EXPERIENCIAS EN EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN DE INVARIANTES GEOMÉTRICOS EN EL CONTEXTO DE LA VISIÓN 3D POR COMPUTADORA CON EL APOYO DE GEOGEBRA

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Lucinda Serna Herrera
Universidad Autónoma del Estado de Morelos. (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, lucindaserna@gmail.com

RESUMEN: En la presente comunicación compartimos las experiencias en la formación de estudiantes para facilitar el aprendizaje de los fundamentos de Geometría Proyectiva necesarios para trabajar con simulaciones en la visión 3D artificial por computadora. Nuestra estrategia consiste en enfatizar los antecedentes concretos de carácter geométrico y utilizar los beneficios de la herramienta Geogebra para ilustrar los conceptos de incidencia y de razón doble (cruzada) a través de ejercicios de construcción de Conjugados Armónicos y observar la importancia fundamental de las colineaciones y las homologías de las transformaciones proyectivas. En el desarrollo de innovaciones nos apoyamos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de cognición e instrucción matemática.

Palabras clave: invariantes de transformaciones proyectivas, geogebra

ABSTRACT: In this report, we share the experiences in the students' training to facilitate the learning of projective geometry foundations needed to work with simulations in 3D artificial vision by computer. Our strategy consists in emphasizing the concrete antecedents of geometric character, and using the benefits of the tool GeoGebra to illustrate the concepts of incidence and double reason (crossed) through exercises of construction of Harmonic Conjugates and to observe the great importance of the co-lineation and the homologies of projective transformations. In the development of innovations, we rely on the onto-semiotic approach theory of mathematical cognition and education.

Key words: invariants of projective transformations, geogebra

Introducción

Existen diversas publicaciones dedicadas al estudio del aprendizaje de las matemáticas en diferentes niveles educativos mediante el empleo del software dinámico de Geogebra. Concretamente, en el aprendizaje de la geometría mediante Geogebra se han explorado diversos tópicos los cuales se encuentran apoyados en diferentes teorías educativas y modelos, sin embargo, existen escasas investigaciones en relación con la comprensión de conceptos de la geometría proyectiva en las cuales el empleo de un software dinámico podría resultar crucial para favorecer la visualización y la realización de otros procesos cognitivos.

La geometría proyectiva tiene sus orígenes en la pintura de la época del Renacimiento con el deseo de lograr reproducción fiel sobre un lienzo de escenas espaciales. Mediante los principios de proyección y sección lograron expresar los efectos visuales de perspectiva. La teoría de Perspectiva desarrollada por los artistas de Renacimiento establece fundamentos geométricos de los conceptos de puntos de fuga, línea del Horizonte, paralelismo, entre otros. Cabe enfatizar que los teoremas deducidos por los renacentistas se encuentran en el cuerpo de la geometría moderna. Actualmente estos conocimientos teóricos resultan ser la base de la fotogrametría, que comenzó a desarrollarse a mediados del siglo XIX, y la visión 3D por computadora, en la segunda mitad del siglo XX.

Una imagen se obtiene realizando una proyección cónica, que es una aplicación proyectiva que conserva alineaciones y razones dobles, pero no razones simples, ni ángulos, ni distancias. A partir de esta situación surge el cuestionamiento ¿Cómo es posible reconocer un objeto a partir de las imágenes que lo representan? (Gordejuela, 2009), estas y otras cuestiones son de gran relevancia y pueden ser abordadas en el contexto de la Visión 3D por computadora apoyada en los fundamentos teóricos de Geometría Proyectiva.

Marco teórico

Nos apoyamos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para describir los fenómenos matemáticos como *el punto en el infinitito y Conjugados Armónicos*, a partir de la realización de una secuencia de prácticas matemáticas en el entorno informático de Geogebra. Según el EOS, en las prácticas matemáticas intervienen seis tipos de objetos matemáticos (Font, Godino y Gallardo, 2013): lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos.

A través de la práctica de resolución de problemas, el sujeto que resuelve el problema (experto o novato) organiza el conjunto de objetos en configuraciones de objetos matemáticos. En la experiencia de enseñanza de los fundamentos de la geometría proyectiva se desarrollaron algunas innovaciones dentro de las prácticas discursivas y operativas en la asesoría individual para lograr la sinergia entre los lenguajes diagramáticos y secuenciales a través de la resolución de tareas por computadora.

Los fundamentos teóricos que nos permitieron entender los problemas de construcción del conocimiento que enfrentaron nuestros estudiantes se puede encontrar en las investigaciones recientes del EOS (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016) dedicadas a los problemas de la visualización y el uso de diagramas que desempeñan el papel importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En dichos trabajos se señala que los lenguajes secuenciales (como lenguajes naturales y simbólicos) usan sólo la relación de concatenación para representar relaciones entre los objetos, mientras que en los diagramas se hace uso de las relaciones espaciales para representar otras relaciones. Por eso, la visualización es muy importante en la práctica matemática, especialmente cuando se usan diagramas, lo que refleja metafóricamente las estructuras conceptuales matemáticas.

Nuestro método de trabajo ha sido dar atención individual en las asesorías con los estudiantes en su investigación sobre la Tesis de Licenciatura, lo que permitió detectar problemas referentes a las interpretaciones de los distintos modelos de geometría proyectiva y los métodos que se usan en la Visión 3D por computadora, así como también las dificultades sobre la comprensión de las descripciones que se presentan en los libros de texto bajo un enfoque de divulgación. Varias situaciones produjeron conflictos cognitivos, los cuales han sido resueltos gracias a las explicaciones de Godino et al. (2016) sobre las representaciones simbólicas en lengua natural o en lenguajes formales: aunque consisten en inscripciones visibles, no son consideradas como inscripciones visuales, sino como analíticas o secuenciales.

Por eso se sugiere entender la abstracción en una manera antropológica, es decir, que la emergencia de objetos generales e inmateriales, que constituyen las estructuras matemáticas, tiene importantes consecuencias en educación matemática. Consecuentemente, el aprendizaje matemático debe tener lugar mediante la progresiva participación de los estudiantes en los juegos de lenguaje matemático realizados en las prácticas matemáticas.

A continuación se comparten algunas experiencias con estudiantes universitarios en relación con el aprendizaje de los fundamentos de Geometría Proyectiva. Las sesiones de asesorías tenían el objetivo de guiar a los estudiantes hacia la comprensión de modelos que se aplican en simulaciones tridimensionales.

Descripción del experimento que permite visualizar el concepto de punto en el infinito

Las consideraciones del EOS nos sugieren que es necesaria una introducción informal a través de prácticas que lleven a los estudiantes, por un lado, al descubrimiento de la noción de puntos “en el infinito”, cambiando la terminología más antigua de los puntos “absolutos” (ideales) o impropios, y por otro lado, también a encontrar antecedentes del significado geométrico. Se observó a través de las tareas de construcción con lápiz y papel, guiadas para lograr una sensación corporal, que los estudiantes se apoyaban con gestos para indicar las direcciones donde los puntos en el infinito emergían.

Antecedentes concretos de carácter geométrico

En la geometría euclidiana se distingue entre dos casos diferentes de parejas de rectas: las que se intersectan y las parejas que no poseen un punto común (rectas paralelas). En contraste con la geometría usual, en Geometría Proyectiva no hay rectas paralelas: todas las rectas se intersectan ya sea en un punto propio (actual) o bien en un punto impropio (ideal o absoluto).

La manera de percibir este fenómeno puede ser lograda mediante la siguiente práctica: se inicia con el trazado de dos rectas, digamos recta l y recta k, que se intersectan en el punto P. Se escoge una de estas rectas, digamos, la recta l, y un punto A cualquiera sobre esta recta. Luego se empieza a girar la recta escogida alrededor del punto A, el cual se queda fijo. Al hacer este movimiento es posible observar qué pasa con la posición del punto P.

Con el cambio de posición de la recta l, que gira, las posiciones del punto P de intersección con la recta k se alejan a lo largo de la recta k hasta “desaparecer”, lo que sucede cuando la recta l tome la posición paralela a la recta k. Cuando las rectas l y k están paralelas decimos que se intersectan en el punto absoluto (ideal, impropio, en el infinito).

Un fenómeno de observación

Si se dibuja una recta “l” la cual se hace girar en sentido antihorario, recta verde de la Figura 1(a), con el punto A como “pivote”, entonces se observa a un punto P de intersección con una recta k (conjunto de rectas paralelas de color azul). El punto P se encuentra en la parte superior respecto a la posición inicial de la recta “l”, alejándose hacia arriba en la dirección Norte (P' y P'') a lo largo de la recta k, y puede ser idealizado como un punto en el infinito cuando recta l es paralela a la recta k.

Sin embargo, al continuar el movimiento más allá de esta posición “paralela”, se percibe que el punto P vuelve a aparecer en la recta k, pero del “otro lado” en la dirección Sur, Figura 1(b).

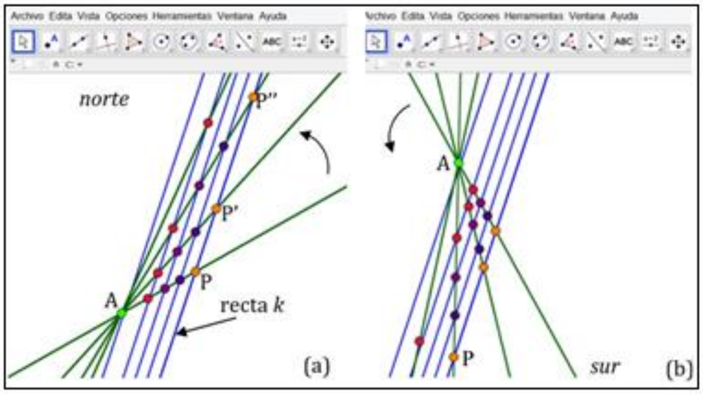

Figura 1. Tarea en Geogebra que permite visualizar la emergencia del punto en el infinito

Visualización apoyada con un gesto

La tarea anterior también fue realizada a lápiz y papel donde se tomó en cuenta el conjunto de rectas paralelas k y la recta que se hace rotar en torno al punto A, Figura 1. Surgió un momento crucial cuando uno de los alumnos se apoyó con la muñeca de la palma derecha, en la posición vertical, sobre el punto A girándola en el sentido contrario de las manecillas de reloj, entonces los dedos le indicaban el sentido de movimiento del punto P sobre la recta en movimiento.

Con el cambio de posiciones de la muñeca (que representaba la recta "l", que gira), las posiciones del punto P de intersección con la recta k se alejan más allá a lo largo de la recta k hasta "desaparecer" (no percibido) cuando la mano (recta l) tome la posición paralela a la recta k. Luego, el alumno observó que al continuar el movimiento, el punto P vuelve a aparecer en la recta k, pero del otro lado representado por el brazo, prolongación más allá del codo, del lado derecho.

El empleo de la metáfora

Mediante el empleo de una metáfora, se puede decir que dos líneas rectas tienen un punto de intersección aun cuando se encuentran en la posición de ser paralelas, pero este punto está en el "infinito", o es el "Punto Absoluto". Podemos resumir esto del modo siguiente: cada línea recta posee un único punto absoluto (en el infinito) al cual un observador puede acercarse por el movimiento a lo largo de la recta en cualquiera de los dos sentidos. Además, todas las rectas paralelas a la recta dada se intersectan en este mismo punto en el infinito. El término punto "en el infinito" todavía es una expresión metafórica, sin embargo existen varias maneras de darle un sentido matemático preciso (Semple y Kneebone, 1952).

Un invariante de las transformaciones proyectivas

Otra secuencia de prácticas con un énfasis sobre el carácter geométrico ha sido relacionada con las construcciones con lápiz y papel de los Conjugados Armónicos (cuaternos armónicos, antecedentes de la razón cruzada, que es invariante propio de transformaciones proyectivas).

Cuando consideramos una figura con cuatro puntos colineales (i.e., se encuentran en la misma recta) se descubre una característica numérica, llamada razón cruzada o razón doble, que no se altera bajo transformaciones proyectivas, por eso se llama invariante. La razón cruzada de la pareja ordenada (C, D) respecto a la pareja ordenada (A, B) es $\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB}$, donde los cuatro puntos A, B, C, D son colineales (figura 2).

Este invariante juega papel importante en la geometría proyectiva (del mismo modo que lo hace longitud en la geometría euclidiana), pues permite reconocer si las imágenes representan el mismo objeto. El caso particular, cuando el valor de la razón cruzada es igual a (-1), es conocido desde los tiempos de Pitágoras como razón armónica, y las parejas CD y AB de los puntos mencionados se llaman Conjugados Armónicos.

Entre las distintas maneras de construir los Conjugados Armónicos (cuaternos armónicos) se han escogido para esta comunicación solo dos, las más significativas desde el punto de vista de la geometría subyacente. Además, se descubren varios beneficios del empleo de Geogebra que permiten la animación, por ejemplo, permite apreciar los cambios de la posición de la recta hasta que sea paralela e indique el punto al infinito (ver la Figura 3).

Construcción de los conjugados armónicos (cuaternos armónicos)

Sean A, B y C tres puntos colineales, ver la Figura 3. Se puede construir una circunferencia (pueden ser de diferentes radios) que pasa por los puntos A y B (enfatizando los beneficios de Geogebra para esta construcción). Sea K el punto medio del arco AB de la circunferencia construida, Figura 2. Se plantea el problema: ¿Cómo obtener la pareja de Conjugados Armónicos, a saber, puntos C y D, respecto a la pareja de puntos A y B?

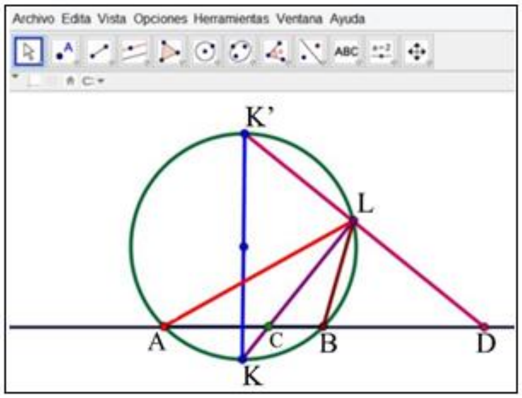

Figura 2. Los puntos C y D son conjugados Armónicos respecto a los puntos A y B

ea L el punto de incidencia de la recta (KC) sobre la circunferencia. Se traza la recta $K'L$, donde K' es el punto diametralmente opuesto al punto K, entonces el ángulo KLK' será un ángulo recto, por "abrir" el diámetro, y entonces la recta $K'L$ es perpendicular a la recta KL que pasa por el punto L. La recta $K'L$ intersecta a la recta AB en el punto D, entonces los puntos C y D son los Conjugados Armónicos respecto a la pareja de puntos A y B.

Justificación

Se aplica el teorema de la bisectriz LK del ángulo ALB (por la construcción los ángulos ALK y KLB miden lo mismo porque el punto K es el punto medio del arco AB). Además, por la construcción, LD es la bisectriz del ángulo externo del triángulo ALB, ya que las bisectrices son ortogonales.

Conjugados Armónicos con un Cuarto Armónico en el infinito

La Figura 3 ilustra el siguiente Principio 1: sean A y B dos puntos propios y C el punto medio del segmento AB. Entonces la pareja de puntos C y D son Conjugados Armónicos respecto a la pareja de los puntos A y B, siendo punto D el punto en el infinito (impropio, ideal) que corresponde al punto absoluto de la recta (AB). Se llama D, el Cuarto Armónico.

Cuaterna de rectas armónica

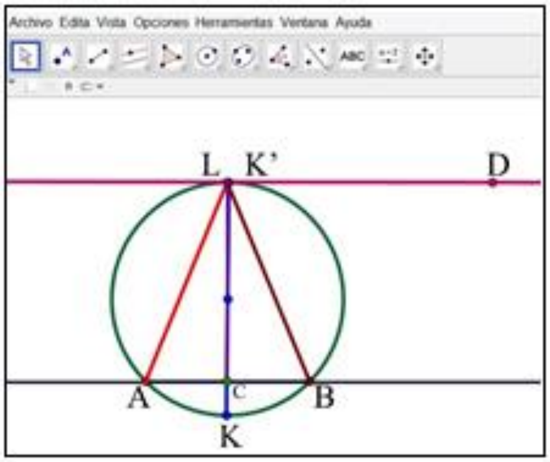

Figura 3. El punto D se encuentra en el "infinito" cuando C es el punto medio de AB

Las diagonales a y b del paralelogramo y dos rectas c y d que pasan por el punto de intersección de diagonales del paralelogramo forman una cuaterna de rectas armónica.

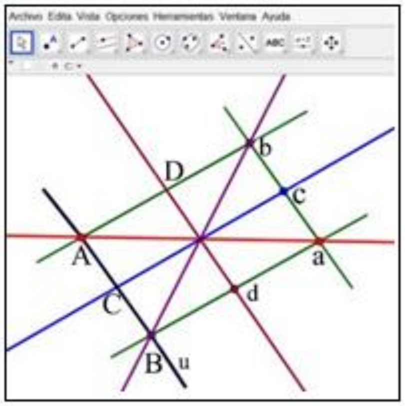

Figura 4. El punto D es el punto ideal de las rectas d y u

Justificación

Los cuatro puntos A, B, C, D en los cuales las rectas a,b,c y d intersectan al lado del paralelogramo u forman una cuaterna armónica (porque D es el punto impropio de la recta u (que representa este lado), de acuerdo con el Principio 1, dado que el punto C es el punto medio del segmento $\overline{AB}$). Por eso se dicen que las rectas a,b,c y d forman la cuaterna armónica, ver la Figura 4.

Transformaciones proyectivas con Geogebra 3D: homologías y elaciones

Se llama *homología* a una transformación proyectiva bajo la cual se tiene una recta p, llamado el eje, que consiste de puntos fijos (inmóviles) y un punto fijo P, llamado centro, que no pertenece a la recta fija. En el caso cuando el centro P pertenece al eje, la transformación se llama *elación*.

Construcción de imágenes

El Principio 2 expresa que la imagen A' de cualquier punto A se encuentra sobre la recta PA: sea K el punto de intersección de la recta PA con el eje de homología p, se tiene que los puntos P y K se quedan inmóviles (fijos) bajo la transformación de homología, por eso los tres puntos P, K y A que se encuentran en la recta PA deben transformarse a los tres puntos P, K y A' que se encuentran en la misma recta (la recta PA).

Para la construcción de la imagen B' de cualquier punto B bajo la homología con el centro P, el eje p y dos puntos correspondientes A y A', unimos los puntos A y B; sea N punto de intersección de la recta AB con el eje p. Entonces el punto de la intersección B' de las rectas PB y NA' es la imagen del punto B (de acuerdo con el Principio 2 la recta ABN se transforma en la recta $A'B'N$).

Una manera de representar estas construcciones (que ilustramos con Geogebra 3D) utiliza un hecho teórico: se trata de que una homología puede obtenerse como el resultado (composición) de dos aplicaciones de perspectiva, como se muestra en la Figura 5.

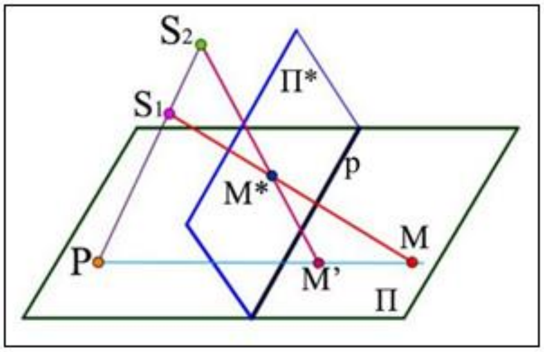

Figura 5. Homología como la composición de dos perspectivas

Supongamos que en un plano proyectivo Π esta dada una homología con el centro P, el eje p y puntos homólogos M y M'. Tracemos un plano Π^* que pasa por el eje p, y sobre una recta, que pasa por el punto P y no se encuentra en el plano Π, tomemos un punto S_1 que no pertenezca al plano Π^*. Realizamos la aplicación de perspectiva del plano Π sobre el plano Π^* con el centro de perspectiva en S_1, y luego la aplicación de perspectiva con el centro en S_2 (punto de intersección de la recta $M'M^*$con la recta PS_1) del plano Π^* sobre el plano Π.

El resultado de composición de estas dos perspectivas es una transformación proyectiva del plano Π, la cual es una homología, porque todos los puntos de la recta p se quedan fijos y el punto P, de intersección de la recta S_1S_2 con el plano Π se queda fijo. Cabe enfatizar que las construcciones presentadas son componentes indispensables de solución de una tarea integradora (Rodrígues-Sanjurjo y Ruis Sancho, 1998) para el caso de las homologías involutivas (que coinciden con su inversa) y que resultan ser exactamente las homologías de razón doble igual a (-1) (denominadas *homologías armónicas*).

Conclusiones y resultados

Con el empleo del software dinámico Geogebra se logró la visualización de los invariantes de las transformaciones proyectivas. El material gráfico elaborado por los estudiantes se puede emplear como una guía para estudios de los fundamentos geométricos que subyacen los algoritmos y modelos en la visión artificial por computadora. A través de este proceso de “enseñanza asistida por ordenador” descubrimos que a pesar de la descripción detallada de las construcciones y sus justificaciones era indispensable el apoyo de profesor en el proceso de realización de las construcciones, lo que demuestra la falta tanto de prácticas de construcciones geométricas y exploraciones de conexiones lógicas en la formación previa de alumnos, como la intuición en dibujos de figuras geométricas espaciales.

Con la variedad de prácticas ofrecidas, los estudiantes superaron distintos obstáculos y lograron comprender la importancia fundamental de las colineaciones y las transformaciones proyectivas, representando las construcciones espaciales mentales sobre el plano de dibujo. En las prácticas discursivas resaltamos las propiedades notables de los cuaternos armónicos estudiados por Pitágoras relacionados con las notas musicales, siendo el Cuarto Armónico la octava de la primera nota de un acorde.

Referencias bibliográficas

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practice. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco T. F., y Contreras, A. (2016). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático*. Recuperado el 30 de marzo de 2016 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf.

Gordejuela, F. E. (2009). La geometría de la representación visual. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *103*(2), 297-304.

Rodrígues-Sanjurjo, J. M., Ruis Sancho, J. M. (1998). *Geometría proyectiva*. Madrid, España: Addison Wesley.

Semple, J. G. y Kneebone, G. T, (1952). *Algebraic projective geometry.* Oxford: Clarendon Press.