

## SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Elizabeth Advíncula Clemente, Maritza Luna Valenzuela, Edwin Villogas Hinostroza

Pontificia Universidad del Perú. IREM PUCP. (Perú)

eadvincula@pucp.edu.pe, luna.m@pucp.edu.pe, evillogas@pucp.edu.pe

**RESUMEN:** En geometría, la mayoría de estudiantes presenta dificultades para identificar las propiedades de los sólidos de revolución, dado que la representación en el plano de estas figuras tridimensionales limita el reconocimiento de todas sus propiedades. Ante esta problemática encontramos el entorno de geometría dinámica como una alternativa que favorece el reconocimiento de propiedades en figuras tridimensionales. Luego, elaboramos actividades basadas en el enfoque de Rabardel usando el *software* GeoGebra 3D, las cuales aplicamos con estudiantes de un primer ciclo universitario. Durante la aplicación, observamos que el GeoGebra 3D permitió que los estudiantes descubran e identifiquen las propiedades particulares de estos.

**Palabras clave:** sólidos de revolución, geometría dinámica, génesis instrumental

**ABSTRACT:** In Geometry, most students experience difficulties in identifying the properties of solids geometry, since the representation of these three-dimensional figures in the plane limits the recognition of all their properties. Faced with this problem we find the dynamic geometry environment as an alternative that favors the recognition of properties in three-dimensional figures. Then, we elaborate activities based on Rabar's approach, using the GeoGebra 3D software, which we implement with students of a first university cycle. During the implementation, we noticed that GeoGebra 3D allowed students to discover and identify the particular properties three-dimensional figures.

**Key words:** solid geometry, dynamic geometry, instrumental genesis

## ■ Introducción

En nuestra experiencia docente, en relación con la enseñanza de los sólidos de revolución en el curso de Introducción a la Matemática Universitaria observamos que los estudiantes presentan muchas dificultades para reconocer las características y propiedades propias de estas figuras tridimensionales. Estas dificultades hacen que los estudiantes no logren comprender las nociones y propiedades geométricas que requieren para resolver problemas relacionados con estos objetos geométricos.

En la búsqueda de alternativas para facilitar el aprendizaje de los sólidos de revolución encontramos que el uso de un entorno de geometría dinámica como el GeoGebra 3D, favorece la exploración y el descubrimiento de las propiedades propias de cada figura geométrica así como la comprensión de las mismas. El potencial de arrastre que ofrece este *software* permite realizar cambios de manera casi inmediata en las construcciones realizadas, a diferencia del trabajo realizado con lápiz y papel, lo cual favorece el reconocimiento de las propiedades geométricas invariantes que caracterizan a cada objeto geométrico.

## ■ Antecedentes

Algunos investigadores en Educación Matemática señalan que la resolución de problemas en Geometría resulta compleja, dado que esta involucra el trabajo con figuras geométricas bidimensionales o tridimensionales que no son fáciles de identificar. En este sentido, Gutiérrez (2006) señala que el desarrollo de las habilidades de visualización es importante en el proceso de comprensión de las figuras geométricas bidimensionales o tridimensionales. Entendiendo que la visualización no solo consiste en ver o percibir de manera directa un objeto, sino que es un proceso de razonamiento que facilita la comprensión de un concepto a partir del uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos. También podemos decir que es un proceso relacionado con la observación de patrones, la deducción y la dotación de significado.

Por otro lado, Sánchez (2000) señala que los recursos tecnológicos son herramientas de apoyo que hay que aprender a usar, de modo que fomenten el desarrollo de destrezas cognitivas en los estudiantes y faciliten la construcción de los conocimientos deseados. En esta misma línea, The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) señala que la tecnología es una herramienta eficaz que apoya la enseñanza de las matemáticas ya que ofrece entornos de aprendizaje dinámicos.

## ■ Marco teórico

Entre los enfoques actuales en relación a la integración de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se encuentran: la Aproximación Instrumental, la Mediación Semiótica, la Orquestación Instrumental y el Enfoque Seres-humanos-con-medios.

La aproximación instrumental se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte del sujeto en un contexto educativo, y es resultado de la concatenación de dos teorías, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) y se produce con el fin de legitimar las prácticas educativas emergentes del uso de una herramienta tecnológica por parte de un estudiante en un contexto educativo. En nuestro trabajo tomamos en cuenta aspectos del enfoque instrumental de Rabardel (2011).

Según el enfoque instrumental de Rabardel (2011) un artefacto es una cosa susceptible de uso, que puede ser material o un objeto simbólico. Así por ejemplo, un artefacto puede ser un compás, una computadora, un software matemático, entre otros. Mientras que un instrumento es un artefacto en acción, es decir, es una entidad que comprende el artefacto y los esquemas de uso que le da el usuario, los cuales son resultado de una construcción propia mediante las acciones que realiza. Así por ejemplo, un instrumento puede ser construir un cono usando GeoGebra 3D, construir un polígono regular usando un compás, etc.

Rabardel (2011) también señala que el instrumento no es algo que existe en sí mismo, sino que es elaborado por el usuario en un proceso denominado génesis instrumental. Es decir, el instrumento se concibe como tal cuando el usuario se apropia de éste y lo integra a su actividad. Además, un artefacto puede generar varios instrumentos y la producción de estos se llama instrumentación. Por ejemplo, con el artefacto GeoGebra 3D y las propiedades asociadas al uso de este un usuario puede generar la definición de sólido de revolución.

Cabe resaltar que en este enfoque los instrumentos cumplen una función muy importante para los usuarios, estudiantes en nuestro caso, pues involucran las acciones que éstos realicen con el artefacto, constituyéndose de esta manera en parte activa en la construcción de sus conocimientos. Por ello, en nuestro trabajo consideramos que el GeoGebra 3D es un artefacto que puede transformarse en un instrumento para los estudiantes luego de un proceso de génesis instrumental, según los esquemas de uso que se apropien o elaboren para realizar determinada tarea.

Finalmente, podemos decir que los entornos de geometría dinámica como el GeoGebra 3D son herramientas con gran potencialidad que podemos usar como medio para construir y crear conocimiento, ya que ofrecen un ambiente favorable para la exploración, construcción, descubrimiento y manipulación de figuras geométricas bidimensionales y tridimensionales.

### ■ Actividades con GeoGebra 3D

La experiencia que vamos a compartir se realizó con un grupo de estudiantes de un primer ciclo, matriculados en el curso Introducción a la Matemática Universitaria de la Facultad de Estudios Generales Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú. En las actividades propusimos

problemas relacionados con sólidos de revolución para que los estudiantes los resuelvan usando el GeoGebra 3D.

**A modo de ejemplo, mostramos tres problemas propuestos.**

### Problema 1

Por un diámetro de la base de un cono circular recto cuya longitud es igual a la longitud de su generatriz, se traza una recta L alrededor de la cual se hace rotar el círculo de la base del cono y se genera una esfera. Si el volumen del cono es igual a  $100\sqrt{3} m^3$ , determine el volumen de la esfera.

### Problema 2

Se tiene un rombo cuyo lado mide 10 cm y uno de sus ángulos  $30^\circ$ . Halle el volumen del sólido que se obtiene al girar la región delimitada por el rombo alrededor de un eje que contiene a uno de los lados de dicho rombo.

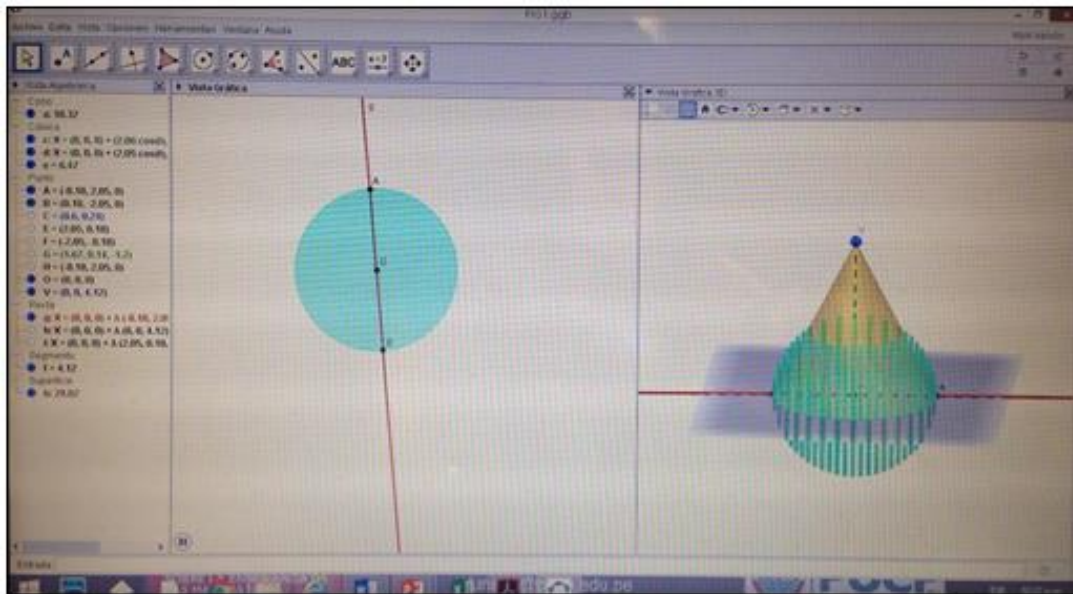
### Problema 3

Sea S el sólido que se obtiene al girar una región delimitada por un triángulo equilátero de 4 cm de lado alrededor de una recta L exterior al triángulo y paralela a uno de sus lados. Si la recta L está ubicada a 3 cm de distancia del lado del triángulo equilátero, halle el área y el volumen del sólido S.

Durante la implementación de esta actividad, observamos que los estudiantes se involucraron con el desarrollo de los problemas propuestos. Algunos resolvieron los problemas propuestos usando solo las herramientas que ofrece el GeoGebra 3D, mientras que otros resolvieron los problemas apoyándose de trazos auxiliares realizados con lápiz y papel.

Sin embargo, no todos los estudiantes lograron resolver todos los problemas. Esto debido a que algunos no conocían el *software* y les resultó complicado manipularlo, o debido a que se complicaron con las construcciones en tres dimensiones al ubicar las rectas que eran ejes de rotación o las regiones que iban a rotar alrededor de los ejes de giro.

Respecto al primer problema propuesto, en la figura 1 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, en el que podemos apreciar que este logro construir la superficie esférica generada alrededor del eje de giro indicado. También, observamos que construyó la esfera requerida y calculó su volumen. Lo cual pone en evidencia que el estudiante convirtió el artefacto GeoGebra 3D en un instrumento, ya que se apropió de las herramientas necesarias y las uso de manera adecuada para resolver el problema dado.

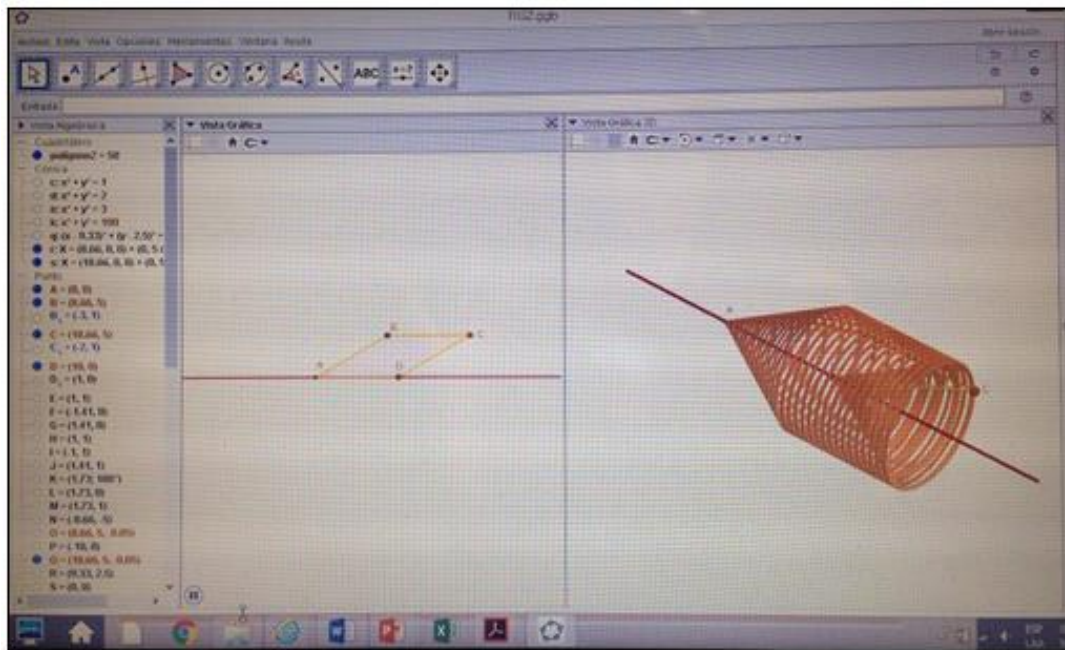


**Figura 1.** Construcción realizada por un estudiante para el problema 1

Observamos que algunos estudiantes entregaron construcciones y resultados similares al del estudiante 1. Sin embargo, algunos estudiantes tuvieron dificultades para construir la circunferencia que permite generar la superficie esférica dado que no lograban identificar el plano en el que tenían que construirla usando las herramientas del GeoGebra 3D. Esta dificultad impidió que terminaran de resolver el problema.

Respecto al segundo problema propuesto, en la figura 2 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, donde podemos apreciar la superficie de revolución generada alrededor del eje de rotación indicado. También, observamos que construyó el cilindro y los conos, y calculó el volumen pedido. Esto pone en evidencia que este estudiante logro convertir el artefacto GeoGebra 3D en un instrumento, luego de un proceso de génesis instrumental que le permitió apropiarse de los conceptos de cilindro y cono de revolución.



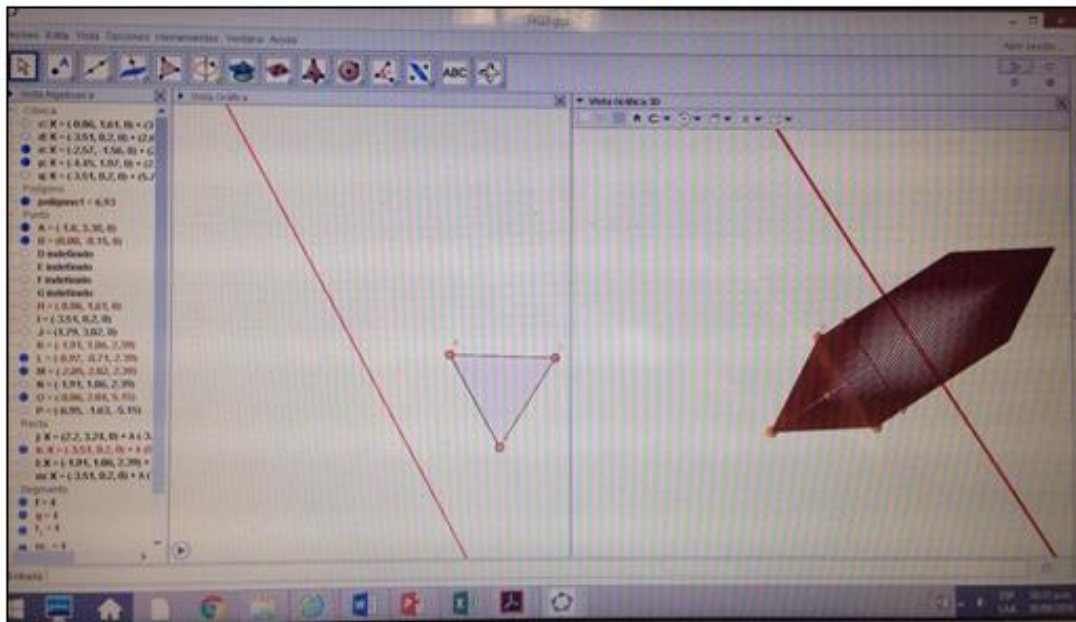


**Figura 2.** Construcción realizada por un estudiante para el problema 2

En este problema, observamos que la mayoría de estudiantes pudo realizar las construcciones en la vista 2D. Las dificultades aparecieron al realizar las construcciones de los conos en la vista gráfica 3D. Lo que pone en evidencia las dificultades para trabajar con figuras tridimensionales.

Entre las dificultades que presentaron los estudiantes, observamos que algunos no lograron determinar el volumen pedido debido a que no reconocían el sólido generado, compuesto por un cilindro de revolución y dos conos de revolución equivalentes, uno ubicado en la parte superior externa y otro en la parte inferior interna. Podemos decir que pocos estudiantes reconocieron que los conos de revolución generados eran equivalentes

Respecto al tercer problema propuesto, en la figura 3 mostramos el trabajo entregado por un estudiante, donde podemos apreciar la superficie de revolución generada alrededor del eje de giro indicado. También, observamos que logró construir el cilindro y los conos de revolución, y calculó el volumen pedido. Lo que pone en evidencia que convirtió el artefacto GeoGebra en un instrumento, es decir, se apropió de esquemas ya existentes o elaboró nuevos esquemas que le permitieron usar de manera adecuada las herramientas necesarias del GeoGebra 3D para resolver el problema dado.



**Figura 3.** Construcción realizada por un estudiante para el problema 3

En este problema observamos que pocos estudiantes lograron realizar una construcción como la mostrada en la figura 3, donde podemos apreciar la superficie generada alrededor del eje de giro indicado. Al igual que en problema anterior, observamos que los estudiantes no tuvieron dificultades para realizar las construcciones en la vista 2D, pero si las tuvieron para realizarlas en la vista gráfica 3D.

También, observamos que algunos estudiantes no lograron determinar el volumen pedido debido a que no reconocían la superficie de revolución generada. Al respecto, consideramos que, en esta construcción en particular, el *software* no facilitó la visualización de las propiedades y las relaciones necesarias para determinar el volumen del sólido pedido.

Por último, observamos que el uso del GeoGebra 3D promovió el interés en los estudiantes por buscar diversas estrategias para resolver los problemas propuestos. Creemos que esto se dio debido a que las herramientas que ofrece este *software* facilitaron a los estudiantes la construcción de las superficies de revolución requeridas en los problemas propuestos, ayudándoles a visualizar las propiedades geométricas de las figuras involucradas y las relaciones existentes entre ellas, y finalmente permitiéndoles realizar las tareas propuestas con éxito.

## ■ Conclusiones

A modo de conclusión podemos mencionar que las construcciones realizadas en un entorno de geometría dinámica ofrecen muchas ventajas frente a las construcciones realizadas en papel con regla y compás. Una de las principales es que estos entornos dinámicos como el GeoGebra 3D nos permiten visualizar los elementos y las propiedades de los objetos tridimensionales con mayor precisión así como realizar construcciones complejas que pueden ser modificadas de manera casi inmediata. Lo que resulta difícil realizar en un papel con regla y compás debido a su característica estática.

Además, los *softwares* de geometría dinámica como el GeoGebra 3D facilitan la experimentación en los estudiantes, dándoles oportunidades para explorar, visualizar, descubrir, conjeturar, verificar, reformular y comprender nociones y propiedades geométricas relacionadas con figuras tridimensionales tales como los sólidos de revolución. Asimismo, la potencialidad del arrastre que poseen estos programas permite que los estudiantes observen como se mantienen fijas las relaciones geométricas existentes en las figuras construidas al realizar cambios inmediatos sobre las mismas.

Por lo anterior, podemos decir que el uso del GeoGebra como instrumento, en términos de Rabardel (2011), contribuye con el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes debido a su flexibilidad y versatilidad para realizar construcciones geométricas y modificaciones a las mismas de manera casi inmediata. Lo que facilita el proceso de génesis instrumental en el que los estudiantes elaboran o se apropian de esquemas existentes que les permitan usar de manera óptima las herramientas del GeoGebra 3D para resolver problemas geométricos.

## ■ Referencias bibliográficas

- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- The National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática*.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Traducido por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Sánchez, J. (2000). *Nuevas tecnologías de la información y comunicación para la construcción del aprender*. Chile: LMA Servicios Gráficos.