

CONSIDERACIONES EPISTÉMICAS SOBRE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA. ANÁLISIS INICIAL

Sergio Rubio-Pizzorno, Gisela Montiel Espinosa

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav). México

sergio.rubio@cinvestav.mx (www.zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN: La tecnología digital ha penetrado e impactado a la educación y, por lo tanto, a la educación matemática. Muestra de esta aseveración es el uso de ambientes de geometría dinámica, como GeoGebra, en el estudio de geometría, tanto a nivel formal como informal. La proliferación de este tipo de software, propician discusiones epistémicas, respecto a la constitución del saber geométrico. En este sentido, presentamos el análisis a un taller realizado en Relme 30, el cual busca abrir el debate en cuanto al estatus de precisión y exactitud de los objetos geométricos en ambientes dinámicos, apelando a su naturaleza epistémica. Por último nos interesa conocer la forma en que los asistentes al taller, perciben el trabajo geométrico en ambientes dinámicos, y reconocer si esa percepción se mantiene o es modificada a partir de la experiencia vivida en el taller.

Palabras clave: geometría dinámica, análisis epistémico, construcción dinámica, estatus de precisión y exactitud

ABSTRACT: The digital technology has taken part and impacted education, and therefore mathematical education. An example of such assumption is the use of dynamic geometry settings such as GeoGebra in geometry study in both formal and informal level. The proliferation of this kind of software, propitiates epistemic discussions, with regards to the content of the geometric knowledge. In this sense, we presented the analysis in a workshop held in the 30th RELME, which was intended to debate about the status of accuracy and exactness of geometric objects in dynamic settings, according to their epistemic nature. Finally, we are interested in knowing how the workshop participants perceive geometric work in dynamic settings, and whether their perception changes or not from the experience they had in the workshop.

Key words: dynamic geometry, epistemic analysis, dynamic construction, accuracy and exactness status

■ Introducción

En este escrito se presenta un análisis del taller realizado en la trigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, en el cual se trataron actividades cuyo propósito es poner en juego elementos inherentes de la Geometría Dinámica (GD). El análisis es realizado con la ayuda de tres herramientas teóricas que aluden a características epistémicas de los objetos de la GD.

■ Antecedentes

El taller fue estructurado a partir de dos propósitos declarados *a priori*: (1) distinguir entre un boceto y una construcción geométrica, empleando la prueba del arrastre como criterio para la diferenciación; y (2) confrontar la clasificación de polígonos (cuadriláteros) a través del análisis de las construcciones geométricas dinámicas. El primer propósito está inspirado en la definición de *prueba del arrastre* que realizan Arzarello, Olivero, Paola y Robutti (2002):

Mover un punto libre o semi libre [dependiente], para ver si el dibujo mantiene las propiedades iniciales. Si esto ocurre, entonces la figura pasa la prueba; en caso contrario, el dibujo no fue construido de acuerdo a las propiedades geométricas que se quería que tuviese (p. 67).

En esta definición los autores dejan entrever que los objetos de la GD tienen diferente estatus de precisión y de exactitud, según respondan o no, a las propiedades geométricas que se esperaba que tuviese tal objeto. Por ejemplo, se pretende construir un triángulo isósceles, pero luego de ser construido y aplicarle la prueba del arrastre, el objeto no conserva las propiedades que lo hacen un triángulo isósceles. En este caso podemos decir que el proceso de construcción no fue preciso, ya que el resultado no fue exactamente un triángulo isósceles, como era el propósito de la tarea.

Por lo tanto, estamos en ante la posibilidad de distinguir entre los objetos geométricos dinámicos que pasan la prueba del arrastre y los que no. De los objetos que pasan la prueba, es decir, los que preservan las propiedades geométricas que se esperaban que tuviesen, dependiendo de su proceso de construcción, se pueden obtener distintos resultados. Imagine la construcción de un triángulo isósceles en GeoGebra. Primero se traza un segmento dado dos puntos en el plano, se traza la circunferencias con centro en un extremo del segmento y radio la longitud del segmento. Luego se escoge un punto cualquiera de la circunferencia como tercer vértice, con lo cual queda determinado el triángulo isósceles.

Al aplicar la prueba del arrastre a esta construcción, se comprueba que las propiedades de triángulo isósceles se conservan a pesar del movimiento. Ahora considere que en el primer paso del proceso de construcción, en vez de crear dos puntos libres, se crea solo uno y luego se utiliza la herramienta *Segmento de longitud dada* para determinar el segundo punto. Luego se sigue el mismo procedimiento de la construcción anterior. ¿Hay diferencias entre ambas construcciones? La respuesta es sí y la

prueba del arrastre es clave para reconocer tales diferencias. Al aplicar la prueba del arrastre a algún vértice libre del primer triángulo, éste experimenta rotaciones y traslaciones, es decir, transformaciones isométricas. En cambio al aplicar la prueba del arrastre a algún vértice libre del segundo triángulo, éste sufre rotaciones, traslaciones, homotecias y simetrías, es decir, transformaciones homomórficas.

A partir de estas características, decimos que el primer triángulo es un *triángulo isométrico* y el segundo un *triángulo homomórfico*. Es posible acceder a la construcción de esta situación en (Rubio-Pizzorno, 2016b) para comparar los efectos en cada triángulo, al arrastrar sus respectivos vértices. Esta situación da pie a cuestionar los polígonos como los conocemos y confrontar las clasificaciones que hacemos de ellos. De esta manera se comienza a delinear el segundo propósito del taller, atendiendo a este fenómeno propio de la GD, a través de preguntarnos cómo realizar el ejercicio de clasificar polígonos, considerando esta cualidad dinámica.

■ Diseño de actividades para el taller

Con los propósitos del taller delineados, se diseñaron actividades que detonaran la discusión respecto del estatus de precisión y exactitud de los objetos dinámicos, y confrontaran la clasificación de cuadriláteros, considerando las propiedades dinámicas ya mencionadas.

Actividad 1

Para discutir el primer propósito del taller, se dispuso de la actividad 1 (Rubio-Pizzorno, 2016a, p. 2.1), la cual se presentó a los asistentes en una hoja de trabajo dinámico, en la que aparecen seis polígonos, que a simple vista parecen cuadrados (ver Imagen 1).

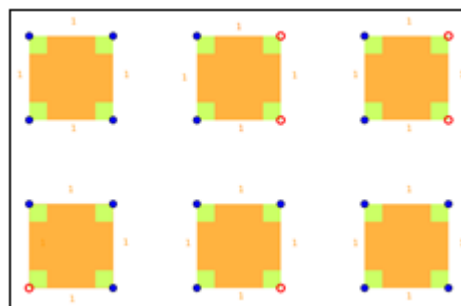


Imagen 1. Actividad de inicio

El objetivo de esta tarea es determinar cuáles de esos seis objetos son realmente cuadrados, para lo cual, es necesario aplicar la prueba del arrastre a cada uno de los objetos. Uno de los posibles

resultados de esta tarea se muestra en la Imagen 2, donde aprecia una versión de la construcción que representa cada objeto.

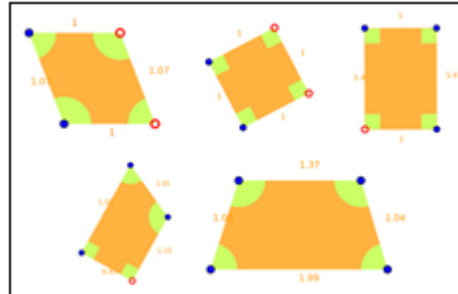


Imagen 2. Actividad luego de aplicar la prueba del arrastre

Actividad 2

Para abordar el segundo propósito del taller, se dispuso la actividad 2 (p. 3.4), la cual es muy similar a la actividad 1, pero con una diferencia sutil y significativa. En la actividad de inicio, se presentaron seis objetos de los cuales sólo uno correspondía exactamente a un cuadrado; en la actividad 2 se presentan seis objetos también, con la misma apariencia visual que los de la actividad de inicio (ver Imagen 1) y se realiza la misma pregunta, respecto de cuáles son cuadrados. En la respuesta a esta pregunta radica la diferencia sutil: en esta actividad son dos los objetos que mantienen invariante las propiedades de ser cuadrado, luego de aplicarles la prueba del arrastre, como se muestra en la Imagen 3.

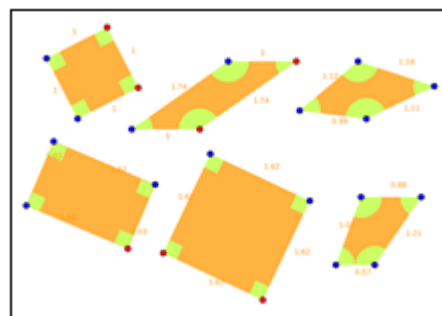


Imagen 3. Actividad 2 luego de aplicar la prueba del arrastre

Actividad puente

Hubo una tercera actividad (p. 3.1) al comienzo de la segunda sesión del taller, la cual sirvió como puente entre la actividad 1 y la actividad 2, relacionando ambos propósitos del taller. Esta actividad fue añadida al plan original del taller, debido a las respuestas y reacciones de los asistentes, quienes aludían a la necesidad de conocer el proceso de construcción de cada cuadrilátero, para complementar los análisis realizados con ayuda de la prueba del arrastre.

Esta actividad puente consistió en construir los cuadriláteros de la actividad 1 que no son cuadrado (paralelogramo, rectángulo, trapecio y trapecio rectángulo) siguiendo este procedimiento:

1. Identificar las propiedades características de cada cuadrilátero.
2. Reflejar tales propiedades en su proceso de construcción.
3. Emplear la prueba del arrastre para corroborar que las propiedades identificadas en el punto 1 permanecen invariantes.

Luego de realizadas las construcciones se pasó a una fase de discusión, donde se exhortaba la experiencia realizada por cada uno de los grupos que se constituyeron en el taller.

■ Características epistémicas de los objetos de la GD

Tanto las actividades diseñadas, así como la estructura completa del taller, responden a los propósitos declarados en la sección de Antecedentes. Las actividades atienden a los propósitos propiamente tal, y la estructura del taller cuida de la evolución de ideas que los relaciona.

Es importante notar que ambos propósitos ponen en juego aspectos epistémicos de los objetos de la GD: el primero hace referencia al estatus precisión y exactitud de los objetos geométricos en ambientes digitales; y el segundo pretende propiciar una discusión sobre cómo cambian ciertas prácticas matemáticas (clasificación, definición) al incorporar aspectos dinámicos a los objetos geométricos.

Cada uno de estos propósitos motivó el estudio y análisis de cuestiones epistémicas y epistemológicas de la geometría, lo cual nos permitió entender ciertos fenómenos que se dan en escenarios digitales y, de manera particular, en ambientes de GD.

■ Construcciones dinámicas

A partir de la definición de la prueba del arrastre que postula Arzarello et al. (2002), se vislumbra una necesidad de distinguir entre los objetos geométricos dinámicos, los que poseen un estatus de precisión y exactitud, de los que no lo poseen.

Para realizar esta distinción, primero fue necesario establecer a qué nos referimos cuando hablamos del estatus de precisión y exactitud, como el que reflejan las construcciones con regla y compás. De esta manera, tomamos la decisión metodológica de estudiar los Elementos de Euclides, así como los fundamentos filosóficos y sistémicos que sustentan la manera en que fueron redactados.

Como resultado de este estudio, se logró determinar que para que un objeto geométrico posea el estatus de precisión y exactitud, es necesario que durante su proceso de construcción se cifi a los resultados de la geometría euclidiana y, que las herramientas concretas utilizadas, encarnen a las herramientas teóricas declaradas por Euclides en sus Elementos (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2016a). A este tipo de construcciones se les denomina *construcciones euclidianas*. Para precisar la herramienta utilizada, a las construcciones euclidianas realizadas en ambientes de GD, les denominamos *construcciones dinámicas*.

Cabe señalar que el término construcción se utiliza en sus dos acepciones: tanto como proceso y como producto de tal proceso (Martin, 1998).

■ Estatus de precisión y exactitud

Luego de determinar que las construcciones euclidianas, en general, y las construcciones dinámicas, en particular, son poseedoras del estatus de precisión y exactitud, resta dilucidar qué tipo de objetos de la GD pueden ser considerados como construcciones dinámicas. Para esto, hay que tener en cuenta que la acción de generar objetos geométricos exactos, es relativo a la tarea de construcción. Es decir, si se pretende construir un cuadrado, pero el procedimiento no fue suficientemente preciso, el resultado no es exactamente un cuadrado, sino que pudiera ser un rectángulo o un rombo. Por lo tanto, el objeto no corresponde a una construcción dinámica de un cuadrado, pero ¿podríamos asegurar que tampoco corresponde a una construcción dinámica, sólo porque no cumple con el objetivo de la tarea?

Al respecto, Rubio-Pizzorno y Montiel (2016c) proponen un análisis en tres niveles del proceso de construcción del objeto dinámico, con el que establecen características de precisión y exactitud relativas al tipo de análisis realizado. Cuando se ponen en juego características gráfico-espaciales (perceptuales) para realizar el análisis, sólo se puede aseverar que el objeto tiene la apariencia de la figura que se pretende construir. A este tipo de objeto se le denomina *boceto* de la construcción; cuando se emplean herramientas teóricas para hacer el análisis, se podría asegurar que el objeto corresponde a una *construcción particular* del objetivo, ya que aún no se ponen en juego las características dinámicas del objeto; al utilizar propiedades dinámicas para el análisis, mediante el uso de la prueba del arrastre, se podría asegurar que el objeto es una *construcción general* de la figura objetivo, ya que este tipo de análisis pone en juego, además de las propiedades dinámicas, las propiedades perceptuales y teóricas.

El término construcción dinámica (proceso de construcción ligado a los resultados de la geometría euclidiana y utilizando herramientas que encarnen las herramientas teóricas declaradas en los Elementos) y los niveles análisis del estatus de precisión y exactitud de los objetos de la GD, representan el estado actual del estudio que germinó a partir de la consideración inicial del propósito 1 del taller.

■ Naturaleza de los objetos de la GD

El segundo propósito pretende propiciar una discusión sobre cómo cambian ciertas prácticas matemáticas (clasificación, definición) al incorporar aspectos dinámicos a los objetos geométricos.

Al respecto, Rubio-Pizzorno y Montiel (2016b) proponen que los objetos de la GD poseen una triple esencia, la cual está dada por sus (1) propiedades teóricas, (2) propiedades gráfico-espaciales y (3) propiedades dinámicas. A diferencia de los objetos de la geometría euclidiana, que poseen una naturaleza dual, es decir, sólo propiedades teóricas y perceptuales.

Las propiedades dinámicas son heredadas al objeto a través de su proceso de construcción, y se ponen en juego mediante la acción del arrastre, como característica definitoria de la GD (Fahlgren y Brunström, 2014). Por lo tanto, el fenómeno ejemplificado con los triángulo isométricos y homomórficos, se debe a las propiedades dinámicas del objeto.

Es importante considerar que, ambos triángulos corresponden a construcciones dinámicas, y más aún, son construcciones generales de un triángulo isósceles. Esto da pie a cuestionar la clasificación y definición de polígonos, donde es necesario considerar los aspectos dinámicos de los objetos para desarrollar una estructura más robusta y completa.

■ Análisis del taller

Luego de haber declarado los propósitos del taller y describir las actividades construidas en consecuencia, se presenta el análisis de algunos episodios del taller, a la luz de las características epistémicas de los objetos de la GD, es decir, construcciones dinámicas, estatus de precisión y exactitud, y la naturaleza de los objetos de la GD.

Los episodios seleccionados dan cuenta de hechos claves y representativos ocurridos durante el taller, en los cuales se manifiestan las características epistémicas mencionadas. De esta manera se hace el contraste entre la intención de las actividades y lo que realmente provocaron en las acciones y reflexiones de los asistentes al taller.

En el análisis se usan nombres ficticios para mencionar la participación de los asistentes al taller, a fin de mantener su anonimato.

Episodio 1: Arraigo a la regla y el compás

Luego de desarrollar la Actividad 1, se presenta la prueba del arrastre como criterio para distinguir entre boceto y construcción, y así, analizar la construcción del objeto. Un asistente, Galvarino, menciona que todos los objetos que se están estudiando en el ambiente de GD son “simplemente dibujos”, ya que para tener una construcción geométrica (euclidiana) es estrictamente necesario utilizar regla y compás. Aunque reconoce que se podría tener construcciones euclidianas en el ambiente dinámico, si “se utiliza básicamente regla y compás”.

En este episodio es posible notar el arraigo del estatus de precisión y exactitud en los objetos geométricos, al proceso de construcción únicamente empleando regla y compás. Este arraigo fue modificado con rapidez por la mayoría de los asistentes, cuando se les hizo notar que las herramientas usadas en el proceso de construcción de los objetos dinámicos, son representantes de las herramientas teóricas declaradas por Euclides. Por lo que asumieron que las construcciones dinámicas representaban el mismo tipo de construcciones que las realizadas por regla y compás, aceptando (de manera implícita) que las construcciones dinámicas también son construcciones euclidianas.

Episodio 2: ¿El cuadrado es rombo o el rombo es cuadrado?

En este episodio se revisa el proceso de construcción de un objeto que no pasó la prueba del arrastre, por lo tanto no corresponde a un cuadrado (en realidad es una construcción general de trapecio rectángulo). Frente a la pregunta ¿qué tipo de cuadrilátero es?, dos asistentes, Ailin y Rayen, desarrollaron una discusión, en la cual Ailin propuso que el objeto representa a todos los cuadriláteros; Rayen responde que no puede ser rombo, ya que en un rombo sus ángulos adyacentes siempre son distintos. Ailin le responde con una pregunta: “¿el cuadrado es rombo?”; Rayen contesta que el objeto analizado es un cuadrado, no rombo, aludiendo a los ángulos rectos; al respecto Ailin contra pregunta: “¿pero hay rombos que son cuadrados?”.

En este diálogo queda patente la forma en que el objeto, gracias a sus propiedades dinámicas, les entrega cierta información que entra en conflicto con los conocimientos teóricos que ambas asistentes poseen respecto de los cuadriláteros.

La discusión no llega a una resultado, sino que pone de manifiesto la manera en que los asistentes reconocen (de manera implícita) las propiedades perceptuales, teóricas y dinámicas del objeto analizado, ubicando a las dos últimas a un mismo nivel.

Episodio 3: Análisis del proceso de construcción

En este episodio, se analiza el proceso de construcción de un objeto dinámico, que *a priori* se sabía no era una construcción general de cuadrado.

1. Se revisa el proceso de construcción. Debido a la naturaleza del ejercicio (ya se sabía que no es cuadrado), se asume que es un boceto de cuadrado.
2. Se realiza un breve análisis de las propiedades del objeto según su proceso de construcción y las propiedades teóricas que pone en juego este proceso, con lo cual se propone al objeto como una construcción (parcial) de rectángulo.
3. Se aplica la prueba del arrastre y se verifica que el objeto no mantiene invariantes las propiedades que lo hacen rectángulo.
4. Se identifican las propiedades que no se mantuvieron para que el objeto fuese un rectángulo. De esta manera se concluye que el objeto es una construcción general de trapecio rectángulo.

El análisis muestra que al trabajar en un ambiente dinámico, se asume de manera natural que la versión estática del objeto corresponde a un boceto. Al revisar el proceso de construcción, se evocan propiedades teóricas para deducir a qué tipo de construcción corresponde. A pesar de la seguridad que mostraban los asistentes, respecto de la deducción realizada, la prueba del arrastre deja en evidencia las propiedades que no se mantienen invariantes, con lo cual se hace necesario volver a revisar el proceso de construcción, a la luz de la propiedad que no se mantiene. Finalmente se propone el objeto como una construcción de trapecio rectángulo, la cual es validada por la prueba del arrastre.

■ **Discusión**

En los episodios 1 y 2 se refleja un cambio en la manera en que los asistentes valoran la GD, primero reconociendo que las construcciones dinámicas son construcciones euclidianas, y luego, incorporando las propiedades dinámicas de los objetos, a sus razonamientos sobre la clasificación de estos. Esto propicia una modificación en la percepción general del trabajo geométrico en los ambientes de GD, para pasar de considerar que no se está trabajando con geometría, a reconocer que estos ambientes permiten construir conocimientos geométricos, como lo manifestaron (implícita y explícitamente) algunos asistentes al taller.

■ **Conclusión y proyecciones**

A raíz del análisis presentado en el escrito, podemos concluir que, en términos generales, se reconoce un cambio en la percepción de los asistentes, respecto del trabajo geométrico en ambientes dinámicos, pasando de ser un ambiente para ilustrar, a un ambiente para construir geometría.

Un elemento que surge del taller como proyección, es el cuestionamiento al comportamiento de ciertas construcciones dinámicas en casos extremos. Por ejemplo, una construcción general de

cuadrado que tenga como caso particular al punto, cuando los cuatro vértices son coincidentes. ¿Tal construcción sigue siendo un cuadrado? ¿Se puede considerar como una construcción general de cuadrado, o es una particular, o ninguna?

■ Referencias bibliográficas

- Arzarelo, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66–72.
- Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A Model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 287–315.
- Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). Springer International Publishing.
- Martin, G. E. (1998). *Geometric Constructions*. New York, NY: Springer New York.
- Rubio-Pizzorno, S. (2016a). *De la Geometría a la Geometría Dinámica* [Libro GeoGebra].
- Rubio-Pizzorno, S. (2016b). *Triángulos isométricos y homomórficos* [Hoja de Trabajo Dinámico de GeoGebra].
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017c). Precisión y exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba Gómez, J. C. Molina García, L. A. Ciro López (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.