

## DESARROLLO DE COMPETENCIA PARA USAR DIVERSAS APLICACIONES DE SOFTWARE PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS

**Jorge Ávila Soria, Ramiro Ávila Godoy**

Universidad de Sonora. (México)

javilas9@gmail.com; ravila@mat.uson.mx

**RESUMEN:** La introducción de cualquier nueva tecnología (desde el grabado, el trazado, la medición, o el cálculo; con instrumentos mecánicos y analógicos, hasta la actual era digital) siempre ha influido en las formas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. Hoy en día, la computadora debe ser incluida como una herramienta esencial porque permite a los estudiantes una generalización más rápida de los métodos y la resolución de problemas cada vez más complejos. Además, les facilita encontrar patrones y enriquecer su propio significado de los objetos matemáticos estudiados a través del uso de múltiples registros de representación. El aprendizaje con tecnología digital también ayuda a los estudiantes a ser competentes para resolver problemas, a través del diseño y uso de algoritmos, modelos, simulaciones o prototipos. Por esta razón, promovemos el uso de software de geometría dinámica, hojas de cálculo y calculadoras avanzadas, para que los estudiantes no se sientan limitados por la ausencia de una herramienta en particular

**Palabras clave:** tecnología digital, situación problema, contexto

**ABSTRACT:** The introduction of any new technology (from engraving, plotting, measuring, or calculating, with mechanical and analog instruments, up to the current digital age) has always influenced the ways of teaching and learning of mathematics at all levels. Today, the computer should be included as an essential tool because it allows students to more quickly generalize methods and solve ever more complex problems. In addition, it facilitates finding patterns and enriching their own meaning of the mathematical objects studied through the use of multiple representational registers. Learning with digital technology also helps students to be competent to solve problems, through the design and use of algorithms, models, simulations or prototypes. For this reason, we promote the use of dynamic geometry software, spreadsheets and advanced calculators, so that students do not feel limited by the absence of a particular tool.

**Key words:** digital technology, problem situation, context

## ■ Introducción

Desde la introducción de impresos, pasando por lápiz, papel y pizarrón, incluyendo herramientas como reglas, compases, tablas de cálculo y calculadoras digitales elementales; la tecnología siempre ha influido en las maneras de enseñar y aprender matemáticas en todos los niveles. Hoy es ineludible la inclusión de la computadora como herramienta indispensable para la generalización del planteamiento y resolución de problemas que permitan a los estudiantes conocer las formas modernas de resolver problemas, por medio de la modelación, el planteamiento algorítmico, la simulación o la construcción de prototipos virtuales.

La computadora nos da acceso a muchas y diversas aplicaciones de software que permiten enseñar matemáticas de forma tal que los estudiantes dediquen la mayoría de su tiempo al planteamiento, modelación y resolución de múltiples tipos de problemas en diferentes contextos, los cuales le permitirán, no sólo estar mejor preparado, en cuanto a las herramientas de que dispone para enfrentar situaciones reales en su vida profesional y cotidiana, sino también que vea en el uso de las matemáticas la manera de encontrar significados y explicar las situaciones problemáticas o no, que encuentre u observe en el entorno al que le toque enfrentarse en su vida profesional.

## ■ Metodología y marco teórico

La metodología de diseño y marco teórico que utilizamos en este trabajo, están fundamentados en ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico, y auto reflexión), propuesta por Hitt (2009), con la cual se busca que con el uso de manipulables se promueva la producción de representaciones funcionales por los estudiantes, lo cual creemos es fundamental para que estos tengan una mejor retención de las construcciones matemáticas estudiadas. De acuerdo con Hitt y Cortés (2009), entre los diversos marcos teóricos que soportan ACODESA, están el de campos conceptuales de Vergnaud, el de representaciones semióticas de Duval, y el de situaciones didácticas de Brousseau, los cuales vienen a fortalecer la propuesta de diseño de situaciones didácticas de acuerdo con la metodología aquí usada.

ACODESA propone una serie de pasos a tener presentes cuando se diseña una actividad de enseñanza. Primero se busca enfrentar a los estudiantes de manera individual con la situación para su interiorización, posteriormente se trabaja en equipos de estudiantes para que compartan sus ideas, las discutan y busquen el enriquecimiento de sus significaciones por medio del debate científico. Posteriormente se comparten las ideas con otros grupos para contrastar los diferentes enfoques o caminos tomados y el profesor modera el proceso. Al final de cada sesión, los estudiantes se llevan de tarea reflexionar sobre las actividades e ideas generadas hasta ese momento del proceso. Cuando el profesor lo considera necesario, se lleva a cabo el proceso de institucionalización del proceso de enseñanza.

En este reporte, se presenta una propuesta sobre nuestra manera de enseñar matemáticas con el uso de tecnología digital. Nuestra propuesta está enfocada al uso de aplicaciones de software de fácil obtención para todo estudiante, de preferencia buscamos que sean aplicaciones con licencia de uso gratuito o que estén disponibles para todos. La implementación la llevamos a cabo en el nivel superior, pero sería un avance si los estudiantes fueran enfrentados con mayor ímpetu a usar la tecnología para enfrentar situaciones problema en matemáticas.

El propósito de la utilización de diversas herramientas de software para la resolución de un mismo problema está acorde con ACODESA, pues el uso de varios manipulables permite a cada estudiante formar su propio vínculo con el manipulable de su predilección en ese contexto. Por otra parte, también buscamos detonar el aprendizaje colaborativo por medio del debate científico de las ideas planteadas durante los procesos de modelación, implementación y resolución del problema con el uso de la aplicación digital. Con tareas donde se pide abordar problemas similares a los tratados en el curso, se busca que el estudiante reflexione sobre los problemas tratados y los temas estudiados. Con el uso de múltiples aplicaciones, queremos que el estudiante, además de reflexionar sobre los diferentes contextos abordados y las diferentes representaciones usadas, lo haga sobre las diferentes herramientas utilizadas, así como sobre las deficiencias y potencialidades que ofrece cada una de estas aplicaciones.

Aquí presentamos el uso de tres tipos de aplicaciones de software comunes que consideramos resultan elementos valiosos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel educativo. En este reporte mostramos el uso de software de geometría dinámica, hojas de cálculo y calculadoras científicas con CAS, en la resolución de problemas de Álgebra que se abordan en los cursos dirigidos a los estudiantes de nuevo ingreso a las carreras de ingeniería en nuestra universidad.

### ■ Recomendaciones para la enseñanza con computadora

La flexibilidad de la metodología ACODESA permite que el diseño de una actividad pueda ser modificado dependiendo de la situación que se presente con respecto a la disponibilidad del equipo de cómputo, esto es, cuando no se cuenta con computadoras para todos los estudiantes.

Cuando las estaciones de trabajo tienen más de un estudiante, esto se apega más al planteamiento original de ACODESA, pues los miembros de una misma estación de trabajo rotan funciones al frente de la computadora y cumplen con otras funciones mientras no tienen el teclado o el mouse en sus manos; sin embargo, debemos decir que hemos observado que los estudiantes que no están a cargo de la manipulación, tiende a divagar o a desmotivarse. En situaciones como ésta, consideramos que tres debiera ser el número máximo de personas por computadora.

Cuando cada uno tiene su propia computadora, el diseño de la actividad debe ser modificado de acuerdo a la situación para incluir el trabajo en equipo, esto es, más de un estudiante por computadora, aunque el trabajo colaborativo a distancia podría también ser aplicable. El momento del

trabajo en equipo es indispensable para que cada estudiante intervenga en el debate de las ideas con sus pares y pueda cambiar su rol de participación dentro del equipo. También se deben tener momentos de interacción con otros equipos, para lo cual se sugiere el intercambio de miembros entre los equipos, para que cada participante presente el trabajo hecho por su equipo a sus nuevos compañeros.

Al término de cada clase, es muy conveniente que los estudiantes se lleven la tarea de reflexionar sobre la actividad de la clase, del problema o del proceso actual, y si hay forma de obtener alguna evidencia de ese proceso, sería mejor para el proceso de evaluación. Todo proceso tendrá que culminar con el establecimiento de conclusiones generales, que den respuesta a los cuestionamientos planteados en el desarrollo de las actividades, que constituyan la institución del conocimiento nuevo.

### ■ **Problematización de los temas tratados**

Los temas tratados en el curso de Álgebra del nivel superior fueron problematizados dentro de lo posible en contextos extra-matemáticos para enfrentar a los estudiantes a situaciones que se pueden aplicar fuera del contexto puramente matemático. Entre los contextos que normalmente usamos, están los temas que se estudian en los cursos de Física, como el movimiento y la temperatura, o en los cursos de Química, como las mezclas y los compuestos, o algunos de la Economía como oferta-demanda y ventas, o de la Ingeniería como diseño de productos o tránsito, o de Geometría, como problemas de triángulos o movimientos astronómicos, etc.

Estos contextos van apareciendo durante el curso y dependen del tema o los temas de Álgebra que se estén viendo. Esto debido a que una situación problema puede requerir de más de un tema para su estudio.

Las aplicaciones de software también se van introduciendo poco a poco, ya sea diferentes aplicaciones para las mismas situaciones problemas o para diferentes situaciones en un mismo tema. Se busca ir contrastando capacidades y limitaciones de las aplicaciones de software, así como de sus ventajas y desventajas con respecto a la funcionalidad. El tema de los números complejos es particularmente difícil de problematizar, sin embargo, se usa la hoja de cálculo para hacer la parte operativa y construcciones para geometría dinámica para entender su representación gráfica.

### ■ **Ejemplo de una situación tratada con tecnología digital**

En las Figuras 1, 2, y 3, se muestra, a manera de ejemplo, la resolución de un problema como los que se plantean en el curso de Álgebra para ingenieros. El problema plantea la situación de una pelota que es lanzada por una persona que se encuentra en la azotea de un edificio de cierta altura. La pelota sigue una trayectoria parabólica hasta caer al suelo. La Figura 1 presenta la resolución del problema con Geogebra para geometría dinámica, la Figura 2 muestra el problema resuelto con la Voyage 200

de Texas Instruments y la Figura 3 muestra la resolución con hoja electrónica, en este caso con Libre Office.

Los estudiantes deben contestar los cuestionamientos que se les hacen con ayuda del software disponible y las preguntas que generalmente se formulan, tienen que ver con la altura desde la que se soltó la pelota, la altura máxima que ésta alcanzó o la distancia a la que cayó la pelota del pie del edificio desde donde fue lanzada. En ocasiones, los estudiantes podrán elegir el software que prefieren utilizar o se les puede indicar el software que se debe usar, pues durante el curso deben haber aprendido a utilizarlo para resolver problemas de matemáticas.

Por ejemplo, si la aplicación que se le pide usar no tiene grandes capacidades de graficación, pues tendrá que atacar el problema de la forma analítica, o con el uso de CAS, según considere que lo domina mejor o el software le de las facilidades.

**Figura 1:** Resolución con geometría dinámica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a) Introducción de la expresión cuadrática de la trayectoria en la barra de entrada. (b) Representación gráfica de la trayectoria en el plano cartesiano. (c) Obtención de las intersecciones de la gráfica con el eje  $x$ , nivel del suelo. (d) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (e) Perpendicular al suelo en la abscisa del vértice, para encontrar la altura máxima. (f) Intersección de la trayectoria con la perpendicular al punto medio entre las raíces de esta, para encontrar la altura máxima de la trayectoria. (g) Intersección de la trayectoria con el eje  $y$ , para encontrar la altura de donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio.

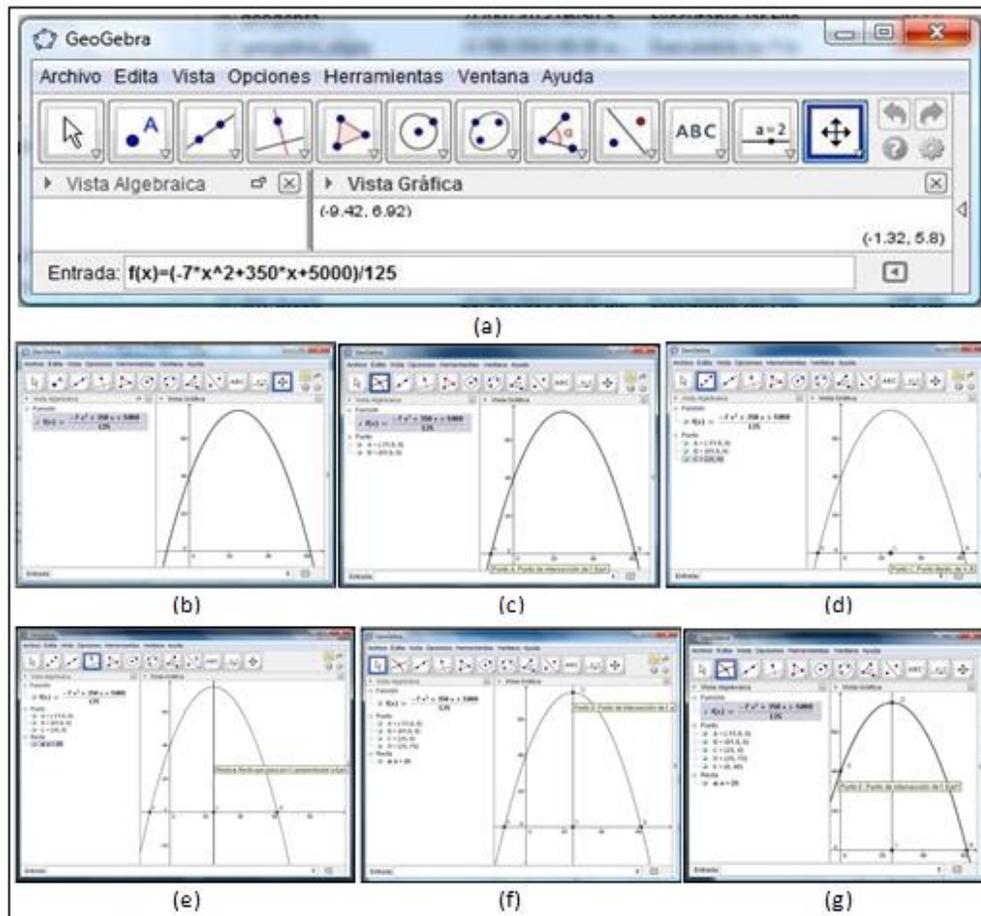


Figura 1.

Otro tema, más fácil de problematizar, es el de polinomios donde podemos verlos como parte de una ecuación o de una función. Empezamos por los de primer grado, sin dejar pasar cualquier oportunidad para la generalización de patrones en matemáticas hasta llegar a la institucionalización de reglas, propiedades o representaciones matemáticas.

Las situaciones problema de polinomios, requieren de la graficación, la factorización, el despeje, la definición de sistemas de ecuaciones, su resolución, la interpretación gráfica y analítica del contexto de estudio. En orden cronológico, se sigue el curso con las parábolas, las cúbicas, las cuárticas hasta las de quinto grado y, para terminar, con las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas.

**Figura 2:** Resolución con calculadora científica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a) Introducción de la expresión cuadrática de la trayectoria en la barra de entrada. (b) Evaluación de la trayectoria cuando la pelota no comenzaba a moverse, esto es la altura desde donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio. (c) (d) y

(e) Uso de las funciones solve, factor y zeros respectivamente, para encontrar las raíces o el nivel del suelo de la trayectoria. (f) Copiado y pegado de los ceros de la trayectoria. (g) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (h) Evaluación de la trayectoria en la abscisa del vértice de ésta, para encontrar la altura máxima.

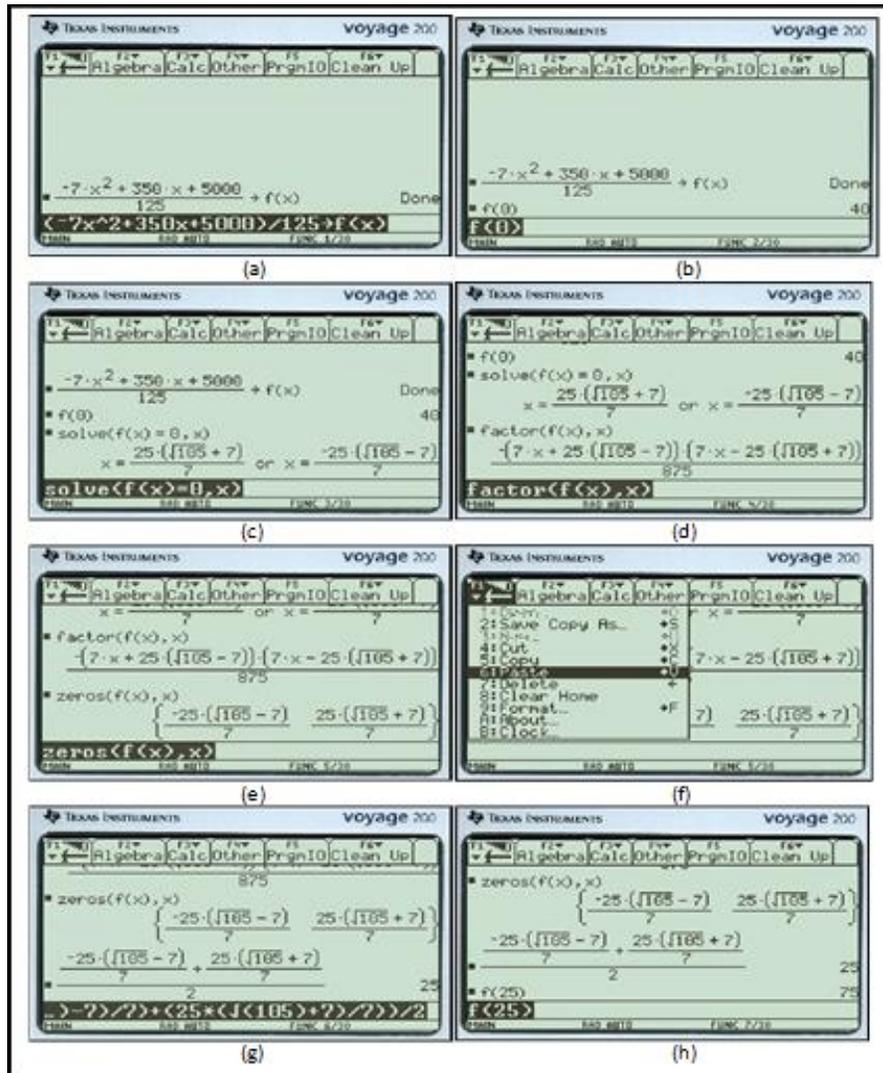
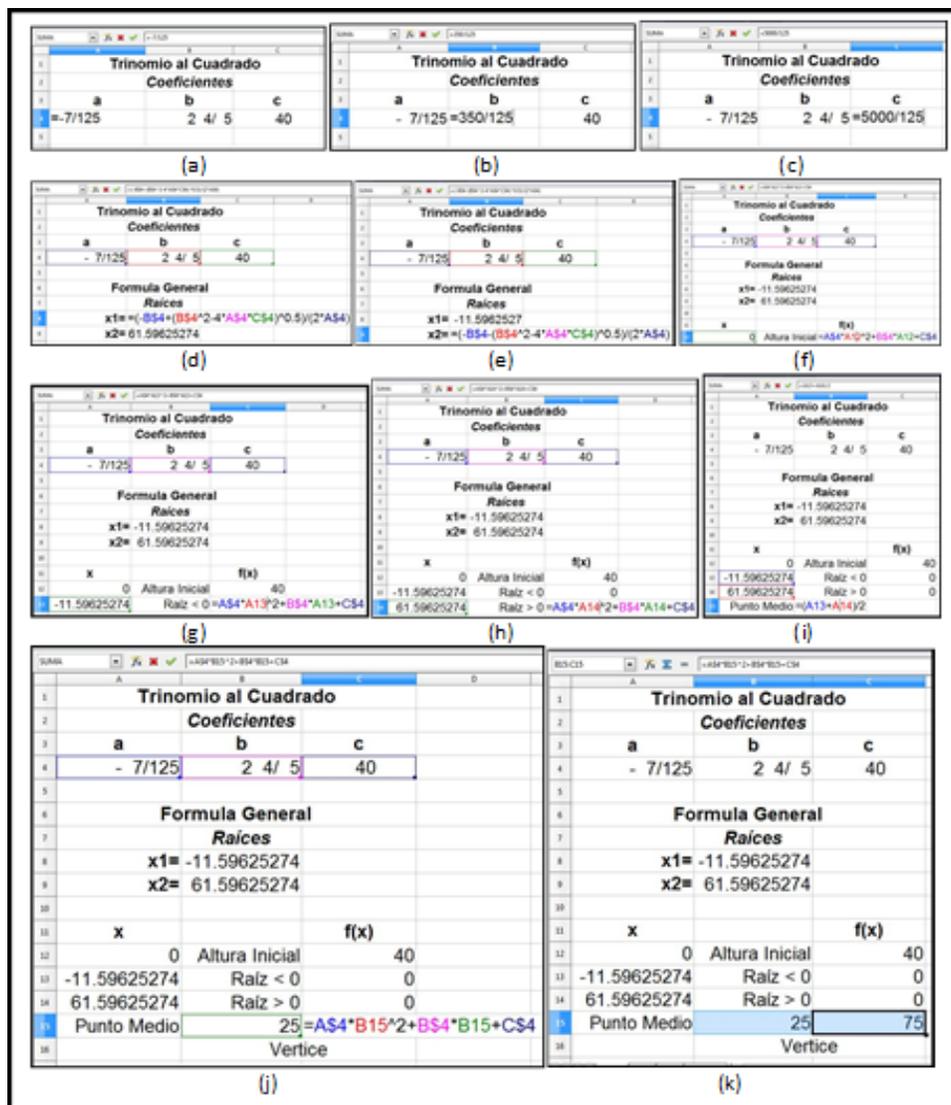


Figura 2.

Como en todo curso, no todos los estudiantes logran un dominio aceptable de cada software, sin embargo, la mayoría tiende a tener preferencias por el que más entienden, lo que los lleva a dejar de lado los que consideran más complicados. Por esta razón, recomendamos estar pendiente de esta situación, para poder orientar a cada estudiante para que supere sus debilidades.

**Figura 3.** Resolución con hoja electrónica de un problema sobre la trayectoria parabólica de una pelota lanzada desde lo alto de un edificio. (a), (b), y (c) Introducción de los coeficientes de la expresión cuadrática de la trayectoria. (d) y (e) Introducción de la solución positiva y negativa respectivamente de la fórmula general cuadrática para encontrar las raíces o el nivel del suelo de la trayectoria. (f) Evaluación de la trayectoria cuando la pelota no comenzaba a moverse, esto es, la altura de donde fue lanzada la pelota, podría tomarse como la altura del edificio. (g) y (h) Evaluación de las raíces, para probar que realmente arrojan el nivel del suelo. (i) Cálculo del punto medio entre las raíces de la trayectoria, abscisa del vértice del lanzamiento. (j) Evaluación de la trayectoria en la abscisa del vértice de ésta, para encontrar la altura máxima. (k) Muestra el vértice de la trayectoria



**Figura 3.**

Desde el primer tema se va introduciendo a los estudiantes en el uso de las diversas aplicaciones de software, de manera que conforme avanza el curso, ellos se vuelven capaces de reutilizar cosas que fueron usadas con anterioridad en alguna de las aplicaciones (que podría ser la misma o una aplicación de software diferente), muy probablemente para contextos diferentes y darles usos alternativos a los antes aplicados.

## ■ Conclusiones

Creemos que el paradigma que aún plantea la escuela de hoy en día, donde los estudiantes deben saber y ejecutar rápido y eficientemente todo método matemático con lápiz y papel o cuando mucho utilizando una calculadora científica como apoyo, es obsoleto. Decimos que dicho paradigma debe ser desechado poco a poco, conforme la orientación inicial de los alumnos se vaya tecnologizando cada vez más y requerirá que los profesores se actualicen permanentemente, pues los avances en la actualidad se hacen con la ayuda de las computadoras.

Existen muchos ejemplos de tecnologías que se usaron y las tecnologías digitales las hicieron obsoletas, tales como: la regla de cálculo, enseñar el algoritmo de raíz cuadrada, las tablas con valores aleatorios, de funciones trigonométricas y de probabilidad.

Finalmente diremos que entre más tiempo le dediquen los estudiantes a la resolución de problemas con tecnología digital, mayor será el beneficio obtenido. Además, los estudiantes más competentes en el uso de la tecnología digital para resolver problemas que requieran matemáticas, de seguro serán aquellos que no dependan de tener el software más caro o el más sofisticado, sino aquellos que cuenten con la flexibilidad suficiente para resolver el problema planteado con la aplicación de que dispone en el momento, sólo usando su pensamiento matemático y su ingenio, además de la aplicación, pues resuelva problemas de una manera más eficiente y en un tiempo más corto, lo que le permitirá resolver más problemas, de una mayor complejidad y de una diversidad más enriquecedora.

## ■ Referencias bibliográficas

- Hitt, F. (2009). Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA). *Primer Seminario sobre Resolución de Problemas y el Uso de la Tecnología Computacional* (pp. 9-21).
- Hitt, F. & Cortés, J. (2009). *Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas*. Revista Digital Matemática, Educación e Internet. Recuperado de <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977> en 04 de mayo 04 de 2017.