ACTIVIDADES DESDE UN ENFOQUE VARIACIONAL HACIENDO USO DEL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos
Universidad de Lima. (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe

RESUMEN: Las actividades que presentamos en este taller se han diseñado teniendo en cuenta el dinamismo de los contenidos matemáticos en distintos tópicos como la trigonometría, geometría analítica y el cálculo diferencial. Estas actividades se enmarcan en el desarrollo del pensamiento variacional haciendo uso de un programa en geometría dinámica, específicamente el Geogebra. La mediación de dicho software favorece las habilidades del pensamiento variacional, ya que facilita la búsqueda de patrones de la misma magnitud en las representaciones dinámicas. En el presente artículo mostramos solamente el episodio de la pendiente de una recta a partir del perímetro constante de una familia de rectángulos. En la actividad desarrollada, se pudo identificar los elementos que interactuaron en el desarrollo del pensamiento variacional, brindándonos un panorama más amplio de la forma cómo se desarrolla dicho proceso.

Palabras clave: enfoque instrumental, instrumentalización, pensamiento variacional, génesis instrumental

ABSTRACT: The activities presented in this workshop have been designed taking into account the dynamism of mathematical contents in different topics such as trigonometry, analytical geometry and differential calculus. These activities are framed in the development of the changing thought making use of a program in dynamic geometry, specifically the GeoGebra. The mediation of such software favors the abilities of the variation thinking, since it facilitates the search of patterns of the same magnitude in the dynamic representations. In this article we show only the episode of the slope of a line from the constant perimeter of a rectangle family. In the developed activity, it was possible to identify the elements that interacted in the development of variation thinking, providing us a broader view of how this process is developed.

Key words: instrumental approach, instrumentation, variation thinking, instrumental genesis

Introducción

El taller es una propuesta de cuatro episodios en los tópicos de trigonometría, geometría analítica y el cálculo diferencial. En cada uno de ellos, buscamos propiciar el uso de ciertas estrategias que evidencien la presencia de pensamiento variacional utilizando herramientas, procedimientos específicos y lenguajes variacionales que posibiliten la comunicación de los saberes mediante argumentos variacionales.

En el presente artículo hacemos referencia a uno de los cuatro tópicos mencionados, específicamente la aplicación de la pendiente de una recta a partir de un rectángulo de perímetro constante. Los temas restantes se han centrado con similares acercamientos de variación y cambio. En el caso de la condición geométrica de la elipse identificamos un patrón de regularidad para el lugar geométrico de dicha curva, que construimos a partir de un triángulo de base variable y perímetro constante, de igual forma modelamos la función seno haciendo uso de un círculo de radio variable y no necesariamente el tradicional círculo unitario, finalmente dimos énfasis a la interpretación gráfica de la función derivada, con el uso de una herramienta que se construyó con el Geogebra y que denominamos razón de cambio, la cual fue utilizada para representar el cambio que se origina en la variable dependiente cuando hay un cambio en la independiente.

Todas estas actividades, requieren de tratamientos que exigen estrategias que deben poner en práctica los alumnos para analizar estados de cambio o patrones de regularidad que conduzcan a otras acciones como la de estimar o predecir el comportamiento de un nuevo estado o valor, que son elementos incorporados que caracterizan la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) desarrollado por el grupo de investigación de Cantoral (2013).

Como marco teórico, se tomaron algunos aspectos del Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), centrados en la génesis instrumental de cada uno de los contenidos matemáticos. Nos centramos en la génesis de la instrumentalización ya que el alumno va enriqueciéndose con las propiedades del objeto matemático en la medida que manipula el objeto haciendo uso del Geogebra. La metodología seleccionada es la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), pues pudimos confrontar nuestros supuestos elaborados en el análisis a priori, con los resultados de la fase de experimentación.

Aspectos del pensamiento y lenguaje variacional

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) es una línea de investigación tomada de la Teoría Socioepistemeologica de Cantoral (2013). La idea central del Pylvar, es propiciar situaciones y fenómenos en el que el cambio o la modificación de un estado a otro en un objeto matemático, demande una serie de tratamientos por parte del sujeto, que les permita analizar, comprender y explicar dicha situación. De allí que en cualquier situación donde observemos cambio y variación, incluso en contextos que trasciendan el aula, es preciso identificar los elementos que cambian para cuantificar y analizar dichos cambios.

Este pensamiento, por lo tanto, se aleja de las estructuras abstractas, se aparta de procedimientos algoritmicos, prioriza la comprensión del objeto en situaciones y vivencias cotidianas, donde este presente el enfoque variacional. Al respecto Vasco (2006) comenta:

> El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmene. (…) Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas. No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica (p. 5).

Esta mirada de las matemáticas nos indica que incluso las representaciones gestuales resultan más efectivas que las fórmulas cuando son usadas solo por el reemplazo de valores, donde la ausencia de lo que cambia y con respecto a qué cambia paraliza la idea de covariación. El autor añade que los mejores problemas deberían ser desafíos o retos que impliquen la modelación de algún proceso y no propiamente la tradicional resolución de problemas y ejercicios.

De allí que resulte importante plantear situaciones en las que las variables involucradas sigan algún patrón de regularidad incluso en situaciones que trasciendan las aulas. El Pylvar nos ofrece un marco de referencia para desarrollarlas. La gran cantidad de contenidos visuales es el modo al cual nos enfrentamos en un primer momento, a la interpretación y captación de las variables o magnitudes involucradas en el proceso de cambio y variación.

Dichas variables podemos describirlas de manera cualitativa incluso de manera gestual, aunque el principal reto sea cuantificar el modelo de covariación. Pero incluso en esta descodificación de representaciones lleva consigo un cúmulo de significados relacionados a la actividad matemática construida en su proceso histórico y social.

Por tal motivo, estamos de acuerdo con los autores Caballero, Cantoral (2013), cuando señalan que una de las estrategias que emplea el alumno en el desarrollo del Pylvar, es la comparación de dos o más estados, lo que permite encontrar diferencias o similitudes y, a partir de dichos comportamientos estimar y predecir, propiciando fomentar un aprendizaje rico en significados.

En ese sentido, estamos de acuerdo con Ruiz, Ávila y Villa (2013) indican que el pensamiento variacional hace énfasis en la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más “variables” y relaciones entre ellas, patrones existentes en secuencias, así como el manejo y creación de funciones como representaciones de situaciones de variación.

De igual manera Villa – Ochoa y Ruíz (2010, citado en Ruíz et al, 2013), indican que el desarrollo del pensamiento variacional atraviesa por distintas fases: una primera de percepción cualitativa con espacios de reflexión para la conjetura y validación de ciertas cualidades, una segunda en la que se establecen patrones de regularidad y una tercera, para establecer lo cuantitativo de la variación.

En las figuras 1 y 2, mostramos la representación gráfica de una función definida por partes, un deslizador Δx construido con ayuda del programa de geometría dinámica Geogebra y un texto dinámico que nos cuantifica los valores de la tasa de cambio en un intervalo dado.

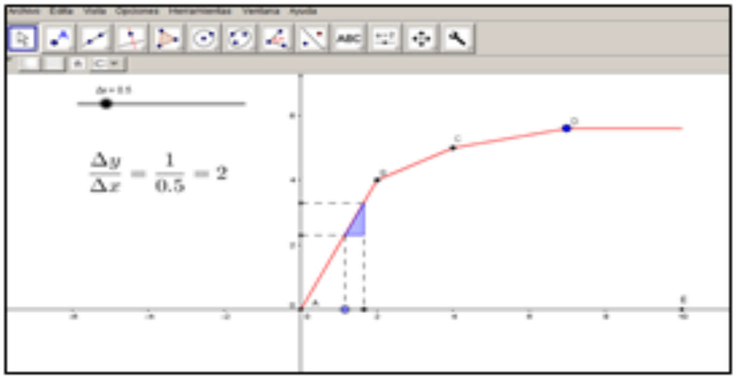


Figura 1. Pendiente segmento *AB*

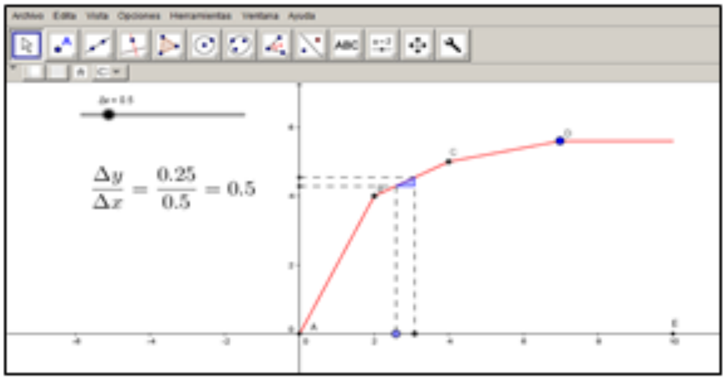


Figura 2. Pendiente segmento *BC*

Observamos un triángulo rectángulo de color azul, el cual construimos y llamamos *triángulo dinámico*. Este triángulo se puede desplazar a lo largo de las líneas poligonales que se muestran en cada figura. El deslizador Δx se usa cada vez que decidimos un cambio en la abscisa. Cuando la abscisa cambia en 0.5, es decir el deslizador Δx se fija en 0.5, el texto dinámico por defecto determina el cambio en la ordenada Δy en 1, lo que genera un resultado de 2 unidades, que estaría indicando que el cateto vertical es el doble que el horizontal. El estudiante identifica que se mantiene el mismo patrón de regularidad mientras el triángulo se desplace sobre el mismo segmento de recta.

En la figura 2, cuando el triángulo transita del segmento AB al segmento BC, manteniendo en 0.5 el cambio de la abscisa, observamos que el texto dinámico indica un cambio en la ordenada Δy de 0.25, lo que significa que el cateto vertical ahora resulta la mitad de la longitud que el horizontal.

Los gráficos muestran que los alumnos hicieron uso de estrategias como el de la comparación y seriación, pues establecen diferencias entre aquellos intervalos donde la tasa de cambio modifica su valor y que dicha modificación puede traer consigo algunas estimaciones o predicciones del ejemplo presentado. Por ejemplo, el alumno puede anticipar que la disminución de una tasa de cambio positiva indica que las rectas consiguen menor grado de inclinación o que las rectas horizontales ocurren donde no hay variación en la variable de la ordenada.

En las figuras 3 y 4, se observa que Δy va disminuyendo en la medida que la recta se vaya posicionando horizontalmente. Es curioso observar los gestos, murmuraciones, y algunas reacciones que los alumnos expresan para señalar como la tasa de cambio disminuye en los tramos sucesivos de la gráfica mostrada.

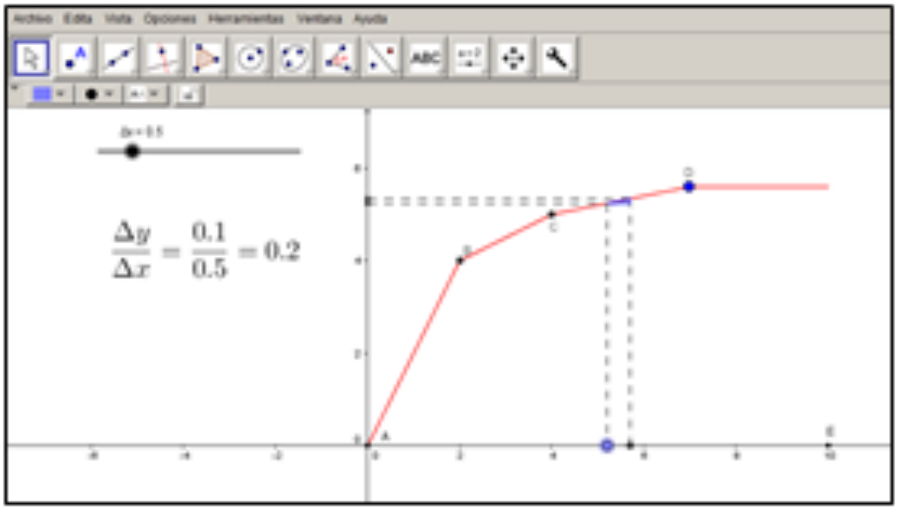


Figura 3. Pendiente segmento *CD*

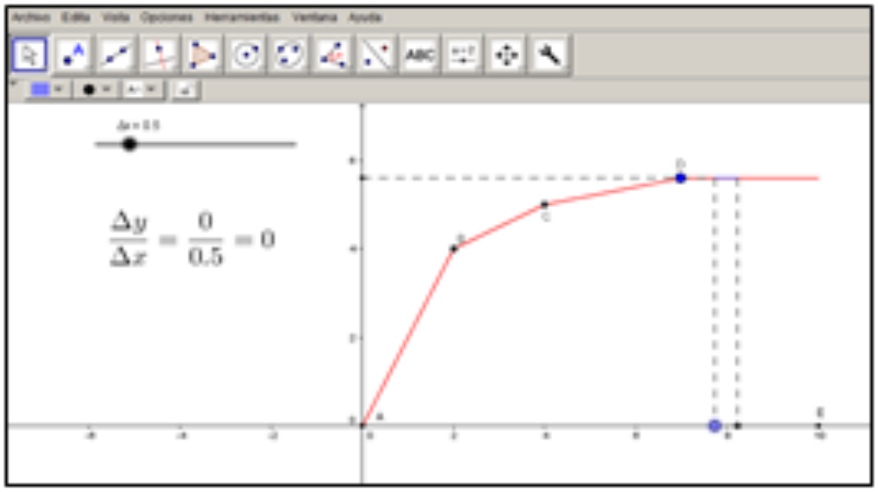


Figura 4. Pendiente segmento horizontal

Presentamos en la tabla 1, la cuantificación de las representaciones gráficas mostradas. En dicha tabla, el alumno escribe en los espacios correspondientes las variaciones de las ordenadas cuando el cambio de las abscisas permanece constante.

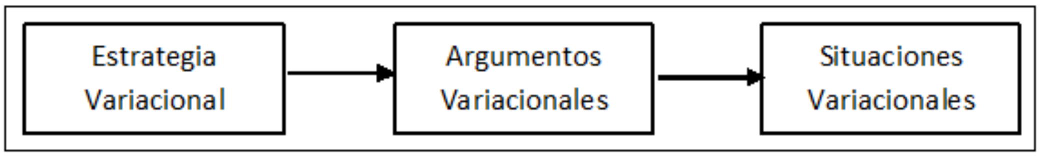
Tabla 1. Comportamiento de la tasa de cambio

Intervalos	Estudio del comportamiento Tasa Cambio		
	Cambio abscisas	Cambio ordenadas	
AB	0.5	1	Cateto vertical es el doble horizontal
BC	0.5	0.25	Cateto vertical es la mitad horizontal
CD	0.5	0.1	Cateto vertical es las 2 décimas partes horizontal
DE	0.5	0	Ausencia de crecimiento del Cateto vertical.

La situación variacional que se presenta, propicia en los participantes, el uso de la estrategia de comparación para establecer diferencias entre dos o más estados. Esta es una de las características que Caballero y otros autores (2013), evidencian del desarrollo del pensamiento variacional. Observen que el cambio de la ordenada se mantiene constante en el tramo AB y disminuye para los siguientes tramos cuando los segmentos de recta rotan hacia el eje de las abscisas en el sentido horario.

Se puede conseguir un resultado contrario si rotamos otra función definida por tramos en sentido antihorario. En cualquiera de los registros de representación numérica, los alumnos relacionan las variaciones de la ordenada como positivas o negativas de acuerdo a la relación que conocen $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$ que es parte de su saber previo y que recurren como un instrumento de conocimiento matemático, para plantear estrategias.

Así, destacamos a Caballero y otros autores (2013), que describen un modelo de interacción de los elementos del Pylvar como un marco de referencia que nos ayude a identificar cómo se desarrollan.



Fuente. Elaboración propia

Figura 5. Interacción de los elementos base del Pylvar

En la figura 5, mostramos los principales elementos que caracterizan el Pylvar. De acuerdo a los investigadores, las Estrategias Variacionales con las que abordan o enfrentan la situación representa uno de los elementos de esta caracterización. Una de las principales estrategias es la comparación de dos o más estados sucesivos de las magnitudes involucradas en la situación dada. Las comparaciones de dos o más estados sucesivos se apoyan con ciertas herramientas especializadas en el ámbito de la matemática que los autores llaman Estructura Variacional Específica.

Finalmente, las explicaciones que dan cuenta del reconocimiento cualitativo y cuantitativo de la situación variacional, mediante el uso de ideas, técnicas, ideas son llamadas Argumentos Variacionales, los cuales son articulados por los Códigos Variacionales, como frases, dibujos, esquemas o gráficos, con los cuales los sujetos tienen posibilidad de interactuar para explicar las situaciones variacionales propuestas.

Una mirada al Enfoque Instrumental

Empleamos el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), para analizar las acciones de los sujetos mientras interactúan con las construcciones geométricas de las actividades propuestas. Sus acciones nos permitieron observar el enriquecimiento progresivo del significado que le asignan al objeto pendiente *de la recta*, que es la actividad que presentamos en el presente artículo.

El Enfoque Instrumental, distingue esquemas de uso (EU) de los esquemas de acción instrumentada (EAI). En el primer grupo (EU), se encuentran aquellos esquemas que orientan las acciones del sujeto y se especializan en tareas específicas pero que se pueden coordinar unos a otros, para articular los EAI. De acuerdo a la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), elaboramos un análisis *a priori* de los EU que los sujetos movilizaron para el surgimiento del significado de la pendiente de una recta: los esquemas proporcionalidad entre triángulos y el perímetro de un rectángulo.

Dichos EU son instrumentos que se dirigen de manera puntual hacia tareas específicas de nuestra actividad, realizan procedimientos automáticos de cálculos y razones que ejecutan de manera coordinada para que emerja la noción de pendiente de una recta. Si analizamos el EU *perímetro de un rectángulo,* veremos que constituye una organización invariante de la conducta de un sujeto, formada por una serie de acciones, hábitos aprendidos, automatizaciones; las cuales cuando están en funcionamiento y en coordinación con otros esquemas y que posibilitan el surgimiento o enriquecimiento de un nuevo saber llamado EAI.

El enriquecimiento paulatino de algunos aspectos de sus propiedades mediante sus EU, hace que la pendiente se instrumentalice. Cuando la pendiente como EAI opera transformaciones en otros objetos adquiere el estatus de instrumento. En nuestra actividad mostramos que la pendiente actuó como instrumento pues su significado fue movilizado para determinar si una trayectoria es una recta.

Descripción de la actividad

A continuación, describimos la construcción de una familia de rectángulos a partir de la longitud variable de su semiperímetro, haciendo uso el uso de dos deslizadores, con el objetivo que movilicen su EAI pendiente de una recta.

El primer deslizador representa la longitud del semiperímetro (sp) del rectángulo y el segundo, su base (b). La búsqueda de alguna magnitud que permanezca constante mientras otras varían, origina la puesta en juego de una serie de estrategias, por parte del alumno.

En la figura 6, haciendo uso del radio constante de una circunferencia que equivale a la altura del rectángulo y la longitud del semiperímetro, mostramos que dicha longitud permanece constante. Hacemos uso de los deslizadores para observar las variaciones de las alturas y bases de los diferentes rectángulos.

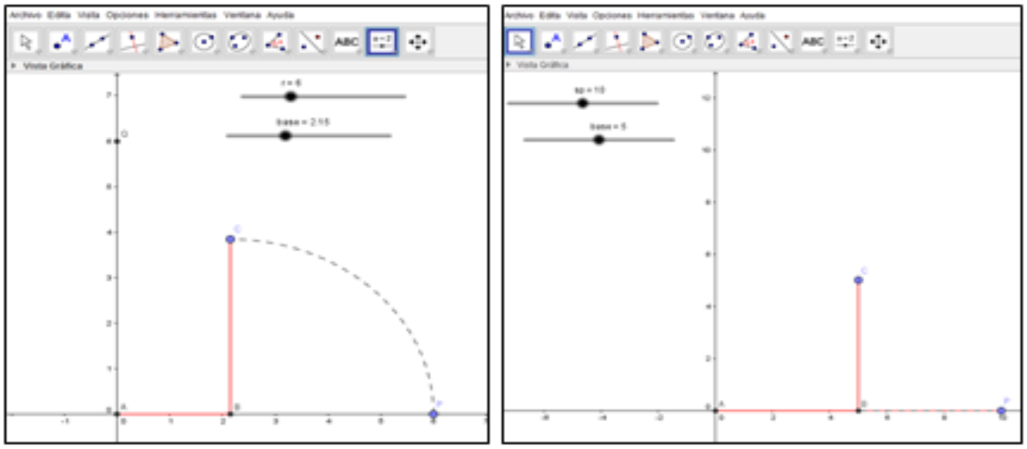


Figura 6. Construcción dinámica de la altura del rectángulo

En la figura 7, los sujetos hacen uso del deslizador para observar las diferencias entre diversos estados. Empleando la estrategia comparación o seriación analizan los estados sucesivos de las dimensiones de los rectángulos y los describen en tablas numéricas.

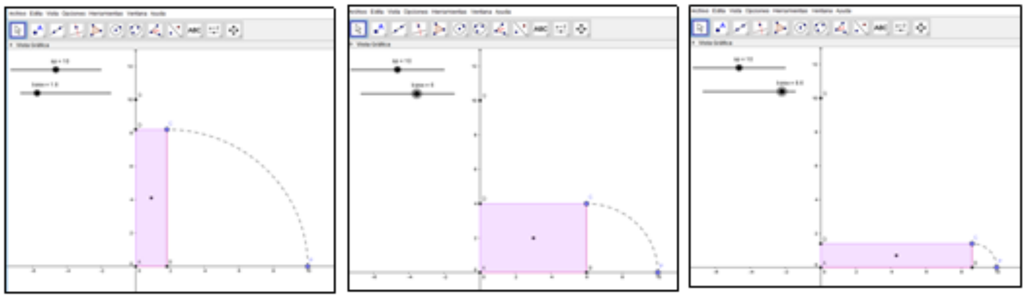


Figura 7. Construcción de rectángulo de perímetro constante

En la figura 8, se observa que la trayectoria del vértice superior derecho del rectángulo, es una recta, lo cual justifican, comparando las razones de cambio de los lados de los triángulos y movilizando su EAI pendiente, lo cual nos da indicios para suponer que los alumnos están movilizando dicho esquema para determinar si la curva es una recta.

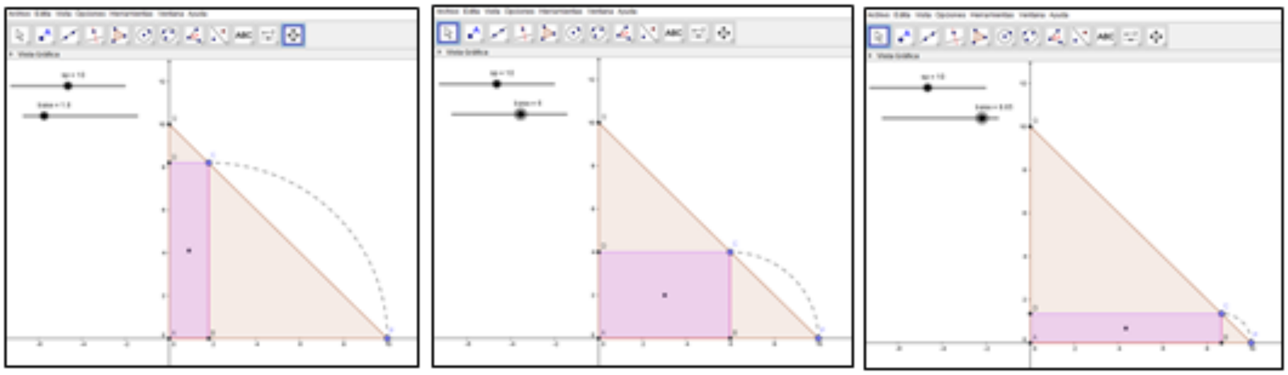


Figura 8. Lugar geométrico de uno de los vértices del rectángulo

Reflexiones finales

Estas actividades, sirven para descontextualizar la pendiente de una recta, encasillada en formulismos. Es una mirada no tradicional pues el estudiante argumenta y propone el uso de la pendiente desde la óptica del pensamiento y lenguaje variacional, permitiendo además asociar el significado de la pendiente, como tasa de cambios a su representación gráfica. Finalmente, nos permite ir comprendiendo la forma cómo desarrolla este pensamiento dinámico del alumno.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Ingeniería didáctica. 1*(1), 33-49.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa A.C.,* Vol. 26. (pp.1195-1204). México DF, México: Editorial Colegio Mexicano de Matemática.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* México DF, México: Editorial Gedisa.

Ruiz M., Ávila E. y Villa J. (2013). *Usos de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de Matemáticas.* Repositorio digital de documentos en educación matemática. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454). Universidad de los Andes, Medellín.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander.

Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2011. Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Cali, Colombia. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/.