a los alumnos decorarlo y propiciar las condiciones que consideraran necesarias para la germinación de las semillas. Les sugerimos también, observar y registrar los cambios que percibieran durante dos semanas. El momento que contemplamos para el análisis fue el correspondiente a las dos semanas posteriores a la elaboración del muñeco.

| MUÑECO DE PELOS  |  |  |
|--|--|--|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad  |
| Observar procesos de cambio en un fenómeno natural e identificar variables dependientes e independientes; así como, leyes cuantitativas y el registro de las mismas. Observar y describir cambios presentes a corto plazo. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tomar una media velada y en la parte cerrada verterle alpiste y luego adicionar una porción mayor de aserrín. Mezclar y cerrar, de manera que se forme la cara del muñeco. Adicionalmente, decorarlo, a fin de representar el rostro.</li> <li>• En un momento posterior a la elaboración, los estudiantes deben llevar el muñeco a su casa, hidratarlo diariamente y registrar las observaciones.</li> <li>• Ocho días después de la elaboración, los estudiantes deben llevar el muñeco a clase, así como los registros realizados y las conclusiones obtenidas.</li> </ul> | Estudiar procesos de cambio y variación; así como la conceptualización de dependencia e interdependencia en fenómenos naturales. |

**Tabla 4. Actividad. Muñeco de pelos.**

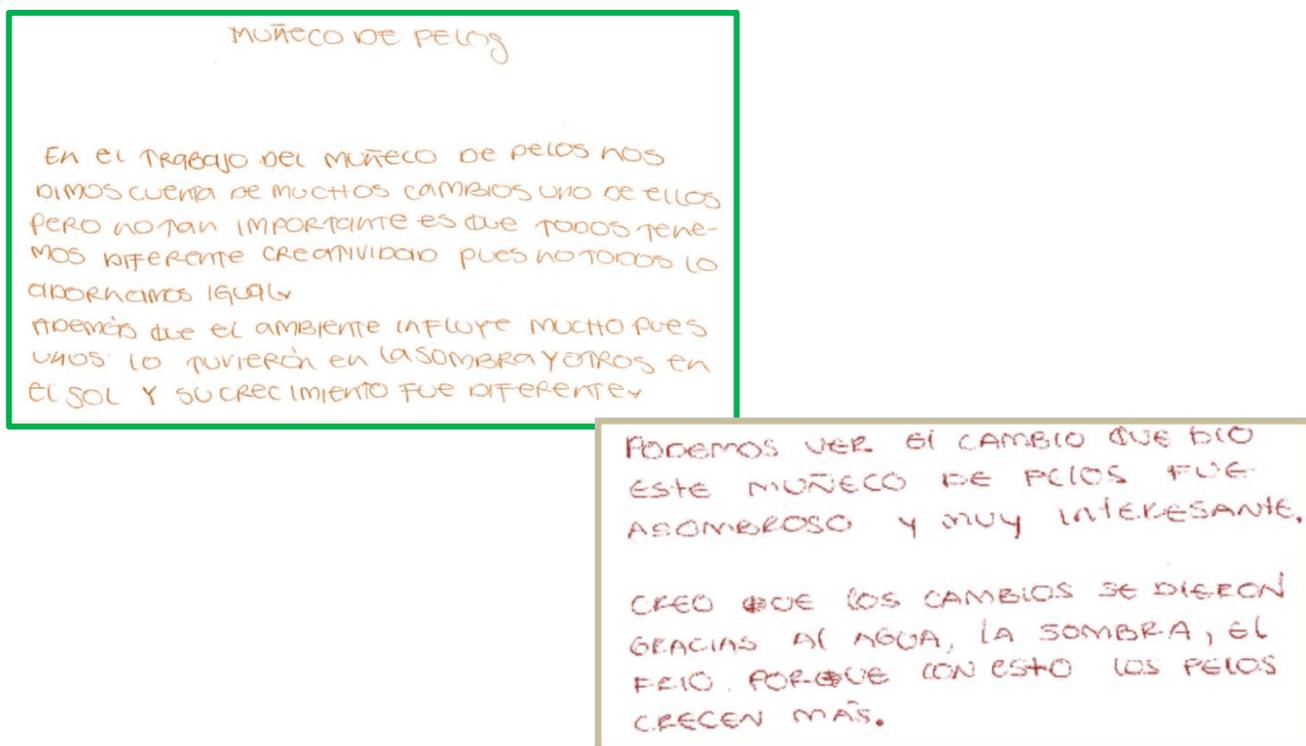


Ilustración 5. Conclusiones, Muñeco de Pelos. Marcela y Jorge. Marzo 9 de 2010.

En esta segunda fase de las actividades, propusimos también el análisis de un video titulado *Home* (Bertrand, 2009), el cual trata de un documental con una visión de un mundo cambiante, un mundo lleno de recursos, en el que los seres humanos hemos sido y seguiremos siendo protagonistas de grandes transformaciones. En el documental se llama la atención acerca del agotamiento de los recursos naturales de nuestro planeta, especialmente de recurso hídrico.

| ANÁLISIS DEL DOCUMENTAL <i>HOME</i>  |  |  |
|--|--|--|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad  |
| Identificar cambios en la naturaleza, como producto de la intervención de los seres humanos en el uso de recursos naturales, especialmente, el agua. | <ul style="list-style-type: none"> <li>Proyectar el documental <i>Home</i>, a toda la clase.</li> <li>Reflexionar y analizar el documental.</li> </ul> | Identificar variables de tipo cualitativo y establecer relaciones entre ellas. |

Tabla 5. Análisis del documental *HOME*

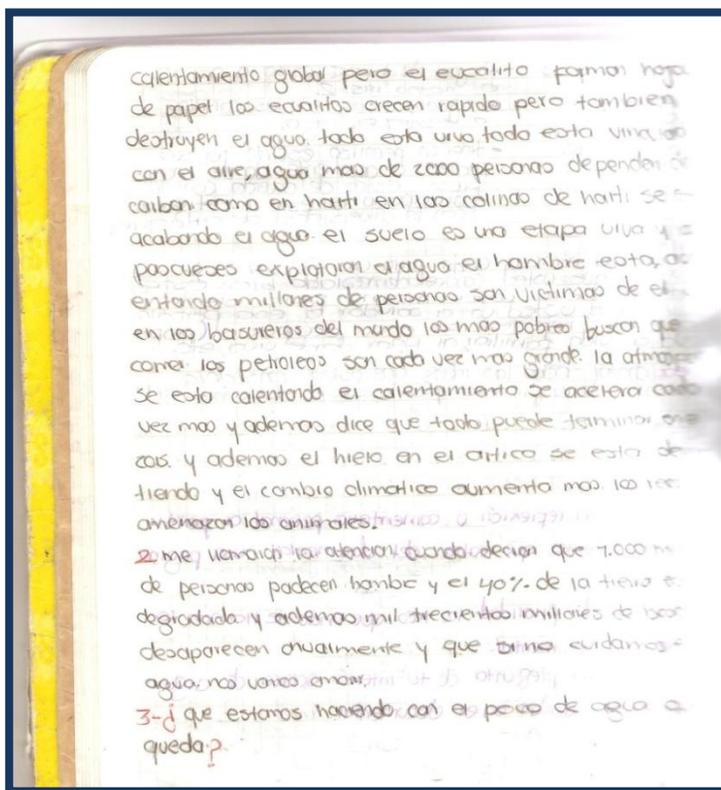


Ilustración 6. Análisis del documental *Home*, María Eugenia, Marzo 3 de 2010

En el tercer momento, propusimos a los estudiantes actividades focalizadas hacia el concepto de variable, ley y el abordaje de la *función* como dependencia y correspondencia; abordaje considerado desde distintas representaciones. Para este momento, consideramos como motivo, el uso racional del agua tanto en el hogar como en las instituciones educativas. Dicho motivo surgió a partir de la reflexión de los estudiantes, sobre el video *Home*; reflexiones, entre otras, sobre las consecuencias que estamos viviendo por el uso inadecuado de los recursos naturales, especialmente del agua, pertenecieron a este momento, actividades como:

- *Constitución de equipos de investigación.*
- *¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?*
- *Tarifas para servicio de acueducto en Medellín.*

- Rutina del baño diario y cantidad de agua utilizada para esta actividad en el hogar.
- Uso del agua en la industria.

En la actividad “Constitución de equipos de investigación”, acogimos la estrategia metodológica de clase de “*Investigaciones Matemáticas en el Aula*” en el sentido expuesto por Ponte, Brocardo y Oliveira (2003). Los estudiantes, a partir de los cuestionamientos suscitados al ver el documental *Home*, realizaron unas preguntas de manera individual, luego conformaron equipos de acuerdo a la afinidad de sus preguntas y también a nivel personal<sup>5</sup>. Cada equipo planteó nuevas preguntas, que posteriormente socializó a toda la clase. A partir de esta socialización, surgió el tema del uso del agua, como un motivo para movilizar las actividades posteriores. A continuación, presentamos la intencionalidad, las acciones y la necesidad de la actividad.

| CONSTITUCIÓN DE EQUIPOS DE INVESTIGACIÓN  |  |  |
|---|--|--|
| Intencionalidad   | Acciones   | Necesidad  |
| Organizar equipos de trabajo dentro del aula para generar dinámicas que posibiliten la objetivación de conceptos desde realidades cercanas a los estudiantes y a su prácticas sociales. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Retomar las preguntas planteadas desde la reflexión del documental <i>Home</i>.</li> <li>• Realizar un conversatorio sobre la investigación en la escuela y el por qué lo que los estudiantes emprenden, puede considerarse una investigación.</li> <li>• Conformar los equipos de investigación. Colocar en el tablero las preguntas planteadas y elegir sobre la que se investigará.</li> <li>• Seleccionar el nombre del equipo de investigación.</li> <li>• Diseñar un plan para el desarrollo de la investigación de cada equipo.</li> <li>• Presentar los proyectos de los equipos de investigación.</li> </ul> | Emplear las <i>Investigaciones Matemáticas en el Aula</i> , como generadoras de dinámicas en el aula de clase, que posibilitan la objetivación de conocimientos desde una participación activa de los estudiantes. |

Tabla 6. Actividad. Constitución de equipos de investigación

<sup>5</sup> Los nombres de los equipos de investigación constituidos en la Institución Educativa Rural el Hatillo fueron: Los Lunáticos, Las Conservadoras del Planeta, Las Ecológicas, SEJAS, Las Detectivas de la Naturaleza, Los Mackieavelicos, Los Mineralistas, Los Biodiversos y Las Imaginarias.

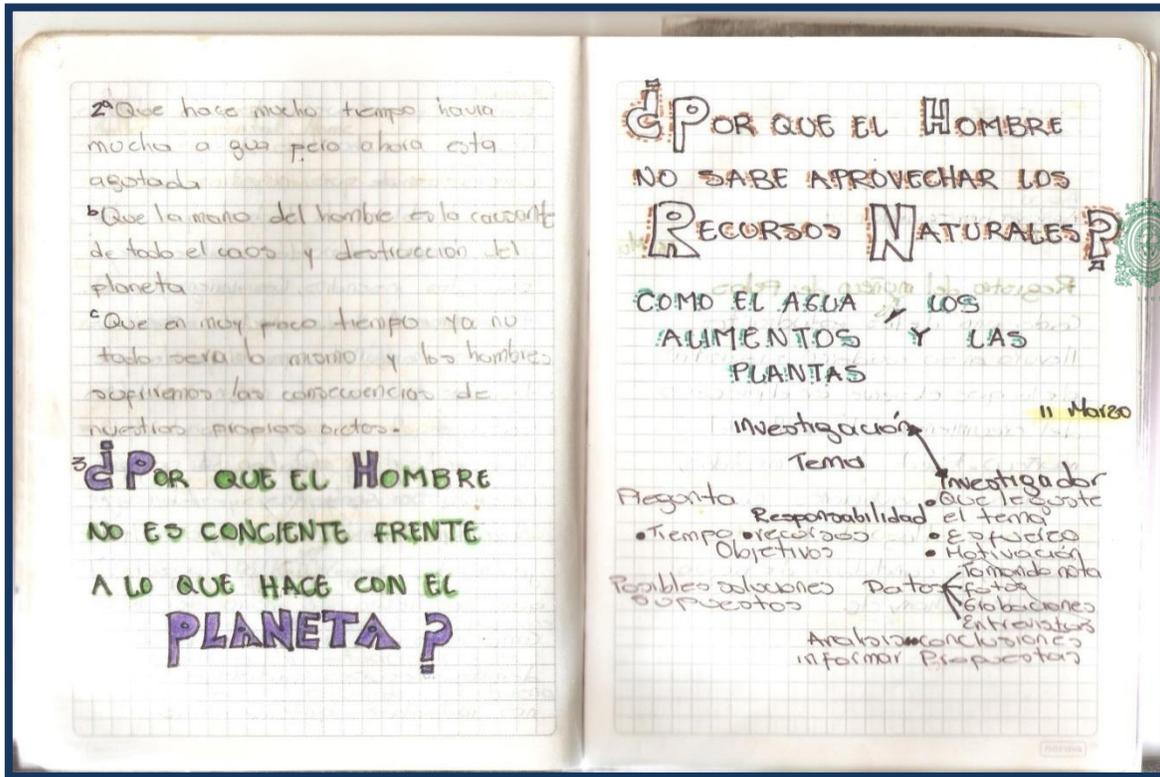


Ilustración 7. Constitución de investigación, Elizabeth, Marzo 11 de 2010

La segunda actividad de este tercer momento la titulamos: ¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes? Sus elementos constitutivos planteados por las maestras investigadoras, fueron:

| ¿CUÁNTA AGUA NOS GASTAMOS CEPILLANDONOS LOS DIENTES  |   |   |
|--|---|---|
| Intencionalidad  | Acciones  | Necesidad   |
| Organizar los datos obtenidos en el cepillado de dientes, de modo que se posibilite una mejor visualización para una reflexión sobre el uso del agua en el momento del cepillado dental. | <ul style="list-style-type: none"> <li>En sus hogares los deben tomar medidas y registros del agua que se consume en un día en el cepillado de los dientes, de toda la familia.</li> <li>Compartir en la clase los resultados de la tarea anterior.</li> <li>Como parte de esta actividad, los estudiantes deben resolver con su equipo de investigación, un taller propuesto por las maestras.</li> <li>Posteriormente, socializar las reflexiones e inquietudes surgidas al interior de cada equipo.</li> </ul> | Identificar variables que intervienen en el gasto de agua en el cepillado de los dientes y sus posibles relaciones. |

Tabla 7. Actividad. ¿Cuánta agua nos gastamos cepillándonos los dientes?



## ¿Cuánta Agua Gastamos Cepillándonos los Dientes?



De acuerdo a la actividad de la observación y registro del cepillado de los dientes, resuelve con tu grupo de investigación los siguientes puntos.

1. Reflexiona acerca de la realización de la actividad en mención, y de las observaciones y registros obtenidos.
2. Compara los resultados obtenidos.
3. ¿Qué cosas se midieron o se contaron?
4. ¿Las cosas contempladas en el punto anterior, fueron las mismas en cada una de las familias?, ¿por qué?
5. ¿De qué depende que se desperdicie una mayor o menor cantidad de agua?
6. Construye una tabla donde se registren los siguientes datos:  
Nombre de la familia.  
Número de integrantes de la familia.  
Litros de agua derrochada en promedio por día.
7. De acuerdo a la tabla que construiste en el punto anterior, responde:  
¿Cuál es el gasto de agua correspondiente a cada familia?  
¿Cuál familia presenta mayor gasto de agua?, ¿a qué crees que se deba?  
¿Se podría calcular el gasto de agua de una familia de 15 integrantes?, ¿por qué?
8. Considerando los registros del momento en que te cepillaste los dientes, así como los de cada uno de tus compañeros del equipo, construye una tabla donde se registre:  
Nombre de integrante del equipo.  
Tiempo promedio de la llave abierta por día.  
Número de litros de agua gastado por día.
9. De acuerdo a los resultados de la tabla anterior, responde:  
¿Existe una relación entre el tiempo en que se tiene la llave abierta y el agua gastada? Explica.  
¿Cuál fue el estudiante que menos agua gastó?, ¿Por qué?  
¿Cuáles consideran que son las principales causas del gasto del agua?



### Solución

1. El hacer esta actividad fue muy bueno porque así nos conscientizamos de toda el agua que se toma, consciente o inconscientemente.
2. Los resultados obtenidos son muy curiosos pues a Leidy le dio 7 tarros en 5 minutos, a Angela le dio 16 tarros en un minuto 33 segundos, a Andrea 8 tarros 3 minutos y a Estepa le dio 13 tarros 3 minutos 30 segundos.

3. Se midió el tiempo (min) y se contaron los tarros de agua. (litros, ml).

4. No fue lo mismo en todas las familias, porque en unas se demoraron mucho cepillándose y en otras muy poco, además por la cantidad de miembros de cada familia.

5. Depende de el uso que se le da a este mineral, cerrando o no cerrando la llave.

| Nombre de la familia | NFI | Litros de agua.                    |
|----------------------|-----|------------------------------------|
| Amariles Ochoa       | 5   | 1 litro $4\frac{1}{2}$ con 300 ml  |
| Hincapié Gil         | 5   | 3 litros                           |
| Jaramillo García     | 4   | 5 litros $4\frac{1}{2}$ con 300 ml |
| Roz Castañeda        | 6   | 2 litros                           |

7. La familia Amariles Ochoa gasta 1 litro  $4\frac{1}{2}$  con 300 ml.
  - La familia Hincapié Gil gasta 3 litros de agua.
  - La familia Jaramillo García gasta 5 litros  $4\frac{1}{2}$  con 300 ml.
  - La familia Roz Castañeda gasta 2 litros de agua.
- La familia Jaramillo García creemos que se debe a que un miembro de esta familia dejó la llave abierta.
  - Si, porque sean pocas o muchas se puede hacer el promedio y sacar la cantidad de agua que se gasta.

Ilustración 8. Taller. ¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?, Leidy, Abril 12 de 2010

Como tercera actividad del tercer momento, propusimos: “Tarifas para servicio de acueducto en Medellín” De la información extraída de la página de internet de la empresa prestadora del servicio de acueducto de Medellín, las maestras elaboramos un taller con base en la tabla de tarifa de cobros.

Los elementos de la actividad, fueron:

| <b>TARIFAS PARA SERVICIOS DE ACUEDUCTO EN MEDELLÍN</b>   |  |  |
|--|--|--|
| <b>Intencionalidad</b>   | <b>Acciones</b>  | <b>Necesidad</b>   |
| Interpretar la información suministrada sobre las tarifas que las Empresas Públicas de Medellín (EPM) tienen para el servicio de acueducto en la ciudad para el mes de mayo; y a partir de ella, analizar y representar las posibles relaciones existentes entre las variables involucradas. | <ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar una lectura grupal de la información.</li><li>• En forma individual, los estudiantes deben resolver el taller propuesto.</li><li>• Posteriormente, socializar los resultados e interpretaciones hechas por los estudiantes.</li></ul> | Identificar y representar cantidades variables, constantes y establecer relaciones de dependencia y correspondencia. |

**Tabla 8. Actividad. Tarifas de servicio de acueducto en Medellín**



Mayo 10 de 2010

Nombre: \_\_\_\_\_ grado: \_\_\_\_\_ grupo \_\_\_\_\_

**TARIFAS PARA SERVICIOS DE ACUEDUCTO EN MEDELLÍN  
TALLER**

En la siguiente tabla se presentan las tarifas que las Empresas Públicas de Medellín (EPM), tienen para el servicio de acueducto en la ciudad para el mes de mayo.

SUBDIRECCIÓN GESTIÓN REGULATORIA AGUAS

| SECTOR                    | ACUEDUCTO                       |   |                     |
|---------------------------|---------------------------------|---|---------------------|
|                           | Cargo Fijo<br>(\$/ Instalación) | Cargo por consumo ( \$ / m <sup>3</sup> ) |                     |
|                           |                                 | 0 -20 m <sup>3</sup>                      | > 20 m <sup>3</sup> |
| <b>Sector Residencial</b> |                                 |   |                     |
| <i>Estrato 1</i>          | 2,827.60                        | 399.85                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 2</i>          | 4,241.40                        | 599.77                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 3</i>          | 6,185.37                        | 874.67                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 4</i>          | 7,069.00                        | 999.62                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 5</i>          | 10,603.50                       | 1,499.43                                  | 1,499.43            |
| <i>Estrato 6</i>          | 11,310.40                       | 1,599.39                                  | 1,599.39            |
| <b>Comercial</b>          | 10,603.50                       | 1,499.43                                  |                     |
| <b>Industrial</b>         | 9,189.70                        | 1,299.50                                  |                     |
| <b>Oficial y Exenta</b>   | 7,069.00                        | 999.62                                    |                     |



1. ¿Identificas variables en la información anterior? En caso afirmativo, ¿cuáles son? Justifica tu respuesta.
2. ¿Qué significado tiene el cargo fijo?
3. Si en una casa el consumo de un mes es de 0m<sup>3</sup> ¿Cuánto dinero les corresponde pagar a EPM en ese mes, sus integrantes?
4. ¿Cuánto dinero les corresponde pagar a las familias que consuman 10m<sup>3</sup> en cada uno de los estratos?
5. Hagamos unos redondeos para el estrato 1. Supongamos que el cargo fijo es de \$3000; que la tarifa de 0 - 20m<sup>3</sup> es \$400 y que la tarifa de > 20m<sup>3</sup> es \$1000.

Considerando los redondeos anteriores, completa la siguiente tabla de cobros para el mes de mayo de 2010.

| Volumen de agua en $m^3$ | Valor a pagar por el servicio de agua mayo de 2010 |
|--------------------------|--|
| 0                        |  |
| 1                        |  |
| 12                       |  |
| 19                       |  |
| 20                       |  |
| 21                       |  |
| 25                       |  |
| 30                       |  |

6. Después de completar la tabla anterior, responde:

- ¿Identificas variables en la información anterior? En caso afirmativo, ¿cuáles son?, ¿hallas dependencia entre ellas? Explica.
- ¿Podrías representar gráficamente los datos de la tabla anterior? En caso afirmativo, representálos.
- ¿Piensas que se podría hallar una expresión algebraica para representar los datos de la tabla anterior? En caso afirmativo, ¿cuál sería?

TARIFA MAYO 2010 MONEDA \$

1. Yo si identifico variables por ejemplo el cargo fijo varia según el consumo y el costo al igual que el cargo por consumo y son variables porque sus valores no son las mismas es decir varían.

2. El cargo fijo significa lo que le cobran a las personas por tener el servicio de acueducto instalado.

3. ESTADO

|    |          |
|----|----------|
| 1: | 3999.00  |
| 2: | 599.77   |
| 3: | 874.67   |
| 4: | 999.62   |
| 5: | 1,499.43 |
| 6: | 1,599.37 |

4. ESTADO

|    |          |
|----|----------|
| 1: | 3998.5   |
| 2: | 597.7    |
| 3: | 874.6    |
| 4: | 999.6    |
| 5: | 1,499.3  |
| 6: | 15,993.9 |

6.9. Yo si identifico variables por ejemplo en el valor a pagar por el servicio de agua, pues esto varia depende de los m<sup>3</sup> consumidos, son variables porque varían.

B.

● 0-3000 \$
 ● 30-33.000 \$

● 1-3400 \$
 ● 25- 28.200 \$

● 12- 7.800 \$
 ● 21- 24.000 \$

● 19-10.600 \$
 ● 30- 33.000 \$

● 20- 11.000 \$

C.  $M, h + r = a$

$M = m^3$   
 $h =$  TARIFA  
 $r =$  CARGO FIJO  
 $a =$  VALOR A PAGAR

Ilustración 9. Taller, Tarifas para Servicios de Acueducto en Medellín. Marcela, Febrero 16 De 2010

“Rutina del baño diario y cantidad de agua utilizada para esta actividad en el hogar”, fue la cuarta actividad del tercer momento. A los estudiantes se les pidió calcular la cantidad de agua que su familia gastaba en un día en la actividad del baño diario; ellos realizaron en sus casas unas observaciones y mediciones, para luego compartir sus resultados con toda la clase y realizar un taller propuesto por las maestras como parte de esta actividad.

| <b>RUTINA DEL BAÑO DIARIO Y CANTIDAD DE AGUA UTILIZADA PARA ESTA ACTIVIDAD</b>   |   |  |
|--|---|--|
| <b>EN EL HOGAR</b>   |   |  |
| <b>Intencionalidad</b>   | <b>Acciones</b>   | <b>Necesidad</b>   |
| Establecer desde una práctica social relaciones de dependencia, desde variables que los mismos estudiantes reconozcan de manera natural. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los estudiantes en sus hogares deben realizar mediciones aproximadas con respecto a la cantidad del agua que gasta la familia en la rutina del baño diario en un día.</li> <li>• Llevar a la clase los resultados de la observación.</li> <li>• Reunidos en los equipos de investigación, los estudiantes deben desarrollar un taller propuesto con el motivo del agua que se consume en la rutina del baño diario.</li> <li>• Socializar a todo el grupo de algunas conclusiones de toda la actividad.</li> </ul> | Identificar variables cualitativas y cuantitativas, además de relaciones de dependencia. |

**Tabla 9. Actividad Rutina del baño diario**



Institución Educativa Rural El Hatillo



Proyecto de investigación: "El conocimiento matemático desencadenador de interrelaciones en el aula de clase"  
Proyecto de investigación: "Construcción del concepto de función en estudiantes de noveno grado: Un abordaje sociocultural"

Abril 13 de 2010

### OBSERVACIÓN: RUTINA DEL BAÑO DIARIO Y CANTIDAD DE AGUA UTILIZADA PARA ESTA ACTIVIDAD EN EL HOGAR

1. Conversar con tus compañeros acerca de los resultados de la observación sobre el consumo de agua utilizada por los integrantes de cada hogar para el baño diario. Explicar las estrategias que utilizaron para calcular la cantidad de agua utilizada por cada persona.



2. Organizar los resultados de todas las observaciones en un solo registro.
3. ¿En cuál hogar se gastó más agua en la actividad de bañarse?, ¿por qué?
4. ¿En cuál hogar se gastó menos agua en la actividad de bañarse?, ¿por qué?

5. ¿De qué depende el mayor o menor gasto de agua de una familia completa en el caso del baño diario?

6. De acuerdo a las observaciones de todo el equipo de investigación, ¿cuál fue la persona que más agua gastó para bañarse?

7. De acuerdo a las observaciones de todo el equipo de investigación, ¿cuál fue la persona que menos agua gastó para bañarse?

8. ¿De qué depende el mayor a menor gasto de agua de una persona en el caso del baño diario?

9. Calcular la cantidad de agua que una familia de 12 personas utiliza para bañarse.



10. ¿Cuáles fueron las cosas que se contaron o midieron en este proceso de observación?

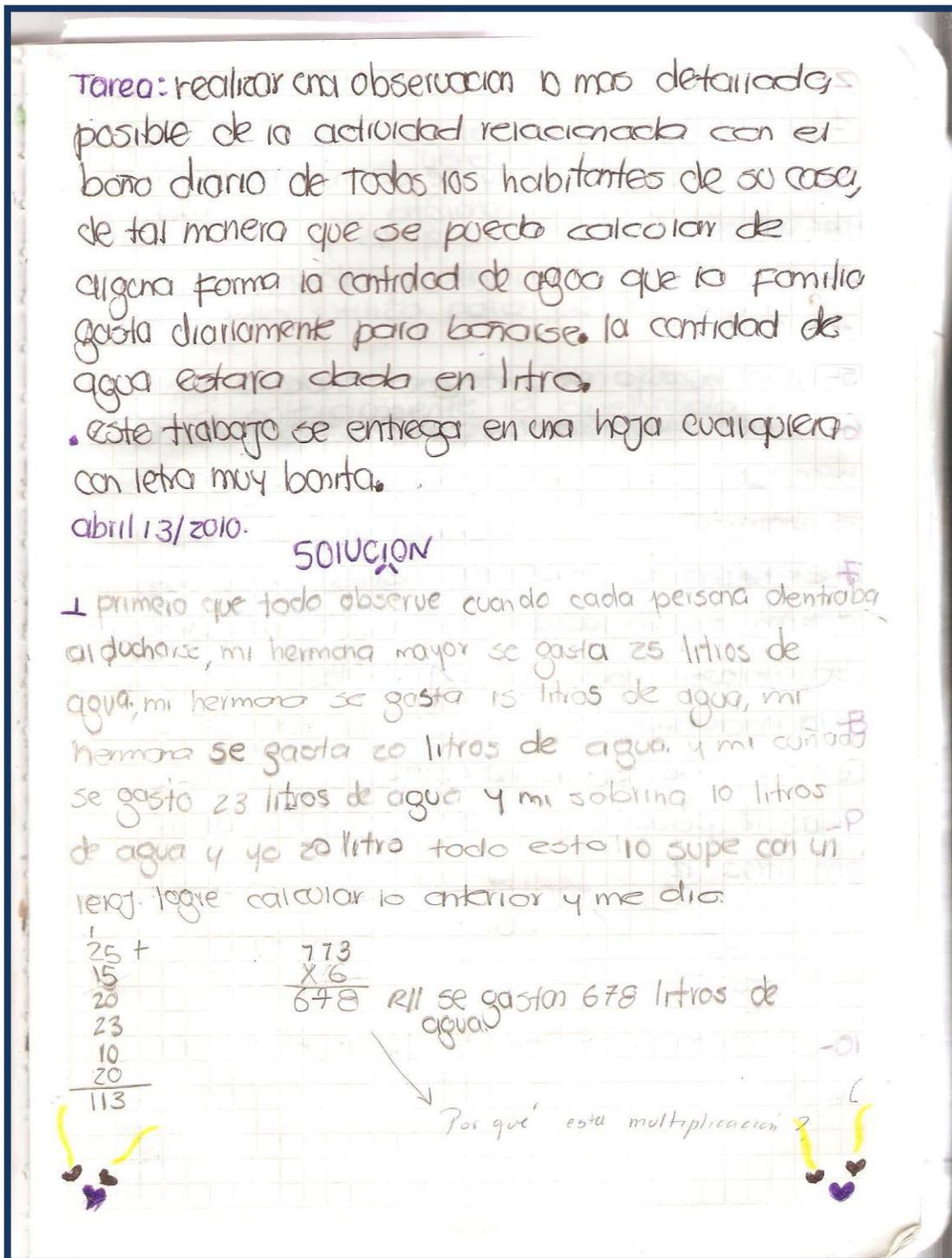


Ilustración 10. Actividad del baño diario. María Eugenia, abril 13 de 2010

La quinta actividad de este tercer momento de nuestro trabajo de campo, la titulamos “Uso del agua en la industria”. Los estudiantes de uno de los equipos de investigación constituidos en una de las clases anteriores, realizaron consultas y observaciones acerca del agua contaminada por causa del uso industrial. A partir de este motivo, el equipo expuso a la clase y a las maestras, además propusimos un taller.

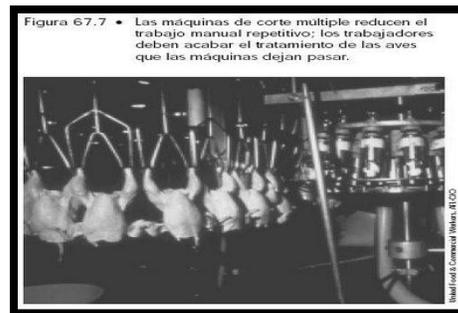
| <b>USO DEL AGUA EN LA INDUSTRIA</b>   |  |  |
|---|--|--|
| <b>Intencionalidad</b>  | <b>Acciones</b>  | <b>Necesidad</b>   |
| Establecer desde una práctica social, relaciones de dependencia y correspondencia entre variables cualitativas y cuantitativas. | <ul style="list-style-type: none"><li>• Observación en una industria por parte de uno de los equipos de investigación conformados en clase y socialización de las observaciones a toda la clase.</li><li>• Realizar un taller sobre el agua de uso industrial.</li></ul> | Fortalecer el reconocimiento de variables cualitativas y cuantitativas; así como de relaciones de dependencia y correspondencia. |

**Tabla 10. Actividad. Uso de agua en la industria**

En la página siguiente, presentamos el taller propuesto para esta clase.

## EL AGUA EN EL USO INDUSTRIAL

1.



1. En los gráficos aparecen dos fábricas o industrias, ¿En cuál de ellas gastan más agua en sus labores diarias?, ¿Por qué?
2. En una fábrica como TINTURAS Y TELAS, ¿qué relaciones se establecen entre el agua que entra a la fábrica proveniente del acueducto y el agua que sale como residuo industrial?
  - a. Si las empresas requieren más agua que los hogares para el desarrollo de sus actividades diarias, ¿cuáles deberían ser las **funciones** de las empresas con respecto al cuidado del agua?
3. Leer atentamente la siguiente nota:
  - a. *La industria textil utiliza el agua muy intensivamente. El agua se usa para limpiar la materia prima y para muchos pasos de limpieza con agua durante toda la producción. El agua residual producida tiene que ser limpiada de grasas, aceites, colores y otros productos químicos, que son usados durante las diversas etapas de la producción.*
  - b. *El proceso de limpieza depende del tipo de agua residual (no todas las plantas aplican los mismos procesos de producción) y de la cantidad de agua usada. Asimismo, no todas las plantas utilizan los mismos procesos químicos, especialmente empresas con un estándar especial (ambiental) intentan limpiar el agua usada en todos los procesos de producción. Por tanto los conceptos de tratamiento del agua pueden diferir unos de otros.*
  - c. *Es bastante difícil definir un estándar de calidad general para el reciclaje del agua de la industria textil debido a los diferentes requerimientos de cada fibra (seda, algodón,*

poliéster, etc.), a los diferentes procesos textiles (por ejemplo fregado, teñido, lavado, etc.) y a las diferentes calidades requeridas para la tela final.

<http://www.lennotech.es/reciclaje-agua-industria-textil.htm> Tomado el Abril 19 de 2010

4. De acuerdo a la exposición hecha por los compañeros del grupo de investigación SEJAS y la lectura de la nota anterior, realizar un **diagrama** donde se muestren aquellas cosas que influyen o de las que depende el reciclaje o tratamiento del agua en una fábrica textil.
5. Los colegios no son industrias o empresas, pero de todas maneras requieren utilizar diariamente el agua.
  - ¿A quién le corresponde pagar el agua del colegio?
  - ¿A quién le corresponde velar por el buen uso del agua en el colegio?

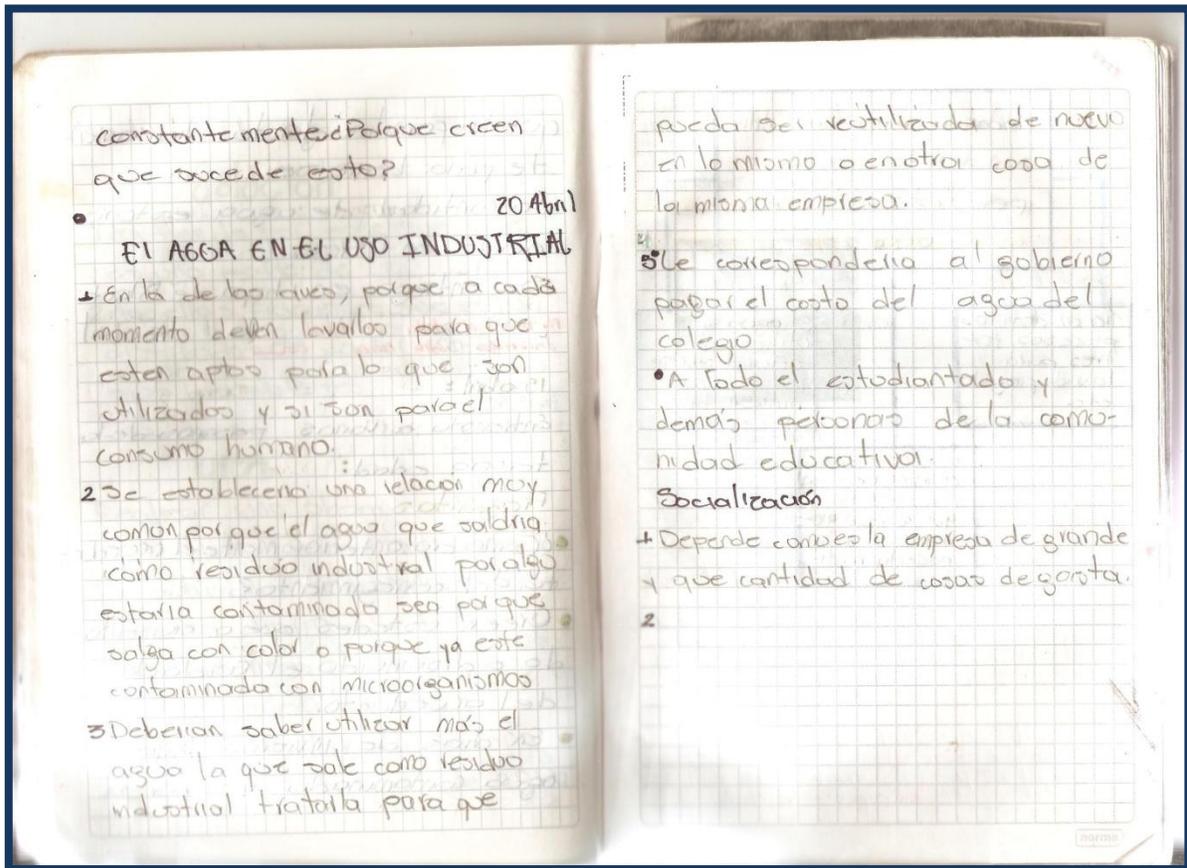


Ilustración 11. Uso de agua en la industria, Elizabeth, abril 20 de 2010

La cuarta fase de nuestras actividades, estuvo dirigida hacia la objetivación del concepto de *función* en términos del reconocimiento de éste, como instrumento para interpretar leyes cuantitativas, desde regularidades observadas en un mundo cambiante. En esta etapa propusimos actividades como:

- Tanque para almacenamiento de agua.
- Un nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia.
- El agua de consumo para el hogar.
- ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?
- ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

La primera actividad de esta cuarta fase la titulamos: “Tanque para almacenamiento de agua”. Esta actividad constó de un sólo taller, en el cual propusimos a los estudiantes establecer variaciones entre magnitudes, como se indica en el respectivo taller que presentaremos, después de la siguiente tabla.

| TANQUE PARA ALMACENAMIENTO DE AGUA   |   |   |
|--|---|---|
| Intencionalidad  | Acciones  | Necesidad   |
| Identificar relaciones de medida entre las magnitudes longitud y volumen, en una situación de variación. | <ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar en equipo el taller propuesto.</li><li>• Compartir los resultados con toda la clase.</li></ul> | Reconocer, representar y explicar leyes cuantitativas desde situaciones de variación. |

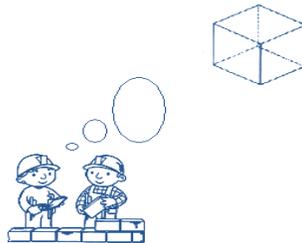
Tabla 11. Actividad. Tanque para almacenamiento de agua



Nombre: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ Equipo \_\_\_\_\_

### Tanque para Almacenamiento de Agua

Se requiere diseñar un tanque de base cuadrada para almacenamiento de agua en el barrio El Raizal. Se desea saber la variación del área de su base, cuando el lado toma diferentes valores.



Para el diseño se utiliza la siguiente tabla, la cual debes completar.

| Lado (m) | Área(m <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------------------|
| 0        |                       |
| 0,5      |                       |
| 1        |                       |
| 1,5      |                       |
| 2        |                       |
| 2,5      |                       |
| 3        |                       |
| 3,5      |                       |
| 4        |                       |

De acuerdo a la información dada:

1. Identifica la variable independiente. Justifica tu respuesta.
2. En esta situación, ¿podría decirse que una variable, está en **función** de la otra? ¿Por qué?
3. Realiza la representación gráfica de la relación entre las variables, si consideras que es posible.
4. ¿Cuántos valores de área le corresponden a cada lado? Explica.
5. ¿Piensas que se podría hallar una expresión algebraica que represente la relación entre las variables? Si es así, ¿cuál sería?
6. ¿La expresión que hallaste, representa la función que identificaste en el segundo punto? Explica.

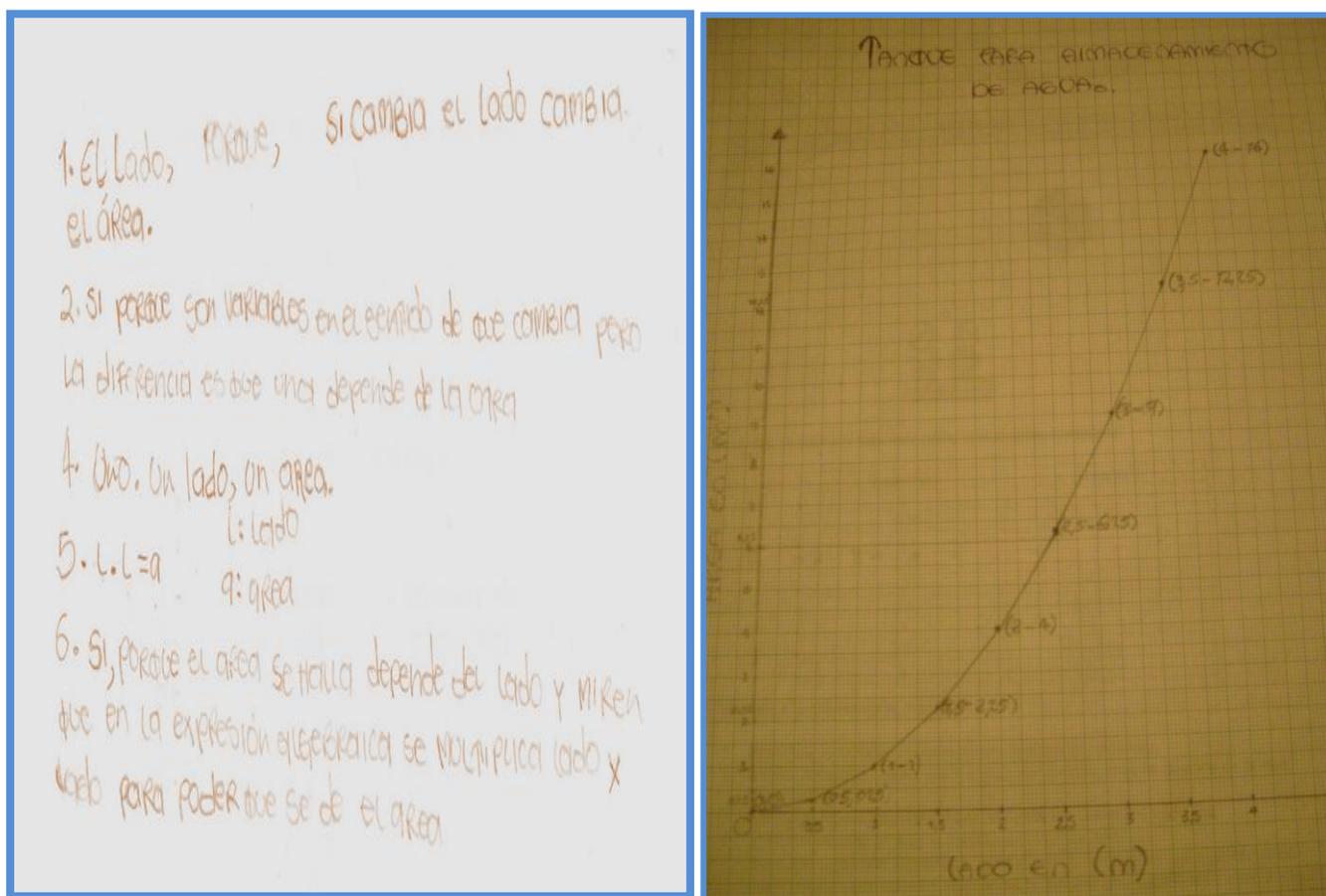


Ilustración 12. Tanque para el almacenamiento de agua, Taller realizado por Marcela. Mayo de 2010

A continuación presentamos la segunda actividad del cuarto momento, titulada: “Un nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia”. Con base a una noticia de un periódico local, donde se mencionaba la posibilidad de un nuevo sistema de cobro del servicio de agua en Colombia, planteamos en esta actividad, un taller para resolver y discutir en clase.

| NUEVO CRITERIO PARA EL COBRO DEL AGUA EN COLOMBIA  |  |   |
|--|--|---|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad   |
| Desde una situación práctica, identificar el tipo de correspondencia que se puede establecer entre la variación de un volumen que se relaciona con un costo. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Leer atentamente la noticia propuesta en el taller.</li> <li>• Realizar en equipo el taller propuesto.</li> <li>• Compartir los resultados con toda la clase.</li> <li>• Realizar representaciones tabulares y gráficas del costo con relación al volumen.</li> </ul> | Reconocer, representar y explicar leyes cuantitativas desde situaciones de variación. |

Tabla 12. Actividad. Nuevo criterio para el cobro de agua en Colombia



Institución Educativa Rural El Hatillo

Abril 29 y 30 de 2010



El Tiempo, Diciembre de 2009

Analicemos este reporte del periódico Bogotano el Tiempo.

A partir del próximo año, los colombianos no podrán desperdiciar ni un metro cúbico de agua potable en las viviendas u oficinas, a menos que quieran pagar más. ... Todo esto debido al anuncio que acaba de hacer el Ministerio de Ambiente y la Comisión de Regulación de Agua (CRA), en el sentido de que el despilfarro de agua se castigará con el pago doble de la tarifa por cada metro cúbico de agua que se derroche. La CRA y el Viceministerio de Ambiente fijaron los límites de consumo mensual que cada familia podrá tener, según el clima de la ciudad donde viva: en tierra fría será 28 metros cúbicos; en zona templada, 34 metros cúbicos y en clima caliente, 35.

... Por ejemplo, si hasta ahora pagaban 2.210 pesos como cargo básico en una ciudad fría como Bogotá, con la nueva medida sancionatoria le doblarán el cobro a 4.420 pesos por cada metro cúbico que exceda los 28 metros cúbicos fijados como tope.

LUCEVÍN GÓMEZ E.  
[http://www.eltiempo.com/verde/responsabilidad/sanciones-para-quienes-desperdicien-el-agua\\_6843269-1](http://www.eltiempo.com/verde/responsabilidad/sanciones-para-quienes-desperdicien-el-agua_6843269-1)

**TALLER**  
**NUEVO CRITERIO PARA EL COBRO DEL AGUA EN COLOMBIA**

En el desarrollo de sus investigaciones, varios equipos se han interesado bastante por el consumo de agua en los hogares y la manera como se utiliza, teniendo como base estas experiencias de investigación y la lectura anterior desarrollar los siguientes puntos del taller:

1. ¿Qué opinan de la medida establecida por el gobierno con respecto al consumo de agua en los hogares?
2. En la lectura se habla del consumo de agua en metros cúbicos, y nosotros comúnmente hablamos también de litros, ¿qué relación existe entre la medida en metros cúbicos y la medida en litros?
3. En ciertas oportunidades para la gente es más claro cuando las informaciones son dadas en gráficos, propongan una representación gráfica para informara a la comunidad:  
Límites de consumo mensual que cada familia podrá tener, según el clima de la ciudad donde viva: en tierra fría será 28 metros cúbicos; en zona templada, 34 metros cúbicos y en clima caliente, 35.
4. Supongamos que en Barbosa se implemente esta medida y que se cobra por metro cúbico de agua potable \$500
  - a. ¿Cuánto paga una familia que consume  $15 m^3$ ?
  - b. ¿Cuánto paga una familia que consume  $20,5 m^3$ ?
  - c. ¿Cuánto paga una familia que consume  $34 m^3$ ?
  - d. ¿Cuánto paga una familia que consume  $35 m^3$ ?
  - e. ¿Cuánto paga una familia que consume  $40 m^3$ ?
  - f. ¿Cuánto paga una familia que consume  $15 m^4$ ?
5. ¿De qué depende el costo del servicio de agua al mes de una familia ~~Medellinense?~~ ~~Barbocense?~~ ~~Medellinense?~~  
El cuidado del agua se está cobriendo tarea de todos.

Ilustración 13. Taller de la Actividad. Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia

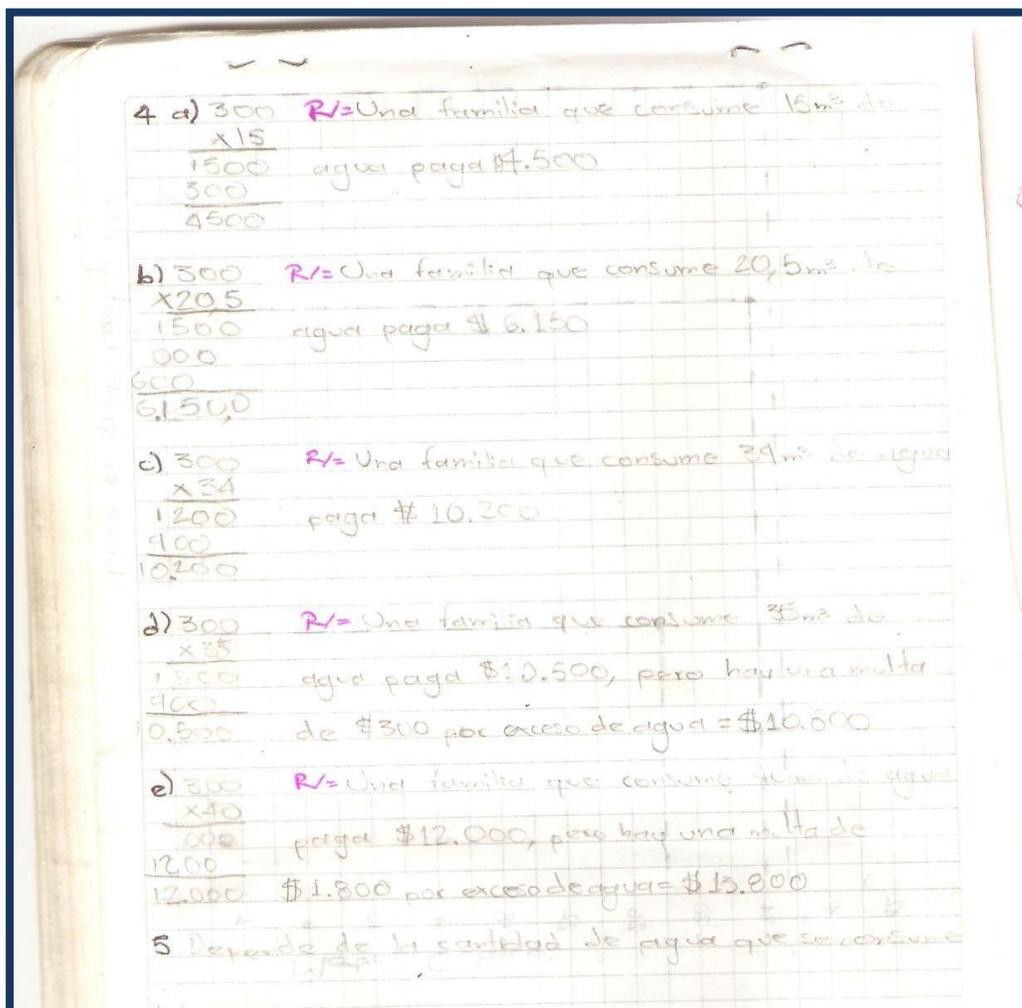


Ilustración 14. Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, Juan Felipe, Abril 29 de 2010

La tercera actividad del cuarto momento, la titulamos: “El agua de consumo para el hogar”. Esta actividad surgió, porque uno de los equipos de investigación de la clase realizó, en la casa de cada integrante, una observación práctica para dar un valor aproximado de la cantidad de agua que se gastaban en cada familia, en un día en se realizaban todos los quehaceres del hogar, para luego calcular el costo en pesos. Este cálculo se realizó con base al criterio para cobrar el agua en su localidad; indagación previamente hecha con los estudiantes.

| EL AGUA DE CONSUMO PARA EL HOGAR   |  |   |
|--|--|---|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad   |
| Establecer correspondencias desde la interpretación de una regla cuantitativa establecida. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Consultar la regla o criterio para el cobro del agua en la localidad.</li> <li>• Realizar las observaciones en cuanto al consumo de agua, en un día, en cada hogar.</li> <li>• Realizar en equipo el taller propuesto.</li> <li>• Compartir los resultados con toda la clase.</li> <li>• Realizar representaciones tabulares y gráficas del costo con relación al volumen.</li> </ul> | Reconocer, representar y explicar leyes cuantitativas desde situaciones de variación. |

Tabla 13. Actividad. Agua de consumo para el hogar



Proyecto de Investigación "El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase"

Institución Educativa Rural El Hatillo

Mayo 4 de 2010



Nombre: Juan Felipe Castañón

Grado: 9º 2 grupo

EL AGUA DE CONSUMO PARA EL HOGAR

**Intencionalidad.**  
Aplicar desde una situación cotidiana el concepto de correspondencia desde variables de tipo cualitativo y cuantitativo, e introducir de manera intuitiva el concepto de dependencia entre variables cuantitativas.

1. Teniendo como base el boletín n°1 de abril de 2010 de la asociación de usuarios del acueducto y alcantarillado del Hatillo, realizar un cálculo aproximado de lo que las familias de las compañeras del equipo "Las Ecológicas deberían" pagar mensualmente, si el consumo promedio diario fuera como el presentado por ellas en clase según su observación.

| Las Ecológicas  | Consumo de agua diario por familia.<br>Litros | Consumo mensual<br>Litros | Consumo mensual<br>Metros cúbicos | Costo del consumo mensual. |
|-----------------|---|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| Lina Sosa       | 19.000  | 570.000                   | 570                               | 439.000                    |
| Lina González   | 360   | 10.800                    | 108                               | 11.000                     |
| Yury Corrales   | 340   | 10.200                    | 102                               | 11.000                     |
| Mariana Londoño | 133   | 3.990                     | 3,99                              | 11.000                     |

Realizar los procedimientos en el cuaderno de notas

2. ¿Qué preguntas te surgen con respecto a la tabla de tarifas?, ¿qué cosas de dicho cobro no te son claras?. Es importante enunciar algunas para compartirlas con el personero.

Ilustración 15. Agua de consumo para el hogar, Juan Felipe, mayo 4 de 2010

La cuarta actividad del cuarto momento del trabajo de campo se basó en las mediciones que un estudiante realizó acerca de una fuga de agua en una poceta del colegio. La canilla estuvo dañada un tiempo y el agua se desperdiciaba.

| ¿CUÁNTA AGUA SE MALGASTA EN UNA FUGA DE AGUA EN EL COLEGIO?  |   |   |
|--|---|---|
| Intencionalidad  | Acciones  | Necesidad   |
| Aplicar desde una situación cotidiana, el concepto de correspondencia desde variables cuantitativas. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Observar el uso de agua en las pocetas del colegio y elaborar los registros correspondientes.</li> <li>• Tomar datos precisos del agua desperdiciada, por posibles daños en las pocetas.</li> <li>• Resolver un taller alusivo a la posible fuga de agua hallada. Interpretación de la gráfica.</li> </ul> | Identificar variables y establecer relaciones entre ellas en términos de una posible ley cuantitativa identificada. |

Tabla 14. Actividad. ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio



*El conocimiento matemático: desencadenador de interrelaciones en el aula de clase*  
 Institución Educativa Deyral R. Flórez  
 Mayo 11 de 2010



Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_\_ grupo \_\_\_\_\_

### ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

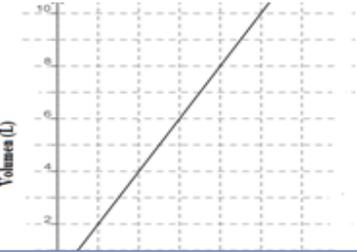
**Intencionalidad.**  
 Aplicar desde una situación cotidiana el concepto de correspondencia desde variables de tipo cuantitativo, e introducir el concepto de dependencia entre variables cuantitativas.

**Experiencia de investigación**



Sergio ha estado investigando cómo es el manejo de las canillas de las pocetas, y lavamos del colegio en relación con el desperdicio del agua cuando no se cierran bien las canillas o llaves.

Todo iba muy bien, pero el día 5 de mayo había una fuga de gran caudal en una poceta. Los estudiantes de 9º3 tomaron unos datos, eran preocupantes, y cuando Sergio, fue la situación había empeorado. A continuación representamos una aproximación de los datos que Sergio pudo tomar, y los representamos gráficamente.



1. ¿Qué interpretaciones te surgen a partir de esta gráfica?
2. ¿De qué depende la cantidad o volumen de agua desperdiciado en este caso?
3. ¿Que variables (que cosas cambian) aparecen en esta situación?
4. Debes explicar a tu familia la cantidad de agua desperdiciada en esta situación dependiendo del tiempo transcurrido, pero por medio de una tabla de datos. Diseña un ejemplo
5. ¿En una hora cuántos litros de agua se malgastan en esta fuga?
6. Explica una estrategia que te sirva para calcular el volumen de agua desperdiciado por causa este daño si te dan el tiempo.
7. Si llamamos V al volumen de agua en litros y T al tiempo en minutos. ¿Qué relación se puede establecer entre la cantidad (volumen) de agua desperdiciado y el tiempo transcurrido?

*Facilita a esta observación el agua se usará del baño y don Rubén el fontanero seleccionó el*



Ilustración 16. Taller de la actividad, ¿cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

• Por 1 min se fugan 2 l de agua  
 • Por 2 min se fugan 4 l de agua  
 2 Depende del caudal que se fugue, el tiempo durante la fuga y la agilidad de cerrar la canilla  
 3 Que todas las días no se desperdicia la misma cantidad de agua puede ser por el tiempo en que se cierra la fuga y también por la cantidad de agua que salga.

| 4 TIEMPO (min) | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| A              | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20  |
| g              | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| u              | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40  |
| a              | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| D              | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60  |
| e              | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| s              | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80  |
| p              | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| e              | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |
| r              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| d              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| i              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| c              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| i              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| a              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| d              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| a              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |

\*EL CID\*

Ilustración 17. ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, Juan Felipe, mayo 11 de 2010

El cuarto momento concluyó con una quinta actividad que llamamos: “¿Cuánto cuesta una fuga de agua en el colegio? Esta actividad es una continuación de la tercera y cuarta actividad de esta última fase, pues se tenía el registro de ciertos volúmenes de agua desperdiciada, así como una regla de cobro para determinar el costo de dicha agua; lo cual permitió establecer diferentes relaciones entre varias magnitudes.

| ¿CUÁNTO CUESTA EL AGUA QUE SE MALGASTA EN UNA FUGA DE AGUA EN EL COLEGIO?  |  |  |
|--|--|--|
| Intencionalidad  | Acciones   | Necesidad  |
| Aplicar desde una situación cotidiana el concepto de correspondencia desde variables cuantitativas, identificando relaciones de dependencia entre variables. | <ul style="list-style-type: none"> <li>Desarrollar por equipos el taller propuesto.</li> <li>Socializar los resultados del taller en toda la clase.</li> </ul> | Identificar variables y establecer relaciones entre ellas en términos de una ley cuantitativa, utilizando diversas representaciones. |

Ilustración 18. Actividad, ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

*"El conocimiento matemático: desconocido a través de interrelaciones en el aula de clase"*  
 Institución Educativa Rural El Hatillo  
 Mayo 18 de 2010

Nombre: María Eugenia López Grado: 6<sup>va.</sup>

¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?

**Intencionalidad.**  
 Aplicar desde una situación cotidiana el concepto de correspondencia desde variables de tipo cuantitativo, e introducir el concepto de dependencia entre variables cuantitativas.

En el taller anterior nos dimos cuenta que el volumen de agua que se va en un daño como el detectado por Sergio es grande. Ahora nos interesa estimar cuánto cuesta este daño, según las tarifas que ya conocemos para el servicio del agua en el Hatillo.

Según información dada por don Rubén el fontanero, las tarifas del servicio del agua está dada como se indica a continuación:

- $0 m^3 - 20 m^3$  se paga \$11000.
- Por cada  $m^3$  que supere los  $20 m^3$  se pagan \$500.
- Por cada  $m^3$  que supere los  $50 m^3$  se pagan \$800.

1. Recordemos que el daño en la poceta de agua detectado el 5 de mayo arrojaba 21 de agua por minuto. Completar el siguiente cuadro donde se relacionan el tiempo de fuga en el daño, el volumen de agua que sale y lo que costaría dicho daño.

| Tiempo  | Volumen (L) | Costo (\$) |
|---------|-------------|------------|
| 1 día   | 2.880 L.    | 77.000     |
| 5 días  | 14.400 L.   | 77.000     |
| 7 días  | 20.160 L.   | 77.000     |
| 8 días  | 230.40 L.   | 72.520     |
| 10 días | 28.800 L.   | 75.400     |
| 12 días | 34.560 L.   | 76.280     |
| 15 días | 43.200 L.   | 22.600     |
| 18 días | 52.800 L.   | 27.472     |
| 20 días | 57.600 L.   | 32.080     |
| 25 días | 72.000 L.   | 43.600     |
| 1 mes   | 86.400 L.   | 55.120     |
| 2 meses | 172.800 L.  | 124.240    |

2. Realizar un gráfico cartesiano que relacione el volumen de agua dependiendo del tiempo transcurrido.  
 3. Realizar un gráfico cartesiano que relacione el tiempo con el costo que debería pagarse por este daño según el tiempo indicado, suponiendo que la fuga no se hubiese arreglado.

Ilustración 19. ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, María Eugenia, mayo 18 de 2010

### **Sobre la Producción de Registros y Datos**

Nos referimos al término producción de datos y no recolección, ya que desde un abordaje sociocultural consideramos los datos no como algo estático, listo para recogerse, sino como algo que debe producirse conjuntamente, con los sujetos en cuestión. En los encuentros en el aula empleamos los siguientes instrumentos para la producción y registros de datos:

- Videograbaciones de la mayoría de las sesiones de clase.
- Registros de las notas de campo nuestras, en los que plasmábamos nuestras observaciones y reflexiones sobre las actividades desarrolladas en las sesiones.
- Registros de las producciones escritas de los estudiantes, sobre las actividades realizadas tanto en el aula de clase, como fuera de ella y en las salidas de campo.
- Entrevistas semi-estructuradas a los estudiantes protagonistas de la investigación, registradas en videograbación.

### **Sobre el Análisis de los Datos**

El análisis de los datos lo realizamos desde algunas acciones en las clases, asociados a las actividades propuestas en el aula y efectuando una triangulación entre los datos producidos, las notas de campo de las investigadoras y la teoría que sustenta la investigación. En este análisis tuvimos presente interpretar las interrelaciones que se tejen en el aula de clase, entre los sujetos participantes y entre ellos con el conocimiento matemático, al desarrollar situaciones intencionadas hacia la objetivación del concepto de *función*.

Las actividades analizadas no fueron las mismas para ambas instituciones, debido a la diferencia dada por los contextos de cada una. Así, por ejemplo, mientras que para los

estudiantes de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera cobró un gran significado la actividad “Muñeco de Pelos” como fenómeno que representaba un cambio natural de una forma novedosa, no lo fue para los estudiantes de la Institución Educativa Rural El Hatillo.

De los cuatro momentos que referenciamos en nuestro recorrido metodológico, el cual titulamos como “El Norte”, emergieron tres categorías. La primera categoría fue respecto a la fluencia, llamada “No todo se va a quedar Igual”; la segunda, respecto al concepto de variable e interdependencia, llamada “Todo Está Vivo, Todo Está Vinculado, El Aire, El Agua...”; y, la tercera, respecto a la *función* llamada “*Función*: Instrumento para interpretar leyes cuantitativas”. Los nombres de las dos primeras categorías los dimos de acuerdo a expresiones textuales de algunos de los estudiantes protagonistas, que consideramos representativas de la tesis que queríamos sustentar en cada categoría. En esa misma línea, las investigadoras dimos el nombre a la tercera categoría.

Atendiendo a nuestros marcos teóricos y metodológicos, consideramos importante realizar un “tejido”, para el análisis, donde se diera cuenta de una forma natural del proceso de objetivación del concepto de *función*, desde las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* propuestas en el aula de clase, y un recorrido histórico del concepto de *función* hasta llegar a constituirse para la humanidad como una herramienta para interpretar leyes cuantitativas. Pues consideramos que desde dicho “tejido”, la vida de los seres humanos es constitutiva en la objetivación de conceptos. Así, el aula de clase en esta investigación, fue una portadora de vida y por ende, las subjetividades de los estudiantes, allí tejidas, se tornaron en aspectos cruciales para ser analizados.

### “NO TODO SE VA A QUEDAR IGUAL”

*No todo se va a quedar igual...el cambio es muy importante en nuestras vidas y más cuando se cambia para bien. Cada día que pasa es un cambio más, no siempre hacemos las mismas cosas. Uno no siempre va a estar caminando por el mismo lugar ni siempre va a tener lo mismo o a hacer lo mismo  
(Marcela)<sup>6</sup>*

Hay un instante de nuestra existencia, no sabemos cuándo, ni qué lo activa exactamente, en el cual nos damos cuenta que hemos cambiado, que vamos cambiando y que así seguiremos; en un continuo devenir. Y como seres humanos, dotados de una conciencia<sup>7</sup>, tenemos la capacidad de proyectarnos, ya que, como dice Bajtín (2004, p.28), “estamos dotados de un horizonte de futuro en el cual se reconoce la existencia de varias conciencias entre varios mundos con derechos iguales”. Dicho horizonte se constituye en el tiempo y el espacio, de manera individual y colectiva. A diferencia de los animales, somos capaces de mirarnos en un futuro, de ubicar nuestra vida y la de otros en un porvenir y de igual manera, tomamos elementos del presente y del pasado para visualizarnos en un después.

Pero en los seres humanos estos cambios no se dan de manera abrupta; hoy se es un bebé, mañana un infante, luego de un paso se llega a ser adolescente y cuando se cumpla exactamente 18 años, por ejemplo, se es mayor de edad. El devenir, como lo plantea Caraça (1984), es fluencia, un movimiento continuo que genera dichos cambios, pero no en el sentido de sustituir de golpe una cosa por otra, sino en el sentido de un movimiento natural.

---

<sup>6</sup> Expresión Marcela, socialización “Todo Cambia”, 22 de febrero de 2010)

<sup>7</sup> Retomamos el término de conciencia en el sentido de Davidov (1988, p. 42), como “la forma ideal, subjetiva en que al individuo se presentan sus relaciones sociales reales (la existencia real)”...Por medio de ella, el individuo reproduce “idealmente” las relaciones sociales, las cuales a su vez representa también “idealmente”, las necesidades, intereses y posiciones de los otros individuos con quienes interactúa. Este autor plantea lo ideal como el reflejo del mundo externo, en el plano interno, el cual es determinado socialmente.

La vida de cada ser humano es diferente; por tanto la manera de verla, sentirla y proyectarla depende de muchos factores que se relacionan entre sí. Las cosas cambian, las personas cambian, la naturaleza cambia, pero la manera de percibir y reconocer estos cambios, las relaciones presentes en ellos y los factores que los producen dependen de las circunstancias que rodean a cada objeto o sujeto, es decir del contexto. Este contexto es constituido, como dice Valero (2006, p. 54), “por las estructuras económicas, sociales, políticas y por los procesos históricos” en las que está inmerso el sujeto y que le dan un significado particular. Así, cada ser humano, de acuerdo al contexto al que pertenece, posee una forma particular de vivir y entender su realidad.

De acuerdo con Caraça (1984), todo se encuentra en continuo movimiento; nada es estático, todo se transforma. En ese sentido, nosotros mismos hacemos parte de ese cambio; nosotros mismos, desde y por el contexto del que hacemos parte, modificamos nuestra realidad. Así, hoy no somos los mismos de ayer; mañana no seremos los que somos hoy. Como lo expresa dicho autor, retomando al filósofo Heráclito de Éfeso: “El mundo está en permanente evolución: todas las cosas, a todo momento, se transforman; todo fluye, todo deviene” (Caraça, 1984, p. 110).

Desde una mirada histórico-cultural, este principio de cambio, movimiento y transformación es condición natural inherente al desarrollo social e individual. Las matemáticas, como fenómeno social, en tanto que son constituidas por condiciones concretas en un período socio-histórico concreto, no son inmunes a él; y, por ende, no pueden serlo los conceptos que éstas estudian. En ese sentido, consideramos que el concepto de *función*, desde Caraça (1984), aborda como uno de sus fundamentos, el

principio de cambio y movimiento. Es precisamente tal principio y el identificarlo en diferentes fenómenos, naturales y sociales, de acuerdo a nuestro modo particular de interpretar el mundo, la tesis central de la presente categoría.

En nuestro trabajo de investigación, identificamos el cambio y el movimiento en diferentes momentos del trabajo de campo, lo cual nos llevó a considerarlo como una categoría fundamental y emergente. Por lo tanto, esta categoría, que hemos llamado “No todo se va a quedar igual”, de acuerdo a una expresión hecha por una de las protagonistas de la investigación, la hemos considerado esencial en nuestro análisis.

La primera actividad que consideramos para el análisis en esta categoría fue en la Institución Educativa Rural el Hatillo. Esta actividad consistió en elaborar un ideograma en el cual los estudiantes plasmaron ideas acerca de quiénes son, quiénes han sido y cómo desean ser; es decir, sujetos en constante formación. En ese sentido, concordamos con Bajtín cuando expresa que: “(...) es imposible que uno viva sabiéndose concluido así mismo y al acontecimiento; para vivir es necesario ser inconcluso” (Bajtín, 2009, p. 20)

El reconocerse como un ser inconcluso es uno de los aspectos que consideramos importante abordar a través de la actividad del ideograma. Los estudiantes, al igual que todo ser humano, tienen la característica de ser sujetos inacabados; portadores de un pasado, un presente y ante todo, de un futuro soñado que les posibilita el construir y deconstruir nuevos caminos. Pero tales procesos de construcción y deconstrucción llevan en su cimiento la transformación permanente de sus miradas y, tal vez, de sus mismos sueños... En esa misma dirección, coincidimos con Valero (2006, p. 55), cuando expresa que el sujeto que aprende es más que “cabeza”, al referirse a que los estudiantes: “...son seres con

una existencia física y temporal, con sentimientos...” como lo queremos evidenciar desde las primeras actividades que propusimos a los estudiantes en el proceso de esta investigación.

En las tres representaciones gráficas de María Eugenia, Elizabeth y Juan Felipe aparecen escenas de la vida que cada uno quiso destacar. María Eugenia decidió hacer su ideograma grande, y de una cartilla seleccionó las imágenes para pegar, diferenciando en esta representación siete sucesos. El pasado lo relacionó con la representación de su casa y los juegos de la niñez; en el presente visualizó la idea de escuela; y para el futuro, mostró una casa en el campo con un sol resplandeciente. Su ideograma lo presentamos a continuación.



**Ilustración 20. Ideograma, María Eugenia, febrero de 2010**

Desde el comienzo de la actividad, María Eugenia le dio bastante importancia al aspecto estético de su ideograma. Por tal razón en la primera clase de esta actividad la vimos diseñando el marco y los adornos exteriores que le colocó; decidió hacerlo en dos hojas,



pensaba en tener un trabajo. Mediante los anillos y el bebé representó el deseo de casarse y tener hijos; los animales, su amor por el campo y las medallas, los triunfos en su vida.

Elizabeth, por su parte, destacó tres escenas en la representación gráfica. En la socialización con el grupo, ella explicó que la primera hacía referencia a la escuela y al

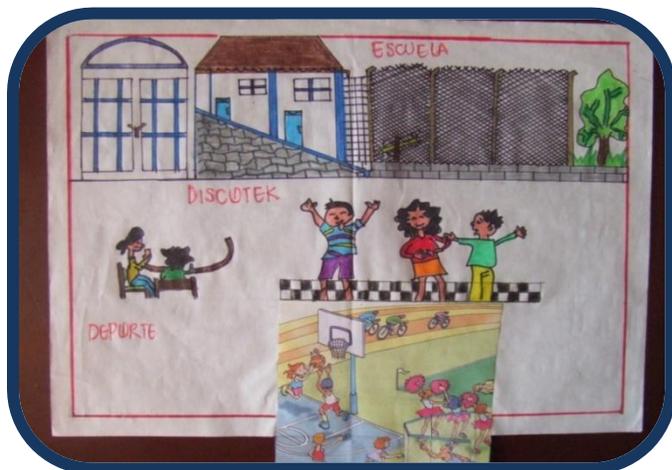


Ilustración 22. Ideograma de Elizabeth, febrero de 2010

colegio, los cuales consideró importantes porque ha pasado mucho tiempo de su vida en estos espacios, además porque conoció bastantes amigos. La segunda escena la relacionó con la discoteca, porque le gusta mucho bailar; y con la tercera, hizo referencia al deporte. Ella nos expresó su gusto por el baloncesto y

por montar en bicicleta, y cómo estas actividades también significaban el compartir con los amigos. Elizabeth escribió tres palabras clave en su ideograma: escuela, discoteca y deporte. En el momento de compartir su trabajo con el grupo trató de precisar sus enunciaciones desde estos tres términos.

La segunda actividad que consideramos, fue la correspondiente a la escucha y siguiente discusión de la canción “Todo Cambia”, de autoría del chileno Julio Numhauser (1982), en la versión de Mercedes Sosa, en la Institución Educativa Ramón Múnica Lopera. Consideramos como investigadoras, necesario proponer esta actividad para indagar si los estudiantes relacionaban los cambios que se presentan en sus propias vidas, con los cambios que acontecen en la naturaleza y la sociedad. Este momento lo consideramos en

ambas instituciones educativas, pues identificamos en él sucesos clave en la categoría emergente que estamos analizando.

En el espacio de la socialización de la canción, en la que las maestras hicimos preguntas sobre el contenido de la canción, Marcela expresó:

Uno no siempre va a estar caminando por el mismo lugar...uno no siempre va a tener lo mismo ni va a hacer lo mismo.

(Marcela, socialización “Todo Cambia”, 22 de febrero de 2010)

En la afirmación de Marcela se evidenciaron cambios de tipo cualitativo. Cambios referidos al ser humano en una espacialidad igualmente cambiante. Estamos aquí, en un ahora pero luego vamos a estar en otro lugar; siempre en movimiento. Cambios igualmente referidos a al tener y no tener. Es decir, las cosas que en cierto lapso de tiempo poseemos las dejamos de poseer en otro; posiblemente porque nuestros intereses y expectativas cambian, porque las perdemos o porque ya no suplen nuestras necesidades. En cualquier caso, las perdemos para dar paso a otras posesiones.

Cuando Marcela expresó, “*ni va a hacer lo mismo*”, nos llevó a pensar en el cambio en el sentido del paso de un estado a otro. Así, nuestras actividades, ocupaciones y roles también varían de acuerdo a las condiciones personales, familiares, sociales y económicas del momento; cambiando también nuestro trasegar, de acuerdo a una multiplicidad de factores que inciden en que lo que hacemos hoy pierda sentido mañana; tal vez lo de mañana perderá sentido algún día. Siempre estamos en continuo movimiento, nuestro cuerpo y mente están cambiando incesantemente; nada permanece estático. En este sentido concordamos con Engels (2001) cuando expresa que lo único eterno que existe, es el eterno movimiento de las cosas y su transformación.

En la misma socialización, respecto a los aspectos referidos a los fenómenos físicos, Jorge expresó:

El clima antes era más templado, ahora por el calentamiento ya hace más calor y antes no era así.

(Jorge, socialización “Todo Cambia”, 22 de febrero de 2010)

Consideramos que con la anterior afirmación, Jorge identificó el cambio de un estado climático asociado a un fenómeno físico-social, como el calentamiento global. En este sentido, concordamos con Caraça (1984) cuando expresa que basta observar para darse cuenta de cómo las cosas más estables se alteran con el tiempo.

Al intentar explicar algunas de las posibles causas del calentamiento, Leidy expresó:

Claro que parte de eso [del calentamiento] lo ha causado el hombre, porque no ha cuidado el medio ambiente.

(Leidy, socialización “Todo Cambia”, 22 de febrero de 2010)

Así, Leidy señaló como causa del cambio climático las acciones humanas. Acciones colectivas que conllevan a consecuencias de dimensión planetaria. En esa misma dirección,

Marcela manifestó:

[...] Cuando uno tira basuras al piso, los líquidos se convierten en gases y por eso es que se va desgastando la tierra; y cuando uno empieza a construir casas tiene que cortar árboles y esto hace que se acaben el oxígeno y el agua.

(Marcela, socialización “Todo Cambia”, 22 de febrero de 2010)

Marcela, Jorge y Leidy, tres estudiantes, tres sujetos que desde sus diferencias, desde sus subjetividades, han identificado cambios en su propio trasegar, en el ambiente cercano y en el no tan cercano. Cada uno, desde su mirada particular, expresó la existencia del cambio como algo inherente a sus cotidianidades, a sus realidades. Ellos identificaron una realidad mutable, fluyente, por la acción de quienes hacen parte de ella: sujetos igualmente mutables. Esto va acorde con los planteamientos de Caraça (1984) cuando afirma que todo

está en una permanente agitación; el planeta Tierra y todos los que pertenecemos a él, fluctuamos de una u otra forma, en cada instante.

Además de identificar diferentes cambios, ellos reconocieron la importancia y necesidad del cambio en sus vidas. Al respecto Marcela planteó:

No todo se va a quedar igual...el cambio es muy importante en nuestras vidas y más cuando se cambia para bien. ...

Cada día que pasa es un cambio más, pues, no siempre hacemos las mismas cosas. Por ejemplo, toda la semana estudiamos y tenemos descanso, pero no toda la semana aprendemos lo mismo, ni todos los días nos reímos y si nos reímos no siempre va a ser por lo mismo.

(Marcela, reflexión escrita sobre la canción “Todo Cambia”, 23 de febrero de 2010)

Marcela no sólo reconfirmó la ineludible acción del cambio en su vida, sino que lo expresó como algo necesario; como algo que dinamiza y enriquece su cotidianidad. Lo identificó en su rol de estudiante, como parte inherente al proceso de aprendizaje; también como pieza clave en el aspecto lúdico. Es decir, ella reconoció el cambio como un agente enriquecedor de su diario vivir.

Al respecto, Leidy expresó:

[...] Cuando cambiamos nuestra vida mejora, como yo que mejoré pues me di al cambio. ...Mis amigos, mi mamá y otros me decían que cambiara pero yo me negaba y decía que no tenía que cambiar nada. Sin embargo, me propuse cambiar y lo hice.

[...] Cuando cambiamos encontramos mejores cosas para nuestra personalidad y para tener una mejor relación con todas las personas... Cuando cambiamos algo que sabemos que nos está afectando nos damos cuenta que hay cosas mucho más buenas para nosotros... todo, todo cambia, de eso no hay ninguna duda y siempre seguirá cambiando.

(Leidy, reflexión escrita sobre la canción “Todo Cambia”, 23 de febrero de 2010)

Aquí, Leidy, desde una mirada introspectiva, hizo una interpretación del cambio como una posibilidad de mejoramiento personal e interpersonal. Leidy reconoció y valoró su propia naturaleza de ser fluctuante que lejos de afectarla, la beneficia y le brinda nuevas

oportunidades. Entre ellas, tal vez Leidy encuentra la de reconocerse como ser inacabado, que aún le queda mucho por aprender, particularmente en su interacción con esos otros seres que le generan la necesidad del cambio en su forma de relacionarse con ellos.

En ese sentido, la reflexión de Leidy nos llevó a pensar en la importancia del otro como constitución del ser mismo, como lo plantea Bajtín (2009). Leidy, al interactuar con los otros descubre a través de ellos aspectos que ella misma no puede ver y le generan nuevas visiones sobre sí misma. A su vez, esos otros contemplan en Leidy, mediante un “acto estético” (Bajtín, 2009), aspectos invisibles ante sus ojos pero que le posibilitan constituirse como sujeto. Acto estético, el cual es inherente a las relaciones mediante las cuales se estructura la intersubjetividad; es decir, las maneras principales de su relación con el otro. Intersubjetividad dada entre sujetos históricos cuyas ideas y maneras de interpretar sus realidades, van acorde a aquellos contextos a los que pertenecen, a su lectura particular del mundo.

En la Institución Educativa Rural El Hatillo, cuando preguntamos al grupo de estudiantes si les había gustado la canción, Elizabeth contestó que sí, y expresó lo bonita que le parecía. Ella, motivada como siempre a participar con sus comentarios, expresó: “el amor sí cambia porque no siempre quieren a la misma persona”; refiriéndose a suplantarse un amor por otro. Elizabeth también destacó el hecho de que las personas cambian de rumbo, dejando ver en su interpretación esa idea de seres indeterminados y no definidos de manera totalitaria.

En la canción se menciona “...cambia el sol en su carrera cuando la noche subsiste...”, a lo cual Elizabeth manifestó estar de acuerdo, pues “es más suave en la mañana y por el medio día es más fuerte”. La maestra Adriana, insistió y preguntó nuevamente ¿Qué quiere decir

eso que cambia el sol en su carrera?, al respecto, Elizabeth respondió que el tiempo también variaba y que no pasaba lo mismo en la mañana que en la tarde. Además, ella insistió en la intensidad con que se sienten los rayos del sol; en la mañana no son tan fuertes, al medio día son más fuertes y en la tarde disminuye su intensidad.

La segunda actividad de la cual emergió la categoría considerada fue la correspondiente a “Una carta al futuro”. En el gráfico siguiente presentamos algunos aspectos mostrados en las reflexiones de Juan Felipe, Elizabeth y María Eugenia con respecto a esta actividad.

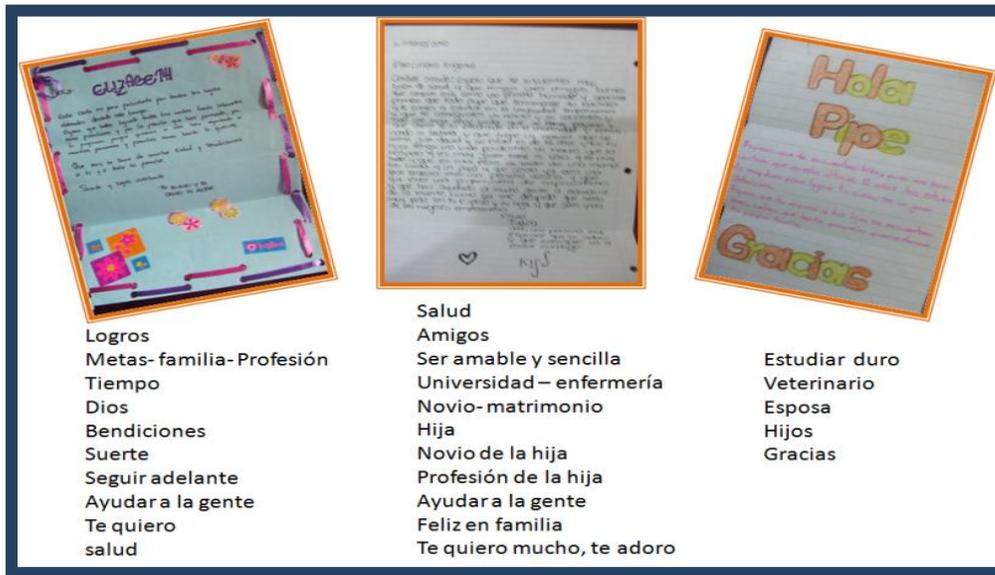


Ilustración 23. Una carta al futuro, febrero de 2010

Como se puede apreciar en el cuadro anterior, para los tres estudiantes la idea de progreso estuvo asociada a continuar sus estudios superiores y ser felices en sus nuevas familias. Elizabeth expresó que sus logros dependían del tiempo que transcurriera y al desearse bendiciones para su familia y su salud, consideró a Dios como otra variable para obtener éxito; la suerte fue otro factor que ella puntualizó al final de su carta.

María Eugenia presentó para el futuro varios aspectos determinados y el nombre de su hija, la cual desea tener dentro de quince años. Tanto Elizabeth como María Eugenia, manifestaron satisfacción por lograr ayudar a la gente y ambas, en la despedida de la carta, escribieron palabras que reflejaban afecto y ternura.

Juan Felipe por su parte, fue preciso; entre otras razones, por el hecho de haber presentado la carta después de haber transcurrido la socialización de la actividad grupal. En dos párrafos cortos él comentó acerca de su sueño de ser veterinario y de formar una familia.

Un aspecto que percibimos común en muchos de los ideogramas y de las cartas al futuro del grupo al cual pertenecen estos tres estudiantes, fue el hecho de que se visualizaran en espacios muy abiertos, ya fuera en sus escuelas rurales, sus casas en el campo o en paisajes naturales; pocos se ubicaron para el futuro en una gran ciudad, o si apareció este elemento, fue refiriéndose a temporadas.

Consideramos importante en nuestro proceso de investigación, tener presente las motivaciones que como seres humanos han constituido hasta el presente a nuestros estudiantes. Motivaciones que son reflejo de lo que son; que llevan las huellas de un pasado, un presente y un futuro, y creemos que desde estas bases ellos objetivan sus propios conocimientos. Pues los estudiantes al entenderse desde su ser como seres en constante cambio, posibilita que, al mismo tiempo, puedan percibir cambios exteriores, cambios que se suceden en otros sujetos y objetos, en su entorno, en su cultura, en el planeta.

Consideramos como propio de los seres humanos pensarse en el futuro, verse en una “línea” de tiempo y espacio que posibilita el cambio; términos de unas regularidades que

posibilitan desde la previsión, crear esa imagen de futuro, como lo plantea Davidov (1988, p. 33):

[...] La previsión es precisamente tal visión de la posibilidad. Las acciones reales del sujeto que posee psiquis realizan lo que puede ser creado en la realidad misma. El sujeto organiza sus acciones en dependencia de lo que pueda ocurrir en el futuro ¡en el futuro que aun no existe! Aquí la finalidad como imagen de futuro, como imagen de lo que debe ser, determina el presente, define la acción real y el estado del sujeto

La cuarta actividad fue llamada: “Muñeco de pelos”, realizada en la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera. Las observaciones dieron cuenta de cambios tanto cualitativos como cuantitativos. Cambio en el color de las raíces y del tallo, y en la longitud de este último. Pensamos que tales cambios hicieron referencia al concepto de cualidad definido por Caraça (1984), como aquello que caracteriza a un ser, vivo o no vivo, de acuerdo a, y en su interacción con otros seres bajo unas mismas condiciones. En palabras del autor:

Al conjunto de relaciones en que un determinado ser se encuentra con los otros seres de un agregado, las llamaremos cualidades de ese ser. [...] No se puede hablar de cualidades intrínsecas de un ser u objeto, de cualidades que residen en el objeto en sí. Las cualidades son relaciones orientadas.  
(Caraça, 1984, p. 113).

Así, por ejemplo, un determinado color lo es en comparación con otro de acuerdo a la frecuencia y longitud de onda del espectro visible. El tamaño será relativo, grande o pequeño según el parámetro de comparación.

Dentro de las observaciones que expuso Marcela, en cuanto a los cambios dados en algunas de las cualidades de su Muñeco de Pelos, destacamos la siguiente:

(...) en el tercer día ya le empezó a salir [el brote], pero como la raicita, de color blanco. Ya el cuarto, aumentó un poquito, como cuatro milímetros y ya no sólo eran blancas, sino también cafés. En el sexto día aumentó [longitud del tallo] dos centímetros pero en la parte de arriba ya eran verdes. El día que más aumentó fue en el décimo, que aumentó cuatro centímetros.  
(Marcela, socialización “Muñeco de pelos”, 9 de marzo de 2010)

En las observaciones expuestas por Marcela, encontramos cambios cualitativos, en el color de las raíces y de los tallos. Cambios presentes en el proceso de germinación y desarrollo de un ser vivo, de una planta. Cambios dados en un tiempo determinado bajo condiciones específicas de humedad y luminosidad. Igualmente, encontramos cambios cuantitativos referidos a la longitud del tallo. Aquí nombramos el término cantidad, en el sentido de Caraça (1984), esto es, como una propiedad o característica de la cualidad. En sus palabras:

Consideramos la cantidad como un atributo de la cualidad y no como un objeto; ni siquiera haya posibilidad de medir para hablar de cantidad.  
(Caraça, 1984, p. 116)

Desde esta concepción de Caraça, pensamos que podemos hacer una resignificación del concepto que normalmente tenemos sobre cantidad; ya que es común el pensar en la cantidad como algo que es solamente numérico o medible. En ese sentido, si bien, Marcela hace referencia a cantidades representadas numéricamente, producto de una medición hecha por ella, también se refiere a otras no numéricas como:

[...] Ya en el cuarto, aumentó un poquito [...] El día que más aumentó fue [...] y en el que aumentó menos fue [...]  
(Marcela, socialización “Muñeco de pelos”, 9 de marzo de 2010).

Marcela destacó cualidades como el tamaño, que son susceptibles tanto a mediciones, como a graduación y comparación; esto es, mayor, menor, aumento. Es decir, cualidades que admiten variación según una cantidad, pero no estrictamente numérica.

Similarmente, Leidy, refiriéndose a las observaciones sobre su muñeco de pelos, expresó:

[...] Como a los cuatro días empezó a salirle el *pelito* con las puntas rosaditas y siguió creciendo como dos centímetros cada día. Lo máximo que creció fue 16 centímetros. Las raíces eran de color rosado y ya están cafecitas. Acá [en la parte media] siempre han sido verdes y en la punta han sido más amarillocito.  
(Leidy, socialización “Muñeco de pelos”, 9 de marzo de 2010)

En su forma particular de expresarlo, Leidy reconoció cambios tanto cualitativos como cuantitativos en el proceso de germinación de las semillas en su muñeco de pelos. Así como en las observaciones de Marcela, identificamos en las realizadas por Leidy otro concepto retomado por Caraça (1984), oriundo del materialismo dialéctico en el que se manifiesta nuevamente el cambio y con él la fluencia: la transformación de cantidad en cualidad. Es decir que en un fenómeno dado, el aumento o disminución de una cantidad en particular conlleva a la transformación de la cualidad esencial de éste.

Caraça (1984) plantea un ejemplo con el que ilustra esta ley de la dialéctica. En él, contempla un cuerpo en caída libre, específicamente, una piedra. El movimiento de la piedra es en un comienzo, uniformemente acelerado (cualidad inicial), mas por el aumento de la cantidad de la resistencia del aire sobre la piedra, la cualidad de movimiento cambia. Así que a cierta altura el movimiento deja de ser acelerado y se transforma en un movimiento con velocidad constante, esto es un movimiento uniforme. La cualidad movimiento acelerado desaparece y da paso al surgimiento de otra cualidad: el movimiento uniforme.

En el muñeco de pelos, en el sistema sustrato-semilla, influenciado directamente por condiciones externas como cantidad de agua, luz, y aire, la semilla desaparece para dar paso a la planta; en esta caso a una hierba. La cualidad semilla es destruida para surgir como hierba, al actuar sobre ella ciertas cantidades que causan su evolución.

Jorge también nos remitió a este fenómeno natural, cuando expresó:

[...] A los ocho días le salió más pelo pero ya estaba muy largo y de color verde...El cambio que tuvo el muñeco fue muy drástico pero fue un cambio natural gracias al agua y al Sol al que estaba expuesto.  
(Jorge, reflexión sobre el “Muñeco de pelos”, 9 de marzo de 2010)

La cantidad de días, agua y luz generan cambios cualitativos de color y tamaño. Inferimos que cuando Jorge expresó que el cambio “fue muy drástico”, se refirió precisamente a la transformación de la semilla en una cualidad diferente; además a los cambios de altura y color que observó en los tallos. Dicho cambio “natural” es un episodio más que da cuenta de la dialéctica existente entre cantidad-cualidad; dialéctica en la que se evidencia nuevamente el movimiento y la transformación. El cambio de cualidad de un cuerpo, determinado por la acción de un cambio cuantitativo en él. Lo viejo y lo nuevo, la destrucción y la construcción, la muerte y el nacimiento; opuestos que se unen para permitir el desarrollo de un proceso, biológico, como el analizado en este caso.

Es así que consideramos que los estudiantes, en las cuatro actividades realizadas, evidenciaron la existencia e importancia del cambio. Cambio y movimiento, en el sentido expresado por Caraça (1984, p.110):

Del extremo superior al inferior de la escala, del movimiento prodigioso de la expansión del universo, al movimiento, no menos prodigioso, de las partículas constituyentes del átomo, todo fluye, todo deviene, todo es, a todo instante, una cosa nueva.

De acuerdo a este autor, todo en el mundo, y fuera de él, cambia. No existe ningún espacio en el que no se presente, de una u otra forma, el movimiento y, en dialéctica con él, el cambio. Este es un concepto que los estudiantes reconocieron: las cosas no son estáticas, cambian a todo instante. Lo identificaron en fenómenos naturales, sociales y en sus vidas.

De ahí que consideramos, por un lado, el pensar en cómo en el proceso de humanización, las personas reconocemos el cambio y el movimiento, desde ciertas condiciones individuales y sociales; es decir desde una realidad situada, desde un contexto dado. Los estudiantes desde sus particularidades individuales, producto de factores sociales y

culturales, reconocen el cambio, y con él el movimiento de fenómenos presentes en sus realidades.

De otro lado, consideramos que este principio de cambio-movimiento es un insumo importante para la construcción del concepto de variable. Ya que es el cambio, la esencia de este concepto; no podríamos identificar la variabilidad de un fenómeno sin reconocer su mutabilidad, su transformación. Pero este insumo es, a su vez, esencial para la construcción del concepto de *función*, pues son variables, precisamente las que se relacionan en él.

La variable y otros conceptos imbricados en ella, los analizaremos en capítulo siguiente.

**“TODO ESTÁ VIVO, TODO ESTÁ VINCULADO, EL AIRE, EL AGUA...”**

*Los ríos y quebradas se están secando por causa del calentamiento global [...] Pero con el eucalipto hacen hojas de papel, los eucaliptos crecen rápido, pero también destruyen el agua [...] La atmósfera se está calentando, el calentamiento se acelera cada vez más [...] Todo está vivo, todo está vinculado, el aire, el agua...*

*(María Eugenia)<sup>8</sup>*

En el capítulo anterior reflexionamos acerca del cambio, la fluencia, el devenir; estamos en un mundo en movimiento y esta es una idea que en nuestra investigación destacaremos de manera permanente. En este capítulo, a la luz de una realidad cambiante y en movimiento, y a partir de la idea que ya mencionamos de cualidad, estaremos analizando la forma como nuestros estudiantes perciben dichas realidades cambiantes, desde las cualidades involucradas en las actividades propuestas en el aula de clase. Introduciremos una discusión acerca de los conceptos de variable, interdependencia y correspondencia, los cuales constituyen un marco fundamental para la objetivación del concepto de *función*.

Nuestras acciones dependen de múltiples factores que afectan nuestra práctica y, a su vez, ésta se convierte en un factor más que interviene en las acciones de aquellos con quienes interactuamos. Ninguna acción humana, ningún evento natural, se presentan de forma aislada; cada uno hace parte de un todo, de forma tal que un evento dependerá de otro. Al respecto, Caraça (1984, p.109) plantea:

Todas las cosas están relacionadas unas con las otras; el mundo, toda esta realidad en la que estamos sumergidos, es un organismo vivo, inseparable, cuyas partes se comunican y participan, todas, de la vida, unas dependiendo de las otras.

---

<sup>8</sup> Expresión de María Eugenia, reflexión del documental *Home*, marzo 3 de 2010.

En esa dirección fue que identificamos nuestra segunda categoría, “Todo está vivo, todo está vinculado, el aire, el agua...”, categoría que retoma un carácter doble. En primer lugar, la interdependencia como una característica esencial de toda realidad; una interdependencia que es variable en cuanto a que está sometida a la mutabilidad de sus mismos componentes. Y, en segundo lugar, la interdependencia entre las variables que interactúan en un fenómeno determinado. De igual forma que la primera categoría, ésta emergió en diferentes momentos en los que los estudiantes protagonistas identificaron variables presentes en los trabajos que realizaron, así como interdependencia entre ellas. Al respecto, presentamos el siguiente momento correspondiente a la socialización de la actividad “Muñeco de Pelos”, en la cual, por medio de una socialización grupal, los estudiantes de la I.E. Ramón Múnera Lopera expresaron lo que para ellos fue más relevante en dicha actividad. Cuando la maestra preguntó al grupo sobre la posible relación entre el contenido del video “*Home*” y la actividad del “Muñeco de Pelos”, Marcela respondió:

...Había personas que preguntaban [un grupo de estudiantes en una actividad anterior] que si el ser humano podría vivir sin el agua. Entonces, ya se va respondiendo la pregunta, porque sabemos que el hombre necesita de lo que nace de la tierra pero ¿cómo van a germinar las cosas de la tierra, si no hay agua?  
(Marcela, socialización “Muñeco de Pelos”, 9 de marzo de 2010)

En el comentario de Marcela comenzamos a visualizar el concepto de interdependencia planteado por Caraça (1984). En él, observamos los factores agua, hombre, tierra, plantas. “El hombre necesita de lo que nace de la tierra” es decir, de las plantas; “¿y cómo van a germinar las cosas de la tierra, si no hay agua?” Es decir, las plantas necesitan del agua para su existencia y, a la vez, éstas posibilitan la existencia del hombre. Vemos algunas partes constituyentes de un todo, partes que se encuentran en constante dependencia, las unas de las otras.

En esa misma línea, Leidy expresó:

“Creo que los cambios se dieron gracias al agua, a la sombra, al viento, porque con esto los pelos crecieron más”

(Leidy, registro escrito, “Muñeco de Pelos”, 9 de marzo de 2010)

Acá, Leidy identificó diferentes factores influyentes en un fenómeno. En este caso, un fenómeno natural; el desarrollo de una planta en un medio específico. La germinación de la semilla hasta convertirse en hierba, lo que en este caso fue llamada “pelos”, dependió de factores, de acuerdo con Leidy, como el agua, la sombra el viento; factores que en el sistema sustrato-semilla, interactuaron e incidieron en su evolución.

Al respecto Marcela opinó:

“En el trabajo del muñeco de pelos nos dimos cuenta de muchos cambios...el ambiente influye mucho, pues unos lo tuvieron en la sombra y otros en el sol y su crecimiento fue diferente...unos [compañeros de clase] le echaban mucha agua, otros más o menos y habían otros que no le echaban; esto también influyó en el crecimiento de su pelo.

...El color del pelo fue diferente; en un mismo muñeco habían pelos de tres colores (blanco, verde y café)”

(Marcela, registro escrito, “Muñeco de Pelos”, 9 de marzo de 2010)

Marcela dio una mirada más general; no habló sólo de observaciones sobre su actividad en particular, sino sobre las del grupo. Así, identificó la dependencia existente entre factores como el sol, la sombra, la cantidad de agua en el crecimiento del “pelo” del muñeco, en forma global. Ella observó la existencia de regularidades en un fenómeno, natural en este caso; identificó comportamientos idénticos en él, las mismas variables en interdependencia, en los diferentes “muñecos de pelos que la condujeron a generalizar.

Respecto al mismo fenómeno, Jorge enunció:

El cambio que tuvo el muñeco fue un cambio natural, gracias al agua y al sol al que estaba expuesto; y el pelo que le salió fue por el alpiste...

(Jorge, registro escrito, “Muñeco de Pelos”, 9 de marzo de 2010).

Jorge también hizo una generalización del fenómeno, lo cual nos llevó a pensar en el marcado interés del ser humano por hallar manifestaciones regulares en los eventos que le rodean y poder predecir los siguientes con los que se encontrará. Actitud que, como seres humanos, hemos conservado históricamente, como lo expresa Caraça (1984), la necesidad de luchar contra la naturaleza y dominarla.

Si bien en este caso los estudiantes no actuaron en respuesta a dicha necesidad, podríamos decir que, de una forma espontánea, hallaron regularidades en la situación analizada. Lo cual, posiblemente, les permitió una mirada global de la manifestación del fenómeno.

De otro lado, en el sistema, “Muñeco de Pelos”, se entrelazaron hechos como la presencia o ausencia de luz solar y el grado de humedad, para propiciar su evolución; es decir, al cambio de sus cualidades identificadas por los estudiantes como el color y el tamaño de la hierba. Esto es, el sistema sustrato-semilla evolucionó hasta transformarse en un sistema sustrato-hierba. Así, parafraseando a Caraça (1984), la evolución del sistema se manifestó por la alteración de sus cualidades; de los componentes del mismo, en constante interdependencia. A tal evolución, de un modo implícito, se refirieron los tres estudiantes, en este momento considerado.

Otra actividad que consideramos para el análisis de esta categoría, con los mismos estudiantes protagonistas la llamamos: “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?” Tal actividad la planteamos con la intencionalidad de que los estudiantes identificaran las variables presentes en el proceso, mediante el motivo del uso adecuado del agua; también con la intencionalidad que comenzaran a identificar posibles relaciones entre éstas. La actividad constó de dos fragmentos. En el primero, los estudiantes debían observar y

registrar el gasto de agua presente en el cepillado de dientes en sus hogares, con cada uno de los integrantes de su familia. Para tal fin, debían medir observando a diferentes miembros de la familia, el tiempo que la llave de agua permanecía abierta, así como la cantidad de agua utilizada inadecuadamente. En el segundo fragmento, los estudiantes debían organizar los datos obtenidos en el primero, de modo que posibilitara una mejor visualización, para una reflexión sobre el uso del agua en el instante del cepillado dental. Este segundo fragmento fue llevado a cabo mediante la realización de un taller propuesto por nosotras, las maestras, el cual los estudiantes resolvieron en grupos y luego fue socializado. A continuación, presentamos algunos apartes.

Una de las preguntas planteadas en el taller fue: “¿qué cosas se midieron o contaron? Con ella pretendimos que los estudiantes comenzaran a identificar, de manera espontánea, las variables existentes en la actividad realizada en sus hogares. En ese momento no pretendíamos denominar las variables como tal, ya que era la primera actividad en la que abordábamos implícitamente el concepto y fue nuestra intención evitar predeterminarlo.

Respecto a esta pregunta, hallamos respuestas como:

Se midieron el agua y el tiempo  
(Marcela, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”,  
6 de abril de 2010).  
Se midió el tiempo (min) y se contaron los tarros (litros, mililitros) [Envases de agua de  
500 mililitros].  
(Leidy, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”,  
6 de abril de 2010).

En ambas respuestas, observamos que tanto Marcela como Leidy identificaron las variables involucradas en la actividad, en su lenguaje natural; siendo Leidy más específica al diferenciar entre lo medido y lo contado, además de emplear las unidades correspondientes.

Si bien ambas estudiantes no se apoyaron explícitamente en el cambio al identificar las variables, sí las reconocieron como magnitudes contenidas en la situación.

Ante la pregunta, ¿de qué depende que se desperdicie una mayor o menor cantidad de agua?, los tres estudiantes dieron las siguientes respuestas:

De nosotros, porque cuando no se necesite el agua, no se debe de dejar la llave abierta (Marcela, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”, 6 de abril de 2010).

Depende del uso que se le dé a este mineral, cerrando o no cerrando la llave. (Leidy, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”, 6 de abril de 2010).

Depende de si le damos un mal uso al agua o no, cuando nos cepillamos. O sea, si dejamos mucho la llave abierta o si la cerramos. (Jorge, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”, 6 de abril de 2010).

Los estudiantes relacionaron el desperdicio del agua con el uso que le dieron a ésta, las personas de su familia y ellos mismos, en el hábito del cepillado de dientes observado en sus hogares. Los tres estudiantes señalaron, además, la importancia de cerrar la llave del agua mientras no se necesite. Esto nos llevó a pensar en la relevancia que tiene para los estudiantes, el realizar actividades que cobren un sentido para ellos, en tanto que sea validado desde sus prácticas sociales. Así, mediante este motivo, los estudiantes hallaron una relación de dependencia entre el gasto del agua y la permanencia de la llave del acueducto abierta.

Otra de las preguntas de este taller hizo referencia a la existencia de una relación entre el tiempo en que se tiene la llave abierta y el agua gastada. Encontramos respuestas como:

Entre más tiempo se tenga la llave abierta, más agua se gasta. (Marcela, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”, 6 de abril de 2010).

Sí existe una relación entre el tiempo que se tiene la llave abierta y el agua que se gasta, porque cuando tenemos la llave abierta mucho tiempo significa que gastamos más que cuando no la abrimos casi y la racionamos (Leidy, registro escrito, “¿Cuánta agua gastamos cepillándonos los dientes?”, 6 de abril de 2010).

Marcela y Leidy reconocieron la relación de dependencia existente entre las variables en cuestión, volumen de agua gastada y tiempo de la llave abierta. En dicha relación, de tipo cualitativo, las estudiantes, por medio del lenguaje natural, dieron cuenta de una relación directa entre las variables identificadas.

De acuerdo a Caraça (1984), variable es una representación simbólica que, como tal, posibilita manejar con mayor facilidad al objeto que representa; en este caso a los elementos de un conjunto. En palabras del autor:

Sea  $E$  un conjunto cualquiera de números, conjunto finito o infinito. Como convención, representemos a cualquiera de sus elementos por un símbolo, por ejemplo,  $x$ . A este símbolo, representativo de cualquiera de sus elementos del conjunto ( $E$ ), la llamamos *variable*... Es el símbolo de la vida colectiva del conjunto, vida que se nutre de la vida individual de cada uno de sus miembros, mas no se reduce a ella. Caraça (1984, p. 127).

Según la idea anterior, la variable tiene un carácter contradictorio, como lo dice el mismo autor, ya que representa a todos los elementos de cierto conjunto, pero a ninguno en particular a la vez. Esta característica de “ser y no ser cada uno de los elementos del conjunto” (Caraça 1984, p. 128) contiene como esencia el concepto de fluencia en cuanto al carácter de cambio y transformación que soporta. Esta fluencia, este continuo movimiento, fueron identificados por los estudiantes en las actividades anteriores, de una manera tácita y de forma explícita en las siguientes. A continuación, presentamos una actividad en la que se evidencia lo anteriormente afirmado.

La actividad es la referente a la discusión y análisis de una información propuesta por nosotras, sobre las tarifas que la empresa de servicios públicos de la ciudad de Medellín, Empresas Públicas de Medellín (EPM), dio a conocer para el servicio de acueducto en la ciudad, para el mes de mayo del año 2010. La información la presentamos a continuación.

### Tarifas para Servicios de Acueducto en Medellín

| SECTOR                    | ACUEDUCTO                       |   |                     |
|---------------------------|---------------------------------|---|---------------------|
|                           | Cargo Fijo<br>(\$/ Instalación) | Cargo por consumo ( \$ / m <sup>3</sup> ) |                     |
|                           |                                 | 0 -20 m <sup>3</sup>                      | > 20 m <sup>3</sup> |
| <b>Sector Residencial</b> |                                 |   |                     |
| <i>Estrato 1</i>          | 2,827.60                        | 399.85                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 2</i>          | 4,241.40                        | 599.77                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 3</i>          | 6,185.37                        | 874.67                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 4</i>          | 7,069.00                        | 999.62                                    | 999.62              |
| <i>Estrato 5</i>          | 10,603.50                       | 1,499.43                                  | 1,499.43            |
| <i>Estrato 6</i>          | 11,310.40                       | 1,599.39                                  | 1,599.39            |
| <b>Comercial</b>          | 10,603.50                       | 1,499.43                                  |                     |
| <b>Industrial</b>         | 9,189.70                        | 1,299.50                                  |                     |
| <b>Oficial y Exenta</b>   | 7,069.00                        | 999.62                                    |                     |



Ilustración 24. Información sobre las tarifas para el cobro de acueducto, Empresas Públicas de Medellín. Mayo 10 de 2010.

Nuestra intencionalidad con dicha actividad fue la de interpretar la información suministrada y, a partir de ella, identificar y representar cantidades variables y establecer relaciones de dependencia entre ellas.

Frente a la pregunta, ¿identificas variables en la información anterior? En caso afirmativo, ¿cuáles son?, los estudiantes dieron respuestas como:

Sí. Son el sector, el cargo fijo y el cargo por consumo, ya que todos estos varían, cambian dependiendo del estrato<sup>9</sup>.  
(Leidy, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

<sup>9</sup>El estrato o estrato socioeconómico, hace referencia a una clasificación que realiza el Estado colombiano (Ley 142 de 1994, Artículo 102 ) respecto a los inmuebles residenciales según los lineamientos del DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística); el cual tiene en cuenta el nivel económico de los propietarios, la dotación de servicios públicos domiciliarios y la ubicación (urbana, rural), entre otros.

Sí. El sector, el cargo fijo y el cargo por consumo porque a mayor estrato los precios aumentan.

(Jorge, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

Yo sí identifico variables. Por ejemplo el cargo fijo varía según el estrato y el sector, al igual que el cargo por consumo.

(Marcela, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

Leidy señaló como variables el sector, el cargo fijo y el cargo por consumo, dando como razón, la variación y el cambio. Además, aunque no se explicitó en la pregunta, ella identificó una relación de dependencia entre las variables que indicó y el estrato. Podríamos decir que para Leidy se hizo necesario el concatenar la existencia de variables con su relación de dependencia presente.

Jorge reconoció las mismas variables, y aunque no sustentó su respuesta en el cambio, de una manera explícita, lo hizo tácitamente al indicar una relación de dependencia, directamente proporcional, entre el estrato y las tarifas.

Marcela por su parte, identificó también las variables señaladas por Leidy y Jorge, e igualmente estableció una relación de dependencia entre éstas y el estrato. Así como Leidy, Marcela argumentó la existencia de variables en la idea del cambio.

Pensamos que, como lo expresamos en párrafos anteriores, los estudiantes asociaron el concepto de variable con el de fluencia al considerar magnitudes que no son estáticas, que representan conjuntos con diferentes valores numéricos y que además existe dependencia entre ellas. Es evidente como los tres estudiantes enlazan la existencia de variables, de una manera no aislada, es decir, las reconocen en interdependencia con otras.

Este hecho lo pudimos observar, de nuevo, en un suceso posterior de la misma actividad en el que los estudiantes debían completar una tabla en la que se relacionaba el volumen de agua (en metros cúbicos) con el valor correspondiente a pagar (en pesos) por el servicio de agua, en el mes de mayo. La información fue la siguiente: haciendo unos redondeos, pensemos en una familia de estrato 1: por lo cual el cargo fijo será de \$3000; la tarifa de 0 -  $20m^3$  será de \$400 por metro cúbico y la tarifa correspondiente a un consumo superior a  $20 m^3$  será de \$1000 por metro cúbico. Partiendo de la información anterior, completa la tabla de cobros para el mes de mayo de 2010.

| Volumen de agua en $m^3$ | Valor a pagar por el servicio de agua mayo de 2010 |
|--------------------------|--|
| 0                        | 2.000  |
| 1                        | 2.400  |
| 12                       | 3.800  |
| 19                       | 10.600   |
| 20                       | 14.000   |
| 21                       | 24.000   |
| 25                       | 28.000   |
| 30                       | 32.000   |

Ilustración 25. Completación de la columna del valor a pagar por el servicio de agua del mes de mayo. Marcela, 10 de mayo de 2010

Los estudiantes completaron la columna correspondiente al valor a pagar por el servicio de agua en mayo de 2010. Los tres estudiantes hallaron dichos valores por medio de una estrategia de cálculo similar, en la cual tuvieron en cuenta el cargo fijo como valor constante, el volumen de agua consumida y la tarifa correspondiente, como variables. A continuación presentamos el procedimiento empleado por Leidy para calcular los valores a pagar por el servicio de agua, correspondientes a los volúmenes sugeridos.

$$\begin{array}{r}
 5.400 \times \\
 \frac{1}{400} \\
 \hline
 5000 \\
 3400 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \times \\
 \frac{12}{400} \\
 \hline
 4800 + \\
 3000 \\
 \hline
 7800
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \times \\
 \frac{19}{400} \\
 \hline
 3600 + \\
 3000 \\
 \hline
 10600
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 400 \times \\
 \frac{20}{400} \\
 \hline
 8000 + \\
 3000 \\
 \hline
 11000
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 1000 \times \\
 \frac{21}{1000} \\
 \hline
 21000 + \\
 3000 \\
 \hline
 24000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1000 \times \\
 \frac{25}{1000} \\
 \hline
 25000 + \\
 3000 \\
 \hline
 28000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1000 \times \\
 \frac{30}{1000} \\
 \hline
 30000 + \\
 3000 \\
 \hline
 33000
 \end{array}$$

Ilustración 26. Cálculo del valor a pagar por el servicio de agua del mes de mayo. Marcela, 10 de mayo de 2010

Pensamos la representación tabular como una forma en la que los estudiantes expresan la relación de dependencia entre variables y que además les posibilita hallar las invariantes presentes en el fenómeno analizado. Así, observamos que Leidy empleó el mismo procedimiento para hallar los diferentes valores de la variable, correspondiente al valor a pagar.

En esa dirección, concordamos con García (1998) cuando expresa que la tabla es uno de los sistemas de representación de relaciones entre variables que permite estudiar la variación y el cambio; así como el “estudio de reglas de variación que pueden ser expresadas en fórmulas o retóricamente” (García, 1998, p. 17).

Además de proponer la acción de completar la tabla, les formulamos a los alumnos, entre otras, las siguientes preguntas: “¿Identificas variables en la tabla? En caso afirmativo, ¿cuáles son?, ¿hallas dependencia entre ellas?”

Las respuestas de los estudiantes fueron las siguientes:

Sí identifico variables, porque tanto el volumen de agua en  $m^3$  como el valor del servicio de agua, en mayo de 2010 cambian. Sí tienen dependencia ya que el valor del servicio depende de la cantidad de agua, en  $m^3$  gastada.  
(Leidy, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

Yo sí identifico variables. Por ejemplo en el valor a pagar por el servicio del agua; pues éste varía y depende de los  $m^3$  de agua gastada.  
(Marcela, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

En la situación planteada, Leidy y Marcela identificaron la variación cuantitativa del volumen y del valor a pagar por el servicio de agua; señalando además, una relación de dependencia entre el valor a pagar y el volumen de agua gastada. Esto nos llevó a pensar

que las estudiantes, en ese momento, tenían claro el concepto de variable, como una cantidad cambiante que representa un conjunto numérico; pues sus respuestas estaban acordes con la observación que hicieron del conjunto de valores numéricos, que tomó cierta cualidad —el valor a pagar— en relación de dependencia con otra cualidad—el volumen de agua gastado—. Así, evidenciamos, nuevamente, la dialéctica existente entre cualidad y cantidad, planteada por Caraça (1984), a la cual nos referimos en el capítulo anterior, y aparece la interdependencia como una de las características esenciales para interpretar una realidad.

La respuesta de Jorge fue:

Varían los precios y cada uno depende del volumen. Por ejemplo:

volumen =  $12 \text{ m}^3$ ,

precio = \$7.800

Si no fuera este volumen, el precio sería distinto.

(Jorge, registro escrito, “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”, 10 de mayo de 2010).

Aquí Jorge, además de reconocer las variables presentes y su dependencia, hizo alusión a la correspondencia entre los valores respectivos de éstas. Interpretamos que cuando Jorge expresó “si no fuera este volumen, el precio sería distinto”, él se refería a que cada volumen de agua gastada determina un valor a pagar por este servicio. Pero a su vez, que a cada volumen de agua gastado le corresponde un solo precio. Correspondencia de carácter unívoca, ya que no puede haber dos valores a pagar diferentes, para un mismo volumen de agua gastada, para las condiciones planteadas en esta actividad.

Así, en los momentos considerados, Leidy, Marcela y Jorge identificaron variables y relaciones tanto de dependencia como correspondencia entre ellas, las cuales son conceptos

fundamentales en el proceso de objetivación del concepto de *función*, sobre lo cual trataremos en el capítulo siguiente.

En la Institución Educativa Rural El Hatillo abordamos para esta parte del estudio, cuatro actividades. En la primera se presentó a los estudiantes un documental titulado “*Home*”<sup>10</sup>; en la segunda actividad se trabajó con preguntas que los estudiantes se plantearon a partir del documental y las inquietudes generadas por él. Las preguntas de la segunda actividad posibilitaron que los estudiantes reunidos en equipos, se motivaran a conformar grupos de investigación para profundizar en estos temas. La tercera actividad constó de las reflexiones de los estudiantes, a partir de una observación directa del uso del agua en sus casas, y un taller propuesto por la maestra Adriana, en el cual las preguntas estuvieron dirigidas hacia el uso y la conservación del agua. La cuarta actividad se generó a partir de las investigaciones realizadas por algunos equipos de los constituidos en clase.

Cuando en la clase de matemáticas propusimos ver el documental *Home*, a los estudiantes les extrañó dicha propuesta; Sin embargo cuando observaron que se narraba una historia del mundo desde datos numéricos, fechas, comparaciones y relaciones de los seres, especialmente los humanos, con el mundo, entendieron el sentido de esta actividad en la clase. Es importante señalar que este documental sensibilizó a los estudiantes respecto a los cambios que está sufriendo el planeta a causa de la creciente industrialización mundial, y a las condiciones en que otros seres humanos viven y/o sobreviven en otros lugares.

Después de ver el documental, propusimos, inicialmente, hacer una reflexión acerca de las opiniones que éste les generó. Así, Juan Felipe escribió:

---

<sup>10</sup> *Home*, documental dirigido por Yann Arthus-Bertrand, 2009, distribución: Europa Corp., asociado con PPR

El mundo un día no soportará todo lo que le estamos suministrando: químicos residuos, contaminantes, etc... Si nosotros los jóvenes no cuidamos el medio ambiente, el futuro está acabado, debemos unirnos en una causa especial, el cuidado y reconstrucción del planeta tierra.

(Juan Felipe, reflexión del documental *Home*, marzo 3 de 2010).

En esta idea, Juan Felipe destacó una percepción del mundo que cambia, desde relaciones establecidas por las costumbres de los humanos; costumbres perjudiciales para la vida planetaria. Juan Felipe expresó su preocupación por un futuro incierto. Incertidumbre que, según él, *depende* del hecho de que “al mundo le lanzamos muchos contaminantes”. Mas, al mismo tiempo, se vislumbra, según Juan Felipe, una esperanza que “*depende* de la disponibilidad de los jóvenes del presente, para unirse al cuidado del medio ambiente”.

Elizabeth, en sus reflexiones, estuvo en la misma línea de las ideas de Juan Felipe:

Nosotros los hombres debemos ser conscientes de que somos los culpables de todo lo que estamos viviendo como: la escasez de agua, los incendios, los terremotos, etc. [...] Al principio, hace muchos años, nos podíamos enorgullecer por el mundo que teníamos, pero ya no nos podemos sentir orgullosos de un mundo en el que todo está mal, está en caos.

(Elizabeth, reflexión del documental *Home*, marzo 3 de 2010).

Elizabeth declaró un caos en el mundo y, además, hizo una invitación a tomar conciencia sobre la responsabilidad que tenemos los seres humanos frente a este caos. Cuando ella habló acerca de que hace muchos años nos podíamos enorgullecer de lo que teníamos, se refirió a la idea de un pasado, y de cómo las condiciones de ese pasado se transformaron por causa de los humanos. Como ella lo expresó:

El caos es causado por los hombres, el caos *depende* de las acciones de los hombres.  
(Elizabeth, reflexión del documental *Home*, marzo 3 de 2010).

María Eugenia, en su reflexión, destacó aspectos del documental como:

Los ríos y quebradas se están secando por causa del calentamiento global [...] Con el eucalipto hacen hojas de papel, los eucaliptos crecen rápido, pero también destruyen el agua [...] La atmósfera se está calentando, el calentamiento se acelera cada vez más [...] **Todo está vivo, todo está vinculado, el aire, el agua...**

(María Eugenia, reflexión del documental *Home*, marzo 3 de 2010).

María Eugenia planteó que el hecho de que se sequen los ríos y quebradas *depende* del calentamiento global; además habló de los eucaliptos y su uso industrial, resaltando que pueden ser beneficiosos para la industria por su rápido crecimiento, lo cual posibilita obtener papel rápidamente pero al mismo tiempo es perjudicial para la conservación del agua. Así, María Eugenia identificó una relación inversa, eucalipto/agua, al observar que la escasez de agua *depende* de la siembra de eucaliptos. En sus reflexiones, María Eugenia destacó, además, dos factores que influyen en la disminución del agua: el calentamiento global, en el cual hizo énfasis en su aceleración; y la industria maderera de eucaliptos.

El documental aportó a los estudiantes elementos para analizar, desde una mirada global, un problema ambiental que actualmente inquieta a muchas personas en el planeta. De esta forma, los estudiantes vislumbraron realidades del mundo, en conexión con sus propias realidades.

En esta actividad del documental *Home*, también pedimos a los estudiantes enunciar los tres aspectos que consideraron como más importantes. Así, los resultados fueron:

| Juan Felipe  | Elizabeth  | María Eugenia   |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. El agua se está acabando.</li> <li>2. La deforestación.</li> <li>3. Los desastres naturales</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Que hace mucho tiempo había mucha agua, pero ahora está agotada.</li> <li>2. Que la mano del hombre es la causante de todo el caos y destrucción del planeta.</li> <li>3. Que en muy poco tiempo ya no todo será lo mismo y los hombres sufriremos las consecuencias de nuestros propios actos.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Más de 1000 millones de personas padecen hambre.</li> <li>2. El 40% de la tierra está degradada.</li> <li>3. Si no cuidamos el agua nos vamos a morir.</li> </ol> |

Tabla 15. Ideas destacadas del documental *Home*, marzo 3 de 2010

Para los tres estudiantes, la idea del problema del agua en el mundo fue fundamental, respecto a la preocupación por un recurso vital para los humanos; que se está agotando.

Juan Felipe destacó como variables, además de las que señalamos en la tabla, un futuro incierto que *depende* de la contaminación y una esperanza que *depende* de la actitud de los jóvenes.

Elizabeth enfatizó en que las acciones del hombre tienen que ver de manera determinante con el caos del mundo. Elizabeth relacionó la idea de conciencia con la responsabilidad que los seres humanos tenemos con el destino del mundo. El caos en el planeta, el cual ella mencionó repetidamente, es causado por los humanos, es decir “*depende* de las acciones de los hombres”.

El documental resaltó, entre otros aspectos, la existencia de problemas de corte social como la miseria, el abandono, las desigualdades; realidad que destacó María Eugenia al registrar el dato numérico respecto a la cantidad de personas que padecen hambre en el mundo —1.000 millones— Así, ella vinculó a dicha problemática mundial el hambre, la falta de cubrimiento de servicios básicos por parte del gobierno de los países que la padecen. Para María Eugenia fue importante la idea de que en la tierra todo está vinculado; por lo que la escasez del agua *depende* del calentamiento global, de las plantaciones de árboles como eucaliptos, entre otros factores.

En el análisis de esta actividad, destacamos que los estudiantes identificaron relaciones entre cualidades en el mundo cambiante, y dieron cuenta de la existencia de relaciones de dependencia entre dichas cualidades. En esa dirección, otra variable que los tres estudiantes destacaron, fue el tiempo. No la explicitaron de la manera que comúnmente se hace en los enunciados de un ejercicio o problema matemático donde éste interviene, pues para los estudiantes apareció como una realidad inmutable. Así, Juan Felipe retomó el tiempo desde la idea de futuro; él puso a marchar el tiempo hacia un mañana que tal vez no existirá si los

jóvenes no actúan. Mientras que Elizabeth, utilizó la idea de tiempo mencionando el pasado; una realidad que antes era mejor y de la cual los seres humanos nos sentíamos orgullosos. María Eugenia no mencionó explícitamente el tiempo, pero cuando hizo referencia a un calentamiento global *acelerado* y crecimiento *rápido* de los eucaliptos, reconoció el vínculo entre dos cualidades asociadas al tiempo: la aceleración y la rapidez.

A partir de la problemática que el documental *Home* mostró acerca de la escasez de agua en el mundo y del mal manejo que hacemos los seres humanos de este recurso, los estudiantes formularon preguntas, primero de manera individual, y, luego por equipos. Estas preguntas cobraron importancia para nuestro trabajo porque así identificamos un motivo que dio sentido, desde la cotidianidad y los intereses de los estudiantes, a las actividades que

propusimos desde esta etapa de la investigación hasta el final. A continuación presentamos los equipos de investigación que conformaron en el aula de clase, los estudiantes protagonistas en la Institución Educativa Rural El Hatillo.

En el equipo de María Eugenia, el cual llamaron “Las Conservadoras del Planeta”, se preguntaron por las consecuencias que puede traer el

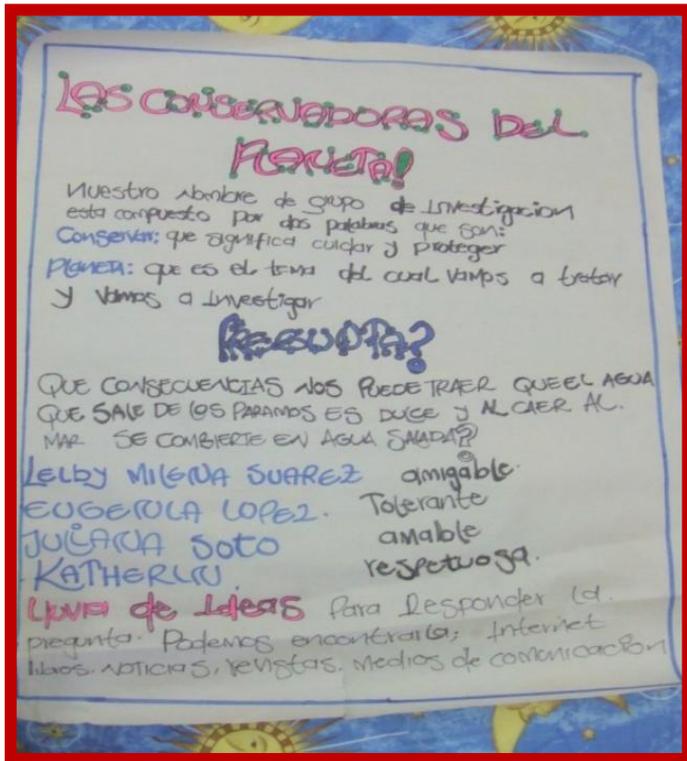


Ilustración 27. Preguntas del grupo Las Conservadoras del Planeta, marzo 5 de 2010

hecho de que el agua que está en los páramos es dulce y al caer al mar se transforme en agua salada.

Fue un cuestionamiento directamente relacionado con lo que María Eugenia planteó acerca del calentamiento global, pues éste causa el hecho que el agua dulce congelada en glaciares y nevados se descongele y llegue a los ríos que desembocan en el mar, haciendo así, que los niveles de éste aumenten y el agua apta para el consumo humano tienda a disminuir.

El grupo de Elizabeth eligió como nombre: “Las Ecológicas” y se preguntaron sobre: “¿Por qué los hombres no saben aprovechar los recursos naturales, como el agua, los alimentos y las plantas?”.

Esta pregunta entró a reforzar la idea que expresó Elizabeth en cuanto a que los seres humanos —el hombre, como ella lo enuncia— son los culpables del caos en la armonía de la naturaleza.

La inquietud sobre el uso inadecuado de los recursos naturales, les permitió a los estudiantes hacer una búsqueda de cualidades para establecer una relación de dependencia.

Reestructurando la pregunta podríamos decir: ¿De qué depende el uso inadecuado de los recursos naturales?, lo cual continúa indicando la presencia de la idea de dependencia. La preocupación por el cuidado y el aprovechamiento del agua es una idea que el Equipo de Elizabeth compartió con el equipo de María Eugenia.

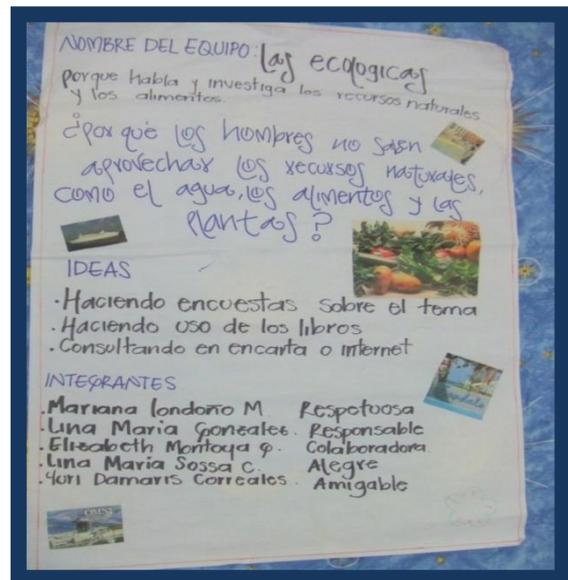


Ilustración 28. Preguntas del grupo Las Ecológicas, marzo 5 de 2010

“Los Biodiversos”, fue el nombre que escogió el equipo del cual era integrante Juan Felipe. En la pregunta que se formularon siguió latente la idea de futuro que Juan Felipe había planteado anteriormente, al lado de unas acciones, que se debe emprender para “disminuir al máximo” la tala de árboles e incendios en las selvas. Aquí destacamos el hecho de que para Juan Felipe, el tema del agotamiento del agua era primordial en el mensaje del documental. Él y su equipo formularon un problema

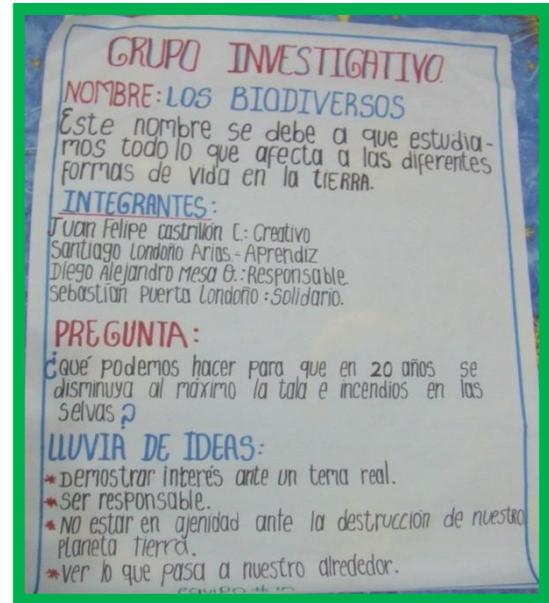


Ilustración 29. Preguntas de grupo Los Biodiversos, marzo 5 de 2010

donde no estuvo la palabra agua; mas en la temática de la tala y los incendios destacaron dos variables de las cuales depende de manera directa la escasez del agua apta para el consumo humano.

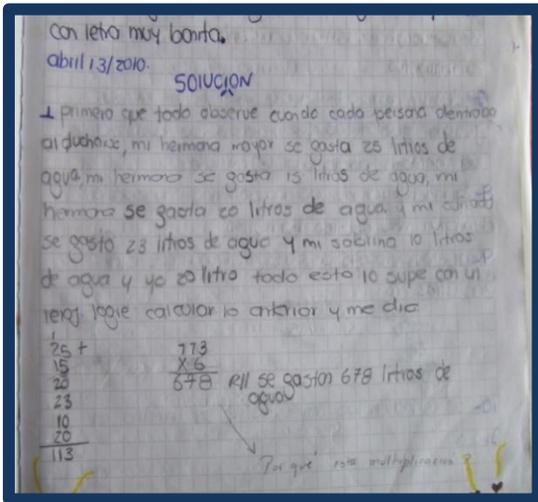
En la tercera actividad los estudiantes fueron a sus casas, y por medio de la observación directa hicieron un cálculo aproximado de cuánta agua se gastaban en sus familias en la práctica del baño diario.

Al momento de la socialización de la actividad, Juan Felipe explicó que puso un recipiente donde pudo calcular que en un minuto caían 30L de agua. Su resultado generó una inquietud a todo el grupo, sobre el caudal de agua por segundo en la ducha, pues de acuerdo a su resultado, significaría que por segundo, en su casa gastaban medio litro; lo cual no es una práctica común.

Por su parte, María Eugenia narró:

Observé cuando cada persona entraba a ducharse, mi hermana mayor se gastó 25 litros de agua, mi hermano se gastó 15 litros de agua, ...y yo 20 litros, todo esto lo supe con un reloj y logré calcular lo anterior y me dio... [ 678 litros de agua, es el resultado que calculó María Eugenia según lo indica la gráfica ]

María Eugenia explicó que midió con un reloj; además presentó los datos discriminando los resultados de la observación desde cada miembro de su familia. Así, expresó que se



gastaron: 25L, 15L, 20L, 23L, 10L y 20L, lo cual al sumarlo le dio 113 —a este número no le colocó unidades— Luego multiplicó esta suma por seis, lo cual interpretamos que a lo que se refirió con estos datos no fue la cantidad de agua gastada por cada uno, sino al tiempo que cada miembro de su familia tardó

Ilustración 30. Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, María Eugenia, abril 9 de 2010

bañándose y de alguna manera, que no expresó, ella dedujo que por cada minuto se gastaban 6

litros de agua. Este aspecto nos resultó de interés, porque el tiempo entró a ser una cualidad destacada en la práctica del baño diario y el consumo del agua.

Utilizando los datos de cada estudiante del grupo respecto a la observación del uso del agua en el hogar en la actividad del baño diario, propusimos dentro de esta actividad un taller en clase. En primera instancia, los estudiantes reunidos en sus equipos de investigación compartieron los resultados obtenidos en sus respectivos hogares. En segundo lugar, solicitamos a cada equipo determinar en cuál de las familias se utilizó más agua para bañarse y por qué. Esta reflexión la propusimos con el fin de asociar al gasto del agua, algunas variables que surgieran de los mismos estudiantes.

Así, en el caso del equipo de Juan Felipe, los integrantes concluyeron que en la familia de Santiago se gastó más agua porque:

1. En su familia son siete integrantes.
2. El baño de cada persona dura quince minutos.
3. No se cierra la canilla para enjabonarse.
4. El agua sale con mucha presión.

(Juan Felipe, Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010).

Mientras que el equipo de María Eugenia expresó que la familia que más agua gastó fue en la casa de Juliana, porque eran cinco integrantes.

En el taller, también planteamos a los estudiantes establecer en cuál de las familias se gastó menos agua en la actividad del baño diario y argumentar algunas causas de ello. Así, el grupo de María Eugenia concluyó que en la casa de Leidy se gastaba menos agua bañándose porque sólo eran cuatro personas. Para éste grupo, una variable que determinó el mayor o menor gasto de agua en una familia al bañarse, fue el número de integrantes.

En el caso del grupo de Juan Felipe, sus integrantes respondieron que en la casa donde menos agua se gastó fue en la de Sebastián, porque:

1. Son sólo tres personas.
2. El agua tiene muy poca presión.
3. Se bañan en muy poco tiempo.
4. Se cierra la canilla [cuando se están enjabonando]

(Juan Felipe, Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010).

Es decir, este grupo destacó otras tres variables de las que dependía el gasto de agua en la actividad del baño diario, además del número de habitantes de la familia. Cuando el equipo de Juan Felipe expuso, ante toda la clase, las repuestas a los cuestionamientos del taller, observamos una aceptación natural de los estudiantes a la existencia del tipo de variables considerados por el equipo, que tal vez otros equipos no habían considerado. De este modo,

nosotras consideramos, que hubo una apropiación colectiva de un conocimiento; ya que otro, la voz del otro, les ayudó a explicitar, a rememorar cosas que ellos sentían y reconocían, pero que no lograban identificar a la hora de realizar la actividad propuesta.

Así, en el grupo de Juan Felipe, cuando preguntamos ¿de qué dependía el mayor o menor gasto de agua de una familia completa en el caso del baño diario?, sus integrantes concluyeron:

- La cantidad de personas.
- El tiempo que se demoran.
- La presión del agua.
- Si se cierra la canilla [o no].

(Juan Felipe, actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010).

En la respuesta del grupo de Juan Felipe, pudimos notar cómo los estudiantes identificaron ciertas variables en relación de dependencia con otra: *cantidad de agua gastada en el caso de la práctica del baño diario*.

Posteriormente en el taller, preguntamos a los grupos ¿de qué depende el mayor o menor gasto de agua de una persona en el caso del baño diario? Con esta pregunta pretendimos indagar por aspectos individuales en esta práctica del baño diario, respecto al consumo de agua. Efectivamente hubo otras variables que los estudiantes tuvieron en cuenta. Así, para el equipo de María Eugenia, conformado por cuatro mujeres, fue importante considerar el género, pues como ellas expresaron: *“En la mayoría de los casos las mujeres se demoran más que los hombres”* (María Eugenia, actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010). Cuando esta discusión se llevó a toda la clase, algunos estuvieron de acuerdo, porque argumentaron que las mujeres tienen el cabello más largo y lavararlo implica más tiempo; aunque otros expresaban que se demoraban más algunos

hombres porque tenían que afeitarse. En esa situación observamos un asunto implícito: si las mujeres se demoraban más, ¿esto implicaba que se gastara más agua? Al parecer del grupo, la respuesta fue afirmativa, ya que de acuerdo a los argumentos expuestos, los hombres que se demoraban más bañándose dejaban, en muchos casos, la llave del agua abierta. Mientras que en el caso de las mujeres, el cabello largo implicaba más tiempo, y el uso de mayor cantidad de agua para dejarlo limpio.

El equipo de Juan Felipe, integrado por cuatro hombres, fue coherente con las variables que habían tenido en cuenta para el gasto de agua en la práctica del baño diario de toda la familia. Para ellos, que una persona gaste más o menos agua bañándose depende de:

La presión del agua.  
Si se cierra la canilla.  
El tiempo en que se demora.  
*La conciencia ambiental.*  
(Juan Felipe, Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010).

Aquí se incluyó una nueva variable, la que ellos llamaron la *conciencia ambiental*. Una conciencia que invita a cerrar la llave del agua cuando no se está utilizando una conciencia generada por el hecho de conocer que el agua apta por el consumo humano se está agotando, y que existen muchos lugares en el mundo donde este recurso es escaso.

En estas reflexiones apreciamos cómo los estudiantes enunciaron variables que no necesariamente estaban asociadas a magnitudes. Como plantea Caraça (1984):

El progreso de las ciencias de la observación permite en cierto momento medir lo que antes se sabía apenas que variaba según la cantidad. (Caraça, 1984, p. 116).

En esta misma línea, consideramos que los estudiantes evidenciaron su capacidad de identificar, en una situación general, aspectos numéricos asociados a magnitudes, así como

identificar cualidades. Y reconocer, en ambos casos, la importancia que poseen en el análisis de un fenómeno asociado a una realidad.

Consideramos interesante el hecho que las variables género y conciencia ambiental, se presentaron sólo en el caso de mayor o menor consumo de agua al momento de bañarse. Mas, cuando se preguntó por una persona y no por toda la familia, se manifestaron unas acciones y características del sujeto como individuo, que los estudiantes reconocieron.

En esa dirección, Davidov plantea que:

La universalidad de las relaciones sociales reales puede ser representada en la conciencia (pensamiento) del individuo gracias a la naturaleza ideal de la conciencia...la forma ideal, subjetiva, en que al individuo se representan sus relaciones sociales reales (la existencia real) es su conciencia  
(Davidov1988, p.42).

En esa línea, pensamos que los estudiantes asumieron, desde su lugar como individuos, la complejidad de las relaciones que se abordaron en el campo de lo social; lo cual implica una gran responsabilidad en sus acciones tanto personales como colectivas. Es decir, ellos se reconocieron como seres sociales, pero desde sus individualidades.

En la siguiente ilustración, presentamos un resumen de las variables de las cuales depende el mayor o menor gasto de agua en la práctica del baño diario, según las consideraciones que expresaron los equipos de Juan Felipe y María Eugenia.



Ilustración 31. variables de las cuales depende el consumo de agua en la familia en la práctica del baño diario, equipos de María Eugenia y Juan Felipe, abril 13 de 2010.

En ella nos dimos cuenta del tipo de variables que los estudiantes utilizaron; ellos reconocieron ciertas cualidades y, dentro de ellas, unas en términos de cantidades y otras no. Así, el género y cerrar la llave o no, son variables que no indican cantidad; mas el número de personas en el hogar, es una variable que indica cantidad y está asociada a un número; el tiempo que cada persona —familia— toma para bañarse es una variable de tipo continuo y medible. De igual manera, lo que los estudiantes llaman presión del agua, que en realidad es el caudal del agua también es una cantidad continua que se presenta en una unidad de volumen por unidad de tiempo. Pero, ¿qué podemos decir de la variable conciencia ambiental? En términos de Caraça, la conciencia ambiental es una cualidad que indica cantidad, porque como él lo expresa:

Aquellas cualidades... respecto a las cuales se pueden hacer juicios de más que, menos que, mayor que, menor que, diremos que admiten variación según la cantidad... La cantidad aparece entonces como un atributo de la cualidad.  
(Caraça., 1984, p. 115)

Para los estudiantes fue natural reconocer que una variable de la cual dependía el consumo de agua en la práctica del baño diario era la conciencia ambiental, porque de la mayor o

menor conciencia que una persona tuviera en cuanto al uso del agua, gastaría más o menos agua al bañarse.

Pudimos apreciar que en el análisis de una situación relacionada con una práctica social, como el baño diario, los estudiantes relacionaron variables de diversas características, de las cuales dependía otra variable propuesta previamente en la actividad que orientó la clase.

Habiendo tenido una discusión en los equipos de investigación sobre aquellas relaciones de las cuales dependía la cantidad de agua utilizada en la práctica del baño diario de una familia, propusimos en el taller relacionado con esta actividad, la siguiente situación: “Calcular la cantidad de agua que una familia de 12 personas utiliza para bañarse”

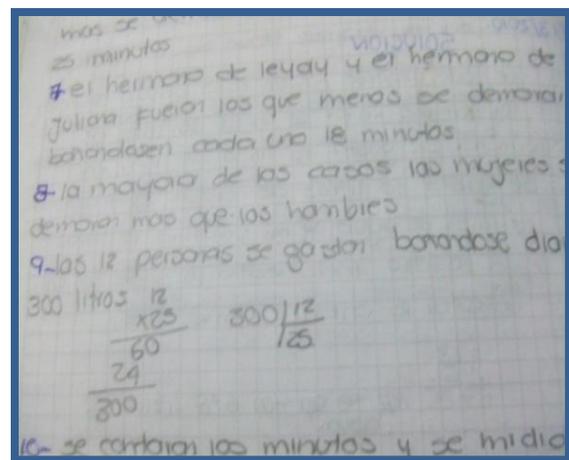
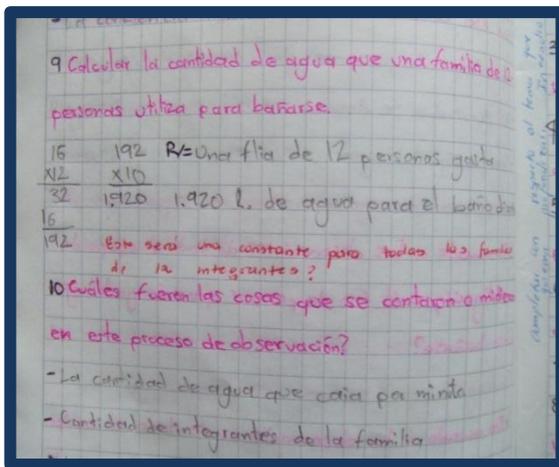


Ilustración 32. Izquierda, Juan Felipe, Derecha, María Eugenia. Actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010

Sin tener en cuenta todas las variables involucradas en las reflexiones anteriores, para responder a esta pregunta, los estudiantes de los equipos de María Eugenia y Juan Felipe,

realizaron multiplicaciones involucrando unos datos constantes y dando una respuesta fija, como se puede apreciar en la siguiente ilustración.

Al observar el cálculo realizado por los estudiantes, nos fue difícil entender, inicialmente, el por qué del procedimiento utilizado por ellos. Sin embargo, posteriormente consideramos que el proceder de los estudiantes pudo haber sido una consecuencia de un obstáculo frecuente en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas escolares. Esto es, intentar resolver un problema planteado desde la cotidianidad, empleando procedimientos matemáticos que no posibilitan una coherente con los datos reales.

En la situación que analizamos, aunque los estudiantes habían reflexionado con anterioridad en torno a un problema de sus prácticas sociales, al encontrarse con una situación con matices similares a los cuestionamientos de los problemas rutinarios de una clase de matemáticas, ellos presentaron confusión en la forma de resolverlo. Sólo cuando otro compañero del grupo comprendió y expresó a la clase, que la cantidad de agua gastada en una familia de doce integrantes, dependía de características y particularidades propias de la familia considerada, los demás estudiantes hallaron como error, el procedimiento originalmente contemplado – el multiplicar doce por cualquier otra constante.

El suceso anterior nos llevó a pensar en que la existencia de ciertas estructuras y enunciados que están vinculados a la tradición de las matemáticas escolares, se transforman en obstáculos en el proceso de aprendizaje, aunque los estudiantes tengan objetivados ciertos presaberes. Es decir, el proceso de enseñanza atado a la tradición de una matemática de respuestas únicas, impide considerar diversos caminos para la solución de diversas situaciones; transformándose así, en un aprendizaje inocuo.

En el último punto del taller relacionado con el consumo del agua en la práctica del baño diario, planteamos a cada uno de los equipos establecer acuerdos respecto a las cosas que en esta actividad ellos midieron o contaron. En el equipo de María Eugenia, los estudiantes respondieron que “*se contaron los minutos y se midió el agua*” (María Eugenia, actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010). Creemos importante destacar el hecho de que hayan relacionado el tiempo directamente con una unidad de medida, caso opuesto al gasto del agua.

A su vez, los integrantes del equipo de Juan Felipe respondieron:

La cantidad de agua que cae por minuto.  
La cantidad de integrantes de la familia.  
La presión del agua.  
El tiempo que se demora cada integrante  
(Juan Felipe, actividad gasto de agua por familia en la práctica del baño diario, abril 13 de 2010).

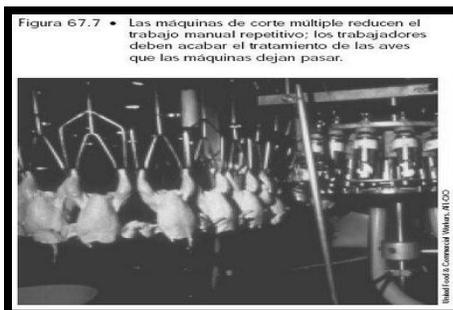
En esta repuesta, los estudiantes vincularon variables, dando cuenta de cualidades en términos de cantidades que implicaban medida o conteo. Ellos especificaron la medición de la cantidad de agua, pero en relación a una unidad de tiempo: el minuto. En el caso del equipo de María Eugenia, esta unidad fue destacada por ellos; tal vez por el hecho de que en la actividad del baño diario no cobró sentido hablar de segundos, ni tampoco lo tuvo el hablar de horas; ya que en la práctica del baño diario estamos bajo un dominio de la magnitud tiempo en minutos. En el caso de la medida de la cantidad de agua, los estudiantes no especificaron unidades, como ya lo dijimos, posiblemente porque no es muy común pensar en cuánta agua nos gastamos bañándonos, a menos que ésta esté escasa.

La cuarta actividad que consideramos en la Institución Educativa Rural El Hatillo se basó en las observaciones e indagaciones realizadas por uno de los equipos de investigación de la clase y a partir de dichos resultados planteamos un taller a todo el grupo.

Este equipo realizó algunas observaciones en una visita a industrias de la zona, porque para ellos fue importante darse cuenta del manejo que en estos estamentos se le daba al uso del agua. Bajo estas consideraciones, propusimos un taller para toda la clase relacionado con la actividad del uso del agua en las industrias; taller que constó de cinco puntos, de las cuales analizaremos tres.

En la primera situación presentamos dos imágenes a los estudiantes; una, relacionada con una industria textil en la cual se realizan procesos para el tratamiento y transformación de las telas; y, en la otra imagen, una industria de productos cárnicos, específicamente con el manejo de carnes de pollo.

Pedimos a los estudiantes explicar en cuál de estas dos industrias se gastaba más agua.



**Ilustración 33.** Ejemplos de dos industrias para análisis de consumo de agua

Elizabeth y María Eugenia respondieron que se gastaba más agua en la industria de cárnicos; Elizabeth hizo énfasis en que allí se debía gastar más agua porque el producto con el cual se trabajaba era para el consumo humano. En sus palabras:

En las aves, porque a cada momento deben lavarlos para que estén aptos para lo que son utilizados y, además, son para el consumo humano.  
(Elizabeth, actividad del uso del agua en las industrias, abril 20 de 2010)

Similarmente, María Eugenia expresó:

Las [industrias cárnicas] de las aves, porque al lavar cada ave se gasta mucha agua.  
(María Eugenia, actividad del uso del agua en las industrias, abril 20 de 2010).

Es posible que María Eugenia, al igual que Elizabeth, haya pensado en el cuidado que hay que tener al manipular un producto para el consumo humano, ya que en las familias de esta comunidad, aún es una práctica común la producción de pollos en las casas; proceso que implica un alto consumo de agua.

Juan Felipe, al relacionar las dos industrias de las gráficas, respecto a cuál gastaba más o menos agua, expresó:

Depende:

- De cuánto tiempo utilicen el agua.
- El tamaño de la empresa.
- El personal.
- Otros.

(Juan Felipe, actividad del uso del agua en las industrias, abril 20 de 2010).

Así como en la actividad relacionada con la práctica del baño diario en la familia, los estudiantes concluyeron que no era posible dar un dato preciso acerca de la cantidad de agua que gasta una familia de 12 integrantes, porque eso dependía de muchas variables, para responder a la inquietud, ¿en cuál de las dos industrias se gastaba más agua, si en la textil o en la de cárnicos? Juan Felipe utilizó el mismo razonamiento; pues esta nueva situación, estaba relacionada con el tipo de empresa.

Desde el análisis de esta categoría, consideramos y destacamos que los estudiantes protagonistas de esta investigación, reconocieron en el mundo real, diferentes variables, así como relaciones de dependencia entre ellas, en diversos fenómenos que implicaban cambio.

Cuando enunciamos que en el mundo real todo está vinculado, estamos reconociendo la complejidad de las relaciones que rodean un fenómeno. En ese sentido, en las actividades propuestas en esta categoría, los estudiantes dieron cuenta de la comprensión de una realidad, desde las cualidades involucradas en situaciones inherentes a ella.

**“FUNCIÓN: INSTRUMENTO PARA INTERPRETAR LEYES CUANTITATIVAS”**

Como lo expresamos en el capítulo referido a la metodología, el ser humano, en su relación con la naturaleza ha creado diferentes medios para dominarla, generados por su necesidad de supervivencia y trascendencia. Tal necesidad lo ha llevado a la observación de fenómenos presentes en la naturaleza, como lo plantea Caraça (1984), con el objetivo de descubrir sus causas y desarrollo. En el devenir histórico-social, como resultado de esta observación, ha surgido, como consecuencia, lo que históricamente se ha llamado ciencia.

De acuerdo a este autor:

El objetivo final de la ciencia es la formación de un cuadro ordenado y explicativo de los fenómenos naturales, del mundo físico y del mundo humano, individual y social.  
Caraça (1984, p. 107).

La ciencia es ante todo un fenómeno social, por lo tanto, la formación de dicho cuadro no puede tener un carácter estático, netamente descriptivo; debe ser interpretativo. Además, como lo expresa el mismo autor, como la realidad que la ciencia intenta describir está en permanente cambio, la validez del cuadro es igualmente mutable. Es decir, los cuadros explicativos son insuficientes en tanto que no reflejen el carácter fluctuante de la realidad que interpretan. Así, la ciencia es un instrumento humano siempre incompleto y en constante perfeccionamiento.

En esa línea, el científico es quien construye un cuadro explicativo de los fenómenos que observa, de acuerdo al momento socio-histórico que lo constituye. La construcción intelectual del científico debe ser, según Caraça (1984), coherente y debe estar siendo confirmada mediante la experimentación. El científico debe, además, interpretar las regularidades que observa en cierto fenómeno —es decir, interpretar las leyes naturales—

ya que son éstas las que le posibilitan la previsión. Así, al poder prever, el ser humano tiene mayor posibilidad de dominio sobre su medio. Pero para aumentar esta capacidad de previsión, el ser humano recurre a la identificación, estudio y aplicación de las leyes naturales<sup>11</sup>, sean éstas referidas a la variación de la cualidad del fenómeno observado —ley cualitativa— o a la variación de la cantidad del mismo —ley cuantitativa—. Sin embargo, históricamente el ser humano ha recurrido a la ley cuantitativa como apoyo para obtener una mayor comprensión de su realidad. Para tal efecto, ha creado instrumentos que le posibilitan estudiar estas leyes. Es así como han surgido los diferentes conceptos matemáticos, como el caso del concepto de *función*.

Es precisamente el concepto de *función*, al que nos referiremos en este capítulo. La categoría que analizaremos será la correspondiente al proceso de objetivación de dicho concepto por parte de los estudiantes protagonistas, en ambas instituciones. Para su análisis consideramos varias actividades en los que dicho concepto emergió de una forma natural, en ese proceso de objetivación.

La actividad que tomaremos como punto de partida, es la que llamamos “Tanque para almacenamiento de Agua”, realizada en la I.E Ramón Múnera Lopera. En la actividad tuvimos como intencionalidad la identificación de relaciones de dependencia y correspondencia entre variables, como componente esencial en el concepto de *función*; de forma tal que nos posibilitara observar el proceso de objetivación. Respecto al sentido del término objetivación, nos referiremos con detenimiento en páginas posteriores.

---

<sup>11</sup>Entendiéndose por ley natural, según Caraça (1984), a la regularidad presente en un fenómeno natural —del mundo físico o del humano, ya sea individual o social—

El motivo de la actividad fue el diseño de un tanque de almacenamiento de agua en El Raizal, barrio al que pertenece la institución. En el enunciado planteamos como necesidad conocer la variación del área de la base del tanque —cuadrada—, cuando el lado tomaba diferentes valores. Los estudiantes debían completar una tabla dada y, con base en ella, realizar algunas acciones y responder a las preguntas planteadas. Los alumnos trabajaron en equipo inicialmente y posteriormente socializaron lo hallado. A continuación presentamos la tabla que completó Jorge con su equipo.

Para ello, se utiliza la siguiente tabla, la cual debes completar.

| Lado (m) | Área(m <sup>2</sup> ) |
|----------|-----------------------|
| 0        | 0                     |
| 0,5      | 0,25                  |
| 1        | 1                     |
| 1,5      | 2,25                  |
| 2        | 4                     |
| 2,5      | 6,25                  |
| 3        | 9                     |
| 3,5      | 12,25                 |
| 4        | 16                    |

Ilustración 34. Cálculo del área de la base del tanque de almacenamiento.  
Jorge, Mayo 31 de 2010

De nuevo retomamos la representación tabular como una representación de la relación entre dos variables, cuantitativas en este caso, que posibilitó además identificar la regularidad existente en dicha relación. Pensamos que en este episodio, Jorge y las demás estudiantes protagonistas reconocieron la regularidad existente entre la variación del área en relación a la variación del lado del tanque sugerido, lo cual les posibilitó completar la tabla propuesta.

Inicialmente los estudiantes manifestaron inquietud respecto al valor 0, propuesto para el lado, pues no era tan evidente su significado. Sin embargo, después de un nuevo análisis a partir de la interacción con la maestra Claudia Patricia en el momento de la socialización grupal, la inquietud fue resuelta. Veamos un aparte de este momento del episodio.

- Claudia Patricia: ¿Bueno, [dirigiéndose al grupo] se les presentó alguna inquietud con la tabla?
- Leidy: Si. No entiendo lo de que el lado sea 0. ¿Cómo así?, ¿eso si puede ser?
- Claudia Patricia: ¿Qué piensan los demás sobre la inquietud de Leidy?
- Jorge: Será cuando pongan el primer ladrillo...
- Claudia Patricia: Y ese primer ladrillo ¿no tiene una medida? A ver, pensemos entre todos.
- Marcela: ¿Sería en el momento en que está sólo en el plano; es decir, cuando no se ha empezado a construir?, ¿no? Ni lado, ni área.
- Leidy: Ah sí, tal vez. Además, el cero sería el punto que se necesita para ubicarse y tomar las medidas a partir de ese punto, en el terreno y ahí todavía no puede hablarse de área tampoco.

(Registro sobre la socialización de la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Discusiones como la anterior se presentaron en diferentes momentos, a través de todas las actividades desarrolladas durante el trabajo de campo. Consideramos que estas discusiones fueron fundamentales, así como las dadas en los equipos, ya que la interacción en el aula es un componente importante en la creación de sentidos y significados. Es por medio de la interacción que los sujetos, además de constituirse a sí mismos, pueden llegar, como lo plantea Radford (2008), a objetivar el conocimiento; lejos de tener una función adaptativa, la interacción social es consustancial al proceso de aprendizaje. Es así como en el pasaje presentado, la inquietud de Leidy fue resuelta mediante la interacción con sus compañeros y su maestra. Ella obtiene una conclusión que le satisface sólo a través de la breve discusión generada en grupo.

Continuando con la actividad, las acciones propuestas y preguntas formuladas fueron:

7. Identifica la variable independiente. Justifica tu respuesta.
  8. ¿En esta situación, podría decirse que una variable, está en *función* de la otra? ¿Por qué?
  9. Realiza la representación gráfica de la relación entre las variables.
  10. ¿Cuántos valores de área le corresponde a cada lado? Explica.
  11. Halla una expresión algebraica, que represente la relación entre las variables.
- ¿Consideras que esta expresión, representa la *función* que identificaste en el punto 2?

Frente al primer punto, las respuestas de Jorge, Marcela y Leidy fueron:

El lado medido en metros, porque el área depende de él.  
(Jorge, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

El lado, porque si cambia el lado, cambia el área.  
(Marcela, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

La variable independiente es el lado, en metros, ya que él no depende del área sino que el área depende del lado.  
(Leidy, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

En las respuestas dadas pudimos notar que los estudiantes identificaron con facilidad la relación de dependencia existente entre las variables cuantitativas, área y lado. Este concepto —dependencia—, el cual consideramos como uno de los pilares del concepto de *función*, fue reconocido por los estudiantes desde actividades anteriores, como en la llamada “Muñeco de Pelos”. En ella, los estudiantes identificaron la dependencia entre variables como la cantidad de agua y el crecimiento de “pelos”. Así mismo, en otras actividades como la referente a las “Tarifas para servicios de Acueducto en Medellín”, los estudiantes identificaron relaciones de dependencia entre el valor a pagar por el servicio de acueducto en el mes de mayo de 2010, por alguna familia habitante de la ciudad de Medellín, y la cantidad de agua consumida por dicha familia.

Luego, en esta actividad analizada, los estudiantes ya tenían claridad sobre dependencia, pues habían tenido otros acercamientos a este concepto en momentos anteriores. Es decir, los alumnos hallaron un patrón que se repetía en diversas situaciones, lo cual les permitió apropiarse de la noción de relación de dependencia entre dos variables; relación, tanto de carácter cualitativo como cuantitativo.

Pensamos que de esta manera, incluso desde la construcción de la tabla, comienza a presentarse el proceso de objetivación, comprendido en el sentido de Radford (2006):

La objetivación es [...] ese proceso social de toma de conciencia progresiva [...] de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido.  
(Radford, 2006, p. 116).

Concordando con esta idea de objetivación consideramos que los estudiantes, protagonistas de esta investigación, en su proceso de interacción en el aula, inicialmente con sus compañeros de equipo y luego en las socializaciones, construyeron paulatinamente conceptos como el que estamos abordando –la dependencia entre variables– en esta actividad. De esta forma, a través de las actividades mencionadas, los estudiantes *tomaron conciencia progresiva* de nociones relacionadas al concepto de *función*, como dependencia.

Frente a la pregunta del segundo numeral, ¿en esta situación, podría decirse que una variable, está en *función* de la otra? ¿por qué?, los estudiantes expresaron las siguientes respuestas:

Sí. Porque el área está en *función* del lado, ya que el lado se multiplica dos veces y se llega al resultado del área.  
(Jorge, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Sí. Porque son variables en el sentido de que cambian. Pero la diferencia es que una depende de la otra.

(Marcela, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

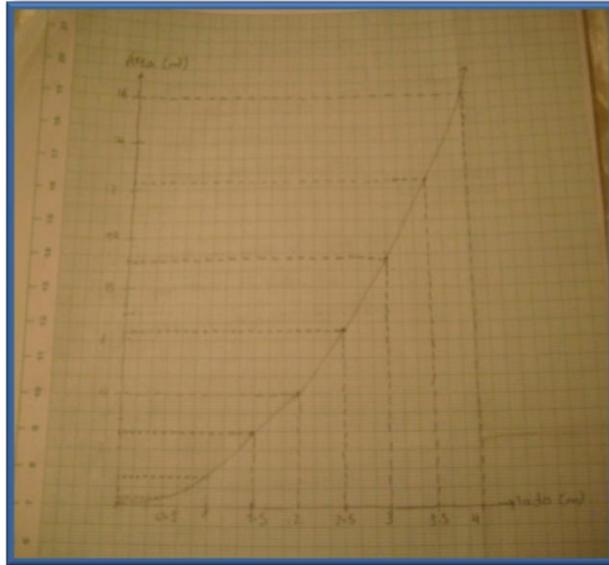
Sí. Porque si, por ejemplo, un terreno no tiene unos lados que compongan un área, no se diría que existiera un área [...] Así que el área está en *función* de los lados.

(Leidy, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

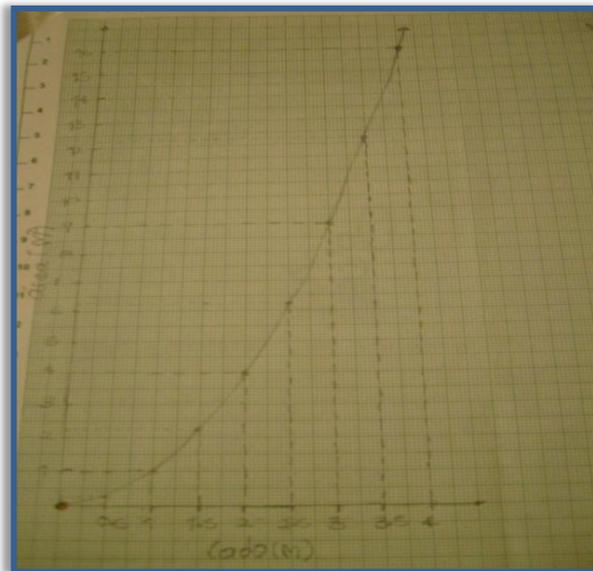
La pregunta que planteamos tuvo una intencionalidad explícita: que los estudiantes identificaran la dependencia como uno de los componentes fundamentales del concepto de *función*. En las respuestas dadas por los estudiantes, argumentadas desde sus individualidades como sujetos pertenecientes a un contexto particular, cada uno de ellos evidenció claridad sobre la *función* como una relación de dependencia entre dos variables.

Jorge, por ejemplo, se centró en la relación numérica existente entre ambas variables, en la estructura multiplicativa que permitió el cálculo de la variable dependiente. Marcela, por su parte, dio una justificación más amplia. Ella se apoyó en el cambio como componente esencial de la variable, el cual percibe en ambas, pero destaca la relación de dependencia entre ellas. En la respuesta de Leidy, aunque percibimos una confusión entre superficie y área, pudimos observar cómo ella fue más allá de la situación planteada, por medio de la formulación de una situación diferente, como parte de su argumentación, para hacer una generalización y así poner en evidencia la dependencia entre las variables.

En el tercer numeral: “Realiza la representación gráfica de la relación entre las variables”, propusimos una acción con la cual pretendimos analizar otro tipo de representación de una *función*: la gráfica cartesiana. A continuación presentamos las realizadas por los tres estudiantes.



**Ilustración 35.** Representación gráfica de la variación del área & variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Jorge, Mayo 31 de 2010



**Ilustración 36.** Representación gráfica de la variación del área & variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Marcela, Mayo 31 de 2010

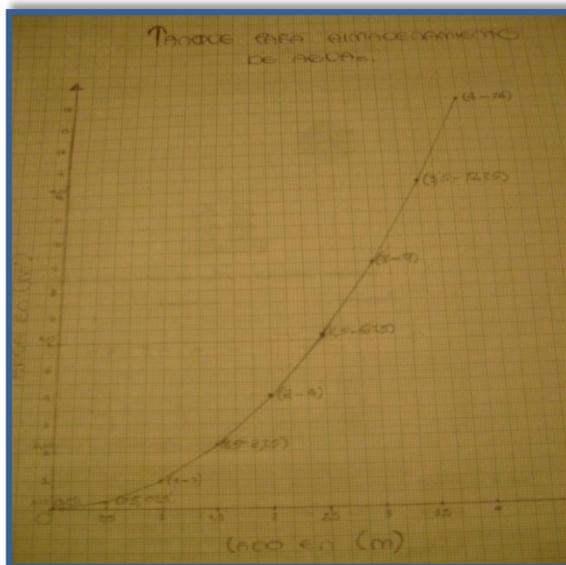


Ilustración 37. Representación gráfica de la variación del área & variación del lado de la base del tanque para almacenamiento de agua. Leidy, Mayo 31 de 2010.

En las representaciones gráficas, realizadas por los estudiantes, pudimos notar similitudes en su construcción. Las tres daban cuenta de la curva correspondiente a una *función* de segundo grado, aunque no la explicitaran como tal; la ubicación de las variables, dependiente e independiente, era también similar. Pensamos que tales similitudes se debieron en primer lugar, a los saberes previos de los estudiantes; y, en segundo lugar, a la intervención de nosotras, como maestras, en momentos anteriores de socialización en la que dimos explicaciones sobre este tipo de representaciones. Así mismo, hallamos diferencias en el uso de la escala en cada eje; en la forma de la hoja; en la ubicación de los nombres de las variables; en la ubicación o no de las parejas ordenadas y en la colocación o no, del título de la representación. Diferencias debidas a características individuales de cada uno de los estudiantes, a su forma singular de acercarse al objeto matemático.

En actividades anteriores como la nombrada: “Tarifas para servicios de Acueducto en Medellín”, los estudiantes realizaron representaciones gráficas de la relación entre el volumen de agua consumido por cierta familia de estrato 1 y el valor a pagar por el servicio

de agua, de acuerdo al volumen consumido, en el mes de mayo. A continuación presentamos las gráficas construidas por Marcela y Leidy.

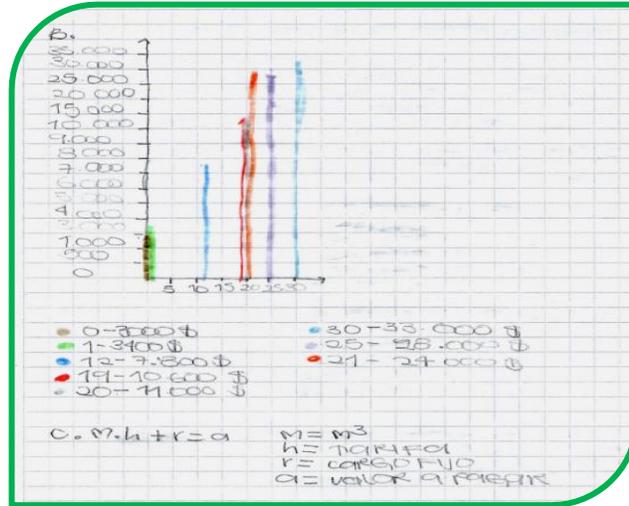


Ilustración 38. Volumen de agua consumido por cierta familia de estrato 1 & valor a pagar por el servicio de agua, de acuerdo al volumen consumido, en el mes de mayo. Marcela, Mayo 10 de 2010.

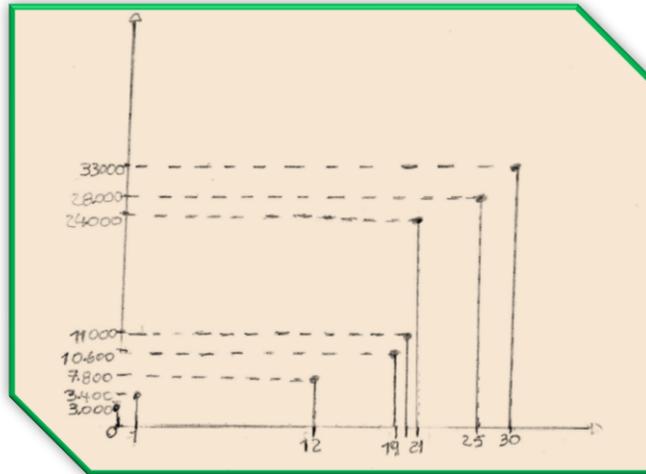


Ilustración 39. Volumen de agua consumido por cierta familia de estrato 1 & valor a pagar por el servicio de agua, de acuerdo al volumen consumido, en el mes de mayo. Leidy, Mayo 10 de 2010

En ambas gráficas observamos, por ejemplo, cómo las estudiantes ubicaron los puntos en el plano, mas no los unieron. Este hecho nos llevó a pensar que en ese momento no era significativo para ellas el concepto de curva. Consideramos que Marcela y Leidy no habían objetivado, aun, la gráfica cartesiana como una forma de representación de la *función*; de

la forma canónica Consideramos importante la representación gráfica, pues pensamos que es otra forma de que los estudiantes objetiven la *función*. Esta forma de representación aproxima a los estudiantes a un tipo de lenguaje que posibilita otra manera de visualizaciones del objeto; otra forma de ver las relaciones entre las variables. En ese sentido concordamos con García et al (1997), cuando expresa que las representaciones gráficas acercan a los alumnos a una mejor comprensión de la noción de *función*. Los estudiantes realizaron un proceso de construcción de significados personales, no sin dificultad, de conceptos histórica y socialmente elaborados por la cultura, como es la representación en el plano cartesiano.

Respecto a la pregunta del numeral cuatro, ¿Cuántos valores de área le corresponde a cada lado?, los estudiantes dieron respuestas como las presentadas a continuación.

Les corresponde un valor de área por cada lado porque el lado se multiplica por él mismo y se obtiene el área.

(Jorge, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Uno. Un lado, un área.

(Marcela, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Le corresponde un valor de área a cada lado.

(Leidy, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Jorge, Marcela y Leidy se refirieron a la correspondencia unívoca y, aunque no lo expresaron de tal forma exactamente, pensamos que en ese momento ya tenían claro el que a cada elemento que representa la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Desde el momento en que completaron la tabla, los alumnos reconocieron la correspondencia entre los dos conjuntos: el conjunto de valores

conformado por la variación del lado; y el conjunto de los valores de la variación del área por medio de la regularidad existente en el fenómeno analizado. Esto es, la variación en el diseño de un tanque de almacenamiento de agua, al variar el área de su base.

El hecho de la claridad en cuanto a la noción de correspondencia, por parte de Jorge, Marcela y Leidy, lo observamos además en momentos anteriores y especialmente en el ya antes citado, la actividad que llamamos “Tarifas para servicios de acueducto en Medellín”. En dicha actividad los estudiantes identificaron la correspondencia existente entre el volumen de agua consumido por una familia de un estrato social determinado y el valor de la tarifa a pagar por la misma familia.

Consideramos que en esta actividad se evidenció el proceso de objetivación de la *función* por parte de los estudiantes protagonistas, de acuerdo a la mirada que estamos abordando en esta investigación, es decir, la *función* desde las nociones de dependencia y correspondencia entre variables, esencialmente. En esa dirección coincidimos con el abordaje de Caraça (1984) del concepto de *función*, al considerarla, fundamentalmente, como un instrumento matemático cuya esencia es la correspondencia entre variables que poseen una relación de dependencia. Instrumento que fue construido socialmente a través de un devenir histórico, a partir de la necesidad de estudiar leyes cuantitativas de ciertos fenómenos.

Caraça presenta la siguiente definición de *función*:

Sean  $x$  y  $y$  dos variables representativas de conjuntos de números; se dice que  $y$  es función de  $x$  y se escribe

$$y = f(x),$$

si entre las dos variables existe una correspondencia unívoca en el sentido  $x \rightarrow y$ .

A  $x$  se le llama variable independiente y a  $y$ , variable dependiente.

(Caraça, 1984, p. 129)

En la definición anterior observamos nociones que hemos tratado a través de nuestro trabajo de investigación: variable, dependencia y correspondencia. Nociones que tanto en la definición dada por este autor, como en su esencia, están entrelazadas para formar un todo.

Es ese todo, precisamente, el que pretendimos que los estudiantes objetivaran desde sus propias subjetividades. Entendiendo la objetivación en el sentido de Radford (2004), cuando plantea que el término objetivar se refiere a realizar acciones que posibiliten el hacer tangible lo que aún no lo es. Es decir, como lo expresa dicho autor “volver aparente lo potencial” (2004, p. 18). De esta forma, los estudiantes se aproximaron al concepto de *función* al identificar, interpretar y hacer generalizaciones de las nociones de dependencia y correspondencia, en las regularidades de los fenómenos que estudiaron en las actividades propuestas.

Respecto al quinto numeral planteado, “Halla una expresión algebraica que represente la relación entre las variables. ¿Consideras que esta expresión representa la *función* que identificaste en el punto 2?”, los estudiantes dieron las siguientes respuestas:

$$Z \times Z = A$$

$Z$  es el lado y  $A$  es el área.

Sí la representa, porque con todas las operaciones que hicimos nos dimos cuenta que el área depende del lado.

(Jorge, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

En la expresión hallada, Jorge emplea un lenguaje poco riguroso, de acuerdo a los parámetros algebraicos, pero da cuenta de la relación existente entre el lado y el área. Esto nos llevó a pensar en que la expresión encontrada por Jorge estaba dotada de significado para él; pues aunque no emplea los cánones de la forma de expresar una *función*, él da cuenta del concepto. Esto lo identificamos, además, en la justificación que hizo. Así, Jorge

argumentó la expresión que halló como la que representó los procedimientos que él empleó para hallar cada área en correspondencia y dependencia de cada lado.

Marcela expresó:

$$l \times l = a$$

$l = \text{lado}$   
 $a = \text{área}$

Sí, porque el área se halla dependiendo del lado. Y en la expresión algebraica se debe multiplicar el lado por el lado, para que pueda dar el área.  
(Marcela, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Así como Jorge, Marcela, además de hallar una expresión que representó la relación, similar a la de él, consideró necesario especificar el significado de las letras que empleó. En la argumentación, Marcela, en su forma particular, justificó la expresión como representación de la *función* de la situación analizada, mediante la relación de dependencia entre las variables.

Leidy respondió de la siguiente manera:

Expresión algebraica:

$$a = l \times l$$
$$a = l^2$$

Sí, porque vemos claramente que el área equivale a lado por lado. O sea, cuando multiplicamos el lado por el lado, hallamos el área.  
(Leidy, registro sobre la actividad “Tanque para almacenamiento de agua”, 31 de mayo de 2010)

Leidy, además de hallar una expresión similar a la de Marcela y Jorge, empleó la potenciación. En su justificación se apoyó en relaciones de equivalencia y, similarmente a la dada por Jorge, se apoyó en los cálculos que utilizó para hallar el área.

Los tres estudiantes hallaron, con facilidad, una representación algebraica de la situación planteada inicialmente; tal vez por los saberes previos que poseían al momento de hallarla

y/o porque fue significativa para ellos. Fue evidente que para los estudiantes la expresión analítica que encontraron representó el procedimiento que emplearon para relacionar las dos variables.

Así, los tres estudiantes hallaron lo que Caraca (1984) nombra como una *traducción analítica o ley matemática del fenómeno*, al referirse a la expresión analítica de una *función*. En esa medida, los estudiantes protagonistas sintetizaron en la expresión analítica que hallaron, el conjunto de operaciones que realizaron inicialmente, de forma tal que les permitió encontrar una relación de correspondencia entre los valores de las variables; representando así la *función* particular, de otra forma, dotada de significado.

Decidimos para esta tercera categoría escoger también cuatro actividades que tuvieron lugar en la Institución Educativa Rural El Hatillo. En la primera, recogimos las consideraciones e interpretaciones de los estudiantes con respecto a una noticia que se publicó en un periódico de circulación nacional, sobre un nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia. En la segunda, analizamos la forma cómo los estudiantes interpretaron la nueva forma de cobro del agua en el corregimiento el Hatillo; una tercera actividad tuvo que ver con los resultados de una observación real en el colegio, en la cual los estudiantes tomaron datos cuantitativos de una fuga de agua en una de las llaves de la institución. En la cuarta actividad, nosotras utilizamos con los estudiantes la misma situación de la fuga de agua en el colegio, pero en este caso haciendo referencia al costo económico de dicha fuga, por lo cual utilizamos, para el análisis, los datos de la situación que inspiraron la segunda actividad (forma de cobro del agua en el Hatillo).

En estas cuatro actividades quisimos profundizar en una reflexión de la *función* que diera cuenta de la forma cómo los estudiantes objetivaron dicho concepto desde la identificación de variables independientes y variables dependientes de tipo cuantitativo, la identificación de la correspondencia entre variables en una relación, la utilización de diferentes formas de representación de relaciones de tipo funcional, y el reconocimiento de las leyes que generaron dichas relaciones.

En la actividad “Un nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia” nos basamos en una noticia de un periódico de circulación nacional del año 2009, en la que se mencionaba una propuesta de las autoridades que regulan el servicio del agua en Colombia, para cobrar recargos por exceso en el consumo del agua. Tal medida de cobro contenía ciertos parámetros como el clima predominante en las diferentes zonas del país. A continuación, presentamos el texto referenciado:

A partir del próximo año, los colombianos no podrán desperdiciar ni un metro cúbico de agua potable en las viviendas u oficinas, a menos que quieran pagar más. .. Todo esto debido al anuncio que acaba de hacer el Ministerio de Ambiente y la Comisión de Regulación de Agua (CRA), en el sentido de que el despilfarro de agua se castigará con el pago doble de la tarifa por cada metro cúbico de agua que se derroche. La CRA y el Vice ministerio de Ambiente fijaron los límites de consumo mensual que cada familia podrá tener, según el clima de la ciudad donde viva: en tierra fría será 28 metros cúbicos; en zona templada, 34 metros cúbicos y en clima caliente, 35.

...Por ejemplo, si hasta ahora pagaban 2.210 pesos como cargo básico en una ciudad fría como Bogotá, con la nueva medida sancionatoria le doblarán el cobro a 4.420 pesos por cada metro cúbico que exceda los 28 metros cúbicos fijados como tope. (El Tiempo, diciembre de 2009, Lucevín Gómez E.)

En un taller que propusimos para la clase como parte del proceso de esta actividad, abordamos varios cuestionamientos. En primer lugar preguntamos a los estudiantes: ¿Qué opinas de la medida establecida por el gobierno con respecto al consumo de agua en los hogares? En este sentido, ellos respondieron en términos similares a las reflexiones manifiestas en las actividades anteriores ya que hicieron referencia al deber

de las personas de hacer buen uso del agua; en términos generales les pareció adecuada la medida. Juan Felipe y su equipo de trabajo, por ejemplo, consideraron que la medida ayudaría a tomar conciencia de que el agua para el consumo humano se está acabando.

En esa dirección, Juan Felipe expresó:

Nosotros pensamos que en esta decisión se tiene un objetivo muy consciente, porque en la actualidad hay un gran despilfarro de agua, porque se considera que el agua es barata y abunda en nuestro país.

(Juan Felipe, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010)

En las opiniones de María Eugenia y Elizabeth observamos una relación directa con el contexto familiar y su relación con el consumo del agua. María Eugenia manifestó que la medida ayudaría a que la gente se diera cuenta de la importancia del agua cuando la necesitan para el consumo en los hogares; además Elizabeth dijo:

Me parece que es buena [la medida para el nuevo cobro del agua] para las familias que gasten poco agua y que saben cuidar.

(Elizabeth, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

En este punto de la discusión es importante destacar que los estudiantes no manifestaron el hecho de que estos topes en el consumo del agua estaban por encima del promedio de consumo de las familias colombianas; además, en la discusión con toda la clase, otros estudiantes hicieron énfasis en que la medida discriminada de esta manera tenía sentido, pues las personas de clima cálido necesitarían usar más agua que los que viven en clima frío.

En una segunda parte del taller planteamos la siguiente pregunta: “En la lectura se hizo mención del consumo de agua en metros cúbicos, y nosotros comúnmente hablamos también de litros, ¿qué relación existe entre la medida en metros cúbicos y la medida en litros?” Nuestra intencionalidad con el planteamiento de esta pregunta era el que los

estudiantes le dieran sentido a las unidades de capacidad propuestas, de acuerdo a sus prácticas cotidianas; pues pensamos que no es una práctica común el reflexionar sobre unidades de medida. Es así que, creemos que las personas de manera individual, pensando en la cantidad de agua que tomamos, hacemos referencia a la medida en litros; pero cuando se trata del cobro del agua que usamos para nuestros oficios domésticos y en general para uso comunitario, la unidad a la que nos remitimos es el metro cúbico ( $m^3$ ). En este último caso, para muchas personas resulta difícil dimensionar la cantidad de agua asociada a uno o más metros cúbicos.

Para los tres estudiantes protagonistas de la investigación, las respuestas fueron variadas.

En el caso de Elizabeth, ella expresó:

Los litros corresponden a la cantidad de agua que hay en metros cúbicos.  
(Elizabeth, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

Sin embargo, no especificó en términos de cantidad el tipo de correspondencia. Se podría entender, desde lo manifestado por Elizabeth, que la unidad de medida litro es la misma que la unidad de medida metro cúbico; sin embargo, en los usos que ella posteriormente hizo de ambas medidas, nos dimos cuenta que la correspondencia a la cual ella hacía referencia tenía una regla de asignación diferente; a cada metro cúbico le asociaba 1000 litros.

En el caso de Juan Felipe y su equipo, ellos respondieron:

Un metro cúbico está formado por 100L de agua. (Juan Felipe. Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

Consideramos que esta respuesta puntual, es muy común cuando se trata de conversiones de unidades en el sistema métrico decimal. Es decir, que sabemos que existen, pero que no

recordamos en todo momento; además, 100 litros es una cantidad de agua considerable si se trata de relacionar con un consumo individual. Después de la puesta en común por todo el grupo, para Juan Felipe y su equipo hubo claridad sobre la equivalencia entre metro cúbico y litro.

La respuesta de María Eugenia, fue:

La relación que existe entre litros y metros cúbicos es que los metros cúbicos son de 1000 litros y los litros van dependiendo de la cantidad. (María Eugenia, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

En el momento de la socialización con todo el grupo, María Eugenia manifestó satisfacción de tener esta relación clara, y en los momentos en que esta pregunta se retomaba, ella respondía con seguridad.

Una tercera acción de este taller de clase, motivada por un nuevo cobro de agua en Colombia, estuvo guiada por el siguiente enunciado: “En ciertas oportunidades, para la gente es más claro cuando las informaciones son dadas en gráficos. Propongan una representación gráfica para informar a la comunidad sobre los límites de consumo mensual que cada familia podrá tener, según el clima de la ciudad donde viva: en tierra fría será 28 metros cúbicos; en zona templada, 34 metros cúbicos y en clima caliente, 35 metros cúbicos”

Esta situación resultó bastante interesante pues aquí, tanto nosotras como los estudiantes nos empezamos a dar cuenta que la nueva medida para el cobro del agua en Colombia no era tan clara en términos cuantitativos y más difícil aun, era tratar de representar esta situación en un gráfico para explicarla a otros.

En el gráfico que presentamos a continuación, Elizabeth realizó una representación en la cual asoció en su dibujo los tipos de clima y el tope de consumo sin multa por exceso. Es importante destacar que ella, en su dibujo, hizo referencia a las zonas según el clima y ubicó los topes a un lado. Sin embargo, una persona que no conociera la noticia, tendría dificultad para interpretarla; pues consideramos que en las representaciones gráficas es importante explicitar las variables que intervienen en las relaciones y el sentido de las mismas.



Ilustración 40.. Representación, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, Elizabeth, abril 29 de 2010

Para explicar la medida del nuevo cobro de agua a otras personas, por medio de una representación gráfica, Juan Felipe decidió hacerlo por medio de un plano cartesiano, como lo presentamos en la siguiente ilustración:

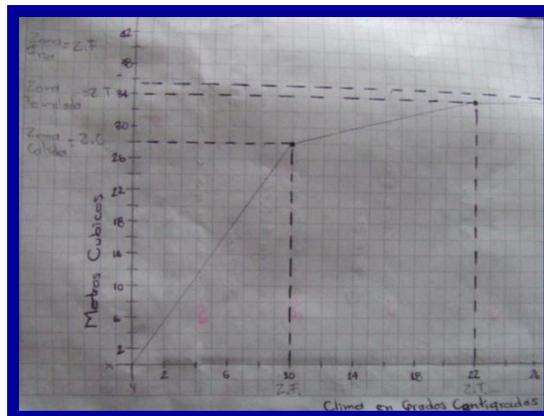


Ilustración 41. Representación, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia,

En ese tipo de representación gráfica, Juan Felipe utilizó algunos saberes previos, como el especificar las variables en relación con los ejes horizontal y vertical del plano cartesiano. Al tratarse de una interpretación de una situación real, Juan Felipe tomó ciertas decisiones para su representación. En primer lugar, él asumió que el clima frío tenía un tope en  $10^{\circ}\text{C}$ ; la zona templada la asoció a un clima con un tope de  $22^{\circ}\text{C}$  y la zona cálida la hizo corresponder con un clima de  $30^{\circ}\text{C}$ . Además, Juan Felipe, con la variable ubicada en el eje vertical del plano cartesiano, que denominó metros cúbicos, hizo referencia a los topes en el consumo de agua. Sin embargo, en este punto surgió una dificultad, pues la noticia anunciada por el gobierno no implicaba que los topes para el consumo del agua aumentaran en correspondencia monótona creciente, con la graduación climática en el país. En esta situación, percibimos una resistencia a pensar en asignar un valor constante —de metros cúbicos de agua— a cierto intervalo (de temperatura). Fue así como Juan Felipe realizó un gráfico continuo partiendo desde el origen de las coordenadas; como se puede apreciar en la ilustración anterior.

El cuarto punto de este taller, que relacionaba el nuevo cobro del agua en Colombia, estuvo asociado a realizar unos cálculos orientados por el siguiente enunciado:

Supongamos que en Barbosa se implemente esta medida y que se cobra por metro cúbico de agua potable \$300

- a. ¿Cuánto paga una familia que consume  $15\text{ m}^3$ ?
- b. ¿Cuánto paga una familia que consume  $20.5\text{ m}^3$ ?
- c. ¿Cuánto paga una familia que consume  $34\text{ m}^3$ ?
- d. ¿Cuánto paga una familia que consume  $35\text{ m}^3$ ?
- e. ¿Cuánto paga una familia que consume  $40\text{ m}^3$ ?

(Actividad de clase, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

En esta acción de la actividad, quisimos indagar por la comprensión de la ley de cobro en relación con la instrucción dada por la noticia del gobierno desde una situación concreta.

Para realizar estos cálculos, el equipo de Elizabeth procedió a multiplicar la cantidad de agua utilizada —dada en  $m^3$ — por 300; esto lo hizo con todos los valores. María Eugenia y Juan Felipe presentaron los procedimientos para la ley de cobro de un modo diferente; ellos tuvieron en cuenta que Barbosa es un municipio que está en clima templado, lo cual les indicó que el tope para comenzar a pagar la multa por exceso de consumo estaba en los  $34m^3$ . A continuación presentamos la forma como ambos procedieron para estimar el valor del agua con el nuevo cobro, según las interpretaciones que ellos hicieron de la noticia:

Una familia que consume  $35m^3$  de agua, paga \$10500, pero hay una multa de \$300 por exceso de agua = \$10800.

Una familia que consume  $40m^3$  de agua, paga \$12000, pero hay una multa de \$1800 por exceso de agua = \$13800.

(Juan Felipe, Nuevo criterio para el cobro del agua en Colombia, abril 29 de 2010).

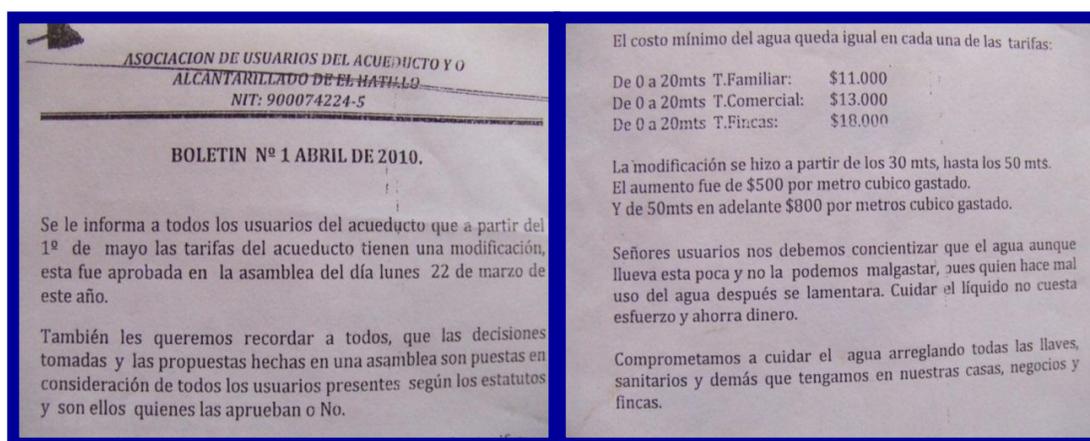
Juan Felipe halló los productos que relacionaban la cantidad de agua gastada con el dinero que se paga por metro cúbico y sumó 300 —que es el valor supuesto para un metro cúbico de agua en pesos—, tantas veces como se presente el exceso.

Aunque los resultados de María Eugenia fueron los mismos que los de Juan Felipe, ella expresó la regla de cobro de dos modos diferentes. María Eugenia realizó las operaciones para  $35m^3$ , multiplicando 34 por 300, obteniendo así, 10200. Luego sumó 600, lo cual le dio como resultado \$10800. Para calcular el valor a pagar por los  $40m^3$ , ella multiplicó 40 por 300, y luego sumó 1800.

Esta parte de esta actividad nos permitió darnos cuenta que para los estudiantes fue fácil realizar una interpretación en términos operativos en cuanto a la nueva regla para el cobro del agua en Colombia. Sin embargo, no pasó igual con la propuesta de interpretación desde una representación gráfica; los tres estudiantes protagonistas, en este momento de la

actividad, no se preguntaron por un cargo fijo que usualmente se cobra en estos servicios básicos, ni por el precio tan bajo que colocamos al metro cúbico de agua en esta situación. Estas acciones de los estudiantes fueron importantes, porque a partir de ellas, pudimos proponer otras acciones y cuestionamientos en actividades posteriores.

En la actividad referente al consumo de agua en el hogar, otro de los equipos conformados en clase, estuvo conversando con integrantes de la Junta del Acueducto del corregimiento del Hatillo, y de manera especial con el fontanero, el cual es la persona encargada del manejo del agua en la parte del nacimiento de la quebrada que surte el acueducto y la parte del tratamiento, distribución y reparación de todo el sistema de acueducto. El fontanero le dio al equipo, entre otra, informaciones el nuevo boletín para el cobro del agua en el corregimiento. Utilizando estos datos y una observación que las niñas del equipo realizaron en sus casas, con respecto al promedio de agua que diariamente utilizan en sus hogares, el equipo, con apoyo de la maestra Luz Adriana, propuso una actividad para todo el grupo. En la siguiente gráfica presentamos una imagen del boletín para el cobro del servicio del agua en el corregimiento:



**Ilustración 42. Criterio de cobro del agua en el corregimiento**

La actividad para todo el grupo fue enunciado en su primera parte, por la maestra, de la siguiente forma: teniendo como base la información del boletín N°1 de abril de 2010 de la Asociación de Usuarios del Acueducto y Alcantarillado del Hatillo, realizar un cálculo aproximado de lo que las familias de las compañeras del equipo “Las Ecológicas” deberían pagar mensualmente, si el consumo promedio diario fuera como el presentado por ellas en clase según su observación.

| Las Ecológicas  | Consumo de agua diario por familia. Litros | Consumo mensual Litros | Consumo mensual Metros cúbicos | Costo del consumo mensual. |
|-----------------|--|------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| Lina Sosa       | 19m <sup>3</sup>                           | 570000L                | 570m <sup>3</sup>              | 437000                     |
| Lina González   | 360L                                       | 10800L                 | 10,8m <sup>3</sup>             | 11000                      |
| Yury Correales  | 340L                                       | 10200L                 | 10,2m <sup>3</sup>             | 11000                      |
| Mariana Londoño | 133  | 3990L                  | 3,99m <sup>3</sup>             | 11000                      |

Tabla 16. Actividad, el agua de consumo para el hogar, mayo 4 de 2010

Los datos dados para la actividad de clase fueron las dos primeras columnas de la tabla, correspondientes a las integrantes del equipo, con los datos que ellas trajeron de sus casas. En la clase se proyectó el consumo de agua de estas familias para un mes, en litros y en metros cúbicos; además, se calculó el costo de este consumo según las nuevas tarifas de cobro para el corregimiento.

Realizar estos cálculos y conversiones fue relativamente fácil para los estudiantes, pues reconocieron la relación que habían trabajado antes entre litros y metros cúbicos. En el momento de calcular el costo que debía pagarse por el servicio, los datos obtenidos por los alumnos, fueron relacionados fácilmente con un valor constante, como se vio en un gráfico que Juan Felipe realizó de esta situación, el cual presentamos a continuación.

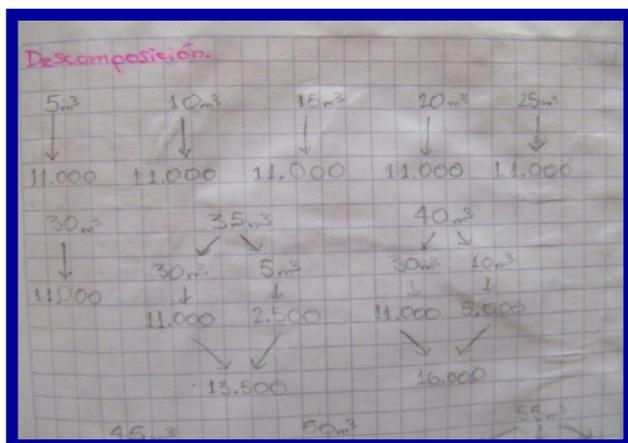


Ilustración 43. Actividad, el agua de consumo para el hogar, Juan Felipe mayo 4 de 2010

Al calcular lo que se debería pagar en la familia de una de las estudiantes pertenecientes al grupo, empezaron a surgir algunas complicaciones y preguntas. En primer lugar, los estudiantes expresaron que en la observación realizada por la compañera, pudo haberse presentado un error, ya fuera desde el modo de calcular la cantidad de agua que se gastaban en su casa en promedio por día, o porque hubo algún error al expresar los resultados por la unidad de medida; pues gastarse  $19\text{m}^3$  diarios de agua no les parecía usual. Sin embargo, este dato, con sus posibles equivocaciones, posibilitó hacer uso ampliamente del nuevo criterio de cobro para el agua en el corregimiento, como lo presentamos en el siguiente esquema:

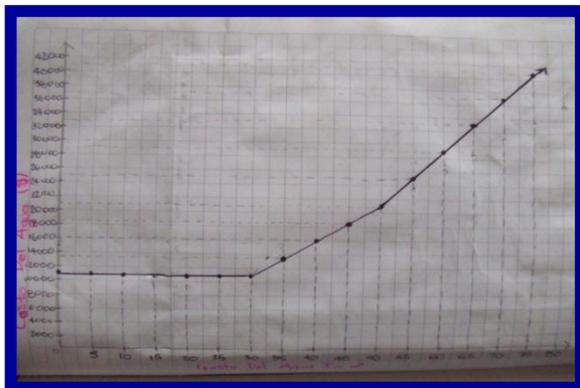


Ilustración 44. Actividad, el agua de consumo para el hogar, cálculo del costo de agua, Juan Felipe, mayo 4 de 2010

En esta imagen se aprecia la forma como Juan Felipe calculó los costos del gasto de agua, aumentando de cinco en cinco los volúmenes del líquido expresados en metros cúbicos. Hasta los treinta metros cúbicos se cobraba un valor constante de \$11.000 —fue en esta situación donde los estudiantes entendieron de qué se trataba lo del cargo fijo para los servicios públicos—, como lo indicaba el boletín del acueducto.

Esta actividad posibilitó que los estudiantes comprendieran la regla para el cobro del servicio de suministro de agua en el corregimiento, así como la interpretación de dicha ley desde una representación gráfica; como puede observarse en el siguiente gráfico:

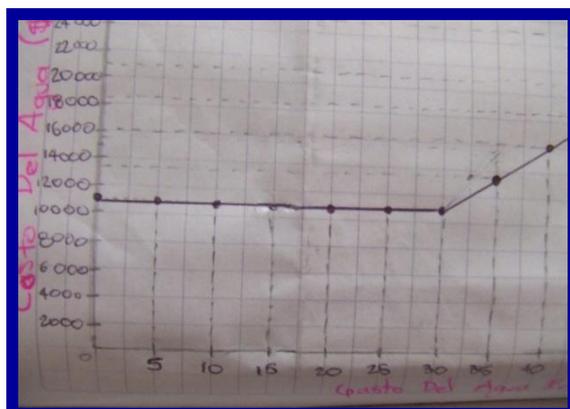


Ilustración 45. Actividad, el agua de consumo para el hogar, gráfica de costo del servicio de agua, Juan Felipe, mayo 4 de 2010

Los estudiantes manifestaron entusiasmo al visualizar en la representación gráfica, el significado de las diferentes condiciones que se presentaron en el boletín del acueducto para el nuevo cobro del agua en el corregimiento. Visualización hecha, al observar que la gráfica no presentaba un ritmo de variación constante, debido al comportamiento de los consumos de agua.

En esta actividad propusimos además, a los estudiantes, expresar preguntas o inquietudes con relación a la medida que se estaba adoptando en la comunidad, respecto al servicio del agua. Juan Felipe manifestó algunas inquietudes haciendo alusión a ciertas confusiones generadas desde la instrucción del boletín:

En el costo se habla de 0 a 20 mts, ¿estos son  $m^2$  o  $m^3$ ?.  
(Juan Felipe, actividad, el agua de consumo para el hogar, cálculo del costo de agua, mayo 4 de 2010)

Con esta observación, Juan Felipe hizo claridad acerca de un asunto que es muy común en el lenguaje de las personas en la comunidad, cuando se refieren a unidades de volumen o de área. Estas personas obvian, según la situación, el hecho de tener que especificar que se trata de unidades cuadradas o cúbicas. Juan Felipe, como otros estudiantes del grupo, no veía claro el costo que debería pagarse por un consumo de agua que estuviera en un rango entre  $20m^3$  y  $30m^3$ , pues al principio interpretó que la multa de \$500 se empezaba a cobrar desde los  $30m^3$ , y que se decía en el boletín informativo del acueducto que hasta los  $20m^3$  se pagaban \$11000. Con esta duda los estudiantes realizaron la actividad, pero luego, consultando con las personas de la junta administradora del acueducto nos aclararon, a las maestras y alumnos, que el cobro de los \$500 pesos se hacía a partir de consumos que superaran los  $20m^3$ , y que esto se debía aclarar en una nueva versión del boletín, pues en

realidad había una imprecisión. Hacer estas aclaraciones posibilitó que en el grupo tuviera cuidado en cuanto a la interpretación de la regla de cobro y la forma de efectuar operaciones aritméticas, cuando se debió usar dicha regla, pues las actividades posteriores estuvieron directamente relacionadas con la nueva forma de cobrar el agua en el corregimiento el Hatillo.

En estos dos momentos, los estudiantes dieron cuenta del reconocimiento de una ley o estrategia para efectuar unos cobros en el servicio de agua, pero surgieron ciertas dificultades en el instante de dar cuenta de dichas leyes, especialmente cuando se trató de involucrar varios tipos de representaciones. En esa dirección, retomamos a Davidov (1988), cuando plantea que:

Las representaciones, surgidas gracias a la imaginación en la actividad objetual-sensorial de las personas en su comunicación, comenzaron a servir cada vez más como medio para planificar las acciones futuras y esto presuponía la comparación de sus diversas variantes y la elección de la mejor. Gracias a esto, las representaciones se hicieron objeto de la actividad del hombre sin una referencia directa a las cosas mismas. Surgió una actividad que permite transformar las imágenes ideales, los proyectos de las cosas sin cambiar hasta un cierto momento las cosas mismas.  
(Davidov, 1988, p.121)

Al proponer la otra actividad considerada en este momento del trabajo de campo, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, pensamos en cómo vincular, desde la realidad, elementos que posibilitaran a los estudiantes dar cuenta de esa complejidad que envuelve al concepto de *función*.

Sergio era un estudiante del grupo que decidió en un momento de este proceso del trabajo en clase, realizar su investigación de manera individual. Sus acciones estuvieron centradas en realizar un seguimiento a las pocetas y lavamanos de la institución, para dar cuenta si se estaba desperdiciando agua por fugas o descuidos al dejar la llave abierta.

El día 5 de mayo de 2010 los estudiantes detectaron la existencia de una fuga de agua en una poceta de la institución; suceso que motivó a Sergio realizar un seguimiento y a tomar datos correspondientes de la situación. Este hecho, suscitó una nueva actividad, en la cual, inicialmente, las maestras presentamos a todo el grupo, una representación de los resultados obtenidos por Sergio en su observación. Posteriormente, planteamos un taller que constaba de siete situaciones y/o preguntas. La primera pregunta era alusiva a lo que ellos interpretaban de la gráfica, en relación a la situación de la fuga de agua en el colegio.

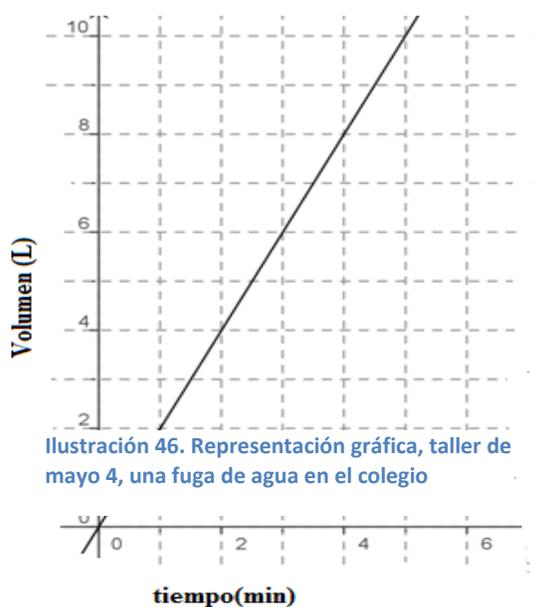
En esta situación decidimos presentar la información de forma gráfica, teniendo en cuenta que en situaciones anteriores los enunciados fueron explícitos desde el lenguaje natural.

Elizabeth interpretó, en esta representación gráfica:

“Se desperdicia demasiada agua en muy poco tiempo”  
(Elizabeth, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

Pudimos apreciar cómo los estudiantes reconocieron la relación entre las variables tiempo y volumen de agua desperdiciado. Elizabeth también reconoció la rapidez de dicho crecimiento al enunciar que en poco tiempo, se pierde mucha agua; aunque ella no hizo alusión a relaciones numéricas.

Juan Felipe y María Eugenia también manifestaron el reconocimiento de un alto desperdicio de agua a partir de esta fuga, expresando, además, sus interpretaciones desde lo numérico:



... por una simple fuga se puede desperdiciar mucha agua y esto va a favor de la destrucción del medio ambiente. Por 1 min se fugan 2L de agua. Por 2min se fugan 4L de agua.  
(Juan Felipe, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

En la interpretación de María Eugenia surgió un elemento diferente, el de la aproximación: Mientras Felipe afirmaba que por minuto se gastan 2 litros de agua, María Eugenia expresaba:

... el volumen de agua que sale de la fuga era muy alto, que en un minuto se botaron más de 2L  
(María Eugenia, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

La expresión de María Eugenia evidenció, de alguna manera, la existencia de un rango de incertidumbre, generado en una representación gráfica; más en una situación que está dando cuenta de un hecho real, donde el caudal de agua no es constante.

La segunda pregunta del taller fue: ¿De qué depende la cantidad o volumen de agua desperdiciado en este caso? Con esta pregunta quisimos reafirmar el reconocimiento de variables independientes y dependientes en una relación, según las respuestas de la pregunta anterior, en la que los estudiantes identificaron cierta relación entre el tiempo y el volumen de agua que se malgastaba.

María Eugenia y Elizabeth expresaron que el volumen de agua desperdiciado en este daño dependía:

Del daño en la canilla y la presión del agua.  
(María Eugenia, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

De la presión que tenga la llave y cómo esté abierta.  
(Elizabeth, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

Los dos aspectos que las estudiantes enunciaron fueron los mismos. Ellas se refirieron a la cantidad de agua saliente por el grifo en determinada unidad de tiempo; y, según las alumnas, de esto dependía el agua que se desperdiciaba, porque era muy diferente un daño que produjera simples gotas, a un daño de grandes dimensiones. Cuando María Eugenia y Elizabeth hablaron del daño en la llave y cómo estaba abierta, hacían alusión a la “magnitud” del daño. Según ellas, si era un daño leve no se gastaría tanta agua, porque la llave no estaría tan abierta. Además, infirieron que si el daño era leve, se podría arreglar pronto y no se desperdiciaría tanta agua.

Juan Felipe consideró que las variables de las cuales dependía el volumen de agua desperdiciado, en el caso de esta fuga de agua, eran:

... del caudal que se fugue, el tiempo durante la fuga y la ajenidad de cerrar la canilla.  
(Juan Felipe, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

Fue una constante en Juan Felipe involucrar, en estos casos, variables de tipo cualitativo que expresaban cantidad, pero de las cuales no había ninguna magnitud asociada. En este caso él se refería a la “ajenidad” de cerrar la llave, porque si había una apropiación por la situación, como él lo ha manifestado anteriormente, habría conciencia acerca de las consecuencias negativas de desperdiciar el agua. Sólo así, según Juan Felipe, se buscarían recursos para cerrar la llave. Es posible que él se hubiese referido a cerrar el sistema mientras se arreglaba el daño. Juan Felipe enunció de manera explícita que otra variable involucrada para determinar el volumen de agua desperdiciado en esta fuga, era el tiempo, y, así como María Eugenia y Elizabeth, hizo referencia al caudal que produce el desperdicio de agua.

En la tercera pregunta del taller que propusimos, les preguntamos a los estudiantes: ¿Qué variables observas en esta situación?

Aunque, nuestra intención fue hacer un enunciado de manera diferente a la segunda pregunta, que hizo énfasis en la dependencia, aquí también las respuestas fueron asumidas por los estudiantes, desde interpretaciones propias de la situación y la forma como se presentó al comienzo el problema. Es decir, sus repuestas estuvieron centradas en la situación de la fuga de agua que su compañero había registrado.

Tanto María Eugenia como Juan Felipe hicieron énfasis en cosas que se modificaron en la situación:

Que en el primer día el volumen de la fuga era de poco caudal, pero el otro día la fuga había empeorado y el volumen del agua había empeorado en menos tiempo.  
(María Eugenia, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

En esta respuesta, surgieron algunas variables del problema: volumen de agua, caudal y tiempo. Los alumnos interpretaron que lo que estaba cambiando era el pasar de una situación controlable, el primer día, a una situación más grave, el día que Sergio tomó los registros. Cuando en la pregunta quisimos aclarar el término variable, como “aquello que cambia”, los estudiantes acudieron al contexto de la situación dada por nosotras inicialmente.

En un cuarto momento de la actividad de la fuga de agua en el colegio, propusimos a los estudiantes explicar a sus familias acerca de la cantidad de agua desperdiciada en esta situación, según el tiempo transcurrido; para ello, nuestra indicación era que la explicación la hicieran por medio de una tabla de datos que cada uno debía diseñar. En las imágenes siguientes se muestran las representaciones de María Eugenia y Juan Felipe:

3 que el primer día el volumen de la era poco caudal, pero el otro día la fuga empeoró y el volumen del agua había entado en menos tiempo.

| 4. | volumen en litros | tiempo en minutos |
|----|-------------------|-------------------|
|    | 2 litros          | 4 minutos         |
|    | 4 litros          | 2 minutos         |
|    | 6 litros          | 3 minutos         |
|    | 8 litros          | 4 minutos         |

5. se manejan...

Depende del caudal que se fugó el tiempo durante el día y la cantidad de agua que se perdió. Que todo lo que se desperdicia la misma cantidad que se gasta por el tiempo que se gasta la fuga también por la cantidad de agua que sale.

| Tiempo (min) | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| A            | 2  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20  |
| B            | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| C            | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40  |
| D            | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| E            | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60  |
| F            | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| G            | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80  |
| H            | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| I            | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |

Ilustración 47. Representación tabular de una fuga de agua en el colegio, María Eugenia y Juan Felipe, mayo 11 de 2010

En estas representaciones percibimos que los estudiantes utilizaron representación tabular, de una forma rápida y natural; a diferencia de la representación gráfica. En la construcción de éstas tuvieron cuidado en expresar las variables y las unidades en que se presentaban completamente. Observamos en este caso que María Eugenia consideró conveniente reafirmar, para cada dato numérico, las unidades en que se estaba expresando; mientras que Juan Felipe le dio énfasis al hecho de colocar muchos datos para reafirmar la regularidad. María Eugenia no recurrió a aproximaciones como lo manifestó anteriormente cuando nos dijo que en un minuto se perdían más de dos litros; en esta situación de ubicar datos en una tabla, ella redondeó de acuerdo a lo que la gráfica mostraba. Al respecto de la estructura de las tablas, apreciamos que no fueron asumidas desde una posición estándar, donde es típico ver que primero se relaciona la variable independiente y luego la variable dependiente.

En la quinta parte del taller planteamos a los estudiantes calcular la cantidad de agua que se estaba desperdiciando en una hora por causa de este daño. Esta pregunta la hicimos, principalmente, con la intención de que los alumnos se fueran formando una idea del tamaño de la proporción del daño, con unidades de tiempo mayores que el minuto, e ir

proyectando esto, al cálculo del desperdicio en días y meses, como lo propondríamos en las actividades siguientes. La pregunta también la hicimos para tener presente la conversión de unidades cuando un problema lo requiriera. Para Elizabeth, María Eugenia y Juan Felipe este cálculo fue inmediato y no tuvieron dificultades en expresar que se desperdiciaban 120 litros de agua.

En el sexto punto del taller, propusimos a los estudiantes, explicar una estrategia que sirviera para calcular el volumen de agua desperdiciado por causa este daño, si se daba el tiempo que llevaba dicho daño.

Mediante una estrategia diferente a la planteada por sus dos compañeras, Juan Felipe expresó:

El tiempo se estaría sumando por el mismo. Ejemplo:

Tiempo: 2

Volumen:  $2+2=4$

(Juan Felipe, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

En esta interpretación, Juan Felipe manifestó que el tiempo se estaría sumando por él mismo, mas no hizo referencia al volumen de agua desperdiciado; tampoco habló de la unidad de tiempo —segundos, minutos, horas—, aunque por la forma como respondió la pregunta anterior interpretamos, que sí la estaba teniendo en cuenta.

La estrategia que expresó Elizabeth fue:

Se multiplica 2 por el tiempo o por los minutos que esté la fuga. Por ejemplo:

$50 \times 2 = 100$ , esto quiere decir que en 50 minutos se gastan 100 litros.

(Elizabeth, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010).

En este caso, observamos que Elizabeth hizo referencia a las unidades de tiempo, porque la razón o ritmo de cambio en esta situación expresaba que se desperdiciaban dos litros de agua por minuto. Es decir, la constante dos, se asociaba a una unidad de tiempo específica, no al tiempo en general.

En lo enunciado por María Eugenia notamos la intención de aclarar al máximo la estrategia:

Sería multiplicar los minutos o el tiempo que dure la fuga por el volumen de litros que se malgastan en un minuto, o sea 2 litros.  
(María Eugenia, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

María Eugenia entró a considerar la relación litros desperdiciados por minuto y, por último, aclaró que en este caso era 2, la constante que representaba dicha razón.

En la última parte del taller, propusimos a los estudiantes considerar la representación de la relación tiempo transcurrido y volumen de agua desperdiciado, en términos del siguiente enunciado: “Si llamamos **V** al volumen de agua en litros y **T** al tiempo en minutos, ¿qué relación podrías establecer entre la cantidad (volumen) de agua desperdiciado y el tiempo transcurrido?” En este caso sólo sugerimos llamar **V** al volumen y **T** al tiempo, no planteamos el expresar una ecuación, una representación analítica o una expresión algebraica.

Para María Eugenia, Juan Felipe y Elizabeth fue fácil establecer una ecuación, involucrando las variables del problema, ya que esto les permitió expresar, de otro modo, la estrategia que habían enunciado en el punto anterior. La siguiente imagen muestra la representación que hizo Juan Felipe de la situación propuesta:

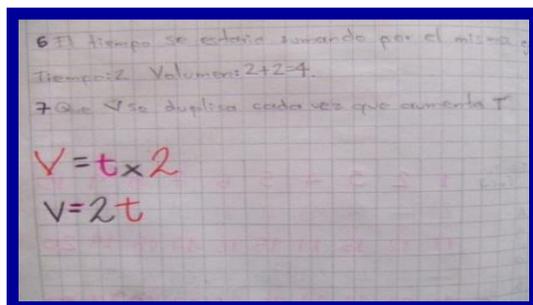


Ilustración 48. Representación analítica, una fuga de agua en el colegio, Juan Felipe, Mayo 11 de 2010

Juan Felipe indicó, además, para explicar su representación expresó:

...V se duplica a medida que T aumenta.

(Juan Felipe, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

De lo cual resultaría una ecuación muy sencilla en los ejemplos de los ejercicios típicos de álgebra. Sin embargo, lo valioso para Juan Felipe y para nosotras como investigadoras era que, en este caso, se estaba haciendo un reconocimiento y un análisis de todo aquello que le da sentido a estas representaciones.

Además de expresar en forma analítica la relación involucrada en la situación de fuga de agua, María Eugenia enunció:

Por medio del tiempo [...] podemos determinar cuál fue la cantidad de agua que se desperdició durante el tiempo que duró la fuga.

(María Eugenia, ¿Cuánta agua se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, mayo 11 de 2010)

María Eugenia declaró el hecho de que el volumen de agua desperdiciado dependía del tiempo que durara la fuga. En esta consideración, ella no apeló a las otras variables, de las cuales dijo al principio, dependía el volumen de agua desperdiciado en la fuga; ahora el tipo de daño de la llave y, lo que ella llamó, la presión del agua, las tuvo en cuenta para consideraciones generales, mas no para explicitar o concretar una estrategia, regla, o ley que explicara a otros la situación de una manera más precisa.

Esta actividad planteada por medio del taller que propusimos a los estudiantes tuvo un significado especial en el proceso de investigación en la institución, pues involucró el uso de diferentes representaciones. Al inicio, planteamos el problema desde una representación gráfica y los estudiantes hicieron una interpretación de la misma, desde el lenguaje natural, para luego dar a conocer a otras personas la problemática en cuestión desde una representación tabular. Luego, desde el lenguaje natural, pedimos a los alumnos enunciar una estrategia que posibilitara calcular el volumen de agua desperdiciado en la fuga. En esta parte de la actividad concretizaron “el tiempo” como la variable independiente de la relación, además identificaron una razón constante para la relación tiempo-volumen de agua desperdiciado. A partir de esta estrategia, los estudiantes pudieron expresar una representación analítica en términos de variables representadas por letras y operaciones.

En cuanto a las representaciones, concordamos con Sierpiska (1992) cuando expresa: *“las funciones pueden ser representadas de diferentes modos. Pero la representación no es lo mismo que el objeto representado”*. En esa línea, consideramos que en los procesos de representación en los que los estudiantes vieron y escucharon que sus compañeros estaban hablando en otros términos y con otros símbolos, de cosas que ellos representaban de manera diferente, le dieron un poder especial a la representación, sin que ésta superara la realidad del objeto que se estaba representando.

Para la actividad “¿Cuánto cuesta una fuga de agua en el colegio?” luego de que los estudiantes tuvieran clara la situación de la fuga de agua en el colegio y la nueva forma del cobro del servicio de agua en el corregimiento, propusimos otras situaciones que dieran

cuenta del costo económico que podría acarrear una fuga de agua. Este fue el motivo que suscitó el análisis de este cuarto momento en la Institución Educativa Rural El Hatillo.

En la actividad anterior los estudiantes protagonistas de la investigación se dieron cuenta que el volumen de agua que se desperdiciaba en un daño como el detectado por Sergio era grande. Después de esto, nuestro interés se centró en proponer a los estudiantes una actividad para estimar cuánto costaba este daño. Para esto, recordamos cómo era el nuevo sistema de cobro para el servicio del agua en el Hatillo, con las correcciones que habíamos sugerido al boletín elaborado por la Junta del Acueducto:

- De  $0 m^3$  a  $20 m^3$  se pagan \$11000.
- Por cada  $m^3$  que supere los  $20 m^3$  se pagan \$500.
- Por cada  $m^3$  que supere los  $50 m^3$  se pagan \$800.

Considerando además que el daño en la poceta de agua, detectado el 5 de mayo de 2010, arrojaba 2 litros de agua por minuto, propusimos en la clase, completar la siguiente tabla, donde se relacionaban el tiempo (en días) de la fuga de agua, el volumen (en litros) de agua que salía por causa de la fuga y lo que costaría dicho daño.

| <b>Tiempo</b>  | <b>Volumen<br/>(L)</b> | <b>Costo<br/>(\$)</b> |
|----------------|------------------------|-----------------------|
| <i>1 día</i>   | <i>2880</i>            | <i>11000</i>          |
| <i>5 días</i>  | <i>14400</i>           | <i>11000</i>          |
| <i>7 días</i>  | <i>20160</i>           | <i>11080</i>          |
| <i>8 días</i>  | <i>23040</i>           | <i>12520</i>          |
| <i>10 días</i> | <i>28800</i>           | <i>15400</i>          |
| <i>12 días</i> | <i>34560</i>           | <i>18280</i>          |
| <i>15 días</i> | <i>43200</i>           | <i>22600</i>          |
| <i>18 días</i> | <i>51840</i>           | <i>27472</i>          |
| <i>20 días</i> | <i>57600</i>           | <i>32080</i>          |
| <i>25 días</i> | <i>72000</i>           | <i>43600</i>          |
| <i>1 mes</i>   | <i>86400</i>           | <i>55120</i>          |
| <i>2 meses</i> | <i>172800</i>          | <i>124240</i>         |

Tabla 17. ¿Cuánto cuesta el agua que se malgasta en una fuga de agua en el colegio?, elaboración conjunta en entre toda la clase, mayo 18 de 2010

De la tabla sólo propusimos la primera columna y los estudiantes completaron la segunda y la tercera. El cálculo de los volúmenes fue relativamente fácil para los alumnos, pues sólo implicaba realizar conversiones de unidades de tiempo, lo cual ya habían hecho antes.

Lo que nos interesa destacar de esta actividad es la forma como los estudiantes aplicaron la ley de cobro del servicio de acueducto en el corregimiento, con sus respectivas modificaciones. Las siguientes imágenes muestran la forma como Juan Felipe interpretó la ley de cobro para realizar la representación tabular y dos representaciones gráficas donde relacionó, en primer lugar, el tiempo (en días) con el volumen (en litros) de agua que se desperdiciaba en la fuga, y, en segundo lugar, el tiempo (en días) con el costo de esa fuga.

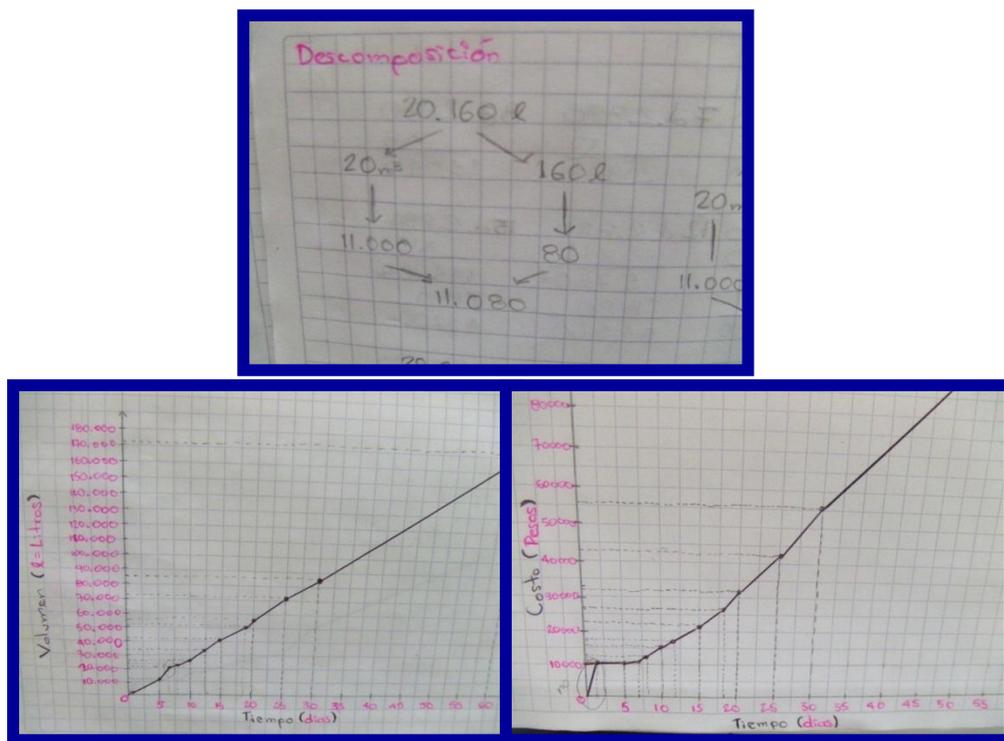


Ilustración 49. Interpretación de Juan Felipe de la ley de cobro, mayo 18 de 2010

Para aplicar la ley de correspondencia asociada a lo que se debía pagar por determinado consumo, Juan Felipe descompuso los 20160 litros que se desperdician en 7 días, para expresarlos como  $20m^3 + 160L$ . Así, por los  $20m^3$  deberían pagarse \$11000, mientras que por los 160 litros se pagarían \$80, pues \$500 pesos que se pagan por metro cúbico por encima del consumo básico de  $20m^3$  hasta  $50m^3$ , dividido entre 1000 litros, que es el equivalente de un metro cúbico, arrojó el dato de que por litro en este rango se pagan \$0,5. De esta manera, Juan Felipe determinó que la multa que debía pagarse por cada litro que superara los  $50m^3$ , sería de \$0.8. Ya con estas consideraciones, los demás estudiantes del grupo pudieron completar la tercera columna de la tabla.

Apreciamos que a Juan Felipe, la realización de una representación gráfica no le causó mayores dificultades, pues él tuvo el control de las unidades de las variables que se involucraron y las escalas numéricas para representarlas, aun en casos como éste donde el trabajo más extenso estuvo en el cálculo de los costos de los volúmenes de agua que correspondían a los tiempos indicados.

Es en esta categoría donde estamos resaltando que los estudiantes protagonistas de la investigación interactuaron con varios elementos y relaciones que, como investigadoras, nos posibilitaron deducir que se estaba objetivando, en los seis estudiantes protagonistas, el concepto de *función*. A continuación puntualizamos algunas reflexiones que permitieron tal consideración.

- Los motivos que inspiraron las actividades de clase, estaban en la misma línea de un motivo que movilizó gran parte del proceso de investigación: el manejo, uso y

conservación del agua; destacando que se percibía en los estudiantes una sensibilidad especial hacia esta temática.

- En términos de Caraça (1984), podemos decir que los estudiantes reconocieron a partir de un fenómeno natural, una ley natural.
- Relacionando lo que plantea Sierpinska (1992), en cuanto al uso de las diferentes representaciones, en este momento de la actividad, los estudiantes se apropiaron de estos distintos elementos para hacer suyo un concepto de *función*, en términos de dar cuenta de una ley que explica un proceso de variación.
- La idea de dependencia, que fue central en la categoría anterior, se vio fortalecida en este episodio por el manejo de variables cuantitativas, aunque los estudiantes reconocieron, también, otras variables de tipo cualitativo. Al final, sin descartarlas, ellos daban cuenta de una ley, una *función* que relacionaba cantidades.
- La idea de correspondencia entre variables de tipo cuantitativo, fue asumida de una manera natural: en un primer momento cuando los estudiantes interpretaron los datos desde las gráficas; después, en el momento de mostrar las interpretaciones de las gráficas por medio de una tabla; y, por último, cuando ellos esclarecieron una ley de correspondencia.

En esa misma línea, nos apoyamos en Davidov (1988), cuando expresa:

Como contenido específico del concepto teórico aparece la relación objetiva de lo universal y lo singular (lo integral y lo diferente). En tal concepto, a diferencia de lo empírico, no está incluido algo que sea igual a cada objeto de la clase, sino que descubren las interrelaciones de los objetos aislados dentro del todo, dentro del sistema de su formación,  
(Davidov, 1988, p.131)

Podemos decir que en este proceso de investigación, los estudiantes objetivaron la *función* como concepto teórico, pues para ellos, la *función* no estuvo ligada a la enunciación de una definición que recogiera las características comunes de dicho objeto, sino que, desde las diferentes representaciones y abordajes, cada estudiante interactuó con elementos constitutivos del concepto *función*.

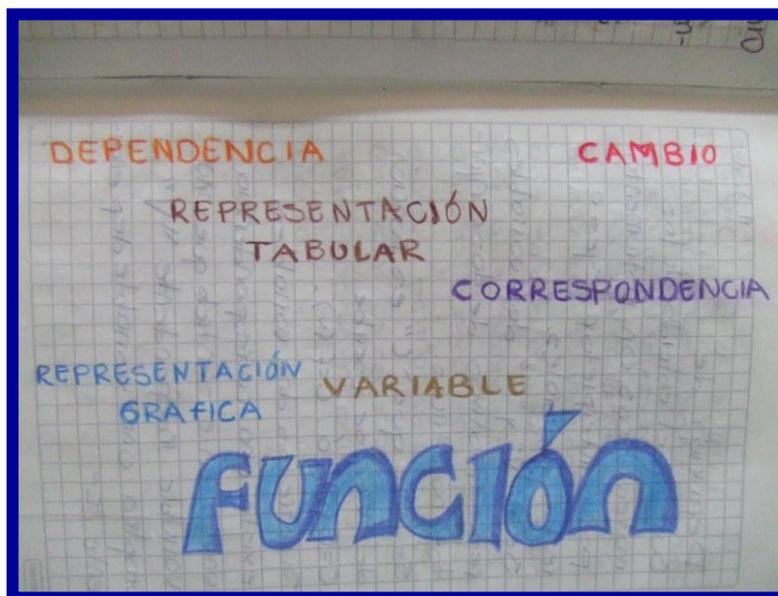


Ilustración 50. El concepto de función, Elizabeth, Junio 10 de 2010

Las diferentes formas de representación del concepto *función*, a la que cada estudiante se fue aproximando de manera diferenciada: el lenguaje natural, tabular, gráfica y analítica— les permitió objetivar el concepto desde diferentes frentes y, por lo tanto, darle un mayor sentido. Es decir, las diversas representaciones del objeto, realizadas desde las singularidades de cada sujeto de esta investigación —de cada estudiante protagonista— le permitió estudiar sus características de una manera que posibilitara una constitución de significados del objeto *función* y, así, hacer una objetivación del mismo.

## CONCLUSIONES

La pregunta que dio inicio al trabajo de investigación aquí expuesto, fue: ¿cómo es el proceso de objetivación del concepto de *función*, en estudiantes de noveno grado, mediado por actividades orientadas bajo un abordaje sociocultural? Para responder esta pregunta, de un lado, realizamos un diseño metodológico desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico dialéctico. El trabajo de campo lo realizamos con estudiantes de noveno grado de dos instituciones de carácter oficial, una urbana y otra rural. La producción de datos la realizamos a partir de las interacciones directas con los seis estudiantes, protagonistas de la investigación, mediadas por actividades enmarcadas dentro de la Teoría de la Actividad. De otro lado, hicimos un recorrido epistemológico desde un abordaje sociocultural, por medio del cual comprendimos la importancia de la intersubjetividad en la constitución del sujeto, así como el papel fundamental de factores sociales, culturales, históricos y políticos en el proceso de objetivación del conocimiento matemático, específicamente del concepto de *función*.

Esperamos haber respondido la pregunta de investigación, mediante los aspectos mencionados en el párrafo anterior y mediante el análisis de las tres categorías que emergieron. La primera, respecto a la fluencia, llamada “No todo se va a quedar Igual”; la segunda, respecto al concepto de variable e interdependencia, llamada “Todo Está Vivo, Todo Está Vinculado, El Aire, El Agua...” y la tercera, respecto a la *función* específicamente, llamada: “*Función*: Instrumento para interpretar leyes cuantitativas”. Dichas categorías nos posibilitaron el analizar el proceso de objetivación del concepto de *función*, de los estudiantes protagonistas. A continuación planteamos las conclusiones a las que llegamos, como respuesta a nuestra pregunta de investigación.

- En el proceso de humanización las personas adquirimos la capacidad, históricamente construida, de aproximarnos a conceptos presentes en la cultura, construidos socialmente. Lo hacemos, desde nuestras propias condiciones individuales, desde nuestras singularidades; es decir desde una realidad situada. Es así, como los estudiantes protagonistas, desde sus realidades, identificaron el concepto de fluencia: todo se encuentra en continuo movimiento; nada es estático, todo se transforma. Este es un concepto que ellos reconocieron sin gran dificultad; lo identificaron en sus vidas y desde/y en fenómenos naturales y sociales.
- Los estudiantes protagonistas asociaron el concepto de variable con el de fluencia desde la interiorización que hicieron del cambio; consideraron, también, magnitudes que no son estáticas, que representan conjuntos con diferentes valores numéricos y que además existe dependencia entre ellas. Así, pudimos evidenciar cómo los seis estudiantes identificaron la existencia de una variable, en su relación con otra; es decir, la interdependencia entre variables.
- En los momentos analizados, los tres estudiantes protagonistas de la Institución Educativa Ramón Múnera Lopera desde sus subjetividades, constituidas en dialogía con sus contextos, se aproximaron paulatinamente al objeto matemático, desde las interacciones con sus compañeros de aula y las maestras investigadoras. De esta forma, y a través de las *actividades orientadoras de enseñanza*, los estudiantes tomaron *conciencia progresiva* de nociones esenciales en el concepto de *función*, como dependencia y correspondencia. Esta toma de *conciencias* les permitió visualizarlo y dotarlo de significado; es decir, les permitió el proceso de objetivación del concepto de función.

- En la Institución Educativa Rural El Hatillo, los tres estudiantes protagonistas dieron cuenta de haber objetivado un concepto de *función* desde las realidades de su propio contexto. La comprensión de la realidad que cada alumno vive le permitió, a cada uno, el desarrollo de las actividades propuestas para la clase. No fueron sólo ejercicios los que se trabajaron en estas clases; en cada una de las acciones había algo de la vida de los estudiantes y de su entorno, que los llevaba a poner, en la realización de sus tareas, un sello propio.
- Objetivación, de acuerdo a Radford (2004), es un término que hace referencia a aquellas acciones cuyo propósito es el de hacer visible lo que no lo es; es decir, materializar lo potencial. En ese sentido, las diferentes formas de aproximarse al concepto de *función* —lenguaje natural, tabular, gráfica y analítica— les permitió a los estudiantes acercarse a este concepto desde diferentes perspectivas y, por lo tanto, construir sentidos para el mismo. Es decir, las diversas representaciones del objeto, realizadas desde las subjetividades de cada estudiante protagonista —constituidas en la dialéctica individuo-grupo— le permitió, a cada uno, hacer una objetivación del mismo.
- En este proceso de investigación, las interacciones entre los diferentes sujetos participantes se constituyeron en elementos importantes para entender que las enunciaciones individuales no estaban desligadas de las complejidades de unas realidades situadas desde la voces de los otros. Voces traducidas en el *otro*, compañero de clase; en el *otro*, maestro; en el *otro*, investigador; en el *otro*, fontanero; en el *otro*, miembro de la comunidad y del mundo; en el *otro*, que se ocupa de problemáticas reales.

- Consideramos que las acciones que propusimos en las actividades de esta investigación, posibilitaron una objetivación del concepto *función* desde lo abstracto a lo concreto. En ese sentido, pensamos que los estudiantes protagonistas de la investigación, en los primeros momentos del trabajo de campo encontraron ciertas relaciones entre variables; relaciones que reconocieron como leyes. Interpretamos que en esos momentos las relaciones, y sus correspondientes representaciones, realizadas por los estudiantes, se encontraban en el plano de lo abstracto ya que aun, eran muy generales. Así, las actividades posteriores, las propusimos de forma que posibilitaran a los estudiantes, una objetivación del concepto de *función*, como una herramienta para interpretar leyes cuantitativas, de manera concreta. Hacer concreto un concepto, en este caso, nos implicó, a las maestras investigadoras, proponer actividades en la misma dirección de las anteriores, de tal modo que cada estudiante pudiese hacer más suyo dicho concepto y que así pudiese (re)elaborar sus comprensiones desde sentidos y significados propios.
- Haber encaminado las actividades desde una problemática como el problema ambiental, específicamente relacionado con el uso y cuidado del agua, hizo que los seis estudiantes protagonistas tuvieran un motivo para darle sentido a las acciones que las actividades les proponían. Así, los estudiantes hicieron suyas, entre otras, las ideas de fluencia, interdependencia, variable, cambio, regularidad, ley, porque desde sus realidades existían otras voces que les posibilitaron asumir las propias.  
  
De este modo, las reflexiones de los estudiantes estuvieron asociadas, siempre, a la realidad que les pertenece y de la que hacen parte. Esto hizo que el concepto que cada uno objetivó con respecto al objeto *función*, no fuese único; pues ni el proceso de objetivación, ni el concepto mismo, pueden serlo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bajtín M. (2004). *Problemas de la poética de Dostoievski*. España: Fondo de Cultura Económica.

Bajtín, M. (2009). *Estética de la creación verbal*. México: Publimex.

Bertrand, Y. (Director). (2009). Home [documental]. Distribución: Europa Corp., asociado con PPR.

Caraça, B.J.(1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Livraria Sà Da Costa Editora.

Davídov V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso.

Denzin, N., Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). *Competing paradigms in qualitative research*. Handbook of qualitative research. Park, CA: SAGE Publications.

Engels, F. (2001). *Introducción a la dialéctica de la naturaleza*. Extraído El 15 de septiembre de 2010 de: <http://www.marxists.org/espanol/index.htm>

García, G., Serrano, C. & Espitia. (1997). *Hacia la noción de función como dependencia y patrones de la función lineal*. Cuadernos didácticos. Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Miguel, A & Miorim, M. (2005). *História na Educação Matemática: Propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica.

Moura, M. O.(2001). *A atividade de ensino como ação formadora*. En: Castro, Amélia Domingues e CARVALHO, Ana Maria Pessoa de (org.) *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda. 143-162.

Numhauser (1982). Canción *Todo Cambia*. Okar, Suecia.

Ponte, J.P; Brocardo, J & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Radford, L. (2004). *Semiótica Cultural y Cognición*. Recuperado el 12 de Septiembre de 2010 de: <http://www.martes.laurentian.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf>

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*. Número especial, p. 103-120.

Radford, L. (2008). *The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of Learning*. En: L. Radford, G. Schubring, & F.eeger (comps.). *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: SensePublishers.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa*. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Sierpinska, A. (1992). *On understanding the notion of function*. En: Harel, G & Dubinsky, E (comps.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical: Association of America, United States.

Valero, P. (2006). *Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia*. Universidad de Aalborg, Dinamarca. Recuperado el 14 de septiembre de 2010, de: <http://www.apm.pt/portal/quadrante.php?id=35895&rid=35881>

Vigotsky, L.S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.