

## SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CAMBIO CONCEPTUAL EN EL TRATAMIENTO DE LA ELIPSE

**Myrian Luz Ricaldi Echevarria**

Universidad Femenina del Sagrado Corazón. APINEMA. (Perú)

myrianluz@hotmail.com

**RESUMEN:** El presente trabajo describe una secuencia didáctica para el aprendizaje y la comprensión del concepto de elipse a través del uso del programa Geogebra. La propuesta se implementó con un grupo de estudiantes pertenecientes a un programa especial de mujeres con experiencia laboral de una universidad privada de la ciudad de Lima. Nos centramos, desde una perspectiva aplicada, en el análisis de los procesos de transformación del conocimiento, el cambio conceptual y las representaciones de las estudiantes. El estudio toma elementos teóricos del cambio conceptual, los planteamientos psicológicos de Vigotsky y los registros de representación semiótica de Duval. Los resultados evidencian comprensión, y una aproximación asertiva y motivante al tratamiento de la elipse. Asimismo, se pudo describir el funcionamiento cognitivo que lleva a las estudiantes a comprender y efectuar diferentes procesos matemáticos

**Palabras clave:** geogebra, representación semiótica, comprensión

**ABSTRACT:** This report describes a didactic sequence for understanding and learning the concept of ellipse by using Geogebra program. This proposal was put into practice with a group of students belonging to a special program of women with work experience at the private university of Lima city. From an applied perspective, the authors focus on the knowledge-transformation process analysis, the conceptual change and the students' representation. The study takes into account theoretical elements of the conceptual change, Vigotsky's psychological assumptions and Duval's semiotic representation registers. The outcomes show understanding as well as an assertive and motivating approximation to the treatment of the ellipse. It was also possible to describe the cognitive development that allows students to understand and carry out different mathematical processes.

**Key words:** geogebra, semiotic representation, understanding

## ■ Antecedentes

En la enseñanza y aprendizaje de temas vinculados a la geometría analítica, de acuerdo con Silva (2006) se verifica que muchos estudiantes presentan dificultades en las relaciones de las representaciones gráfica y algebraica de diversas curvas. Duval (2006), afirma que la razón de esas dificultades es que los estudiantes desconocen la correspondencia semiótica entre los registros de representación gráfica y la expresión algebraica correspondiente.

Ante esto la presente propuesta pretende posibilitar la articulación entre geometría y álgebra mediante el planteamiento de una secuencia didáctica para la comprensión de la elipse por medio de las ecuaciones, y de manera recíproca la comprensión de la ecuación de la elipse a través de su representación geométrica empleando como mediador, en este proceso, al programa de geometría dinámica Geogebra.

Como parte de la revisión de algunas investigaciones que van en línea del uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje y enseñanza de la geometría se encontró el trabajo de Iranzo y Fortuny (2009) en el que se caracterizan las estrategias de resolución de los alumnos empleando geometría dinámica. En el estudio se obtuvo como resultado que el uso de GeoGebra favoreció el empleo de múltiples representaciones de conceptos geométricos y ayudó a evitar obstáculos algebraicos. El aporte de estos investigadores resulta relevante para nuestra investigación por su relación con el fundamento teórico y el objeto de estudio de nuestra propuesta.

## ■ Problemática y objetivos

El punto de partida del presente estudio parte de la siguiente interrogante:

¿Cómo se transforma el conocimiento durante la puesta en práctica de una propuesta didáctica para el tratamiento de la elipse con la mediación del programa Geogebra?

Para responder a este cuestionamiento se plantea el siguiente objetivo general:

Analizar los procesos de transformación del conocimiento durante la puesta en práctica de una propuesta didáctica para el tratamiento de la elipse con la mediación del programa Geogebra.

Al mismo tiempo se proponen como objetivos específicos:

- Describir el funcionamiento cognitivo que desarrollan las estudiantes al comprender los diferentes procesos matemáticos.
- Evaluar el impacto del uso del programa Geogebra para la comprensión de nociones matemáticas asociadas a los diferentes registros de representación de la elipse.

### ■ Marco Teórico

Chevallard, Bosch y Gascón (1997), señalan que el aprendizaje de la matemática es un proceso psicocognitivo fuertemente influido por factores de diverso tipo: motivacionales, afectivos, sociales, entre otros. En ambientes de aprendizaje y como resultado de la práctica pedagógica somos testigos de que muchas concepciones de los alumnos respecto de una determinada noción que provocan errores repetitivos y resistentes, pueden constituir obstáculos para la emergencia de nuevas concepciones (Brousseau, 1986).

Nuestro estudio considera como supuesto psicológico y epistemológico que la matemática constituye un lenguaje donde los sistemas de símbolos, dados por la cultura, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, ya que permiten que las personas cambien sus conceptualizaciones.

Esto está estrechamente relacionado con la noción de cambio conceptual, los planteamientos psicológicos de Vigotsky y los semióticos de Duval que a continuación describimos:

### ■ Cambio conceptual en Matemática

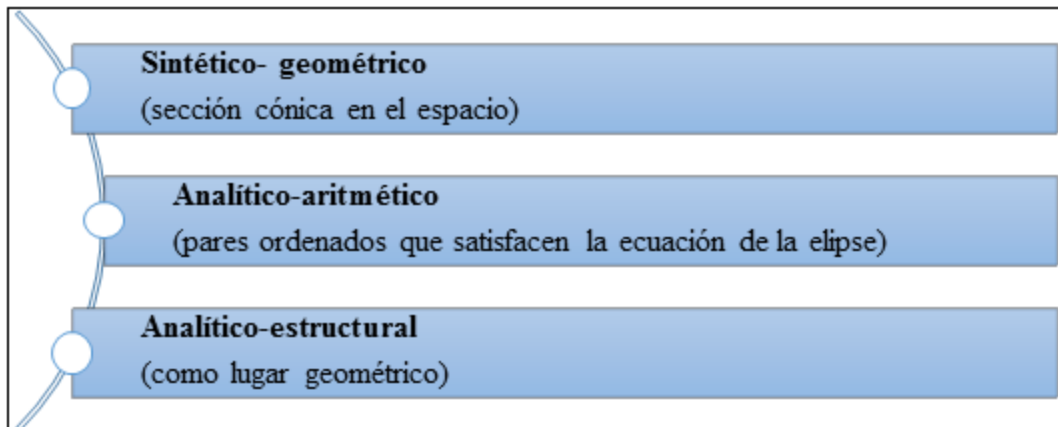
Desde los modelos situados (Rodríguez, 2000), el cambio conceptual consiste en saber aplicar las diferentes concepciones a los distintos contextos. Para el caso del presente estudio se buscó optimizar el aprendizaje de la elipse proponiendo una actividad didáctica que se ajuste a las condiciones de aprendizaje de las estudiantes.

Por ello, y apoyándonos en Linder (1993), quién atiende a la noción de representación, nuestra propuesta didáctica se apoya en el programa Geogebra para transitar por diversos registros de representación que permiten el cambio conceptual para la comprensión y resolución de situaciones vinculadas a la elipse. Un mecanismo presente en el proceso de cambio conceptual es la elaboración el cual está influenciado por la naturaleza y frecuencia de las elaboraciones.

En nuestro caso, la propuesta se aplicó en el lapso de 3 semanas con una frecuencia de 3 horas semanales. Un aspecto relevante es que se pudo revisar los fundamentos teóricos a través de diferentes perspectivas, esto permitió que las estudiantes generen y confirmen su conocimiento a partir de múltiples representaciones de la información que poseían. La aplicación de las nociones teóricas a diversos formatos favoreció la corrección de concepciones previas y la reinterpretación de las situaciones propuestas.

En este sentido, es importante precisar que las ideas previas reúnen un conjunto de características vinculadas a componentes históricos resistentes al cambio. Por ello, es importante utilizarlas en la enseñanza a fin de obtener un cambio conceptual a partir de la propuesta de experiencias que cuestionen dichas nociones. Tal como lo menciona Carretero (1996) es importante tanto al resultado como al proceso de transformación de las concepciones de los individuos. A continuación una figura

que representa las diferentes concepciones de la elipse en un proceso de transformación del conocimiento.



**Figura 1.** Concepciones matemáticas de la elipse

#### ■ Planteamientos psicológicos de Vigotsky

Los instrumentos de mediación (las herramientas y los signos) cumplen un papel central en la adquisición de conocimiento y al mismo tiempo incluyen procesos que involucran cambios en la estructura y en la función de los procesos psicológicos. En el presente estudio se empleó el programa de geometría dinámica como mediador e instrumento para el aprendizaje. En el caso de la matemática cada dominio temático comprende problemas específicos de relación entre naturaleza y cultura, entre filogénesis y ontogénesis, entre procesos de tipo general y específicos.

Par el presente estudio se considera relevante la relación del sujeto y la situación porque permiten capturar tanto los componentes de las relaciones intersubjetivas como el papel de los mediadores semióticos en la construcción de aprendizajes y significados para el caso de la elipse.

La ejecución de la propuesta didáctica permitió corroborar lo descrito por Rogoff (1997), en el sentido que el proceso de aprendizaje es siempre y en todo momento, simultáneamente, individual y social. Es decir, el desarrollo y el aprendizaje deben ser comprendidos como procesos de apropiación mutua y/o recíproca de los sujetos y las prácticas culturales de las que ellos participan.

#### ■ Registros de representación de Duval

Duval (2006) establece que solo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante representaciones que utilizan signos, símbolos, letras, lenguaje natural, etc. Estas representaciones son de diferentes tipos: verbal, algebraico, numérico y gráfico, siendo estos imprescindibles para comprender el objeto matemático.

Este autor establece que un registro semiótico conlleva tres actividades cognitivas: construcción de un conjunto de signos, la posibilidad de realizar una transformación de representaciones al interior del registro y la conversión de una representación en un registro a otra de otro registro. Al mismo tiempo, se formula que el uso de diversos sistemas de representación semióticos en un mismo objeto matemático, en nuestro caso la elipse, fortalece la capacidad cognitiva del individuo enriqueciendo sus representaciones mentales.

En el marco de la teoría de registros de representación semiótica se consideran dos tipos de sistemas de representación de acuerdo a la cantidad de funciones cognitivas involucradas: el monofuncional relacionado con el procesamiento matemático algorítmico; y el polifuncional, que abarca una gama más amplia de funciones tales como comunicación, imaginación y procesamiento de información.

En otro trabajo de Duval (1999) se identifican tres procesos cognitivos implicados en el desarrollo de la actividad geométrica: la visualización de procesos (entendiendo por ello la interpretación de diagramas geométricos), los procesos de construcción mediante herramientas (en la resolución de problemas de geometría se debe explorar, manipular e interpretar los datos para que emerjan estrategias de solución) y el razonamiento, la conjetura y la prueba (a través de la relación entre las representaciones y los conocimientos teóricos).

### ■ Propuesta didáctica

Comprende actividades de exploración y comprensión, análisis, resolución de problemas, y aplicaciones, las cuáles se detallan en la siguiente tabla.

**Tabla 1.** Actividades de la secuencia didáctica

Exploración y comprensión	
<p>Un perro que había mordido a un niño, por razones de seguridad, fue amarrado durante algunas horas.</p> <p>El perro tenía una argolla en su collar que se deslizaba a lo largo de la cadena, cuyos extremos están fijos en dos puntos opuestos y diferentes, ¿qué figura geométrica describe el alcance máximo del perro?</p>	<p>¿Cómo se describe la órbita de la tierra alrededor del sol?</p>

## Análisis

Generación de la elipse con dobleces de papel:

¿Qué figura queda delimitada por los dobleces?

Una elipse.

¿Las rectas marcadas por los dobleces que son de la figura qué forman?

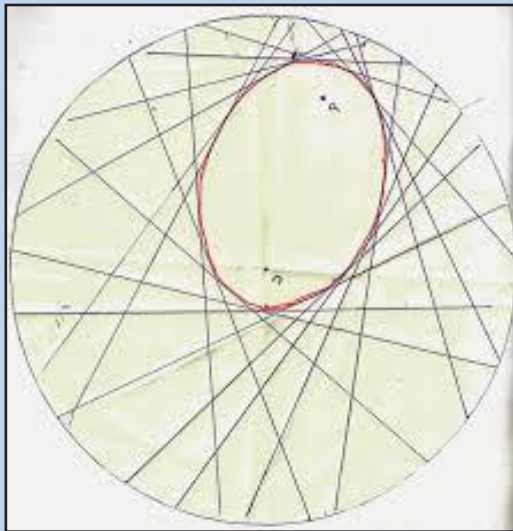
Los dobleces remarcados forman una familia de rectas tangentes que envuelven a la elipse.

¿Cuáles son los focos de dicha elipse?

El centro de la circunferencia y el punto P marcado inicialmente.

¿Cuál es el valor de la suma de distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos?

Es igual al radio de la circunferencia inicial.



Construcción de la gráfica de la elipse:

- A partir de dos puntos (focos) y con la opción elipse.
- Mueve las posiciones de los focos y del punto de la elipse. ¿Qué relación existe entre los focos y los puntos de la elipse?

La elipse como lugar geométrico:

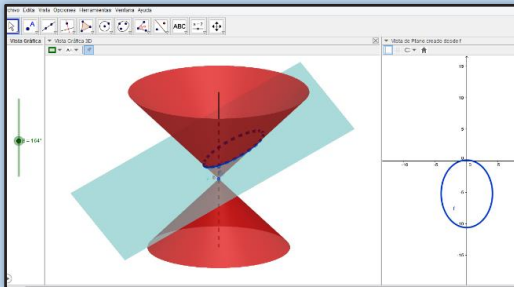
- Construye un punto en la elipse. Construye dos segmentos con extremos en los focos y el punto sobre la elipse.
- Mide las distancias de los dos segmentos. ¿Se mantiene constante la suma para los distintos puntos de la elipse?
- Si el punto estuviera fuera de la elipse, ¿se mantiene constante la suma de distancias para distintas elipses?

Conceptos relacionados a la elipse:

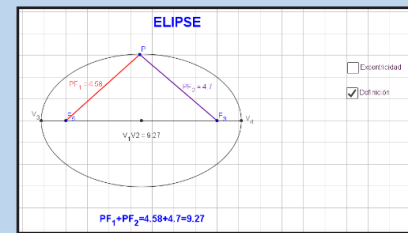
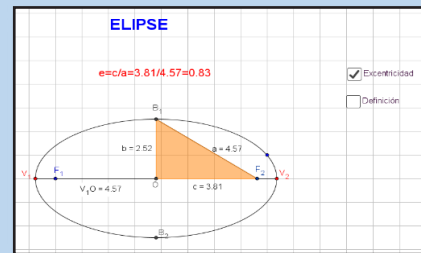
- Determina el centro del segmento determinado por los focos y el centro del segmento determinado por los vértices.
- Construye un punto en objeto. Determina las longitudes de los segmentos que unen los vértices y los focos con el punto anterior, ¿qué relación hay entre estas sumas? Explora moviendo el punto sobre la elipse. ¿se conserva la relación.

Resolución de problemas

Sección del plano generada por el corte de un cono y un plano inclinado que forma con el eje del cono un ángulo superior al que forma la directriz del cono con el eje



Comprensión del concepto de elipse mediante la exploración y análisis de los registros algebraico y geométrico con el programa Geogebra.



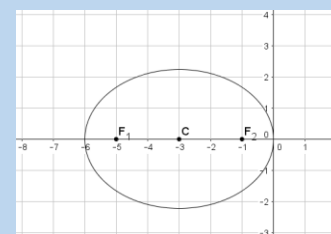
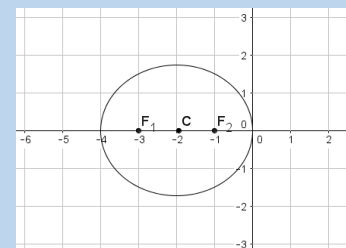
Dada la elipse:  $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$  Determina:

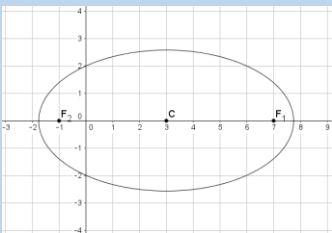

- Las coordenadas del centro de la elipse:
- La longitud del semieje mayor (a):
- La longitud del semieje menor (b):
- La longitud del semieje focal (c)
- Las coordenadas de los focos:  
 $F_1( \quad , \quad )$  ,  $F_2( \quad , \quad )$
- Las coordenadas de los vértices.  
 $V_1( \quad , \quad )$  ,  $V_2( \quad , \quad )$

Determina en cada caso el centro, los vértices y los focos. Luego gráfica las elipses.

a.  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$       b.  $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Elige la gráfica que corresponde a una elipse con centro en (-3,0), foco (-1,0) y es tangente al eje Y.



	
<p>Verifica si la siguiente figura corresponde a una elipse:</p>	 <p>Sant'Andrea al Quirinale, Bernini</p>
<p><b>Aplicaciones</b></p>	
<p>Visualización del video:  <a href="https://www.youtube.com/watch?v=rox9ASzVYKY">https://www.youtube.com/watch?v=rox9ASzVYKY</a>                  Luego responden a la pregunta: ¿qué relación existe entre el video y el fenómeno de reflexión</p>	<p>¿Es la elipse un óvalo?                  ¿Qué sucede con la elipse si los dos focos coinciden?</p>

Se presenta a continuación una tabla que relaciona los tres elementos teóricos de la propuesta con las actividades de la secuencia didáctica anteriormente descrita.



**Tabla 2.** Relación de los elementos teóricos con las actividades de la secuencia didáctica

Actividad	Cambio conceptual relacionado	Planteamientos de Vigotsky	Registro de representación de Duval
Situación exploratoria inicial. Visualización de imágenes.	Exploración y comprensión.	Imágenes. Videos. Individual-grupal.	Representación verbal
Actividades con el programa Geogebra. Actividad con el doblado de papel.	Análisis.	Programa Geogebra. Actividad individual.  Papel. Actividad grupal.	Representación gráfica
Construcción de la elipse bajo determinadas condiciones con el programa Geogebra.	Resolución de problemas.		
Situaciones de aplicación de las propiedades de la elipse a los campos de la medicina y la construcción.	Aplicaciones.	Imágenes. Videos. Grupal.	Representación algebraica

Fuente: elaboración propia

Se debe precisar que las actividades tuvieron las siguientes etapas:

Etapa 1, el trabajo era individual con la finalidad de explorar sobre los conocimientos previos de las estudiantes. Se utilizó también en este proceso el aula virtual a través de la plataforma Chamillo.

Etapa 2, el trabajo se realizó en parejas en donde cada par se concentraría en la resolución de un caso aplicando propiedades y conceptos relacionados a elipse.

### ■ Resultados

De la actividad previa de exploración algunos de los resultados obtenidos, tanto correctos como incorrectos, son los siguientes: la elipse es un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, se obtiene de achatar una circunferencia, dos arcos secantes de igual radio no constituyen una elipse.

De la puesta en práctica de la propuesta didáctica se pudo evidenciar que el tipo de registro de representación que aparecía con mayor frecuencia en los procedimientos era el algebraico. Asimismo, el registro verbal y gráfico son los de mayor dificultad en las transformaciones, esto se evidenció en las interpretaciones geométricas de las soluciones algebraicas.

### ■ Conclusiones

En el aula de clases es posible desarrollar experiencias de aprendizaje que permitan a las estudiantes transitar de sus creencias personales a concepciones válidas con el fin de eliminar ambigüedades y generar el cambio conceptual necesario en el proceso de aprendizaje de la elipse. En este contexto, el conocimiento intuitivo es relevante para la construcción del conocimiento.

Se debe procurar llevar a las estudiantes a la generalización, pero evitando brindar conceptos y definiciones de manera inmediata, en este sentido, es relevante la selección de actividades de aula que permitan la independencia de pensamiento y el desarrollo de métodos de aprendizaje que sean extensivos a otras áreas del conocimiento. La mediación del programa de geometría dinámica Geogebra permite consolidar el proceso constructivo para reforzar en las justificaciones, argumentaciones y predicciones como habilidades de pensamiento superior.

Por otro lado, de la experiencia, surge la inquietud de analizar con mayor profundidad las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con técnicas propias de la geometría analítica.

### ■ Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Traducción de FAMAF, Córdoba, Argentina: UNC.
- Carretero, M. (Ed.). (1996). *Construir y enseñar las ciencias experimentales*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE HORSORI, Universidad de Barcelona.
- Duval, R. (2006). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al castellano de Myriam Veja Reestrepo. Berna, Suiza: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Proceedings of Psychology Mathematics Education Conferences 23*, 3-26.
- González, J. (2015). *Aplicaciones de la elipse*. (Archivo de video). Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=rox9ASzVYKY>

- Iranzo, N., Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencia del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433–446.
- Linder, C. J. (1993). A Challenge to conceptual change. *Science Education*, 77, 293-300.
- Rodríguez Moneo, M. (2000). Estado actual y nuevas direcciones en el estudio del cambio conceptual. *Tarbiya, Revista de Investigación e Innovación Educativa. Monográfico Cambio Conceptual y Educación*, 26, 5-11.
- Rogoff, B. (1997). Los tres planos de la actividad sociocultural: apropiación participativa, participación guiada y aprendizaje. En J. Wertsch, P. del Río y A. Álvarez (eds.). *La mente sociocultural. Aproximaciones teóricas y aplicadas*. Madrid, España: Fundación Infancia y Aprendizaje.
- Silva, C. (2006). *Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático*. Tesis de Maestría no publicada. São Paulo, Brasil: Pontificia Universidade Católica.