UN PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DESDE UNA SITUACIÓN EN EL CONTEXTO DEL CULTIVO DE PLÁTANO CON ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO AL GENERAR MODELOS LINEALES

JOSÉ LUIS BOSSIO VÉLEZ

Asesores:

Mg. Sandra Milena Londoño Orrego
Dr. Carlos Mario Jaramillo López
Grupo de Investigación Matemática e Historia (UdeA - Eafit)

UNIVESRSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
Medellín, 18 de Enero de 2014

UN PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA DESDE UNA SITUACIÓN EN EL CONTEXTO DEL CULTIVO DE PLÁTANO CON ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO AL GENERAR MODELOS LINEALES

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

JOSÉ LUIS BOSSIO VÉLEZ

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación. Línea en Educación Matemática.

Asesores:

Mg. Sandra Milena Londoño Orrego
Dr. Carlos Mario Jaramillo López
Grupo de Investigación Matemática e Historia (UdeA - Eafit)

UNIVESRSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
Medellín, 18 de Enero de 2014

DEDICATORIA

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos durante este proceso de estudio a:

Dios por ser mi fortaleza y mi esperanza en todo momento.

Mi familia, por brindarme el apoyo y compresión en tiempos difíciles, especialmente a mi esposa Ángela María Muñoz Giraldo y a mi hijo Esteban Bossio Muñoz.

A mis asesores: Sandra Milena Londoño Orrego por su nobleza y comprensión al afrontar con migo los distintos obstáculos durante el desarrollo de la investigación. Carlos Mario Jaramillo López que con su sabiduría y experiencia me permitió ver la educación matemática más allá de una simple labor profesional.

A mis profesores del grupo de investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit) EDUMATH, con quienes tuve la oportunidad de compartir experiencias y conocimientos, convirtiéndose la Maestría en un factor importante para mi vida profesional y familiar.

A mi Institución Educativa el Dos, por brindarme el espacio y el apoyo en el desarrollo de la investigación.

A mis participantes por su disposición, aportes y por ser la razón de ser del proceso de investigación desde mi formación personal y mejoramiento profesional.

Universidad de Antioquia
Patrimonio de 210
Institución con reacreditación de alta calidad hasta el 2022

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Sandra Milena Londoño Orrego y Carlos Mario Jaramillo López (Presidentes del jurado), José Adan Ramos Valenzuela y Joao Frederico CA Meyer (por videoconferencia) en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación intitulado: "**Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales**", presentado por el estudiante **JOSÉ LUIS BOSSIO VÉLEZ**, de la I Cohorte de la Maestría en Educación, Seccional Urabá, Línea de Formación: Educación Matemática, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (según el artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de **APROBADO** por unanimidad, luego el profesor René Alejandro Londoño Cano, Coordinador de la Línea en mención, delegado por el Comité de Maestría para esta función, según Acta 0114 de 2014 de dicho Comité, dio a conocer el resultado.

Atendiendo a lo estipulado en el parágrafo 1 y 2, Artículo 46 del Capítulo IX del Acuerdo Superior 122 de julio de 1997, para el presente trabajo de investigación no procede recomendación de distinción.

Para constancia se firma en Medellín, a los 14 días del mes de julio del año 2014.

SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO
CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Presidentes del Jurado

JOSÉ ADAN RAMOS VALENZUELA
Jurado

JOAO FREDERICO CA MEYER
Jurado

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CAÑO
Coordinador Línea de Formación "Educación Matemática"

Tabla de contenido

INDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Este estudio, de enfoque cualitativo aborda como objeto de investigación "*el proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales*". Con esto se busca contribuir a la discusión teórica de la investigación en la educación matemática en el marco de la modelación desde la perspectiva educativa de Blum, Galbraith, Henn y Niss, (2007). Aunque a nivel internacional la modelación matemática se ha posicionado de manera importante para la enseñanza de las matemáticas, en Colombia a pesar que fue incluida en el MEN (1998) aún se considera un proceso que no ha permeado las aulas de clase de matemáticas (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo, 2009a). En esta medida, hemos considerado contribuir con elementos para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase, en relación, con los ambientes de los contextos rurales de los estudiantes en Colombia.

La investigación en modelación matemática, se percibe desde algunas literaturas como el proceso de enseñanza y aprendizaje que contribuye en el desarrollo de la educación matemática en relación al campo social, científico y tecnológico. Aunque en Colombia, desde nuestra experiencia, las regiones más apartadas de las ciudades principales se resaltan en los estudiantes la necesidad de apoyar, de algún modo, a sus padres en la generación del ingreso económico familiar. En este sentido, pretendemos demostrar la necesidad de incluir en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas las distintas problemáticas generadas al interior de los hogares campesinos. El cual permita relacionar las matemáticas que se imparten en el aula de clase con el papel protagónico de los estudiantes cuando afrontan en compañía de sus padres las dificultades económicas en su contexto social y cultural.

Esta investigación, desarrollada mediante un estudio de caso con el propósito de analizar un proceso de modelación matemáticas con estudiantes de grado décimo, al generar una correspondencia entre una situación en el contexto del cultivo de plátano y las matemáticas mediante la producción de modelos lineales, buscando contrarrestar la desarticulación de los conocimientos matemáticos escolares y el uso en la vida cotidiana del estudiante.

Para la presentación de esta tesis, hemos considerado 5 capítulos donde en el primero describimos algunos antecedentes de investigaciones que han abordado la enseñanza y aprendizaje desde el contexto formal de las matemáticas, y otros estudios que han incluido algunos aspectos del contexto social y cultural del estudiante, y por último, desde nuestra experiencia docente como insumos necesarios para la discusión de los procesos de modelación desde contextos particulares de los estudiantes. Delimitando el problema mediante la siguiente pregunta: *¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?*

En el segundo capítulo, describimos las distintas consideraciones teóricas referentes a la modelación matemática en el aula de clase, procesos de modelación y modelo matemático en el contexto educativo, y la generación de modelos lineales desde la vida cotidiana.

El tercer capítulo, esbozamos la metodología diseñada para nuestro estudio. Incluyendo la descripción del paradigma cualitativo y el estudio de caso desde nuestra pregunta de investigación; la descripción del contexto cotidiano de los estudiantes; y por último, justificamos los distintos métodos de recolección de los datos en función del análisis de la información, orientado a temas emergentes el cual detallamos un proceso de modelación desde una situación en el contexto.

Desde el capítulo cuatro describimos los resultados de investigación bajo los temas y subtemas emergentes, analizados desde los episodios que describen los distintos momentos y subprocesos desarrollados desde una situación en el contexto de los estudiantes, la generación de modelos lineales y sus usos en la construcción de argumentos para la solución del problema.

Finalmente, se describen las conclusiones de investigación en el capítulo 5 e incluyendo algunas recomendaciones, y una síntesis de los resultados obtenidos desde las consideraciones teóricas al observar en los estudiantes un proceso de modelación en el aula de clase al abordar una situación en el contexto.

Como producto final de este estudio, proponemos como reflexión incluir en las aulas de clase los procesos de modelación matemática en la perspectiva educativa. Además, dejamos abierta la discusión de incluir los asuntos sociales y familiares para estructurar la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase para aproximar a los estudiantes a la noción de función lineal.

1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Revisión de literatura

A continuación, presentaremos el problema que dio origen a nuestra investigación y la justificaremos a partir de la revisión de literatura, nuestra experiencia docente y algunos aspectos de la enseñanza de las matemáticas.

1.1.1 *Algunos usos de las letras en la matemática escolar*

El lenguaje algebraico, entendido como una forma particular de representación matemática, y reconocido como un sistema de signos y reglas de transformación el cual se enseña en la escuela secundaria como una herramienta para generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. En este sentido, la letra *"x"* en el álgebra elemental es usada como variable y conceptualizada como incógnita o número general o en relación funcional (Trigueros, Ursini, & Lozano, 2000), no siendo éstas las únicas maneras de representar las letras como variables. En esta dirección, cuando a los estudiantes se les fortalece el uso de la variable como incógnita más que las otras conceptualizaciones, a nuestro modo de ver, se estaría proyectando a los estudiantes una enseñanza del Álgebra como un campo que se dedica a realizar operaciones con letras y números, con una exigencia de aprenderse los algoritmos para la solución de ejercicios en el aula de clase y hallar un resultado que casi siempre es exacto.

Identificar el uso de la variable en diferentes conceptualizaciones se convierte en un obstáculo para el estudiante, porque según Trigueros, Ursini, & Lozano (2000) el estudiante debe tener la habilidad de trabajar con la variable como un ente matemático integrado cuando la usa en una situación específica, al ir de uno de sus aspectos al otros de manera flexible y los integra como componentes de un mismo ente matemático. Por lo anterior, podemos decir que, dada la dificultad de no comprender la flexibilidad del uso de la variable y al no encontrar un sentido, el estudiante le otorga una concesión errónea como se puede observar a partir de los estudios de González & Diaz (2002), al describir las consideraciones del uso de las letras por parte del estudiante al manipular expresiones algebraicas.

- **Las letras como objeto**: en el caso de la expresión 7m es interpretada por parte del estudiante como 7 manzanas, en lugar de interpretar el operador 7 como el número que multiplica a lo que hubiere previamente de manzanas.
- **La letra como valor adjudicado**: una expresión literal como: a + b = 12, muchos alumnos deciden que la única solución es: a = b = 6. En lo anterior, se pueden entender las letras como equivalentes entre sí, homogeneidad de los elementos. Y la heterogeneidad de los elementos, cuando ante expresiones como: b + d +f = 12, los alumnos recurren a la asignación de valores de tipos: b = 2, d = 4, f = 6. Asignación en relación a las posiciones que ocupan las letras en el abecedario.
- **Las letras de acompañamiento:** ejercicios como: «Añade 3 a 5n», dando el alumno el resultado de 8n, es decir, la letra estaba y sigue estando sin que eso afecte para nada a las operaciones entre números.
- **Las letra desaparecidas:** ejercicio como el anterior «Añade 3 a 5n», el resultado que elige es el de proponer simplemente 8 como solución. (p. 289)

La concepción del uso de las letras para representar las variables por parte del estudiante es totalmente diferente a las reglas de las operaciones estipuladas por la lógica del lenguaje algebraico. Debido a esto, comprendemos la necesidad de las orientaciones pertinentes en el aula de clase de matemáticas cuando los estudiantes usan las letras para representar las variables. En este sentido, sería vital ofrecerles a los estudiantes un contexto conocido el cual posibilite generar las conexiones necesarias para reconocer de manera flexible la integralidad del concepto de variable en el Álgebra escolar.

Por otra parte, los estudiantes pueden alcanzar a reconocer las conceptualizaciones de los términos algebraicos de un polinomio. Esto lo describen Quintero, Ruiz, & Terán (2006) al presentar en un artículo llamado: "*Las interpretaciones del símbolo x en los polinomios*". En el anterior estudio, se puede observar que los estudiantes pueden alcanzar a reconocer los términos de un polinomio. Es decir, las conceptualizaciones en el Álgebra para cada uno de los términos. Con respecto a la variable encontraron que, *"[…] esta* *identificación ocurre sin que sea necesario acudir al significado de la palabra "Variable", ella simplemente queda representada con "x". Luego se procede a clasificar las expresiones algebraicas en monomios, binomios y trinomios"* (Quintero, Ruiz, & Terán, 2006, p. 321). Podemos inferir que, cuando a los estudiantes se les enseña directamente los nombres de los términos de los polinomios ellos no realizan una relación entre el uso de dichos términos. Desde esta situación, los temas en el aula de clase se correlacionan entre un nombre y el otro, reduciendo a la variable a la simple letra "*x"*. Se puede notar en los otros términos el esfuerzo de los estudiantes como si estuvieran tratando de etiquetar los símbolos dentro de una expresión algebraica, sin tener en cuenta el sentido de las letras para desarrollar un adecuado procedimiento algorítmico. Dicho de otra manera, se está privilegiando sólo los procedimientos de tipo aritméticos cuando se abordan temas de índole algebraicos.

Aunque otros estudios, describen que los estudiantes pueden alcanzar a resolver operaciones bajo planteamientos procedimentales, de este modo no garantiza que ellos comprendan los resultados, según Londoño, Muñoz, Jaramillo, & Villa-Ochoa (2011) describen:

> Los estudiantes pueden resolver un sistema de ecuaciones procedimentalmente bien, sin embargo este hecho, no garantiza que las ecuaciones construidas, ni las interpretaciones de los resultados correspondan a la descripción y solución coherente de la situación. Este hecho nos permite suponer que una de las dificultades en la comprensión de un problema está en la articulación que debe hacerse y no se hace, entre el planteamiento algebraico y su proceso de solución y argumentación. (p. 9)

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes alcanzan a resolver planteamientos algebraicos de manera coherente. Pero, se sufre una desconexión entre procesos algorítmicos con el problema a resolver. De tal manera que la idea consiste aquí, en permitir a los estudiantes una estrategia que facilite la conexión entre la solución encontrada como resultado de ejecutar el algoritmo correctamente y la situación donde se genera el problema. De esta manera, los argumentos de solución serían coherentes a la situación donde se plantea el problema.

Hasta el momento, no parece ser tarea fácil para un estudiante hacer uso de letras, signos, reglas coherentes al lenguaje algebraico, y además, éstas tengan sentido para algunas situaciones de la vida diaria. Por tal motivo, la comprensión o la incomprensión de este lenguaje es posible estar influenciada de alguna manera en la cultura de la enseñanza del Álgebra en la escuela. Debido que, al cambiar la manera de abordar la enseñanza las matemáticas partiendo de la vida cotidiana se posibilita que los estudiantes encuentren un sentido que favorezca a los procesos algorítmicos de un modo correcto, y a la vez, permita responder a la solución de un problema del estudiante en una situación de su contexto cotidiano, como se puede observar en el siguiente estudio.

En el estudio de Berrío (2011), se resalta la importancia de la modelación matemática en el contexto rural al abordar los estudiantes situaciones cercanas a su contexto cotidiano. Esto motivó a los estudiantes emprender la búsqueda de las matemáticas implícitas en los cultivos de café, estudio desarrollado en un lugar de la región del Suroeste Antioqueño, Colombia. Lo anterior, es visto como una manera de hacer uso del contexto social y cultural mediante un proceso de modelación matemática.

En esta investigación sobresale la manera como los estudiantes transformaban aspectos de su cultura, al compartir la creencia de que los terrenos inclinados cabían más árboles de café al observar mayor extensión de tierra. Pero, al modelar la forma de la ubicación de los árboles encontraron una igualdad en la cantidad de árboles con respecto a un terreno plano. Por tanto, se puede reconocer como un proceso de modelación puede cambiar la percepción de los contextos de las personas en una cultura particular, y por otra parte, la manera de manipular las letras para generar una correspondencia entre la vida cotidiana y las matemáticas, otorgándole sentido a los procesos algorítmicos en la solución del problema.

Es de vital importancia, desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase para mediar el uso de las letras (como variables), en coherencia a las reglas establecidas al lenguaje algebraico. En la mirada de, usar las matemáticas para favorecer en la soluciones de las distintas situaciones en el contexto cotidiano de los estudiantes.

1.1.2 *Estudios que relacionan las situaciones sociales con las matemáticas*

En este apartado tomaremos algunos ejemplos de trabajos desarrollados en el campo de la modelación en relación a la vida de las personas, con el fin de reconocer la importancia de construir modelos matemáticos al abordar situaciones del contexto cotidiano. En esta dirección, iniciaremos esbozando un caso en el cual nos llamó la atención en la construcción de un modelo matemático para determinar las tarifas sociales destinadas a los clientes residenciales del servicio eléctrico, esto fue orientado por Correa & Gallo (2005). El problema a solucionar consistió en buscar alternativas de tarifas sociales para el servicio de energía, con el propósito que el servicio no fuera interrumpido a las familias de escasos ingresos económicos de una provincia de Argentina. Para el Estado, es importante que todas las familias contaran con el servicio para el desenvolvimiento en la sociedad, y además, de parte de la empresa brindar un servicio justo y acorde a los niveles de calidad exigidos.

Las exigencias para el modelo fueron las siguientes: fijar un subsidio de forma explícita para el cliente, no para la empresa que le permita al cliente tener el servicio que no pueda pagar total o parcialmente. Logrando así, la satisfacción de los tres actores: cliente, empresa y Estado. Por tanto, la metodología utilizada en este informe consistió en crear una herramienta de análisis que permitiera la simulación de distintos escenarios para fijar los subsidios de las tarifas de los clientes residenciales, y al tener la herramienta poder tomar las decisiones al respecto. En esta dirección, se procedió en la elaboración de un modelo matemático el cual describiera las diferentes soluciones, y resolviera esa situación problemática. Este proceso de construcción del modelo inició al considerar las siguientes premisas:

- Al fijar una tarifa social para el cliente, debe ser menor y adecuado a su capacidad de pago.

- La tarifa de subsidio se aplicara al cargo fijo establecido en 3,5 $/bimestre y sobre el cargo variable fijado 0,0745 $/Kwh. Esto corresponde al segmento tarifario de los pequeños consumos de uso residencial exclusivamente.

- El consumo de energía a subsidiar estará por debajo de los 300 kwh bimestrales, en el cual dentro del cuadro tarifario es el nivel más barato. Se considera que un consumo máximo de 150 kwh bimestrales es una cifra razonable.

- La única fuente de subsidio son los fondos Nacionales para un valor de $ 350.000 pesos Argentinos por bimestre.

- La tarifa social sea sin impuestos ni gravamen, porque no tiene lógica de imponer impuestos en tarifas de carácter social, y a sabiendas que suministrará los fondos el propio Estado.

En las anteriores premisas, se puede reconocer la manera como se consideran los aspectos sociales, de la empresa y el Estado para desarrollar un proceso de modelación, influenciado de manera particular por las necesidades en el contexto social de las familias, tratando de establecer una tarifa justa de pago en el consumo de energía eléctrica. De este modo, Marta y Ricardo propusieron determinar las siguientes variables para la construcción del modelo en el cual permitiera definir las tarifas:

m = monto máximo total bimestral de subsidio disponible ($350.000)
x = máxima cantidad de energía a subsidiar por bimestre y por cliente.
u = máximo número de clientes a subsidiar en la provincia.
v = monto máximo bimestral a cargo del cliente.
y = porcentaje del cargo variable ($/kwh) a subsidiar por cliente
z = porcentaje del cargo fijo a subsidiar por cliente.

Podemos observar como a partir de las anteriores consideraciones se hace pertinente el uso de las letras para representar las variables que intervienen en los asuntos sociales, cobrando el sentido necesario para realizar procesos algebraicos, y a la vez, esto permite la correspondencia entre la situación a resolver y las matemáticas. El modelo propuesto para solucionar del problema se puede observar a partir de las siguientes ecuaciones:

$$u = 350000 / (0{,}0745xy + 3{,}5z) \quad (1)$$

Con:

$$55000 \leq u \geq 70000$$
$$0 \leq x \leq 150$$
$$0 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq 1$$

Los autores establecieron distintas soluciones en el número máximo de clientes a beneficiar, cumpliendo con las restricciones de las variables sin perder de vista que el objetivo alcanzar sería el minimizar el monto máximo mensual a cargo del cliente, dado por:

$$v = 0{,}0745x\ (1 - y) + 3{,}5\ (1 - z) \quad (2)$$

Al construir el modelo matemático, establecieron distintas soluciones del número máximo de clientes a beneficiar, cumpliendo con las restricciones antes mencionadas.

Concluyendo que, si se adopta como valor de búsqueda en la tabla, el centro del intervalo [55000,70000], o sea, u = 62500 clientes a los cuales se les subsidiará una energía bimestral de 150 kw/h, obteniendo los siguientes valores:

X	y	z	u	V
150	0,2	0,9	64995	9,29

150	0,3	0,6	64191	9,22
150	0,4	0,3	63406	9,16
150	0,5	0	62640	9,09
150	0,6	1	61629	8,94
150	0,7	0,7	60319	8,887

Ilustración 1 Correa & Gallo (2005, p. 832)

En este análisis, cualquiera de los valores seleccionados en la tabla anterior es una solución posible que se puede adoptar. Se puede observar en el modelo matemático el cual sirvió para fijar las tarifas sociales de consumo de energía, y por otro lado, el uso de ecuaciones para modelar la situación, y tablas de doble entrada para mostrar distintas soluciones al problema. Aunque, este estudio fue desarrollado fuera del contexto educativo pero se resalta la manera de abordar situaciones del contexto social en relación al uso de las matemáticas, posibilitando la construcción de los argumentos necesarios para favorecer la economía de las familias menos favorecidas.

Con respecto a la solución del problema, el análisis a partir del modelo construido sirvió para que las autoridades políticas de esa provincia tuviera los suficientes elementos para inclinar por una solución de subsidio el 40% del costo de la energía consumida y el 30% del cargo fijo y de esta manera subsidiar hasta un máximo de 63406 clientes que pagaron como máximo $9,16 por bimestre, lo que significa 15 centavos por día. En lo anterior, es posible observar el uso de los modelos matemáticos como una manera de favorecer los asuntos sociales, al beneficiar a las familias menos favorecidas de una provincia de Argentina.

En otro artículo, "*Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas*" (Biembengut & Hein, 2004) . También se puede observar asuntos que involucra actividades de la vida de las personas con el uso de las matemáticas. Con alta inclinación, por parte de los investigadores de presentar la modelación matemáticas como método de enseñanza, y a la vez, de investigación.

Para estos autores la modelación matemática consiste en "*un proceso que involucra en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa de alguna manera, el fenómeno en cuestión"* (Biembengut & Hein, 2004, p. 106). En este sentido la modelación matemática es comprendida como un proceso que integra por un lado un conjunto de símbolos y relaciones el cual se encuentran en correspondencia con los asuntos de la cotidianidad, por otro lado, se encuentran los diferentes temas de las matemáticas. Desde esta mirada se podría considerar los asuntos de la vida cotidiana del estudiante para integrarlos con algún concepto matemático mediante un proceso de modelación matemática en el aula de clase. Esto permitiría que el estudiante se convirtiera en el principal actor de su propio aprendizaje de las matemáticas.

Los insumos para este artículo presentado por Biembengut & Hein (2004) fueron extraídos de una capacitación brindada a 20 docentes, con el propósito de mostrar la modelación matemática como un proceso que posibilita la solución de una situación en la vida cotidiana. El proceso de modelación consistió en balancear el alimento de pollos con datos tomados de una empresa Brasilera (EMBRAPA[1]). Permitiendo observar el uso de algunas funciones para modelar una situación en el contexto y sus relaciones a través de líneas en el plano cartesiano, describiendo los lugares geométricos el cual se podrían ubicar varias soluciones al problema. Al final, los autores reconocen que la modelación no es la única estrategia para abordar las matemáticas en el aula de clase, pero si ha dejado grandes avances en la enseñanza, porque no es una manera técnica de trasmitir los conocimientos matemáticos. En lo anterior, podemos inferir que, la modelación matemática al abordar una situación en el contexto ofrece alternativas de hacer uso de conceptos matemáticos a partir de las situaciones de la vida cotidiana.

Además, Biembengut & Hein (2004) añaden que, la modelación exige mayor compromiso por parte del docente para la investigación y en la interpretación de los contextos. Esto es entendido que, la exigencia no sólo está en proyectar al estudiante a

[1] Empresa Brasilera de Pesquisa Agropecuaria.

desarrollar un proceso de modelación, sino también, el esfuerzo realizado por parte de los docentes en reconocer el contexto que vive el estudiante e interpretar las distintas relaciones ligadas con las matemáticas.

En el estudio de Londoño & Muñoz (2011), el cual lleva como título *"La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables"*. En este trabajo de investigación, ya se puede visualizar el desarrollo de la modelación matemática como proceso en el aula de clase con estudiantes, con el propósito de "*Caracterizar un proceso de construcción de relaciones entre variables mediante situaciones de modelación matemática con estudiantes del grado once"*. Este hecho sucede, cuando los estudiantes relacionan el contexto social y cultural de la ciudad de Medellín, Antioquia – Colombia, con un proceso de modelación matemática, en situaciones tales como: Transporte Metro de Medellín, cuenta de servicios públicos, planes de celulares y cadenas de correos electrónicos.

En este estudio bajo la perspectiva de modelación realista, describieron los aspectos en el cual permitieron a los estudiantes la relación entre variables a través de la modelación matemática. Los hallazgos exteriorizados por los estudiantes en relación a las acciones e interacciones de las situaciones del contexto antes mencionados, fueron analizados a partir de las consideraciones de los subprocesos del ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) el cual fueron los siguientes: "*Comprensión de la situación; Simplificación y estructuración; Matematización; Trabajo matemático; Interpretación; Validación; Exposición"*. A partir del análisis de los datos, les permitió a las docentes realizar aportes a partir del contexto sobre: el reconocimiento de las magnitudes a la noción de variables y sus relaciones, el surgimiento del modelo y algunas implicaciones con respecto al aula de clase. Por tanto se resalta de este estudio lo siguiente:

- La importancia de relacionar los contextos cotidianos de los estudiantes para abordar la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase.

- A pesar que la situación son cercanas y conocida por el estudiante no todas son comprendidas por él y, observar como el proceso de modelación le brida esta oportunidad de profundizar en dichas situaciones.
- El interés que se despierta en el estudiante al abordar las matemáticas a partir de situaciones conocidas.
- La manera como los estudiantes reflexionan de manera crítica frente a determinadas situaciones.
- Los significados de los estudiantes frente algunos elementos de las matemáticas en el proceso de modelación, especialmente la correspondencia de las variables entre la situación del contexto y las matemáticas.

En sus conclusiones, resaltan el contexto del Transporte Metro de Medellín, cuenta de servicios públicos, planes de celulares y cadenas de correos electrónicos como situaciones cercanas a la vida del estudiante el cual los motiva a realizar procesos de modelación. Pero más allá de la motivación, también proporciona una riqueza de significados cultural y social al respecto de las relaciones entre variables, observándose en los estudiantes mayor comodidad al permitirles incluir sus experiencias e interrogantes en el proceso para responder a sus necesidades de la vida cotidiana.

Desde el contexto rural, en el estudio de Berrío (2011) se resalta la importancia de la modelación matemática en los estudiantes. Estos motivados y con la ayuda del profesor decidieron emprender la búsqueda de las matemáticas implicadas en los cultivos de café en una región del suroeste Antioqueño. Como una manera de hacer uso del contexto cotidiano para abordar un proceso de modelación matemática.

El interés de los estudiantes consistió en reconsiderar la cantidad de árboles de café en el cual pueden caber en una hectárea de tierra, independientemente la posición que esta tenga (si es un terreno plano o inclinado). Para entender esta situación, se observa la manera como los estudiantes realizaron diferentes consultas entre ellas: textos de Geometría, a expertos de la Cooperativa de Caficultores, a los mismos cultivadores de café y otras instancias. En este caso (re)construían los modelos existentes en las fichas técnicas y los comparaban con las diferentes consideraciones extraídas de las fuentes consultadas. Lo anterior, lo realizaban con la ayuda de un software matemático para simular e ir validando los modelos el cual iban construyendo. Y de este modo concluyen que, en la siembras de árboles de café caben la misma cantidades en los terrenos planos como en los inclinados.

Se resalta en este trabajo, la forma como está constituido el contexto cotidiano del estudiante, en el sentido de sus estructuras y conexiones el cual le brinda la oportunidad al estudiante de hacer uso de las matemáticas con sentido. Y se puede inferir que, un proceso de modelación en el contexto cercano al estudiante le permite profundizar y observar aspectos nuevos, el cual no consideraban en el transcurso de su vida diaria.

Lo anterior, nos ha permitido entender hasta cierto punto, la modelación matemática en relación en los aspectos sociales y culturales del estudiante. En el siguiente estudio, Será útil para entender los aspectos de índole social y cultural como una realidad del estudiante para abordar procesos de modelación en el aula de clase desde una mirada docente.

En el sentido de la realidad de Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo (2009) es retomada la discusión sobre el concepto de *mundo real*, no intentando dar fin a dicha discusión. El propósito consistió en identificar el sentido de realidad en el proceso de modelación matemática. Tomando como base algunas consideraciones de los estudios de Alsina (2007); el concepto de mundo real y la perspectiva de modelación en educación de Blum (2007), con algunas consideraciones de Agudelo-Valderrama (2005); y otros. Esto mediante un estudio de casos en una Institución Educativa de una región del departamento de Antioquia, Colombia.

A partir de los análisis de las entrevistas, observaciones y cuestionarios realizados a los profesores y estudiantes, describían la situación de la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase. Esto les posibilitó entender las percepciones de un profesor el cual lo llamaron con el psedunombre de Alberto, considerado por los investigadores como un docente preocupado e interesado porque las matemáticas enseñadas en el aula de clase tuvieran sentido para el estudiante, y les posibilitara la aplicación en su vida cotidiana y mejorar la motivación. Por tanto, el sentido de la realidad en la modelación matemática, consiste en este estudio en:

> La sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, que además incluye la intuición y la capacidad de detectar las situaciones y oportunidades del contexto sociocultural frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes, dicho sentido incluye una buena dosis de imaginación y creatividad. (Villa-Ochoa et al., 2009, p. 169)

En la modelación matemática, podemos entender que, sería el contexto cotidiano el encargado de impulsar al estudiante a desarrollar el conocimiento matemático. Entonces, las distintas relaciones percibidas por los estudiantes serían llevadas a relaciones matemáticas hasta construir un modelo matemático.

Los autores concluyen describiendo la necesidad que el docente desarrolle un sentido de la realidad el cual le permita de alguna manera relacionar el contexto sociocultural y las matemáticas escolares (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo, 2009). A partir de lo anterior, entendemos un sentido de la realidad de la modelación matemática en la perspectiva docente, en apoyar y orientar hacia la comprensión y solución de problemas en los contextos cotidianos, a través de espacios en el aula de clase para la reflexión sobre las distintas situaciones que desfavorecen la vida del estudiante.

Una noción de sentido de la realidad en la modelación matemática en la perspectiva docente, está orientada a comprender la necesidad de los estudiantes de solucionar problemas en relación a su contexto social y cultural. A continuación, observaremos un estudio de caso el cual nos permite observar la cultura de enseñanza de las matemáticas de dos países. En el primer país no relacionan las matemáticas con asuntos de interés para el estudiante, y en el otro, permite la relación con otros campos de conocimiento de interés para el estudiante mediante la modelación matemática. Esto nos posibilita visualizar cuando se involucran los asuntos conocidos por los estudiantes, el modo de favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase, y en caso contrario, cuando no se le otorga un contexto para hacer uso de las matemáticas a los estudiantes.

Existen estudios en el campo de la modelación matemática que describen la cultura de la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase: *"Modelación matemática: la interacción de la cultura y la práctica"* (Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland, & Ursini, 1999). Este trabajo describe la influencia de las prácticas culturales tanto de la escuela mexicana y la británica a través del uso de las hojas de cálculo para representar y resolver problemas. Su objeto consistió en el uso de las matemáticas como herramienta de la modelación. En este estudio, se consideró un enfoque sociocultural de la mente el cual lo describen como un proceso mental humano al reconocer las relaciones primordiales entre los procesos, sus valores culturales, históricos e institucionales. (Bruner, 1996; citados por Molyneux-Hodgson et al., 1999)

La metodología utilizada por los investigadores consistió en trabajar con estudiantes mexicanos e ingleses que estudiaban o cursaban dos años antes de ir a la universidad. Los estudiantes Mexicanos participantes estudiaban física, química, biología y matemáticas. En la tradición de los estudiantes ingleses, consiste en elegir un número determinado de temas después del examen nacional, aproximadamente a los 16 años de edad. En lo anterior, se puede reconocer una de las diferencias entre las dos tradiciones de las instituciones tanto la mexicana como la inglesa, en la forma como los estudiantes eligen las aéreas de estudio después de los 16 años de edad.

Por otra parte, el diseño metodológico en este proyecto consistió en permitir una diversidad de datos y estructurándose en dos fases. La primera, las prácticas matemáticas en las ciencias de la escuela. La segunda, continuar con el desarrollo de la primera fase pero introduciendo la modelación con la hoja de cálculo en el aula. Durante el estudio, se llevaron a cabo una serie de entrevistas individuales para apoyar los datos de las observaciones y cooperaciones basadas en documentos escritos y el análisis, siendo analizados los datos a partir de la siguiente mirada: Las prácticas matemáticas en las ciencias de la escuela y las sesiones de modelación en la hoja de cálculo. Dando entender este diseño metodológico como una manera de incorporar el proceso de modelación cuando se usan herramientas tecnológicas, hojas de cálculo.

Continuando con el análisis del diseño metodológico, los participantes entrevistados fueron nueve estudiantes mexicanos y doce estudiantes ingleses, que en este sentido, sólo siete estudiantes de Inglaterra estudiaron matemáticas. Estas entrevistas semi estructuradas fueron realizadas al principio, mitad y al final del estudio, el cual respondieran a trabajos escritos en relación a las hojas de cálculo enfocadas en la siguiente pregunta: *¿qué recursos se basan en los estudiantes cuando se trabaja en los problemas matemáticos en la ciencia, tanto el papel y el trabajo con hojas de cálculo?* La manera de abordar esta pregunta consistió en analizar los métodos de trabajo, el uso de las representaciones exteriorizadas tales como fórmulas, gráficos y tablas. Sin embargo, ese análisis se consideró en el contexto de la tics de las matemáticas y la cultura de ambos países.

En resumen, nuestra percepción frente a este estudio fue que todos los estudiantes mexicanos estaban preocupados por la producción de una respuesta exacta, haciendo un amplio uso de métodos algorítmicos y en la exposición de las fórmulas, describiéndolas de manera desconectadas de la situación representada. Caso contrario se observó en los estudiantes ingleses, al demostrar comodidad en las respuestas aproximadas utilizando métodos informales a partir de las representaciones visuales, y las interpretaciones de las fórmulas fue dominada por la situación que la representaba. En opinión de los investigadores, las diferencias o similitudes se encuentran en el origen cultural de la enseñanza escolar. Entendiéndose esto como la manera de orientar al estudiante en el aprendizaje de las matemáticas en la escuela.

El propósito que llevó a los investigadores a realizar este estudio sobre modelación con hojas de cálculo en la ciencia, consistió en tratar de superar abiertamente la brecha entre las matemáticas y las ciencias en el aula de clase, trabajando con los estudiantes la modelación con modelos de exploración, el cual los estudiantes construyeron una versión de hoja de cálculo utilizando estos modelos exploratorios de diferentes fenómenos físicos o situaciones que se estaban modelando. Esto les permitió a los investigadores observar los cambios de valores de un parámetro y ver como cambiaba en la gráfica**.** Tanto en México y en Inglaterra, antes de iniciar el trabajo con hojas de cálculo, la mayoría de estudiantes tenían dificultad para expresar su comprensión de un modelo matemático y varios profesaban que nunca han oído hablar de esa idea. Por tanto, los investigadores concluyen con lo siguiente:

- Encontraron muchos ejemplos de las matemáticas no escolarizadas que estructuran las prácticas de las matemáticas de los estudiantes en la ciencia. A nuestro modo de entender, encontraron maneras nuevas de estructurar aspectos matemáticos amarrados al contexto sociocultural del estudiante, observándose una forma de constituir la didáctica de la enseñanza de esta disciplina.

- Un estilo más de presentación de la enseñanza parece estar relacionado con un énfasis en las respuestas precisas, en apoyo en la representación de expresiones algebraicas. En el estilo más exploratorio, parece promover una aproximación y estar vinculada en un énfasis en las representaciones gráficas.

- Los investigadores sugirieron que las prácticas matemáticas en las asignaturas de ciencias pueden ser influenciadas mediante el uso de un enfoque de modelación computacional integrado en un ambiente como la hoja de cálculo. En este sentido, apoya a los estudiantes mexicanos para conocer y utilizar representaciones gráficas y numéricas, y al mismo tiempo, a los estudiantes ingleses a darle sentido a las representaciones algebraicas.

La perspectiva utilizada en este proyecto consistió en la relación entre la cognición y la cultura escolar. Bajo algunas consideraciones de (Bruner, 1996; Cuertsch, 1991; citados por Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland, & Ursini (1999), en que la mente no puede existir sin la cultura. Porque a través de la cultura esta mediada por el lenguaje y otros sistemas semióticos, poniendo de relieve las diferencias entre las matemáticas y la cultura escolar. Este proyecto no consistió en realizar comparaciones entre las dos culturas, sino, en la realización de dos estudios de casos paralelos de dos sistemas educativos de estudiantes de pre universitario.

Nuestro modo de entender el anterior estudio, consiste en reconocer como el contexto social y cultural que rodea al estudiante le permite crear una identidad o una manera de realizar los procedimientos matemáticos, como fue posible observar en los estudiantes mexicanos cuando proponían respuestas exactas, debido a que la educación hacia más hincapié en la resolución de problemas a través del Álgebra escolar. A diferencias de los estudiantes ingleses, el cual optaban por respuestas aproximadas mediante tablas y gráficas, y esto les permitía observar de varias maneras el problema para buscar una solución aproximada. A partir de lo anterior, nos brinda la oportunidad de comprender la importancia que los estudiantes usen los diferentes sistemas de representación en relación al Álgebra escolar, en correspondencia a un campo de conocimiento diferente a las matemáticas para estructurar las soluciones de un problema de varias manera.

Con base a los estudios que hemos referenciado en este apartado, reconocemos los contextos cotidianos del estudiante y la cultura de la enseñanza pueden estar influenciando de algún modo el aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase. Se resalta la urgencia, en la relación de las matemáticas con las situaciones de la vida cotidiana del estudiante a través de un proceso de modelación matemática, en el sentido, que éstas respondan a las necesidades sociales y culturales, y al mismo tiempo, el estudiante le encuentre el sentido al uso del algebra escolar.

1.1.3 *Pertinencia de la modelación en las situaciones del contexto de la vida del estudiante*

En Colombia, por medio del Ministerio de Educación Nacional (MEN), institución en cargada de orientar la enseñanza de los jóvenes en todo el territorio Nacional, describen de la enseñanza de las matemáticas la necesidad de orientar hacia la relación de los contextos sociales e históricos, de la siguiente manera:

> Se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes. (MEN, 2006, p. 47)

El MEN ha reconocido la enseñanza de las matemáticas en relación al entorno del estudiante el cual son ricos de significados y relaciones, al mencionar la estrecha relación entre la parte lingüística, cultura e historia con los saberes de las personas. Desde esta necesidad, puede ser vista la pertinencia de la modelación matemática en el sentido de posibilitar la relación del contexto sociocultural del estudiante y las matemáticas.

La modelación, desde los Lineamientos Curriculares de matemáticas postulados por el MEN en 1998 se encuentra inscrita dentro los cinco procesos básicos: "*formular y resolver problemas*; ***modelar procesos y fenómenos de la realidad***; *comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos*" (MEN, 1998, como se cita en MEN, 2006, p. 51). En lo anterior, *modelar procesos y fenómenos de la realidad* podemos entender la modelación matemática como la relación de la vida cotidiana del estudiante y el uso de las matemáticas.

Por otra parte, Según Vasco (2006) describe la modelación como un elemento que permite el desarrollo del pensamiento variacional, describiéndolo como una manera dinámica de pensar: "*el objeto del pensamiento variaciones es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente – pero no* *exclusivamente – las variaciones en el tiempo*" (p. 6). En lo anterior se entiende que, la dinámica del mundo puede ser un insumo para que el estudiante reconozca los movimientos que suceden en el interior para ponerlos en correspondencia con las matemáticas, y así, se estaría realizando el uso de las matemáticas de manera diferente, frente a la enseñanza estática que es vista cuando se orienta inicialmente desde el conocimiento matemático formal (MEN, 2006).

Hasta el momento se entiende que el propósito de la modelación consiste en relacionar los contextos de la vida diaria de los estudiantes con las matemáticas. Esto implica construir un modelo en relación a un fenómeno particular. En esta mirada, el modelo, le debe posibilitar al estudiante explicar, predecir, solucionar problemas en un contexto determinado a través del uso de las matemáticas. En esta medida, puede dar cuenta el MEN (2006) cuando describe que las matemáticas deberían de partir de las matemáticas informales hacia las matemáticas formales.

La necesidad de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula escolar de manera diferente se hace evidente a partir de nuestra experiencia. En el sentido que, esas matemáticas el cual no tiene ninguna relación con los significados de su contexto social y cultural: el uso de expresiones algebraicas, algoritmos aritméticos, resolución de problemas y otros. Por tales motivos los estudiantes manifiestan apatía frente a las actividades en el aula de clase. En estos casos, varios autores como Villa-Ochoa (2007); Londoño & Muñoz (2011); Berrío (2011); han demostrado que a través de la modelación matemática contrarrestan, ciertos asuntos, que desfavorece cuando el estudiante hace uso de las matemáticas, en el sentido de relacionar los significados de un contexto particular, ubicando la modelación como una práctica que coloca la relación entre el mundo real y las matemáticas en el centro de la enseñanza y aprendizaje (Blomhøj, 2004).

Como se ha descrito anteriormente, la modelación matemática como una manera de relacionar tanto los contextos cotidianos de los estudiantes y las matemáticas, y además, generar el gusto por las matemáticas sería una de los aspectos que han podido describir los diferentes autores que defienden la modelación matemática. En este sentido Blomhøj (2004) describe lo siguiente:

> Se propone que la investigación de la matemática emerja de su proceso de enseñanza y aprendizaje y no del grueso de las ciencias bases como la pedagogía o de la sociología, para luego ser aplicado en la enseñanza de las matemáticas. (p. 8)

De acuerdo con lo anterior, la modelación matemática también es una de las alternativas para investigar directamente desde el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Dicho de otra manera, los mismos docentes de matemáticas tenemos la posibilidad de hacer investigación en el aula de clase a través de la modelación matemática, dando cuenta de lo significativo de este proceso en las aulas de clase de diferentes niveles. Esto se evidencia a través de artículos de revistas científicas, libros, actas y otros. Desde de Villa-Ochoa (2007) se puede observar aspectos hallados bajo métodos de investigación que favorecen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación como proceso en el aula de clase:

- Se reconoce como una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas, proporcionando una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.
- Potencia el desarrollo de las capacidades del estudiante en el aula de clase para hacer frente de manera crítica en situaciones del contexto social añadida la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas.
- Desde la perspectiva del maestro, el proceso de modelación ofrece un espacio para enriquecer la creatividad, y las capacidades del profesor para interpretar el contexto de los estudiantes y utilizarlos en el aula de clase.
- Ofrece particularmente, un medio para una aplicación de las visiones sobre las prácticas de los estudiantes, lo cual redunda en situar al maestro en un desarrollo profesional dentro del contexto de su propia aula de clase. Además, permite desarrollar las herramientas para interpretar, describir, explicar las comprensiones de los estudiantes.
- Otros.

En lo anterior se puede deducir que la modelación, vista como un proceso, le facilita al docente la manera de interpretar las acciones e interacciones de los estudiantes cuando hacen uso de las matemáticas. Y por otra parte, le posibilita construir el conocimiento matemático partiendo de los aspectos sociales y culturales el cual rodean al estudiante. Además, ésta manera de abordar la enseñanza de las matemáticas también permite el análisis de las actividades de modelación de los estudiantes para identificar obstáculos en el aprendizaje durante el proceso (Blomhøj, 2004). Esos obstáculos, a nuestro modo de entender pueden ser superados durante el proceso de modelación. Es decir, se presupuesta que el contexto cotidiano le sirva de medio para superar obstáculos de aprendizaje al desarrollar actividades que para él son más significativas. También, guía al docente en la comprensión de dichos obstáculos, y ofrecerle al estudiante de manera estrategia la orientación necesaria para la construcción del modelo. Pero, para que un estudiante pueda iniciar a desarrollar un proceso de modelación matemática se puede entender desde la mirada de Blomhøj (2004) cuando describe lo siguiente:

> Es una precondición epistemológica que el alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelados y la matemática en juego, como dos objetos separados pero inter relacionados. Este es el núcleo del problema de la modelación matemática, como la dificultad conectada con este aprendizaje. (p. 21)

Es condición necesaria que el estudiante pueda detectar los cambios en un fenómeno en relación con las matemáticas en la construcción del modelo. Ya que un modelo matemático para Blomhøj (2004) *"es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática"* (p. 21). A partir de esta descripción, inferimos que un modelo posee componentes matemáticos relacionados con aspectos de un fenómeno de la vida cotidiana. En esta mirada, es posible observar las matemáticas que se involucran en respuesta a un fenómeno de la vida del estudiante.

Por lo tanto, a partir de los anteriores argumentos en este apartado, hemos considerado pertinente la modelación en el aula de clase para que el estudiante relacione los asuntos sociales y culturales con las matemáticas. En la mirada de favorecer la vida del estudiante en la solución de problemas en diferentes situaciones en el contexto cotidiano, y a la vez, contribuir en el fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas de clase a nivel de investigación.

1.2 Justificación

A partir de la revisión de literatura y desde nuestra experiencia docente observamos que, los estudiantes presentan diversas problemáticas para hacer uso del conocimiento matemático. Esta dificultad se puede presentar, cuando estos conocimientos no son correlacionados con actividades que involucran aspectos sociales y culturales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los estudiantes tienden a desorientarse en el uso de los conceptos matemáticos. Es decir, las formas de enseñanza y aprendizaje no tienen relación con las problemáticas con el contexto cotidiano del estudiante. Así, la falta de interpretación de problemas, los significados de los fenómenos en correspondencia con las matemáticas, la desarticulación de los conceptos, la mecanización y reproducciones sin sentido de algoritmos son algunos de los asuntos a contrarrestar en este estudio. De este modo, es interesante, en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reflexionar sobre una línea de investigación que involucre las matemáticas y los contextos cotidianos de los estudiantes.

La enseñanza en el aula de clase suele partir directamente de algunos textos escolares, resolución de problemas, uso de algoritmos, ecuaciones y modelos matemáticos ya construidos. Los contenidos se desarrollan de manera secuencial, las planeaciones preestablecidas al inicio del año son sugeridas por los mismos textos: el tema, logros, indicadores de logros, el contenido, ejercicios de ejemplo y talleres o actividades para desarrollar. Al parecer no se tiene en cuenta aspectos de índole social y cultural del estudiante para abordar fenómenos en contextos, en aras de posibilitarle al estudiante formarse en una comprensión del uso de las matemáticas. Esto puede ser causado por la dificultad para relacionar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con la vida cotidiana del estudiante, dicha dificultad, también pueden tener relación con la falta de comprender lo que se enseña y comprender a quienes orientamos. Como lo describe en cierto modo Godino, Batanero & Font (2003):

> Para ser eficaces, los profesores deben conocer y comprender con profundidad las matemáticas que están enseñando y ser capaces de apoyarse en ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas docentes. Necesitan comprender y comprometerse con sus estudiantes en su condición de aprendices de matemáticas y como personas y tener destreza al elegir y usar una variedad de estrategias pedagógicas y de evaluación. (pp. 68–69).

Lo anterior le implica al docente, pensar en las necesidades del estudiante y en su búsqueda de sentido sobre las acciones escolares en torno al mundo que lo rodea, y a la vez, conocer a profundidad de las matemáticas implícitas el cual están siendo utilizados por los estudiantes a través de los significados del contexto.

La enseñanza del álgebra en las instituciones educativas se ha venido asesorando de manera descontextualizada. Es decir, se observa una desarticulación entre los contenidos temáticos abordados en el aula de clase con las situaciones cotidianas. Por ejemplo, en el caso del concepto de "función lineal" se aborda en el aula de clase de manera literal, de la siguiente manera: se toma una función de la forma $f(x) = x + 2$ donde los estudiantes le otorgan valores a la variable "x", sin relacionar este proceso con un contexto cercano al estudiante el cual le permita construir un significado para usar tal concepto matemático. En esta mirada, se le debería posibilitar al estudiante en el aula de clase construir las expresiones algebraicas a partir del análisis de los cambios, de las variables y sus relaciones sobre una dinámica emergente de un contexto auténtico, es decir, la enseñanza del Álgebra en relación a la vida cotidiana del estudiante.

En nuestro contexto rural, sería pertinente relacionar los conceptos matemáticos y la vida diaria de los estudiantes mediante el desarrollo de un proceso de modelación matemática. Puesto que, nos posibilitaría integrar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el contexto cotidiano de los estudiantes. Por lo tanto, convendría que las actividades sean valoradas y tratadas desde las matemáticas a través de la modelación. De tal manera los estudiantes estarían involucrados en actividades que le permitan construir un modelo matemático a partir de lo que conocen y practican en su diario vivir. De este modo, también podría establecer letras como variables, reconocer magnitudes y cantidades en estructuras matemáticas en relación a los significados provenientes del contexto cotidiano del estudiante, al identificar el sentido para construir una representación particular al analizar ese mundo que lo rodea y resolver un problema. En esta mirada, los modelos matemáticos construidos por los estudiantes estarían en correspondencia con variables y relaciones propias a situaciones y problemas relacionados con situaciones cercanas su entorno.

En síntesis, algunas problemáticas en el marco del problema de investigación se reconocen desde:

- El uso de las letras basadas en operaciones y mecanización de procedimientos sin sentido.
- El privilegiar la enseñanza haciendo más énfasis a la solución de algoritmos.
- La desmotivación de los estudiantes debido a la mecánica de la enseñanza en el aula de clase.
- La insistencia de resolver los problemas desarticulados a los contextos cotidianos de los estudiantes.

Por tales razones, se hace pertinente analizar la mediación entre el contexto cotidiano del estudiante y las matemáticas a través de un proceso de modelación en el aula de clase, para intentar comprender a los estudiantes en el desarrollo de un proceso de modelación matemática en miras a la construcción de modelos, esto a su vez, nos dará pautas para analizar a nivel didáctico y disciplinar las temáticas emergentes con las cuales los estudiantes se motivan a modelar una situación en el contexto.

1.3 Pregunta de investigación

Desde algunos resultados y aportes de la literatura sobre la enseñanza de las matemáticas y desde nuestra experiencia docente en la región de Urabá, realizaremos un análisis en los estudiantes de un proceso de modelación matemática en relación a las prácticas en el contexto del cultivo de plátano, como una situación en el contexto de la vida cotidiana del estudiante el cual le posibilite la construcción de modelos lineales. Y la vez, permitirles una aproximación a una noción de función lineal. Por lo anterior, definimos la pregunta de investigación de la siguiente manera:

¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?

1.4 Objetivo

Analizar en los estudiantes del grado décimo un proceso de modelación matemática desde una situación en contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales.

1.5 Objeto de estudio

Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes del grado décimo al generar modelos lineales.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Modelación en el aula de clase de matemáticas

En el campo de la Educación Matemática, la modelación se preocupa sobre la actividad de construir modelos por parte de los estudiantes. En este campo según Kaiser, Blum, Borromeo-Ferri, & Stillman (2011) algunas situaciones en contexto favorecen el proceso de modelación. En este sentido, uno de los puntos cruciales por parte de los investigadores consiste en buscar situaciones matematizables y favorables para avanzar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este proceso, en cierta medida, se centra en los problemas en los cuales los estudiantes se enfrentan fuera de la escuela al observar los contextos y sus problemáticas para trabajar situaciones relacionadas con las temáticas que hacen parte del currículo de las matemáticas. Según Lesh & Sriraman (2005) el estudiante ajusta formas flexibles para su desarrollo, crea herramientas y mecanismos para abordar las situaciones en la vida cotidiana. De tal manera, las manifestaciones o formas flexibles de pensar y actuar estarían reflejando asuntos concernientes a los aspectos matemáticos en la construcción de modelos en el aula de clase cuando se enfrentan a situaciones de su vida diaria. Con relación a esto, Blomhøj (2004) se refiere a la modelación del siguiente modo:

> […] tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria. (p. 32)

La modelación matemática puede entenderse como la manera establecer una correspondencia entre los significados del contexto cotidiano del estudiante con las matemáticas, al trabajar con actividades que susciten modelos matemáticos en la vida diaria o en la cultura. Según lo anterior, no se limitan únicamente a buscar respuestas a las preguntas que se plantean al inicio de las actividades, sino, a crear herramientas y mecanismos para comprender ampliamente el problema.

El estudiante al construir el modelo le posibilitaría explicar esa situación en el contexto cotidiano. Esto es entendido que al desarrollarse un proceso de modelación en el aula de clase se construye una relación entre los significados de la vida cotidiana y el uso de las matemáticas. Es decir, creemos que el estudiante se apropiaría de conceptos matemáticos a través de los significados de la situación en contexto, proceso orientado a través de distintos momentos y subprocesos los cuales podrían desarrollarse en grupo o individualmente y, tomando como insumo las distintas conexiones proporcionadas por el contexto cotidiano para producir los modelos matemáticos.

Desde algunas perspectiva teórica: realista, educativa, contextual, socio – critica y otras (Blomhøj & Carreir, 2009), sugieren que el aprendizaje de las matemáticas se lleve a cabo mediante situaciones o fenómenos que conlleven al estudiante a la reflexión para la exploración de regularidades o clases de variaciones. Como también, a la necesidad de orientar sobre la comprensión de los contextos en los cuales vive el estudiante, con miras al uso de estrategias y herramientas matemáticas desarrolladas de forma autónoma, en el aula de clase o fuera de ella. Por tanto, entendemos la modelación en la enseñanza de las matemáticas como el proceso el cual le posibilita al estudiante poner a dialogar las matemáticas y las situaciones que se encuentran en la sociedad y la cultura. Facilitándole la construcción y el uso de las matemáticas en relación a los significados de su contexto cotidiano, de tal manera, le permita construir los argumentos necesarios para tomar decisiones y resolver el problema.

En este trabajo de investigación, hemos visto pertinente algunas consideraciones teóricas planteadas en los estudios de Blum, Galbraith, Henn, & Niss (2007). Con respecto a la relación entre el mundo real y las matemáticas a través de un proceso de modelación matemática, desde la mirada de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Desde las cuales, nos posibilitarán describir y analizar los elementos implicados en un proceso de modelación matemática para la construcción de los modelos matemáticos a partir de una situación del contexto cotidiano del estudiante. Tales como el uso de los conceptos matemáticos, el proceso de modelación y las situaciones en contexto. De tal manera que, esto permita analizar el proceso de modelación en los asuntos de la vida cotidiana que impulsan a los estudiantes a generar modelos lineales.

Aunque en la modelación matemática la perspectiva educativa no es la única que existe. En este campo también se encuentra la perspectiva realista tomando como hecho que los modelos matemáticos están siendo utilizados en un modo amplio en diferentes disciplinas científicas, tecnológicas y en varios contextos sociales (Blomhøj, 2004). De tal manera que, esta perspectiva se enfoca en la interdisciplinaridad de la modelación matemáticas con otros campos de conocimiento. Resaltando la importancia que los estudiantes se apoyen en verdaderos contextos reales o auténticos para el proceso de modelación. Con el fin de apoyarlos en el desarrollo de competencias en la modelación matemática con una visión posterior de la educación profesional.

La perspectiva contextual se diferencia de la perspectiva realista en enfocarse en el diseño didáctico de actividades que emerjan modelos en situaciones cuidadosamente estructurados para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Blomhøj, 2004). En lo anterior, se podría considerar como algo similar a la perspectiva educativa, pero, se diferencia en usar la modelación matemática para la obtención de modelos como un tipo especial para la resolución de problemas. Los insumos para estructurar la enseñanza bajo esta mirada contextual serían los aspectos cognitivos en la resolución de problemas, al reconocer las dificultades de aprendizaje con la modelación matemática. A diferencia de la perspectiva educativa, el cual se estructura a partir de los siguientes componentes: 1) imaginaciones y representaciones internas exteriorizadas y 2) la "holística", respectivamente al modo de proceder en la solución de problemas matemáticos (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). Por tanto, en el siguiente apartado continuaremos ampliando los aspectos que se van a tener en consideración en este estudio sobre la modelación matemática desde la mirada educativa.

2.2 Modelación y modelo en el contexto educativo

En el marco legal en Colombia la modelación, en la enseñanza de las matemáticas es considerada como "*la forma de describir ese juego o interacción entre el mundo real y las matemáticas*" (MEN, 1998, p. 97). Y a su vez, la inscriben como uno de los procesos que respalda el desarrollo de los pensamientos matemáticos: *"el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos"* (MEN, 1998, p. 18). Se reconoce la modelación desde el marco legal en Colombia como uno de los procesos el cual puede ser desarrollado en las aulas de clases para buscar la relación entre las matemáticas y el contexto cotidiano del estudiante.

En esta misma dirección el MEN describir lo siguiente: "el *aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en contextos del mundo real y cotidiano escolar y extra escolares, se requiere entretejer los hilos de temáticas formales*" (MEN, 2006, p. 78). A nuestro modo de entender, el MEN describe una línea para que los estudiantes en Colombia inicien el proceso y enseñanza de las matemáticas a partir de las actividades realizadas en su vida cotidiana, haciendo uso de las matemáticas con los significados del contexto social, de tal manera que, los estudiantes puedan identificar las rutas que puedan existir entre un fenómeno de la vida diaria en relación y el uso del conocimiento matemático.

A continuación, realizaremos un esboce sobre el ciclo de modelación desde la perspectiva de Blum & Borromeo-Ferri (2009), con respecto a la aplicación de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Con este ciclo, se busca la manera de poder interpretar en nuestro estudio ese juego entre los asuntos sociales que se encuentran involucrados los estudiantes en relación con las matemáticas.

El punto de partida en el ciclo de modelación consiste en determinar una situación real, como aquella situación social el cual involucra al estudiante para buscar solución a un problema. El término *"problema"* se usa en sentido amplio, abordando no sólo problemas prácticos, sino también, de carácter objetivo al describir, explorar, comprender o diseñar las partes del mundo (Blum, 2002).

El estudiante, a partir de una situación real realiza un proceso de construcción mental del problema. Es decir, describe la situación con los elementos conocidos en el contexto cotidiano. Esto se refleja a través de un modelo de la situación el cual puede ser un boceto o una imagen que describe la situación real. Luego este modelo a su vez es simplificado y estructurado bajo los conocimientos e intereses de los estudiantes, en este caso, los datos reales proporcionan la información necesaria del problema para construir el modelo real, este tiene la propiedad de permitirle al estudiante explicar el problema con los datos relevantes, considerados por el estudiante. Este modelo es sometido bajo un subproceso llamado matematización, encargado que los objetos, datos, relaciones y condiciones que participan o conforman el modelo real, que aún todavía tienen rasgos que describe la situación real, sean traducidos a las matemáticas.

La finalidad del subproceso de matematización, se entiende como la manera de tomar los elementos del modelo real y traducirlos a las matemáticas para generar el *modelo matemático*. Es aquí, donde los estudiantes pueden hacer uso de los métodos matemáticos llamado en este ciclo de modelación como *trabajo matemático,* el cual tiene el propósito de brindar los *resultados matemáticos* necesarios durante el proceso.

El *trabajo matemático* desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) se concibe en la mirada de estilos de pensamiento matemático, refiriéndose a la manera como un estudiante prefiere presentar, entender y pensar a través de hechos matemáticos y conexiones, usando ciertas imaginaciones internas y/o representaciones exteriorizadas. En este sentido, los estilos de pensamiento matemático no es considerado como las habilidades matemáticas sino como las preferencias de cómo se utilizan las matemáticas. Describiéndose a partir de los siguientes componentes: 1) imaginaciones y representaciones internas exteriorizadas y 2) la “holística”, respectivamente al modo de proceder en la solución de problemas matemáticos. Por consiguiente, los estilos de pensamiento matemático serían los siguientes:

- *Estilo de pensamiento visual* (pictórico – holístico): las personas muestran preferencia por las distintas imágenes internas pictóricas y representaciones pictóricas exteriorizadas por la comprensión de hechos matemáticos y conexiones a través de las representaciones que ilustran el problema. En este sentido, comprendemos que, los resultados tiende hacer expresados en el proceso de modelación con los significados de la situación en el contexto.
- *Estilo de pensamiento analítico* (simbólico): los pensadores analíticos poseen la capacidad de comprender y expresar hechos matemáticos a través de expresiones simbólicas o verbales. Describiendo paso a paso los procedimientos para solucionar los problemas.
- *Estilo de pensamiento integrado*: consiste en la capacidad que tiene una persona de combinar formas visuales y analíticas de pensamiento al mismo tiempo.

Con los resultados matemáticos obtenidos por el desarrollo del subproceso del *trabajo matemático* son llevados o traducidos a la situación en contexto. Estos son reconocidos a través de los argumentes necesarios para solucionar el problema en la situación en el contexto. En este sentido, la situación en contexto se describe cuando Blum, Galbraith, Henn, & Niss (2007) hacen referencia al mundo real: " *nos referimos a todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, así como la escuela y los asuntos universitarios o disciplinas científicas y académicas distintas a las matemáticas*.” (p. 8).

La validación del *modelo matemático* se desarrolla al mismo tiempo que el solucionador del problema, en este caso el estudiante, realiza comparaciones entre la solución del problema con la interpretación de los *resultados matemáticos*. Si en caso tal, el modelo no satisface la solución del problema o no representa el fenómeno para el cual fue construido, se considera repetir el ciclo hasta encontrar un *modelo matemático* satisfactorio. Y por último, el modelo luego de haberse ajustado a la situación del contexto, ya puede ser expuesto o presentado en el aula de clase por el estudiante. El ciclo de modelación se puede observar en la siguiente ilustración:

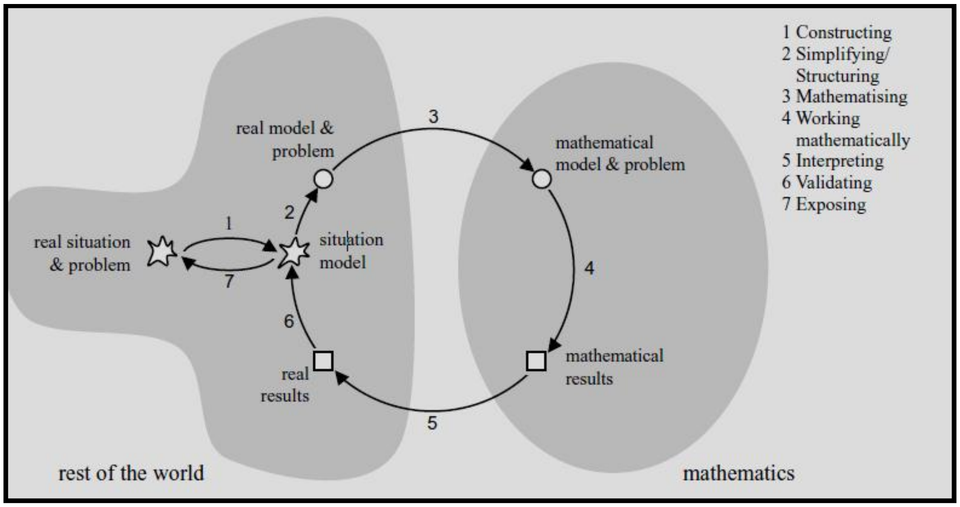


Ilustración 2 Ciclo de modelación Blum & Borromeo-Ferri (2009, p. 46)

El ciclo de modelación no es entendido como una ruta secuencial y estática, sino de un ir y venir a través de los momentos y subprocesos hasta que el estudiante pueda o no construir un modelo matemático ajustado a la situación, y éste responda a la solución del problema. Esto se produce, debido a que las rutas del proceso de modelación en los estudiantes son diferentes (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). Es decir, esto depende de los diferentes caminos en la construcción de un modelo matemático cuando aborda una situación en el contexto o un fenómeno de la vida cotidiana.

Hasta el momento hemos asumido la modelación matemática como un proceso en el cual se puede desarrollar en el aula de clase desde una perspectiva educativa, en un nivel de secundaria. Posibilitándoles a los estudiantes relacionar los asuntos de un contexto cotidiano y las matemáticas, con el propósito de generar un modelo matemático mediante el desarrollo de un conjunto de momentos y subprocesos en el aula de clase. A continuación, describiremos la mirada de *modelo matemático* el cual se asumió para este estudio.

En el desarrollo del proceso de modelación, la actividad de buscar relaciones entre variables es considerada fundamental. Esta actividad es exteriorizada por el estudiante al construir modelos matemáticos (Trigueros, 2009). De esta manera, los conceptos o constructos procedentes de los fenómenos, los razonamientos y los modelos construidos son procesos que develan de algún modo la comprensión de una variedad de conceptos matemáticos, o pueden surgir representaciones que no se ajusten a ningún concepto matemático.

De acuerdo con Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio, & Ocampo (2009) el cual definen un modelo matemático como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación. Podemos entender, desde esta perspectiva, que es plausible considerar la idea de modelo como una construcción no inmediata que responde a un modo de ver y de representar en forma matemática un problema en particular. Desde estas consideraciones se podría decir que el contexto del cultivo de plátano sería una situación cercana al contexto de los estudiantes en este estudio, y un escenario desde el cual se pueden desencadenar diversas relaciones entre variables para generar los modelos matemáticos.

Con respecto a la orientación de la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hemos asumido un modelo matemático como una construcción en una situación en contexto basada en las consideraciones de Blum, Galbraith, Henn, & Niss (2007) cuando afirman que:

> […] a veces, un modelo será una construcción ad hoc idiosincrásica, pero a menudo será un modelo de un tipo estándar (por ejemplo, proporcionalidad inversa, el crecimiento lineal, exponencial o logarítmica, el oscilador armónico o el proceso de probabilidad de Poisson, etc.) (p. 10).

De acuerdo con lo anterior, un modelo matemático construido por los estudiantes en una situación en el contexto puede estar relacionado, no necesariamente con un concepto matemático (idiosincrásico), pero el estudiante puede hacer uso de modelos estándar para modelar un fenómeno. En esta mirada, un modelo lineal se evidenciará a partir de la situación del contexto del cultivo de plátano, situación el cual hace parte del entorno social y cultural del estudiante que los impulsaría a buscar soluciones frente a un problema planteado a partir de la actividad productiva familiar. Debido a que nuestra pregunta de investigación *¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?* Con esta pregunta, nos posibilitará describir los diferentes momentos y subprocesos implicados en el desarrollo de un proceso de modelación. Tales como las situaciones en contexto, las aproximaciones de algunos conceptos matemáticos y los modelos lineales.

En relación a las necesidades sociales y culturales de los estudiantes, reconocemos la implicación del contexto cuando el estudiante este construyendo el modelo matemático. Es decir, el contexto cotidiano en los estudiantes jugaría un papel preponderante en esas relaciones y conexiones, al develar de algún modo las matemáticas que están inmersas en el mundo el cual vive el estudiante. Entendiéndose esto, que cuando los estudiantes construyan los modelos lineales reflejarán por un lado las relaciones provenientes de la situación en contexto, y por el otro, la aproximación de algún concepto matemático.

Para ilustrar lo anterior, hemos decidido comparar la diferencia de estudiar un modelo ya pre construido, con respecto a, construir un modelo ajustado a una experiencia percibida por las personas en una situación circunstancial o de la vida cotidiana. Por lo tanto, tomado el siguiente ejemplo en el cual traemos a colación de Blomhøj (2004): *"una familia de vacaciones maneja 1180 kilómetros en 12 horas"* (p. 21). En lo anterior, el autor describe que esa situación puede ser modelada dividiendo los kilómetros entre las horas, dando como resultado la anterior relación promedio de 98 km/h, para ese viaje ($v = \frac{s}{t}$).

Dicho modelo expuesto en el párrafo anterior se puede denominar modelo de viaje. Pero en nuestro sentido la modelación se orienta a tener en cuenta los aspectos que suceden en una situación o fenómeno, como el tiempo que utiliza la familia en el viaje para almorzar, tomar un refrigerio, la disminución de la velocidad en las curvas y otros aspectos a tener en cuenta en el viaje. Estos aspectos son los que se toman en consideración para identificar las variables implicadas y sus relaciones para construir el modelo. Es decir, un modelo ajustado a describir dicha situación. A diferencia, del modelo inicial, que sólo permite observar de manera general la velocidad promedio y no tiene en cuenta los demás sucesos generados por la familia en el lapso de tiempo del viaje. Desde esta perspectiva, el proceso de modelación no lo concebimos como un proceso secuencial para enseñar de manera directa los conceptos matemáticos, sino, un espacio que se les brida a los estudiantes en el aula de clase para construir modelos a partir de situaciones cercanas a su vida cotidiana, el cual les posibilite incluir el uso de las matemáticas y sus representaciones bajo las necesidades e intereses.

La Institución Educativa el Dos, lugar donde se realizó el trabajo de investigación, se encuentra ubicada a 10 km del casco urbano del Municipio de Turbo – Antioquia. Institución que cuenta con aproximadamente 1100 estudiantes distribuidos en 11 sedes repartidas por todas las veredas del corregimiento el Dos. Ésta es de carácter pública y referenciada como una escuela rural. Le presta un servicio a las comunidades campesinas en el cual habitan de manera extendida en este territorio. En este contexto, se puede observar las actividades laborales de las familias tales como el cultivo de cacao, arroz, maíz y en mayor proporción el cultivo de plátano de tipo exportación. Aunque también, se puede observar algunos lugares donde se desarrolla la ganadería.

En el sector, no se observan empresas que brinden empleo de manera permanente a las personas. Por tal motivo, ellas trabajan por día que culturalmente es llamado por las personas de esta comunidad con el nombre de jornal, refiriéndose a las actividades que realizan en las parcelas o en las fincas agrícolas o ganaderas. Desde nuestra mirada, observamos que el dinero escasea entre las familias de estas comunidades, incluso, algunos estudiantes deben apoyar el trabajo en la parcela familiar para mejorar el ingreso económico. En este sentido, se observan aproximadamente 5 estudiantes que cuenta con un permiso especial para apoyar a sus padres los días lunes en la producción de plátano tipo exportación. Es decir, tienen la tarea de ayudar a cosechar el plátano y empacarlos en cajas cumpliendo unos estándares de calidad, y así, poder enviarlas a la empresa comercializadora encargada de venderlas en los mercados internacionales. Esta actividad se viene desarrollando por más de cuatro décadas en la región de Urabá, zona reconocida a nivel internacional por la producción de banano y plátano a gran escala. Por tanto, el concepto de función lineal estaría incluido en el proceso de modelación como un concepto matemático implícito para construir los modelos lineales. Las matemáticas involucradas y sus representaciones serán analizadas a partir de las descripciones verbales, escritas y las observaciones directas, esto en relación a una situación del contexto del cultivo de plátano. Esta manera de realizar el análisis, lo ampliaremos en las consideraciones del diseño metodológico.

2.3 Consideraciones en la producción de un modelo lineal

Al considerar la producción de un modelo lineal, iniciaremos describiendo a continuación el objeto de estudio a partir de un breve rastreo desde los aspectos históricos y los fenómenos el cual se encuentra relacionado, y al final, definiremos el concepto de función lineal para este trabajo de investigación.

2.3.1 *Los contextos cotidianos y las matemáticas a través de la historia: breve comentario*

Se puede demostrar que a través de la historia las matemáticas se han construido desde un contexto netamente matematizado (Freudenthal, 1999). En esta perspectiva, los fenómenos se describen a través de modelos antes que se le pudieran otorgar nombres a los conceptos matemáticos. Por lo tanto, describiremos algunas épocas y culturas el cual desarrollaron la relación de la vida cotidiana con las matemáticas y observar algunas producciones como consecuencia de esa relación.

En algunas cavernas se han encontrado restos óseos con marcas realizadas por las personas como una manera de facilitar el conteo (Sastre, Rey, & Boubée, 2008). El conteo como la correspondencia de un conjunto de objetos del contexto y una secuencia de números para contar a través de líneas ranuradas sobre los huesos. En esta medida, las personas fueron desarrollando el concepto de número.

En esos restos óseos, se puede evidenciar como las personas de esa época construían, a nuestro modo de ver, modelos que relacionaban la cantidad de objetos del contexto en correspondencia a las líneas inscritas en los restos óseos de animales. En ese sentido, cada línea inscrita representaba una unidad, sin tener quizás, la conciencia de la secuencia de los números.

En los papiros de Rhind y de Moscú, los problemas encontrados allí estaban estrechamente relacionados con la vida cotidiana de los egipcios. Demostraban las soluciones con la ayuda de la aritmética o la utilización de ecuaciones lineales de forma $x+ax=b$ o $x+ax+cx=b$ (Morales, 2002). En este sentido se reconoce en los papiros la necesidad de los egipcios de construir ciertas expresiones que les permitiera relacionar los contextos cotidianos con las matemáticas para hallar solución a los problemas de su vida diaria.

Desde el siglo 5 A.C, los babilonios al observar los cuerpos celestes y sus traslaciones en el espacio decidieron representar sus variaciones observadas de los movimientos mediante líneas de zigzag, de la siguiente manera:

Ilustración 3 Freudenthal (1986, p. 517)

En este esquema se permite observar una idea de cómo una relación entre líneas pueden describir, explicar y predecir un fenómeno al generar correspondencia entre la situación en el contexto con las matemáticas desarrollada en esa cultura. Por otra parte, También se puede deducir de los babilonios sobre el dominio que tenían de las cuatro operaciones aritméticas elementales con dos variables. De este modo, demostraban resultados de multiplicaciones y divisiones de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas, tablas con fórmulas de cálculos como la suma de *n* términos de una progresión geométrica, y otros (Sastre et al., 2008). Aunque no es posible conocer si los babilonios conceptualizaban el término de “modelo” pero esto se encuentra implícito en las tablas, gráficos y símbolos. Con lo anterior, se puede inferir que, a través de estos modelos desarrollados por esa cultura resolvían los diferentes problemas de su entorno social y cultural. Algunos de estos modelos se pueden evidenciar a partir de las siguientes tablas construidas en barro:

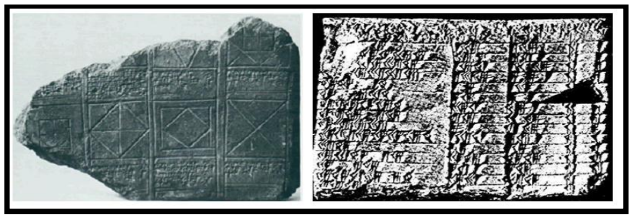


Ilustración 4 Sastre, Rey, & Boubée (2008)

Los griegos, a diferencia de los babilonios, el esquema que utilizaron para describir los movimientos de los cuerpos celestes estaban representados a través de dos circunferencias. Esto les permitía explicar y simular los comportamientos de los planetas posibilitándoles el desarrollo de las funciones trigonométricas, esto se puede evidenciar a partir de la siguiente ilustración:

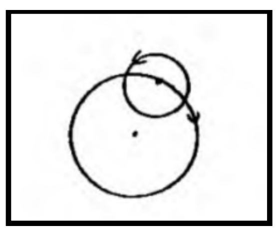


Ilustración 5 Freudenthal (1999, p. 517)

Con lo anterior se puede entender, como una de las rutas para el desarrollo de un concepto matemático, dicho de otra manera, el proceso de relacionar una situación en el contexto cotidiano y las matemáticas pueden generar ideas para el desarrollo de un nuevo concepto matemático. Luego después de un tiempo, los árabes al retomar algunas obras de los griegos dejaron un gran tesoro como fue el desarrollo de la aritmética y colocaron los pilares de la nueva rama de las matemáticas, el Álgebra. Este paso, permitió la creación de expresiones más complejas, posibilitando el estudio de los fenómenos naturales tales como la luz, calor, color, densidad, distancia y velocidad. Es decir, la construcción de modelos que permitieron comprender dichos fenómenos a través del uso de las variables independientes y dependientes.

Podemos decir que la humanidad en ese afán de comprender los fenómenos en su vida cotidiana fueron construyendo un sin número de relaciones entre símbolos y conceptualizaciones, generando nuevos conceptos matemáticos que hasta hoy son utilizados en muchos campos de estudio, incluyendo, la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles de la educación actual.

2.3.2 *La noción de función a partir de la relación entre magnitudes variables*

Algunos sucesos dieron paso al estudio de fenómenos más complejos como fue la extensión del concepto de número al de número real, los números complejos y la creación del álgebra simbólica. A continuación realizaremos una breve descripción en algunos momentos de la historia y sus actores el cual contribuyeron al desarrollo de la noción de función.

Descartes (1596 – 1650), descubrió que al establecer una ecuación algebraica constituiría la construcción de una curva (Sierpinska, 1992). Esto liberó la geometría del exceso de figuras dándole significado al álgebra por medio de la geometría. Es decir, usar expresiones algebraicas para resolver problemas de construcciones geométricas. En este estudio hecho por Descartes fue la primera vez que se usó la letras "*x*" y "*y*" para representar las magnitudes y demostrar su dependencia. En esta misma línea, Víeta (1540 – 1603), vislumbró al mundo al posibilitar usar el álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes sin tener en cuenta el campo científico de donde provenía el problema. Éste matemático francés propuso el uso de las letras para representar las variables (Sastre, Rey & Boubée, 2008). En lo anterior cuando se refiere a que no se tenía en cuenta el campo científico, esto nos orienta en la relaciones entre variables es posible incluirla en cualquier contexto de la vida cotidianas en la que se use expresiones algebraicas para resolver problemas en situaciones del contexto cotidiano.

El estudio del movimiento como tema central de la ciencia a través de relaciones entre variables, Galileo (1564 – 1642) expresó las leyes del movimiento introduciendo el lenguaje de proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional; y la unión del Álgebra y la Geometría. Fermat (1601 - 1665) le aplicó los análisis de Víeta a los problemas de lugares geométricos dando origen a los principios de la geometría analítica. Desde esta mirada, los científicos al profundizar en el estudio del movimiento se pueden ver reflejado el proceso de modelación de los fenómenos naturales. Con esto, proponen las relaciones entre variables que describían los movimientos implicados en los fenómenos abordados, identificando relaciones entre sus variables en el sentido directo o indirecto, permitiendo el surgimiento a la noción que hoy día se conoce como la proporcionalidad (Sastre, Rey & Boubée, 2008).

Con la geometría analítica, el cual fue fundamental para el desarrollo del cálculo Diferencial e Integral. Esto hace referencia a Newton y a Leibniz en la creación de modelos y herramientas matemáticas más poderosas para dar origen a nuevos paradigmas científicos. Los desarrollos de Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) fueron las curvas como lugar geométrico. Esto surge, en el intento de solucionar problemas referidos a longitudes, áreas y tangentes en relación con las curvas, como también encontraban la velocidad de puntos moviéndose a través de curvas.

Euler (1707 – 1783) continúo el camino para precisar la relación entre variables y otros conceptos como la noción de constante y la noción del concepto de función como una expresión analítica: *"la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes"* (Ruthing, 1984 como se cita en Sastre, Rey & Boubée, 2008). Entendiéndose por "expresión analítica" como aquella expresión que soporta operaciones tales como multiplicación, potencia, raíz y otros.

La manera como ha sido utilizada la relación entre variables y constantes amarrado a la noción del concepto de función, nos lleva a entender la evolución de las matemáticas a partir de las necesidades de resolver tanto los problemas de los fenómenos del mundo como los problemas internos de las matemáticas. Reconociendo la construcción de los modelos matemáticos a través del tiempo, del ingenio del hombre y su creatividad al utilizar ciertas relaciones entre variables para aproximarse a la solución de problemas y explicar ciertos fenómenos naturales, a través del tiempo.

2.3.3 *La noción de función: incluida en el proceso de modelación*

Al realizar una breve historia de los sucesos en los cuales se hicieron uso de relaciones entre variables dando origen a la noción del concepto de función. Nuestra intención fue resaltar lo relevante de comprender los fenómenos en los cuales permitieron la relación entre variables y sus diferentes representaciones. De cierto modo, la función se concibe como un tipo especial de dependencia entre variables que se distinguen como dependiente e independiente (Freudenthal, 1999). Noción que se ha incluido para apoyar en el proceso de modelación. En este sentido podemos decir: cuando algunas situaciones que están presentes en la vida de los estudiantes son consideradas para describir relaciones entre magnitudes variables, les posibilitaría a los estudiantes hacerlas explícita mediante modelos matemáticos. De tal manera, comprendiendo la doble visión de un modelo que, por un lado le permite describir la situación al estudiante, y por el otro, el uso de las matemáticas representadas a través de expresiones verbales, tablas, gráficos, expresiones algebraicas y otros.

La idea de este estudio no es forzar al estudiante hacer uso de modelos ya preconcebidos, sino, permitirle a través de un proceso de modelación en el aula de clase relacionar una situación de su contexto cotidiano y el uso de las matemáticas para generar un modelo matemático. Es decir en términos de Sierpinska (1992):

> En la enseñanza, las funciones deberían aparecer primero como modelos de relaciones. Así es como ingresan en la vida histórica. Ellas fueron herramientas para la descripción y predicción. Si se asume que el significado de un concepto descansa en los problemas y preguntas que le dan origen, y si deseamos que nuestros estudiantes alcancen el significado de la noción de función, entonces esta parece ser una exigencia razonable. (p. 10)

La exigencia consiste aquí en permitirle al estudiante la construcción de modelos relacionados a su contexto cotidiano para que experimenten la noción de función a partir de las relaciones de magnitudes variables, presentes en las situaciones en contexto abordadas por los estudiantes.

Por lo anterior, hemos visto pertinente a continuación comentar sobre algunos aspectos de la función lineal y los elementos usados por las matemáticas para realizar diferentes representaciones ligadas a este concepto.

2.3.4 *El plano cartesiano: sistemas de coordenadas*

Las gráficas de las funciones, el objetivo es crear un impacto visual para describir información que no puede ser evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas. Para representar geométricamente una función $y=f(x)$ como una gráfica, es común usar un sistema coordenado rectangular en el que se marcan las unidades para la variable independiente x en el eje horizontal, y las unidades de la variable dependiente y en el vertical. Por tanto, la gráfica de una función f consta de todos los puntos (x, y) donde x esta en el dominio de f y $y = f(x)$, esto es, todos los puntos de la forma $(x, f(x))$ (D. Hoffmann, 1989). Lo anterior podemos observar en el siguiente ejemplo:

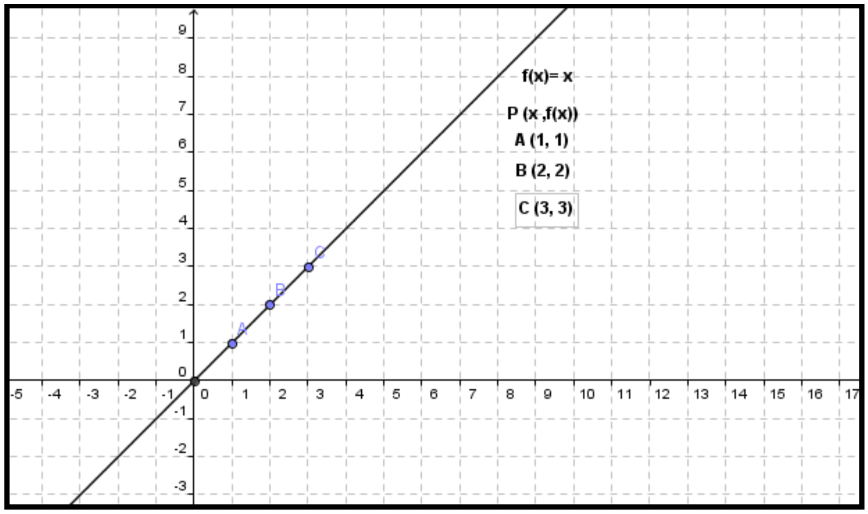


Ilustración 6 Sistema de coordenadas

Con lo anterior, hicimos una breve ilustración de lo que corresponde el sistema de coordenadas en el plano cartesiano para representar las funciones de manera geométrica. A continuación, seguiremos hablando de las maneras de representar la función lineal.

2.3.5 *La función lineal y sus representaciones*

La perspectiva de construir modelos matemáticos que describan fenómenos tanto en la vida cotidiana como en las matemáticas por parte del estudiante en el aula de clase, es posible considerarla como una manera didáctica el cual permite la construcción de expresiones algebraicas. Esto se puede observar en el ciclo de modelación (véase Ilustración 2 Ciclo de modelación Blum & Borromeo-Ferri (2009, p. 46)) donde se describe el momento de realizar la traducción de los elementos que conforman el *modelo real* hacia las matemáticas, bajo el subproceso de matematización con el propósito de dar origen al *modelo matemático*. Este modelo puede ser una expresión algebraica que le permite al estudiante describir, predecir, explicar una situación en el contexto. Por tanto, se le estaría posibilitando al estudiante familiarizarse con la manipulación de expresiones algebraicas a través de un proceso de modelación y así representar una función. En esta medida, de acuerdo con Posada & Otros autores (2006) cuando describen el sentido de variación en relación a un modelo matemático:

> […] aquella apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otra u otras, y a la noción de correlación como la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional, entonces el problema es encontrar, si es posible, una función que exprese la variación entre dichas variables. Esto es, en términos del proceso de modelación matemática, formular el modelo. (p. 129)

Podemos comprender que el esfuerzo está en poder hallar una función que de cuenta de la relación entre esas variables, tal relación, a nuestro modo de entender, la va identificando el estudiante durante el desarrollo del proceso de modelación. Por consiguientes, desde Posada & Otros autores (2006) comprendemos la existencia de apoyar al proceso de modelación en la construcción de un modelo matemático a través de registros de representación, tal como, el lenguaje natural (castellano), gráficas cartesianas (plano cartesiano), tablas de doble entrada y la representación simbólica (fórmula).

Con respecto a la representación simbólica en este estudio, asumiremos la función lineal asociada a un polinomio: $f(x) = mx + b\ con\ a, b\ \in\ \mathbb{R}$, las demás formas serán asumidas como transformaciones lineales. Es decir, cundo $f(x) = mx + b\ con\ b = 0$, su representación gráfica en el plano cartesiano será una recta que pasa por el origen (0,0). Como se puede observar en la siguiente ilustración:

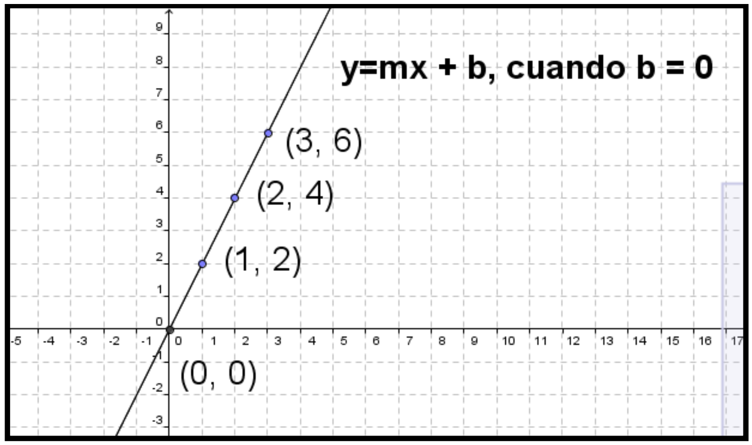


Ilustración 7 Gráfica de la forma f(x)=mx + b, con b=0

Por otra parte, cuando $f(x) = mx + b \; con \; m = 0 \; o \; x = 0$, su representación gráfica será una recta que pasa (0,n), a esto se le conoce en algunos libros de texto como función constante, en donde su representación gráfica en el plano cartesiano es una recta paralela al eje *x.* Es decir, en este tipo de función cuando *x* cambio no produce cambio en *y*. Como se puede ver en la siguiente ilustración:

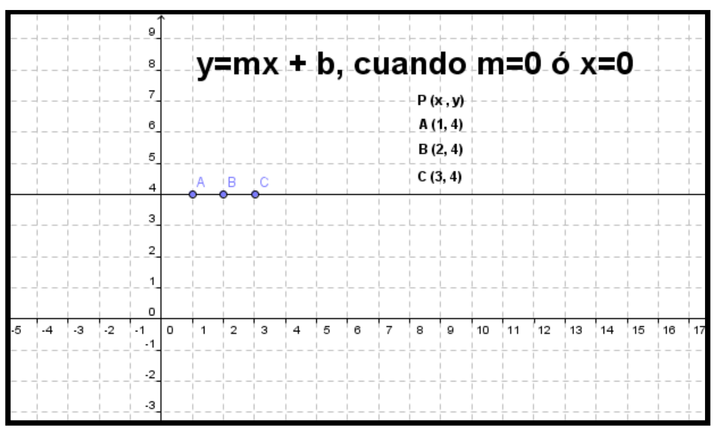


Ilustración 8 f(x)=mx+b con m=0 o x=0

Para el reconocimiento de la función lineal representada a través del registro simbólico o expresión simbólica, a sumiremos las consideraciones de Posada & otros autores (2006) cuando describen lo siguiente:

Para determinar una función lineal, a través de una representación en este registro, es necesario establecer si la primera razón es constante para toda Δx, esto es determinar que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = m$, con *m* un valor constante perteneciente al conjunto de los números reales. (p. 140)

Con lo anterior se estaría asumiendo la manera de realizar el análisis de razón de los cambios de una variable y los cambios que se generan sobre la otra, para poder determinar si el registro simbólico de la forma $f(x) = mx + b$ se puede representar como función lineal. Es decir, la función lineal como una relaciones de dos cantidades de magnitudes en el cual su razón de cambio es constante (Posada & otros autores, 2006).

La otra manera de analizar a *m* como la razón de cambio constante sería como la pendiente de una línea recta. En este sentido, la pendiente de una recta es la cantidad en que cambia la coordenada *y* de un punto de la recta cuando la coordenada *x* aumenta en 1. Es posible calcular la pendiente de una recta no vertical si se conocen dos de sus puntos. Supongamos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en una recta como se observa la siguiente ilustración:

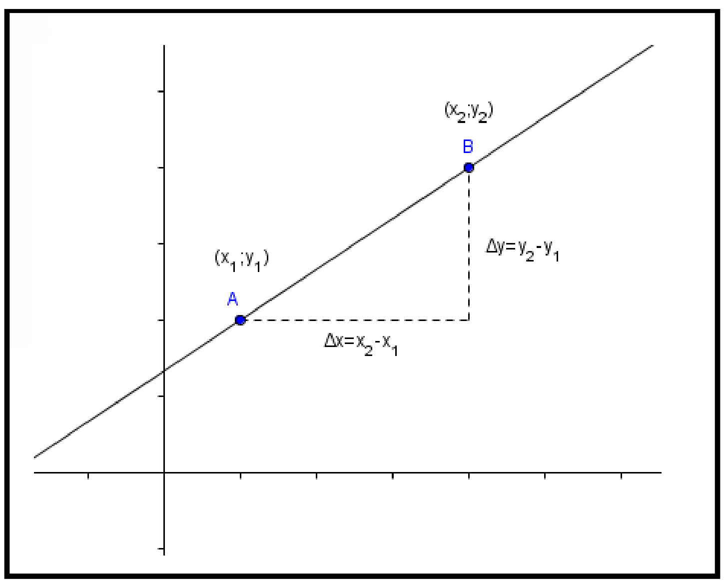


Ilustración 9 Pendiente de una recta

Entre esos puntos, *x* cambia en la cantidad $x_2 - x_1$ e *y* en la cantidad $y_2 - y_1$. La pendiente es el siguiente cociente:

$$Pendiente\ = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

El símbolo $\triangle y$ también se puede usar en lugar de $y_2 - y_1$ para representar el cambio en y. El símbolo $\triangle y$ se lee "delta de *y*". Algo similar sería, el símbolo $\triangle$x "delta de x" para representar $x_2 - x_1$. Entonces, la pendiente de una línea recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) vendría dada por la fórmula:

$$Pendiente = \frac{\Delta y}{\Delta\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

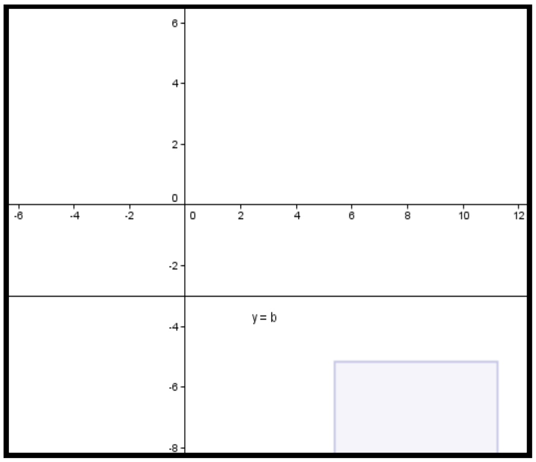
En lo anterior, se puede decir que esta sería la constante *m* para la función *f(x)=mx + b*, con b=0. Es decir, el modo de expresar la constante de la razón de cambio en la función lineal.

Con las anteriores consideraciones de la función lineal y sus diferentes maneras de representar este concepto, serán tenidas en cuenta a la hora de explicar las exteriorizaciones de los estudiantes en el proceso de modelación matemática.

Rectas horizontales y verticales

Las rectas horizontales (ver *Ilustración 10 Rectas horizontales y verticales*) tienen una ecuación simple. La coordenada *y* en todos los puntos de una recta horizontal es la misma. Por tanto, la recta horizontal es un gráfico en el plano cartesiano de una función lineal de la forma *y=b*, donde *b* es una constante. La pendiente (*m*) de esta recta es igual a cero, debido a que el cambia en *x* no produce cambio en *y*. Lo anterior, también se le conoce como la función constante o de grado cero.

En la recta vertical, las coordenadas x de todos los puntos son iguales. Por tanto, la recta vertical está caracterizada por la ecuación de la forma x=c, donde c es una constante. En este caso, la pendiente de una recta vertical no está definida como un tipo de función. Esto es debido a que sólo las coordenadas y de los puntos de una recta vertical pueden cambiar, y así el denominador del cociente $\frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$ es cero.



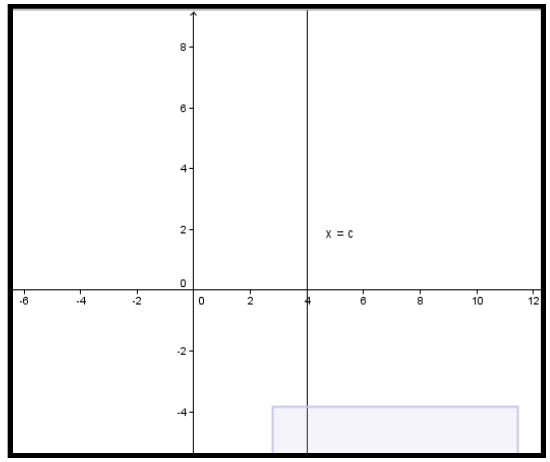


Ilustración 10 Rectas horizontales y verticales

A partir de lo anterior, podemos deducir que, la ecuación de la recta horizontal representa una línea recta paralela al eje x, y a la vez, es una función lineal de tipo constante, es decir, cuando cambia la variable independiente x no ocurre un cambio en la variable dependiente y. Y con respecto a la recta vertical, estaría representada en una ecuación de la forma $x = c$, en el cual no se asumiría como una función debido a que no cumple con la definición del concepto de función (ver el apartado anterior).

Intersección de gráficos

En ocasiones, es necesario determinar cuándo dos funciones son iguales. En este sentido, por ejemplo, cuando un economista quiere calcular el precio de mercado donde la demanda de consumo de un artículo será igual a su oferta. En este caso, sería cuando un fabricante busca determinar cuántas unidades debe vender antes de que los ingresos excedan al coste.

En términos geométricos, los valores de x para los que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son iguales, es decir, son las coordenadas x de los puntos en los que sus gráficas se cortan. A manera de ejemplo, ¿Dónde se cortan las rectas $y=2x+1$ e $y=-x+4$? Una manera de encontrar la intersección de las dos gráficas sería de la siguiente manera.

Se igualan y se resuelven las siguientes ecuaciones $2x + 1 = -x + 4$

Para obtener $x = 1$

Para hallar el valor correspondiente a y, se sustituye x = 1 en una de las ecuaciones originales $y=2x+1$ o $y=-x+4$. En este caso, obtendrá $y = 3$, en lo que se puede concluir que la coordenada en el plano cartesiano (1,3) es el punto de intersección de las dos funciones lineales. Como se puede observar en la siguiente ilustración:

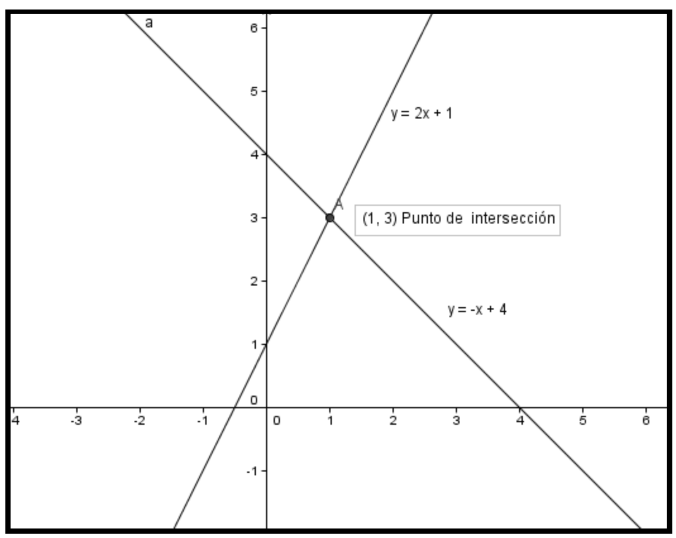


Ilustración 11 Punto de Intersección

Funciones relacionando fórmulas múltiples

A partir del siguiente ejemplo tomado de Hoffmann, D. (1989) explicaremos la manera de relacionar funciones múltiples.

Durante la sequía, los residentes de un pueblo, tuvieron que hacer frente a una escasez de agua. Para disuadir del uso excesivo de agua, la empresa de agua del pueblo inició un drástico aumento de tasa en el recibo de pago de los usuarios. La tasa de consumo mensual para una familia de cuatro miembros fue de 1,22 dólares para cada cien pies de metros cúbicos de agua de los 1.200 pies cúbicos, 10 dólares para cada 100 pies cúbicos de agua de los 1.200 pies cúbicos siguientes, y 50 dólares por cada 100 pies cúbicos de allí en adelante. Exprese la factura mensual de agua para una familia de cuatro miembros como una función de la cantidad de agua consumida.

Solución

Sea x el número de centenas de pies cúbicos de agua consumida por la familia durante el mes y $C(x)$ el correspondiente costo en dólares. Si $0 \leq x \leq 12$, el costo es simplemente el costo por centena multiplicada por el número de centenas consumidas:

$$C(x)=1,22\,x$$

Si $12 < x \leq 24$, cada una de las primeras 12 centenas cuestan 1,22 dólares, y así el costo total de esas 12 centenas es 1,22(12) = 14,64 dólares. Cada una de las restantes $x - 12$ centenas vale 10 dólares y, por tanto, el costo total de esas centenas es de $10(x - 12)$ dólares. El coste de las x centenas es la suma:

$$C(x) = 14{,}64 + 10(x - 12) = 10x - 105{,}36$$

Si $x > 24$, el costo de las primeras 12 centenas es 1,22(12) =14,64 dólares, el costo de las 12 siguientes es 10(12) = 120 dólares, y el de las siguientes $x - 24$ centenas es $50(x - 24)$ dólares. El costo de las x unidades es la suma:

$$C(x) = 14{,}64 + 120 + 50(x - 24) = 50x - 1.065{,}36$$

Al combinar, esas tres fórmulas se obtienen:

$$C(x) = \begin{cases} 1{,}22x & si\ 0 \leq x \leq 12 \\ 10x - 105{,}36 & si\ 12 < x \leq 24 \\ 50x - 1.065{,}36 & si\ x > 24 \end{cases}$$

La gráfica de lo anterior, se muestra en la Ilustración 12 Gráfica de relación de funciones múltiples. Se puede observar en la gráfica la relación de tres segmentos de recta, cada una más inclinada a la que la precede.

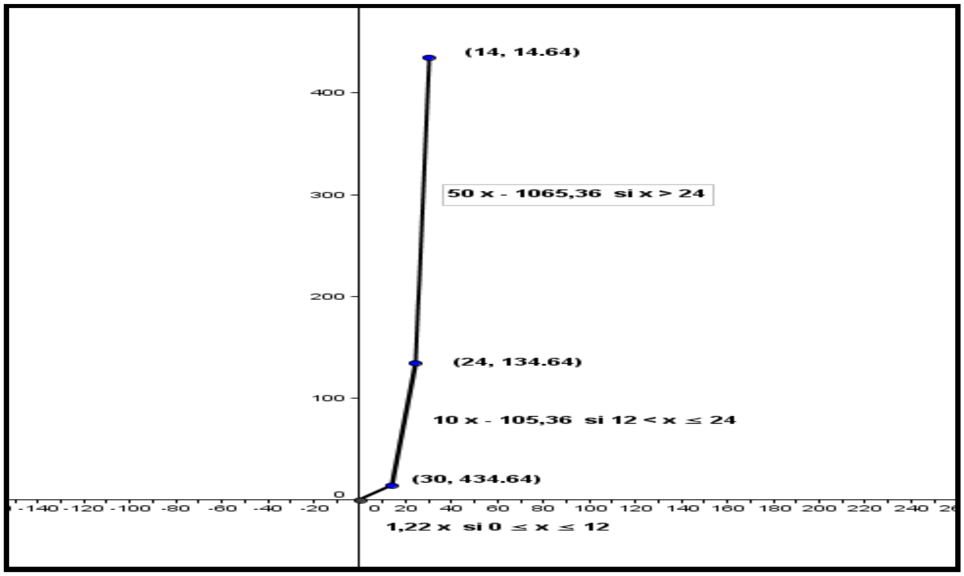


Ilustración 12 Gráfica de relación de funciones múltiples

El anterior ejemplo, aun que es un modelo matemático, debido que relaciona aspectos del contexto y las matemáticas (Blum, 2002). La idea de lo anterior, era conocer la parte procedimental de relacionar tres ecuaciones con sus respectivos intervalos en una sola función múltiple. Y a la vez, observar su representación gráfica de cada una de sus expresiones algebraicas relacionadas.

Concepto de función lineal en la modelación

En varias situaciones de la vida cotidiana o situaciones prácticas, el valor de una magnitud variable depende del valor de la otra. Por ejemplo, la demanda de la carne es posible que pueda depender de su precio actual, la contaminación en el aire en el área metropolitana puede depender del número de carros en las calles, el valor de una gaseosa puede depender de la cantidad de jóvenes que vivan un sector urbano. Tales relaciones pueden ser representadas matemáticamente como funciones. De cierto modo, la función se concibe como un tipo especial de dependencia entre variables que se distinguen como dependiente e independiente (Freudenthal, 1999). Y este tipo de relación especial puede ser representada a través de gráficas cartesianas, tablas y expresiones algebraicas. De esta manera, en el proceso de modelación la función lineal estaría representada en la expresión simbólica $f(x)=kx$ con k una constante perteneciente a los reales positivos. Aunque esta expresión es una manera de representar la proporcionalidad directa, en Posada & Otros autores (2006) describen que es una manera didáctica para iniciar a observar los cambios en los fenómenos de la vida cotidiana, describiéndolo de la siguiente manera:

> […] una forma de comenzar la materialización matemática de la variación desde los primeros años de escolaridad, es a través del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, a partir del razonamiento proporcional. De esta forma se trazan caminos dirigidos a la construcción del concepto de función lineal como una forma particular de correlacionar una variación. Esto permite iniciar con la elaboración de generalizaciones cada vez más finas y abstractas de las estructuras matemáticas invariantes que se encuentran en lo que varía y cambia. (Posada & Otros autores, 2006, p. 138)

A partir de lo anterior, es comprendido como una manera de acercamiento inicial en los estudiantes en la construcción del concepto de función lineal, al relacionar una situación en el contexto cotidiano, los aspectos que varían y los que cambian a través de la expresión simbólica $f(x)=kx$, con k constante. Pero en este sentido, tomaremos la expresión $f(x)=mx+b$, donde m y b son constantes, para analizar las diferentes transformaciones a partir del modelo lineal construido por el estudiante. A continuación, realizaremos una descripción entre la proporcionalidad directa y la función lineal.

La función lineal y la proporcionalidad directa

Dos variables directamente proporcionales son representadas en la siguiente tabla:

x	1	2	4	5	7	9
y	2	4	8	10	14	18

Ilustración 13 Representación de tabla con dos variables

Al realizar un análisis, desde Gomez (2011) se pueden observar varias propiedades que caracterizan la relación de proporcionalidad directa entre las variables dadas y por ende el tipo de función lineal el cual la describen, por ejemplo, si se duplican los valores de una de las variables, los valores de la otra también se doblan. De otro lado, si se suman dos valores de la variable independiente, el valor de la variable dependiente que corresponde a dicha suma, es la suma de los valores en el cual corresponden a los dos valores iniciales.

Lo anterior, se puede expresar de la siguiente manera: si *f* es una función lineal que describe una relación de proporcionalidad directa entre dos variables:

i) $f(kx) = kf(x)$, *k constante*

ii) $f(x_1, + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Además, es posible establecer otras características de la función lineal, como la potestad de determinar otros valores a partir de la tabla y hallar una expresión general, adicionalmente, establecer el cociente entre dos valores correspondientes al resultado es una constante, el correspondiente valor de la variable dependiente se obtendrá multiplicando por un determinado número k. Este número k, generalmente es llamado la constante de proporcionalidad. Si por el contrario, se conoce un valor de la variable dependiente, su correspondiente valor se halla dividiendo por k, en este caso sería lo mismo multiplicar por $\frac{1}{k}$. De manera general, si (x_1, y_1), (x_2, y_2),….., (x_n, y_n) son pares de valores correspondientes de una función lineal, entonces $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{y_n}{x_n} = k,$ luego $y_i=kx_i$

Por lo anterior, se dice que, la variable *y* es directamente proporcional a *x* si *y* solo si existe una constante k, si la razón de cambio de la variable dependiente con respecto al cambio de la variable independiente es constante, entonces la gráfica es una recta en el plano cartesiano.

Modelos lineales

En muchas ocasiones prácticas, cuando se usan las funciones para modelar matemáticamente, es posible describir directamente las variables más importantes en una situación en el contexto cotidiano. Con el siguiente ejemplo describiremos una situación el cual nos posibilita explicar la manera de comprender la construcción de un modelo lineal.

El costo total de un producto está formado por 50 dólares por unidad. Exprese el costo total como una función del número de unidades producidas y dibuje el gráfico.

Solución

Sea *x* el número de unidades producidas y *C(x)* el correspondiente costo total. Entonces:

Costo total = (consto por unidad) (número de unidades)

Donde,

Costo por unidad = 50

Número de unidades = *x*

Por tanto, *C(x) = 50x*, y el gráfico de esta función sería de la siguiente manera:

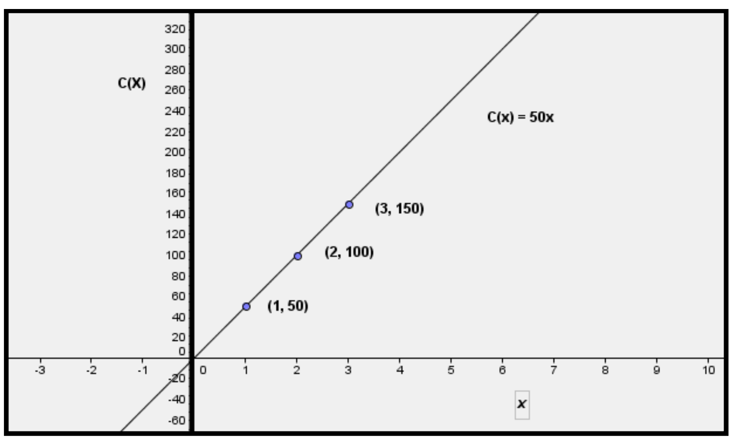


Ilustración 14 Modelo lineal C(x) = 50x

El consto total del ejemplo anterior aumenta a un ritmo constante de 50 dólares por unidad. Como resultado es una gráfica de una recta aumentando 50 unidades en altura por cada unidad de aumento en *x*. En general, una función cuyo valor cambia a ritmo constante con respecto a su variable independiente. En este caso, se dice que es una función lineal. Esto es porque el gráfico de tal función es una línea recta. En términos algebraicos, volviéndolo a recordar, una función lineal es una función de la forma $f(x)= mx + b$.

3 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el diseño metodológico que fundamenta la propuesta de investigación, el cual orienta cada uno de los métodos para la recolección de los datos en los diferentes momentos durante el desarrollo del estudio, el análisis de los datos, la redacción del informe final, y por último, las consideraciones de validación.

En el marco de la metodología propuesta, se asume un paradigma de carácter cualitativo, a continuación se realiza una descripción de los elementos que caracteriza este tipo de investigación.

3.1 Paradigma de investigación

Este estudio fue abordado bajo el enfoque cualitativo, en términos de Stake (1999): "*los investigadores cualitativos destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe*" (p. 42). Desde esta mirada, buscamos comprender la manera como los estudiantes desarrollan un proceso de modelación al generar modelos lineales a partir de una situación en el contexto del cultivo de plátano en la región de Urabá, Antioquia - Colombia. Tal que a partir de la subjetividad del estudiante nos permita describir las diferentes rutas en un proceso de modelación matemática, y así, observar las distintas relaciones entre las matemáticas y la vida cotidiana.

De igual manera, consideramos un grupo de estudiantes que cursan el grado décimo el cual trabajan y conocen las diversas actividades a realizar en el cultivo de plátano desde su infancia. El cultivar plátano, se ha considerado importante para las familias generar el sustento económico por más de cuatro décadas en el contexto social y cultural de la región de Urabá. Por tal razón afirmamos que, los estudiantes presentan las potencialidades frente a ésta actividad al apoyar a sus padres en las labores en la parcela[2] familiar.

Por consiguiente, al permitirles a los estudiantes relacionar la vida cotidiana con las matemáticas, esto depende de un sin número de construcciones propias desarrolladas a partir de sus experiencias y prácticas en la vida cotidiana. Por tanto, consideramos fundamental o integral en el transcurso de este estudio las imágenes y representaciones exteriorizadas de los participantes y las maneras de proceder al usar las matemáticas. Para lo anterior, vemos pertinente, tomar como evidencia las justificaciones, argumentaciones y trabajos escritos con el propósito de realizar su respectivo análisis a profundidad, y así, comprender un proceso de modelación matemática en el aula de clase en la perspectiva de generar modelos lineales por parte del estudiante.

3.2 Propósito de Investigación

Desde una perspectiva docente, una de las preocupaciones en el área de las matemáticas se ha considerado que: "*se ha dejado sólo al estudiante para que establezca una conexión de las representaciones gráficas hacia las expresiones algebraicas"* (Hitt, 2001). Al respecto, una de las tareas relevantes para los estudiantes consiste en reconocer desde una expresión algebraica el uso del concepto matemático. Por lo cual, la exigencia reside en observar las interacciones de los estudiantes desde una situación en el contexto, cuando generan una relación que le permita ir desde los significados de su vida cotidiana hacia las matemáticas y viceversa, y de algún modo, construir una solución adecuada que contrarreste un problema para favorecer a familia en la sociedad.

Este estudio tendrá como propósito de investigación, analizar un proceso de modelación matemática desde una situación del contexto de los estudiantes al generar

[2] "Parcela" es como culturalmente se le conoce el lugar donde se encuentran ubicados los cultivos de plátano, y a la vez, es el sitio donde se realiza el proceso de empacar los plátanos en cajas para ser exportadas a otros países, a este proceso se le conoce como embarque.

modelos lineales. De acuerdo con Streefland (1991) citado por el MEN (2006), uno de los intereses para el estudiante en la construcción de situaciones que se centra en "*cruzar la frontera a la matemática por sí mismos"* (p. 19). Entendiéndose como la posibilidad que el estudiante se enfrenta a situaciones de su entorno social, y este le ofrezca los medios para estructurar y resolver un problema, y al mismo tiempo, haga uso del conocimiento matemático. Puesto que, a partir de nuestra pregunta de investigación: *¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?* Nos orientará hacia la comprensión de las distintas circunstancias ofrecidas por el contexto social y, la manera como los participantes pueden proponer una solución al problema a través del uso de las matemáticas, desde una situación en el contexto cotidiano.

3.3 Tipo de estudio

Este trabajo de investigación fue enmarcado bajo el método de estudio de casos, en este sentido Stake (1999) lo describe como el estudio de la particularidad y de complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes. Esto se entiende, como un método que posibilita comprender a profundidad las interacciones de las personas en fenómeno de la vida cotidiana. Por tanto, se espera abarcar la complejidad de una situación en contexto de 3 estudiantes en relación al uso de las matemáticas, cuando se encuentren inmersos en el desarrollo de un proceso de modelación al generar modelos lineales.

Desde la mirada de estudio de casos de Stake (1999) se observan tres tipos de estudio: *estudio intrínseco*, *estudio instrumental* y *estudio colectivo de casos*. Referente al *estudio intrínseco de casos*, esto es entendido cuando el caso se encuentra dado, ejemplo: el comportamiento de un estudiante en el aula de clase, esto nos permite estudiar el caso de manera directa, es decir, sentir la curiosidad o la necesidad de estudiar ese caso en particular. Todo lo contrario sería *el estudio instrumental de casos*, en este sentido el caso no viene dado, sino, que se usa el método de estudio de casos como instrumento para comprender la vida de los participantes cuando se incorporan aspectos nuevos, es decir, se estudio otro caso. Ejemplo: estudiar el beneficio de un nuevo sistema de evaluación para estudiantes de educación básica primaria. En este ejemplo el caso no viene dado, es un factor externo que se incluye en la vida de los participantes para producir el caso y estudiarlo. En este mismo sentido, se puede tomar lo considerado por el *estudio instrumental de casos,* pero cuando se toman varios participantes (o también puede ser instituciones) y se estudian como casos individuales, esto sirve como instrumento para poder entender los fenómenos al incluir nuevos factores en la vida de los participantes. A esto último se le conoce como *estudio colectivo de casos,* pero debe existir una buena coordinación entre cada uno de los estudios individuales (Stake, 1999).

En este estudio hemos considerado el *estudio instrumental de casos*, debido a que éste es usado como método para permitirles a los estudiantes en el aula de clase la relación de una situación en el contexto cotidiano con las matemáticas, con el propósito de comprender la manera como desarrollan un proceso de modelación en la perspectiva de generar modelos lineales. En esta medida, el caso sería un proceso de modelación matemática con participantes de una institución rural del municipio de Turbo - Antioquia.

3.4 Diseño

En correspondencia al paradigma cualitativo, el diseño que orientó este estudio tuvo en cuenta el contexto, los participantes y algunas consideraciones de Stake (1999), como también, sobre la importancia de los métodos de recolección de datos: entrevista, las observaciones y la revisión de los documentos escritos. El análisis de los datos, en el sentido de la codificación y categorización, la hemos desarrollado mediante la interpretación directa orientada hacia temas emergentes. En esta misma línea, describiremos la manera como direccionamos la redacción del informe final mediante un esquema construido con base a las distintas relaciones conceptuales involucradas durante el desarrollo del proceso de modelación, y al final, definimos la manera como fue asumida la validez de este estudio mediante la mirada del proceso de triangulación de las fuentes de datos.

3.4.1 *Contexto*

El contexto de este estudio, está enmarcado desde una situación del cultivo de plátano en la región de Urabá, Antioquia – Colombia. En ese contexto, la Institución Educativa cuenta con estudiantes que conocen y apoyan a sus padres con algunas tareas en la parcela. Desde esta situación, los estudiantes asumieron el problema, y luego, fue llevado al aula de clase para ser abordado bajo un proceso de modelación matemática, con el propósito de construir los argumentos necesarios para solucionar el problema.

La Institución Educativa el Dos, lugar donde se realizó el trabajo de investigación, se encuentra ubicada a 10 km del casco urbano del municipio de Turbo – Antioquia. Cuenta con aproximadamente 1100 estudiantes, distribuidos en 11 sedes por todas las veredas del corregimiento el Dos. Esta Institución, es de carácter pública y referenciada como una Institución rural, el cual presta un servicio a las comunidades campesinas que habitan de manera extendida por este sector. En este contexto, se puede observar las actividades laborales tales como el cultivo de cacao, arroz, maíz, y en gran proporción, el cultivo de plátano de tipo exportación. Aunque también, se puede observar algunos lugares de actividad ganadera.

En el sector, no se observan empresas que brinden empleo de manera permanente a las personas, por tal motivo, trabajan por día que culturalmente se le conoce por jornal. Esto consiste en realizar actividades en las parcelas o en las fincas agrícolas o ganaderas. Algunos estudiantes deben apoyar el trabajo en las parcelas familiares para mejorar el ingreso económico o generar otras fuentes de ingresos desde los hogares. En el momento se observan aproximadamente 5 estudiantes que cuenta con un permiso especial para apoyar a sus padres los días lunes en la producción de plátano tipo exportación. Es decir, cosechan los plátanos y los empacan para ser enviado a la empresa comercializadora encargada de llevarlos a los mercados internacionales. Esta actividad se viene desarrollando por más de cuatro décadas en la región de Urabá, zona reconocida a nivel internacional por la producción de banano y plátano a gran escala.

Por otra parte, otra situación emergió durante el estudio, tal es el caso del consumo de energía prepago, situación abordada por una estudiante durante el proceso de investigación, la cual consideramos pertinente incluirlo en este estudio debido a los modelos lineales generados en correspondencia a esa situación en el contexto. Esto posibilitó comprender otra situación que rodea la vida de los estudiantes en relación al uso de las matemáticas, al observarse el desarrollo de un proceso de modelación matemática para generar modelos lineales desde la situación de la energía prepago.

El fenómeno de la energía prepago se ha generado debido a que, las familias de la región de Urabá se enfrentaron a la difícil situación de suspensión o corte del servicio de energía eléctrica por falta del pago respectivo. En consecuencia, la empresa de energía de la región[3] les instaló a estos hogares un medidor de energía prepago. Esto se trata de un esquema de medición que permite comprar por adelantado kilovatios hora de energía y consumirlos hasta agotar el crédito. Y de esta manera, fue que la prestadora de servicio eléctrico de la región soluciona el problema de endeudamiento de algunos hogares de la región. De tal manera que, en el anterior contexto fue donde Rita (psedunombre) bajo un proceso de modelación matemática se enfrentó a entender del porqué del excesivo consumo de energía eléctrica en el hogar.

3.4.2 *Participantes*

Los participantes que fueron tenidos en cuenta para este estudio fueron 3, conformados de la siguiente manera:

---

[3] *Empresas Públicas de Medellín (EPM).*

Dos estudiantes que cursan el grado décimo, con un promedio de edad entre 14 – 16 años. Además, los estudiantes comprenden y algunos apoyan el trabajo de las diferentes actividades en la parcela familiar. Con esta actividad agrícola cercana al entorno social y cultural del estudiante, les permitió en el aula de clase relacionar un fenómeno de la vida cotidiana con las matemáticas, propiciando de esta manera un proceso de modelación el cual nos permitió tomar la evidencia necesaria para su respectivo análisis. En este sentido, decidimos llamar a los estudiantes por los psedunombres Ezel y San con la idea de proteger sus verdaderos nombres, aunque, sus padres al haber firmado las autorizaciones de los permisos para efectos de esta investigación, de todas formas, consideramos proteger sus identidades.

En la otra situación en el contexto, el consumo de la energía prepago, abordada paralelamente con el contexto del cultivo de plátano por una estudiante, el cual consideramos llamarla con el psedunombre de Rita, además cursa el grado noveno y tiene 14 años de edad. Esta participante, fue elegida debido al interés demostrado por solucionar un problema correspondiente a al excesivo consumos de energía eléctrica de los electrodomésticos de su hogar, mediante modelos lineales generados en un proceso de modelación matemática. A continuación, describiremos los métodos de recolección de datos tenidos en cuenta para este estudio.

3.4.3 *Métodos de recolección de datos*

En este estudio, la recolección de información estuvo bajo las consideraciones de Stake (1999) cuando se refiere al hábito de la observación y la reflexión del investigador cualitativo, orientado por la experiencia de saber lo que conduce a una comprensión significativa de reconocer las buenas fuentes de datos. Con la idea anterior, a partir de nuestra experiencia hemos identificado los diferentes momentos el cual nos posibilitó comprender el caso durante el desarrollo del estudio, y a la vez, tuvimos en cuenta la veracidad y la solidez de nuestras interpretaciones. Por lo tanto, hemos decidido utilizar la observación directa, la entrevista y documentos escritos por los estudiantes como métodos de recolección de datos en los diferentes momentos del estudio.

La observación directa

Según Stake (1999) *"Las observaciones conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso*" (p. 61). Entendiéndose lo anterior, como una manera de observar las acciones, decisiones e interacciones de los participantes en los diferentes momentos durante el estudio. En este sentido, las observaciones fueron con el propósito de recolectar información de los argumentos de los participantes, al relacionar la vida cotidiana con las matemáticas en los diferentes escenarios de la Institución Educativa y fuera de ella.

Los documentos escritos

Los documentos escritos, fueron elaborados por los estudiantes de manera individual y grupal. Estos permitieron observar las imágenes mentales exteriorizada de los participantes en diferentes momento del ciclo de modelación (ver *Ilustración 2 Ciclo de modelación Blum & Borromeo-Ferri (2009, p. 46)*). En esta dirección, nos basamos en las consideraciones Stake (1999) cuando se refiere que estos documentos siguen el mismo esquema de razonamiento de las observaciones y las entrevistas. Es decir, cada método utilizado para la recogida de datos se enfocó hacia la comprensión del caso, que en este sentido, consistió en comprender la manera como los participantes iban desarrollando el proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto cercana a su entorno social y cultural.

Entrevistas

Las entrevistas, nos permitieron la compilación de las descripciones e interpretaciones de los conceptos utilizados por los participantes durante el desarrollo del proceso de modelación matemática, al generar los modelos lineales. Según Stake (1999) describe que, la entrevista produce un cauce de las realidades múltiples. Con esta perspectiva, nos proyectamos hacia la interpretación por medio de las preguntas realizadas a los participantes a partir de los modelos generados, y así emergieron las descripciones en la relación a la vida cotidiana y el uso de las matemáticas. Las entrevistas realizadas en este estudio fueron abiertas, con preguntas orientadas a reconocer el desarrollo del proceso de modelación matemática, evitando las respuestas simples de sí o no. Y así, fue que se logró conseguir las descripciones necesarias para los episodios, relaciones y explicaciones, el cual permitieron que los temas fueran emergiendo durante el desarrollo del estudio.

3.4.4 *Momentos del trabajo de campo: proceso de modelación matemática en el contexto del cultivo de plátano*

El trabajo de campo en el contexto del cultivo de plátano, estuvo sujeto a las condiciones del horario de clase de matemáticas de la Institución Educativa. El cual, fueron de 4 horas de 55 minutos semanales distribuidas en 2 secciones, y una salida de campo de 3 horas de 60 minutos. Además, las distintas actividades extracurriculares subyacentes al proceso de modelación matemática, tales como: consultas, refinación y diseños de los modelos lineales, diseños de carteleras para la exposición y otros. En este sentido, se les permitió a los estudiantes desarrollar un proceso de modelación matemática en el aula de clase, bajo la orientación estratégica del profesor en la mirada de Blum & Borromeo-Ferri (2009), que a la vez, fue uno de los integrantes del equipo de investigación encargado de aplicar los métodos de recolección de datos como: observar, entrevistar y recoger los documentos escritos por los estudiantes. Ya que estos, fueron tomados como fuentes de datos en este estudio para realizar el respectivo análisis, y así, ir comprendiendo el caso. Por tanto, los momentos del trabajo de campo fueron los siguientes:

Momento uno

En este momento, consistió en la discusión entre los estudiantes en el aula de clase de matemáticas de las diferentes inquietudes de la situación en el contexto del cultivo de plátano. Recordando, como la actividad productiva donde las familias generan el sustento económico y los estudiantes apoyan dicha labor. Por lo tanto, el propósito de este momento, consistió en la construcción de la pregunta que orientaría el proceso de modelación matemática en los estudiantes. El tiempo usado para dicha discusión fue de una sesión.

La actividad propuesta para abordar este momento consistió en una mesa redonda, el cual propició la participación de cada estudiante del grado décimo. Esta actividad fue dirigida por el profesor con el propósito de generar una discusión a partir de las necesidades de comprender ciertas situaciones del contexto del cultivo de plátano a través de preguntas. Ejemplo, ¿cuál es la mayor dificultad que tienen sus padres de comprender una situación en el cultivo de plátano? ¿Por qué creen ustedes que no la entienden? Y otras. Las distintas explicaciones e inquietudes de los estudiantes fueron grabadas y almacenadas para su posterior análisis.

Momento dos

Los estudiantes al generar la pregunta para el proceso de modelación matemática construida en el momento uno, procedieron a realzar consultas a sus padres y personas conocidas que también producen plátano tipo exportación. De tal manera les permitió ampliar el conocimiento relacionado con el problema, en el sentido a lo que se refiere Blum & Borromeo-Ferri (2009) como la construcción mental del problema. Esto se entiende como la manera de apropiarse los estudiantes del conocimiento de la situación en el contexto cotidiano donde surge el problema. Con lo anterior, los estudiantes construyeron el modelo de la situación que consiste en describir los significados y conexiones de la situación en el contexto. Lo anterior, fue orientado bajo las necesidades e intereses de los participantes. Podemos decir que, el tiempo considerado para el desarrollo de este momento fue de 6 horas de clase, distribuidas en 3 sesiones.

Para el desarrollo de este momento, se conformaron grupos de trabajo de 4 a 5 estudiantes en el aula de clase, y en cada grupo había como mínimo un estudiante con experiencia en la actividad de cultivar plátano en su contexto sociocultural. Ya que, a pesar que algunos estudiantes viven cerca a dicha actividad no conocían, de cierto modo, su proceso de producción. Por tal razón, se consideró que a lo sumo un estudiante con experiencia estuviera en cada grupo para orientar a los demás estudiantes a comprender esta situación. Este momento fue importante, al permitirles a los participantes generar documentos escritos, y la vez, fuimos grabando en cintas de audio las distintas descripciones el cual hacían de la situación en el contexto.

Momento tres

La duración de este momento fue de 2 sesiones y se continuó trabajando en el aula de clase con la lógica del momento dos. En este sentido, los estudiantes simplificaron y estructuraron los elementos que conformaba el modelo de la situación, y al mismo tiempo, incluyeron otros aspectos de la situación del contexto el cual no habían considerado. De este modo, los estudiantes construyeron a lo que se refiere Blum & Borromeo-Ferri (2009) como el modelo real.

Los documentos escritos por el estudiante durante el desarrollo de este momento fueron recogidos y escaneados para su respectivo análisis.

Momento cuatro

En este espacio, conformado por una sesión en el aula de clase, se realizó una actividad orientada al uso del plano cartesiano en relación a una situación en contexto de la vida cotidiana. Esto con el propósito que los estudiantes consideraran el uso de este sistema de representación para describir la situación en el contexto del cultivo de plátano y los orientara a reproducir los modelos lineales.

Momento cinco

Momento distribuido en cuatro sesiones, los estudiantes trabajaron en grupo en el aula de clase y generaron los modelos lineales, mediante el uso de los diferentes sistemas de representación como tablas, gráficas cartesianas y algunas expresiones algebraicas para representar los modelos. A partir de estas representaciones, se realizaron preguntas estratégicas para que los estudiantes reflexionaran de la pertinencia de los modelos generados, es decir, los modelos qué tan ajustados estaban a la situación en el contexto el cual les permitiera construir los argumentos necesarios para solucionar el problema.

Las fuentes de información en este momento fueron las entrevistas abiertas con preguntas como ¿para qué utilizan las letras "*x*" y "*y*" en la fórmula? Ya que en este sentido, los estudiantes a las expresiones algebraicas las nombraron fórmulas. ¿Qué les posibilita describir la línea recta con la situación del cultivo de plátano? Las respuestas de los estudiantes, fueron almacenadas en cintas de audio y se recogieron los documentos escritos que permitían observar los modelos lineales generados hasta el momento.

Momento seis

Se realizó una salida de campo, a una parcela cercana a la Institución Educativa el cual está a 5 km aproximadamente, con el fin de que los estudiantes validaran la información utilizada en la producción de los modelos lineales. Esta actividad se desarrolló a través de un diálogo establecido entre los estudiantes y un productor con más de 20 años de experiencia en la exportación de plátano en la región. Los estudiantes en este diálogo, realizaron preguntas el cual les permitió validar información de la situación en el contexto desarrollada desde el aula de clase. Este momento tuvo como duración una sesión de tres horas de 60 minutos cada una, y se utilizaron cintas de audio para almacenar tanto las preguntas de los estudiantes y las respuestas del productor como método de recolección de datos para realizarle el respectivo análisis.

Momento siete

Los modelos lineales, fueron ajustados a la situación del contexto por los estudiantes en el aula de clase con una duración de dos sesiones (cuatro horas clase); al reflexionar sobre algunos elementos considerados importantes por los estudiantes provenientes del diálogo realizado con el productor en el momento cinco. Es decir, los estudiantes validaron los datos y rediseñaron los modelos lineales, debido a que unos datos no se ajustaban a la realidad estudiada, y por tal razón, decidieron refinar los modelos.

Las fuentes de información generadas durante el desarrollo de este momento fueron los documentos escritos y la observación directa, permitiendo capturar el rediseño de los modelos a partir de la validación de información realizada en el momento seis.

Momento ocho

En este momento se les permitió a cada grupo de estudiantes exponer los distintos modelos lineales desarrollados para solucionar el problema, utilizando cada grupo dos carteleras con un tamaño de 50 x 100 cm cada una. En una plasmaron una tabla de doble entrada, y en la otra cartelera, un plano cartesiano con las líneas rectas en relación a los modelos lineales.

Las sesiones utilizadas para desarrollar las exposiciones de los modelos en el aula de clase fueron cuatro, es decir, ocho horas de clase de 55 minutos cada una. En esta medida, se almacenaron en cintas de audio las discusiones generadas en el aula de clase por los estudiantes como consecuencia de los modelos lineales y la solución del problema expuestos por cada grupo de estudiantes. Y además, se le tomaron fotografías a las carteleras para ser utilizadas como documentos escritos para su respectivo análisis.

Momento nueve

Dos sesiones de clase se dispusieron para desarrollar este momento, con el propósito de recoger experiencia y percepciones de los estudiantes acerca de las diferentes descripciones del proceso de modelación matemática en el aula de clase y los modelos lineales generados. Las fuentes de información que se consideraron para este momento fueron las entrevistas abiertas almacenadas en cintas de audio, con preguntas tales como ¿qué diferencia observaron en la clase de matemáticas al resolver problemas a partir del contexto del cultivo de plátano? ¿En algún momento se sintieron que no podían resolver el problema? ¿Qué se puede considerar como esencial a la hora de construir las fórmulas? Y otras. Al final de este momento, se recogieron los trabajos desarrollados en cada grupo de estudiantes con el propósito de escanearlos y almacenarlos para ser utilizados como fuentes de datos para realizar su posterior análisis.

3.4.5 *Momentos del trabajo de campo: proceso de modelación matemática en el contexto de la energía prepago*

Los momentos del trabajo de campo del proceso de modelación matemática en el contexto de la energía prepago, fueron sujetos a las mismas circunstancias de los momentos del trabajo de campo del proceso de modelación en el contexto del cultivo de plátano, es decir, cada sesión contaba con dos horas de 55 minutos cada una y distribuidas en dos sesiones en la semana. Igualmente, esto fue complementado con actividades extracurriculares que fueron consideradas por la estudiante durante el desarrollo del proceso.

Momento uno

El tiempo dispuesto para este momento fue de cuatro sesiones, distribuidas en una semana de clase. El propósito de esta actividad, consistió que los estudiantes expusieran las diferentes dificultades con relación a la economía familiar, en este sentido, una estudiante plantea el consumo de la energía prepago. Propuesta que inició en un análisis a la venta de cubetas de hielo expuesta por Rita, como la actividad que se desarrolla en la casa de una familiar para generar ingresos económicos. A partir de esta situación, la estudiante fue impulsada a buscar la manera de comprender el consumo de energía de los electrodomésticos para definir si las utilidades generadas por la venta de hielo eran suficientes para pagar la energía consumida en el hogar.

Las fuentes de información consideradas en este momento fueron las descripciones de la estudiante almacenadas en cintas de audio el cual explica el problema y documentos escritos generados en clase.

Momento dos

Después de haber construido la pregunta a partir de la situación del consumo de la energía de los electrodomésticos en el momento uno, Rita inició el subproceso que es visto desde Blum & Borromeo-Ferri (2009) como construcción del problema, a través de actividades extracurriculares que le permitió analizar el consumo de la energía mediante el sistema de medición prepago. Debido que, en la casa de la familiar de Rita le fue instalado este sistema de medición, y también, reflexionó sobre qué tanto beneficio estaba ofreciendo ese nuevo sistema de medición prepago para los hogares de la región.

Las fuentes de datos consideradas durante el desarrollo de este momento fueron las descripciones de la participante almacenadas en cintas de audio y documentos escritos.

Momento tres

El desarrollo de este momento, con una duración de tres sesiones, en que la estudiante realizó un espacio de experimentación en su hogar que le permitió tomar datos del consumo de energía de cada electrodoméstico, observando este consumo a través del dispositivo instalado por la empresa de energía de la región (EPM) llamado módem. En este sentido, Rita desconectaba todos los electrodomésticos y dejaba sólo el que iba analizar, y así, fue tomando los datos para poder comprender cuanto era el consumo de energía de cada electrodoméstico por cada hora que trascurría.

Los documentos escritos por Rita y las descripciones almacenadas en cintas de audio fueron considerados como métodos de recolección de datos para realizar un posterior análisis.

Momento cuatro

El trabajo realizado para este momento tuvo un espacio de dos sesiones, esto consistió después que, Rita al tener la información del consumo de cada electrodoméstico de su hogar, dispuso hacer uso de las letras para representar las variables para relacionar el tiempo y consumo de energía de los electrodomésticos. Con el propósito de generar los modelos lineales el cual le permitiera representar el consumo de cada electrodoméstico utilizado en la casa de su familiar. En esta mirada, Rita inició construyendo líneas rectas en el plano cartesiano en correspondencia al costo del consumo y el gasto en kilovatios hora de energía del congelador y la nevera de ese hogar. Y aprovechó este espacio para observar otros electrodomésticos como el televisor, ventilador, plancha y otros.

La información recolectada en este momento fueron documentos escritos y descripciones almacenadas en cintas de audio.

Momento cinco

Al representar el consumo de energía de cada electrodoméstico a través de líneas rectas en el plano cartesiano, le posibilitó a Rita generar los modelos lineales a través de expresiones algebraicas, con las nociones construidas en el momento cuatro al utilizar letras para representar las variables implicadas en la relación del tiempo y consumo de energía de los electrodomésticos. El tiempo dispuesto para este momento en el aula de clase fue de dos secciones.

Las descripciones de Rita realizadas en el aula de clase sobre la correspondencia de las líneas rectas sobre el plano cartesiano, los modelos lineales y la situación en contexto fueron almacenadas en cintas de audio, con los documentos escritos el cual fueron escaneados para realizarle su respectivo análisis.

Momento seis

Luego de haber construido Rita los modelos lineales en el momento anterior, emprendió la tarea de construir los elementos necesarios para realizar la exposición en el aula de clase. En este proceso también se utilizaron carteles de 50 x 100 cm para plasmar el plano cartesiano con las líneas rectas que fueron utilizadas para describir el consumo de la energía prepago y las expresiones algebraicas que representaban los modelos lineales. El tiempo utilizado en el aula de clase para el desarrollo de este momento fue de dos secciones.

El modo de recolectar los datos, consistió en tomar fotografías a los carteles para que hicieran parte de los documentos escritos, y se le solicitó a Rita que describiera la información escrita en los carteles para almacenar la información en cintas de audio, permitiendo realizar un análisis en relación a los carteles.

Momento siete

Antes que Rita realizara la exposición en el aula de clase, una sesión se dispuso para desarrollar este momento, con el propósito de recoger experiencia y percepciones, acerca de las diferentes descripciones del proceso de modelación matemática. Los métodos de recolección de datos que se consideraron para este momento fueron las entrevistas abiertas almacenadas en cintas de audio, con preguntas tales como ¿qué diferencia observó al resolver problemas en la clase de matemáticas a partir del contexto de la energía prepago? ¿En algún momento te distes cuenta que no podías resolver el problema? ¿Qué se puede considerar como esencial a la hora de construir las fórmulas? Y otras. Al final de este momento, se escanearon los documentos escritos y se almacenaron para ser utilizados como método de recolección de datos para realizar su posterior análisis.

Momento ocho

En este momento se le permitió a Rita exponer los distintos modelos lineales desarrollados para solucionar el problema en la situación del consumo de la energía prepago, utilizando los carteles de 50 x 100 cm diseñados en el momento seis. El cual realizó la siguiente distribución para la exposición: En un cartel construyó una tabla de doble entrada, y en el otro cartel un plano cartesiano para construir las líneas rectas en relación a los modelos lineales.

Para exponer los modelos en el aula de clase fue necesaria una sección, es decir, una hora de clase de 55 minutos. Durante este tiempo, se almacenaron en cintas de audio las discusiones generadas en el aula de clase por la estudiante como consecuencia de los modelos lineales y la solución del problema expuesto por Rita.

3.4.6 *Análisis de la información*

En nuestro estudio, tomaremos las consideraciones de Stake (1999) para el análisis de la información, en la perspectiva de la interpretación directa de los ejemplos individuales y la suma de esos ejemplos convertidos en categorías hasta que se puedan decir algo sobre ellos como un conjunto. Dicho de otra manera, separamos los datos y categorizamos y los interpretamos para luego compilarlos y construir un esquema interpretativo (o modelo), que nos permita comprender en los estudiantes de una institución rural un proceso de modelación matemática desde una situación del contexto al generar modelos lineales.

Hemos tenido en cuenta, que tratamos de comprender el caso analizando episodios o documentos escritos pensando en la correspondencia entre las acciones de los participantes, los temas y los contextos, a lo que concierne al desarrollo de un proceso de modelación en una situación en contexto. En el sentido de Stake (1999) en el cual describe que, normalmente los significados importantes emergerán de las situaciones con mayor frecuencia. Por esta razón, es importante considerar la suma de categorías y la interpretación directa dependientes a la búsqueda de un esquema que nos permita comprender el caso.

A la medida que se fue recopilando los datos mediante entrevistas, observaciones y documentos escritos para luego asumir la responsabilidad de interpretar lo que se observa, escucha o lee, y, debido al volumen de información que se fue generando durante el estudio, consideramos necesario el apoyar el análisis cualitativo mediante el software Atlas.ti para aprovechar la propiedad de almacenamiento y administración de los datos de manera eficiente. Estos datos fueron categorizados y relacionados a través de la propiedad del software llamada construcción de redes, posibilitando que emergieran los significados de las situaciones de mayor frecuencia mediante la construcción de los esquemas interpretativos a través del procedimiento llamado triangulación de las fuentes de datos, el cual según Stake (1999) podemos observar si el fenómeno sigue siendo el mismo en otros momentos, en otros espacios o cuando los participantes interactúan de manera diferente. En este sentido, las entrevistas, las observaciones y los documentos escritos por los estudiantes fueron utilizados como métodos de recolección de datos en los diferentes momentos durante el proceso de modelación, con el propósito que las observaciones tuvieran el mismo significado cuando lo encontramos en otras circunstancias.

3.4.7 *La redacción del informe final*

El informe final de este estudio, es presentado no sólo haciendo una descripción significativa de las acciones de los actores de este estudio, sino que, también se tuvo en cuenta algunos elementos del proceso de investigación como la recolección de los datos, la codificación, las clasificaciones e interpretaciones de la información a la luz de la literatura, las consideraciones de los referentes teóricos. Con el fin, de responder a la pregunta *¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?* De tal manera que, elaboramos un esquema para relacionar los distintos conceptos involucrados desde las consideraciones teóricas, orientando una línea de redacción para el informe final. El esquema, se puede observar en la siguiente ilustración:

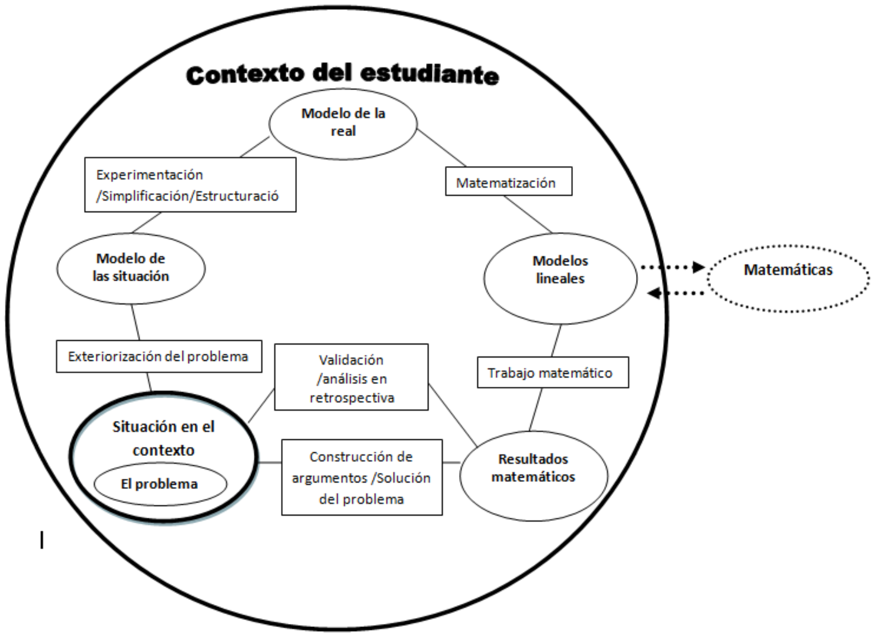


Ilustración 15 Esquema de relación conceptual

3.4.8 *Validación del estudio*

Con respecto a la validación según Stake (1999): "*Todos los investigadores reconocen que es necesario no sólo ser exacto en la medición de las cosas, sino también lógico en la interpretación del significado de esas mediciones." (p. 94).* Con relación a lo anterior, cuando en algunas investigaciones son orientadas a usar mediciones exactas como en el enfoque cuantitativo, creemos que esto no significa mayor validez a las que no usan ese tipo de métodos para recolectar y analizar los datos, como el caso del enfoque cualitativo.

Al considerar el enfoque cualitativo para desarrollar nuestro estudio, somos consientes que nos hemos ocupado de observar muchos fenómenos complejos para realizar la interpretación orientados a los temas, tratando de alcanzar consenso sobre lo que existe realmente. En este sentido, como lo hemos dicho en el apartado anterior sobre el análisis de la información, hemos desarrollado el procedimiento de la triangulación de las fuentes de datos (Stake, 1999), con el propósito de reducir al mínimo las falsas representaciones e interpretaciones, permitiendo mayor validez a partir de los datos observados de las entrevistas, de las observaciones directas y los documentos escritos.

4 UN PROCESO DE MODELACIÓN EN UNA SITUACIÓN DEL CONTEXTO CON ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO DE UNA INSTITUCIÓN RURAL DE LA REGIÓN DE URABÁ

Desde el siglo V A.C, los babilonios al observar los movimientos de los cuerpos celestes y sus traslaciones en el espacio, representaron las variaciones mediante líneas de zigzag, de la siguiente manera:

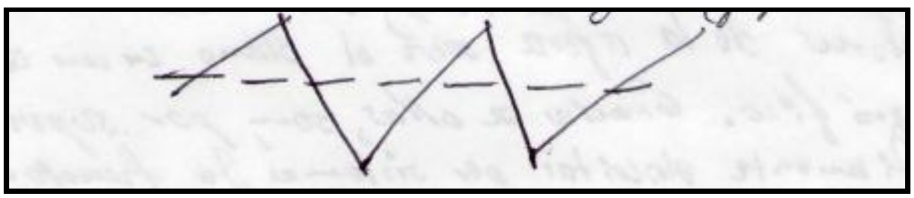


Ilustración 16 Freudenthal (1986, p. 517)

Una serie de preguntas nos embargan frente a la anterior representación de los babilonios y una de ellas sería ¿De qué manera los babilonios desarrollaron el proceso para generar ese sistema de líneas de zigzag con el fin de modelar los movimientos de los cuerpos celestes? En esta cuestión, los únicos insumos para responder a la pregunta estarían conformados por los elementos históricos de la cultura babilónica y las interpretaciones de los investigadores que se han dedicado a la compresión de las matemáticas desarrolladas por esta cultura. En esta medida, se podrían responder preguntas como ¿cuáles fueron las causas que motivaron para desarrollar el proceso? ¿Por qué eligieron líneas de zigzag y no circunferencias como lo realizaron los griegos? ¿Cómo funcionaba ese sistema de líneas de zigzag? ¿Cuáles fueron los resultados matemáticos y sus interpretaciones?

Aunque nuestro propósito no es responder las preguntas anteriores que rodean los procesos de relacionar la vida cotidiana con las matemáticas por los babilonios, sino, que fueron tomadas analógicamente como ejemplo para describir el proceso de modelación matemática desarrollado por los estudiantes del grado décimo, al generar los modelos lineales desde una situación en el contexto, tanto del cultivo de plátano como del contexto de la energía prepago el cual fueron considerados para desarrollar nuestro trabajo de investigación.

Este estudio, al permitirles a los estudiantes construir modelos lineales en un espacio brindado en el aula de clase, les posibilitó identificar la solución del problema de varias maneras. De este modo, se observó un proceso de modelación matemática relacionado con situaciones cercanas a la vida cotidiana del estudiante. Por lo tanto, en este capítulo describiremos la manera cómo surge el problema desde una situación en el contexto, al igual que, la construcción de relaciones y significados, la manera de generar la correspondencia o conexiones entre una situación en el contexto y las matemáticas escolares, es decir, la aproximación que realizaron los estudiantes hacia la función lineal mediante la construcción de los modelos lineales.

4.1 Las dificultades económicas familiares abordadas en un proceso de modelación matemática

Iniciamos presentando a los estudiantes quienes llamaremos por los psedunombres Rita, Ezel y San, jóvenes entre los 15 y 16 años de edad. En este caso, Rita cursa el grado noveno y los demás estudiantes cursan el grado décimo en una institución educativa rural de la región de Urabá. A continuación, inicialmente describiremos la situación en contexto de Ezel y San y luego la de Rita, con el propósito de diferenciar los dos escenarios donde se originó un proceso de modelación matemática en el aula de clase.

Ezel y San, han apoyado a sus padres en las labores en la parcela familiar desde su infancia. El problema planteado por ellos como punto de partida para iniciar el proceso de modelación, consistió en buscar la manera de deducir las ganancias en la producción del cultivo de plátano. En esta medida, el “problema” es entendido desde Blum (2002) cuando se refiere a usar este término en un sentido amplio, abordando no sólo problemas prácticos sino también de carácter objetivo al describir, explorar, comprender o diseñar las partes del mundo. Referente a lo anterior, se evidencia el problema a partir de las descripciones de los estudiantes, de la siguiente manera:

Ezel: "*A la ganancia mis padres si le prestan atención, ellos hacen una simple suma pero no llegan a fondo, simplemente esa semana fueron tantos, tanto, pero ellos entonces al final terminan quejándose! Porque obviamente dicen que no ven ganancia, no hay utilidad, no alcanza para satisfacer dichas necesidades que son primarias, entonces al final terminan diciendo que esto no deja nada".*

San: *"En mi casa a los gastos no se le colocan casi atención, es decir, eso no se mira en detalle, le presta más atención al embarque".*

Ilustración 17 Descripción del problema. Ezel y San

Se evidencia la limitación de poder comprender las utilidades generadas por la producción de plátano. Ya que los métodos utilizado por los padres de Ezel para deducir las utilidades no muestra un beneficio favorable a la economía familiar. Y por parte, en la familia de San, es el desinterés por controlar o tener un registro adecuado para los gastos, en este caso, existe mayor interés por los ingresos al decir que en su familia "*le presta más atención al embarque"*. Por tanto, Ezel y San con la ayuda de sus compañeros deciden buscar una solución al problema, al plantear la pregunta para iniciar el proceso de modelación matemática en el aula de clase, y a la vez, describen la importancia de este proceso, evidenciándose en las siguientes descripciones de Ezel:

Ezel: *"Bien, yo opino que es importante porque por medio de este proceso podemos encontrar la base de los problemas que estén afectando, y si encontramos la respuesta para solucionar aquellos problemas. Porque si supongamos, las inversiones superan la ganancia, obviamente hay una manera de cómo solucionar eso. Pues yo digo que la importancia de eso es sacar las raíces y de allí emprender para una solución. Diríamos entonces qué* ***¿cómo encontrar la ganancia en la producción de plátano?"***

Ilustración 18 Descripción de la importancia y la pregunta para iniciar el proceso de modelación. San

En la situación del contexto del cultivo de plátano, el problema al ser planteado desde un punto de vista objetivo, busca reconocer otra manera de deducir las utilidades en cada una de las parcelas, y a la vez, corresponda de cierto modo, a lo que en realidad se está generando como utilidad o ganancia para el sostenimiento de los gastos en el hogar. Esta problemática familiar es asumida por el estudiante y llevada al aula de clase con el propósito de desarrollar los distintos momentos y subprocesos que hacen parte de un proceso de modelación matemática. De manera paralela, el contexto de la energía prepago abordado por Rita inició su desarrollo similar a la situación del contexto del cultivo de plátano, el cual lo describiremos a partir de la siguiente ilustración.

Rita: *"bueno, creo que lo principal surgió de una pregunta que me hizo mi tía, lo que pasa es que mi tía vende hielos pero ella se dio cuenta que el hielo no le daba para pagar la energía. Ya que, en la casa trabajan con módem [donde se ingresa código de la recarga]. Entonces me preguntó ¿por qué la recarga se consumía tan rápido? y los hielos no estaban dando para pagar la recarga. Ya que, hay recargas de $1000 pesos, $2000 pesos, y $3000 pesos, en adelante".*

Ilustración 19 Descripción del problema. Rita

La situación abordada por Rita en este proceso de modelación parte en la necesidad familiar de comprender el consumo de la energía prepago. Puesto que, para esta familia se considera como un servicio necesario para satisfacer no sólo las necesidades del hogar, sino también, para generar ingresos económicos adicionales y poder sustentar los gastos del hogar. Estos ingresos adicionales son generados a través de la venta de cubetas de hielo, producto que se utiliza en la región para los refrescos y contrarrestar las altas temperaturas del clima tropical. Es decir, la idea en la mirada de la familiar de Rita consistía que los ingresos de la venta de las cubetas de hielo asumiera el gasto del consumo de la energía.

Se puede observar la situación en el contexto de la energía prepago en similitud con el contexto del cultivo de plátano al relacionarse los asuntos de la economía familiar. Por el lado de Rita, al ser ella la encargada de gestionar el pago del PIN para generar la recarga de energía e ingresar el código a través del tablero digital módem, actividad que la involucra a discutir el desacuerdo sobre el excesivo consumo de energía y plantear la pregunta de *¿por qué la recarga se consumía tan rápido?* Por parte de Ezel y San, no estaban de acuerdo con los resultados de la ganancia mediante los métodos utilizados por sus padres, cuando confrontaban con lo que realmente se estaba observando económicamente en la parcela. Desde estas dos situaciones en el contexto los estudiantes fueron impulsados a desarrollar un proceso de modelación en el aula de clase, y a la vez, esto les permitió a los estudiantes plantear el problema desde las discusiones generadas al interior de los hogares y llevado al aula de clase.

El "problema" para un proceso de modelación no necesariamente debe ser planteados por el profesor, se evidencia que el problema emerge a partir de las dificultades familiares con respecto a la economía, y son los estudiantes que al apropiarse del problema lo plantean en el aula de clase de matemáticas para iniciar el desarrollo de las distintas actividades que conforma un proceso de modelación.

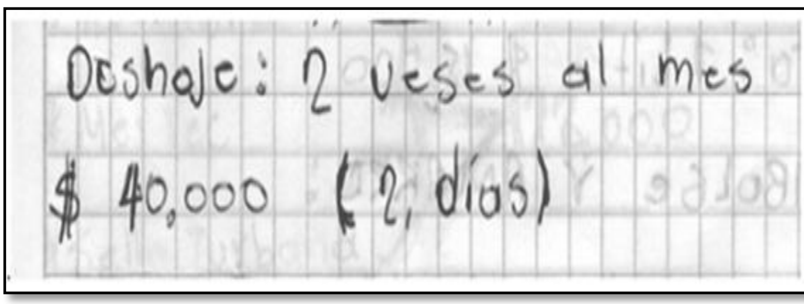
Desde la situación en el contexto del cultivo de plátano, Ezel y San, después de haber planteado en el aula de clase la pregunta para iniciar el proceso de modelación, procedieron a buscar información relacionada con la situación el cual permitiera la solución al problema. Esta actividad se observó en tres momentos.

Primer momento: para los estudiantes es importante iniciar describiendo los gastos y costos de las labores en las actividades que se realizan en las tareas de campo de la plantación. Esto se evidencia en las siguientes ilustraciones:

Profesor: *"¿Qué se necesita para responder a esa pregunta?"*
Ezel: *"los datos de lo que se le invierte para poder sumar y poder encontrar los gastos, yo diría que, el producto del plátano, el que tiene platanera no es el más rico que digamos pero sí tiene una estabilidad como para mantenerse, en el sentido que la producción no es*

estable a como sube puede bajar. Ellos tienen su semana que la producción es muy baja y a veces le devuelven las cajas por la mala producción que tienen, porque el peso no corresponde a lo indicado o los plátanos están mal empacados, es decir, eso va en la calidad del empacado. La inversión sería el abono, son tantas cosas que nosotros deberíamos saber que se hace y que no se hace en la plantación para saber si perdimos o ganamos, es decir, las ganancias deben quedar fuera de todo eso [gastos], es sacarle todo lo que se le meta al cultivo y al embarque. Ejemplo: le invertimos $100.000 pesos a la platanera y supongamos que nos ganamos $200.000 pesos, sacamos los $100.000 pesos lo que se le invirtió a la platanera y nos quedan $100.000."

Ilustración 20 Descripciones de la construcción del problema. Ezel



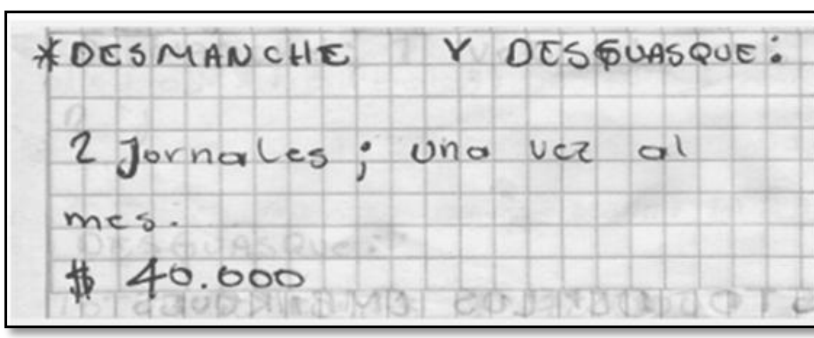
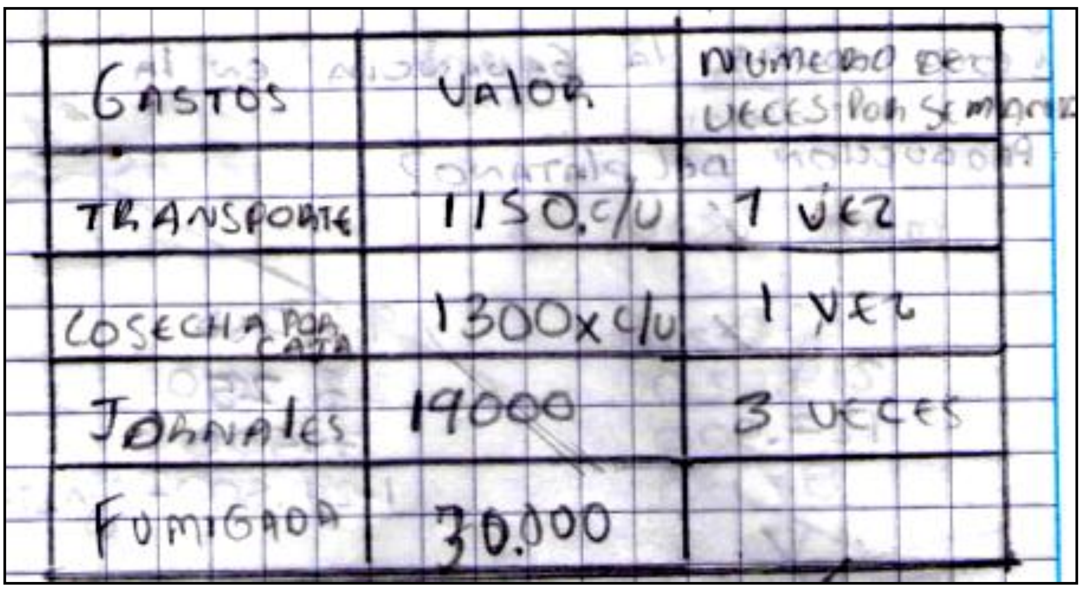


Ilustración 21 Gastos en tareas de campo. Ezel

__San__: "Tomamos la idea de una hectárea [de cultivo de plátano] con base a 15 cajas promedio por semana, con esto podemos trabajar hasta por un mes. Los gastos en el cultivo serían el abono, la fumigada, el trabajador, el desflore, el embolse y deshoje en la semana se pagan tres jornales y cada jornal vale $19.000 pesos, la organizada de los canales, todo lo que se trata en la platanera, esto lleva más tiempo y así los datos son más. Porque si nos vamos aponer al trabajador si hay que pagarle, lo que es el día de la encintada, la amarrada, y todo eso. Entonces una platanera así solo nos daría la ganancia del día del embarque, y ya nos está dando la ganancia de lo que se le está haciendo a la platanera.

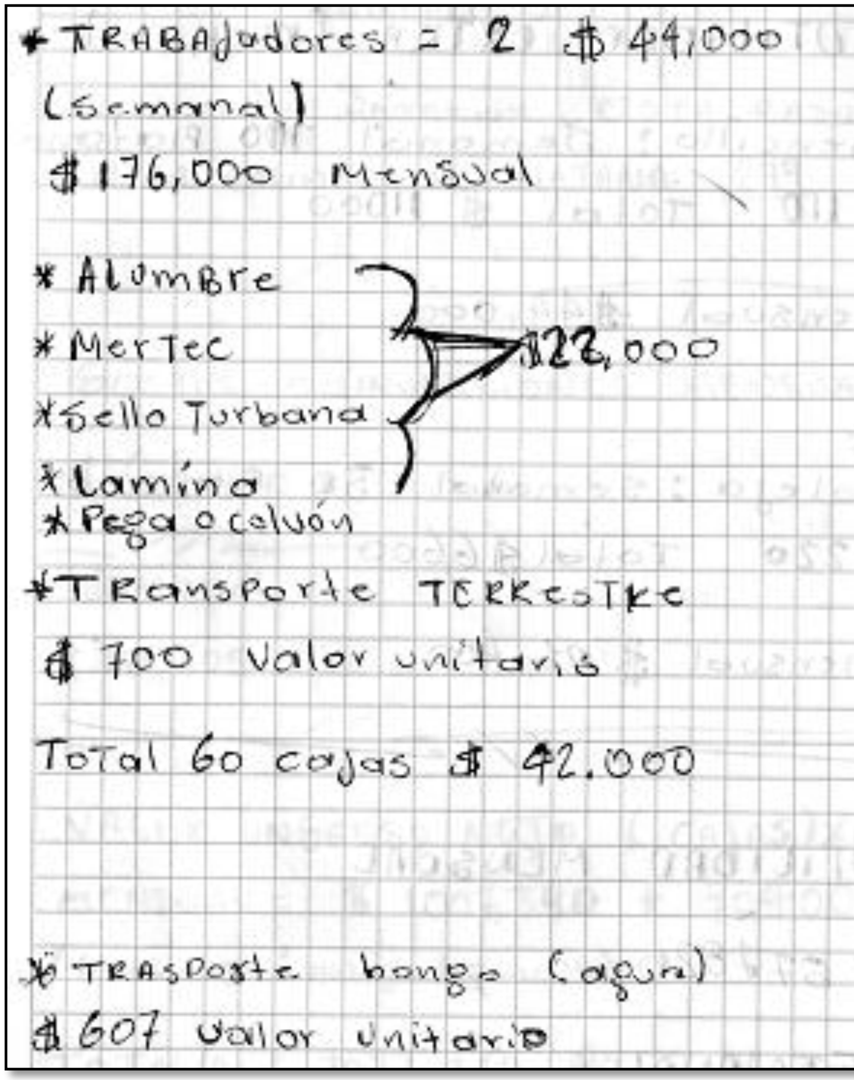
Ilustración 22 Descripciones de la construcción del problema. San



GASTOS	VALOR	NUMERO DE VECES POR SEMANA
TRANSPORTE	1150 c/u	1 VEZ
COSECHA POR CAJA	1300 x c/u	1 VEZ
JORNALES	19000	3 VECES
FUMIGADA	30.000	

Ilustración 23 Gastos en tareas de campo. San

Segundo momento: Luego de haber culminado con el primer momento que, consistía en buscar los respectivos costos de las actividades que se realizan directamente a al cultivo de plátano, los estudiantes se enfocaron en la descripción de los gastos que se generan en el embarque, es decir, la actividad de seleccionar y empacar los plátanos en sus respectivas cajas, para luego enviarlas a la comercializadora que se encargaría de exportar las cajas al mercado internacional. Esto se puede evidenciar en los siguientes documentos escritos de los estudiantes:


* TRABAjadores = 2 $ 44,000
(semanal)
$ 176,000 Mensual

* Alumbre
* MerTec
* Sello Turbana
* Lamina
* Pega o celvón

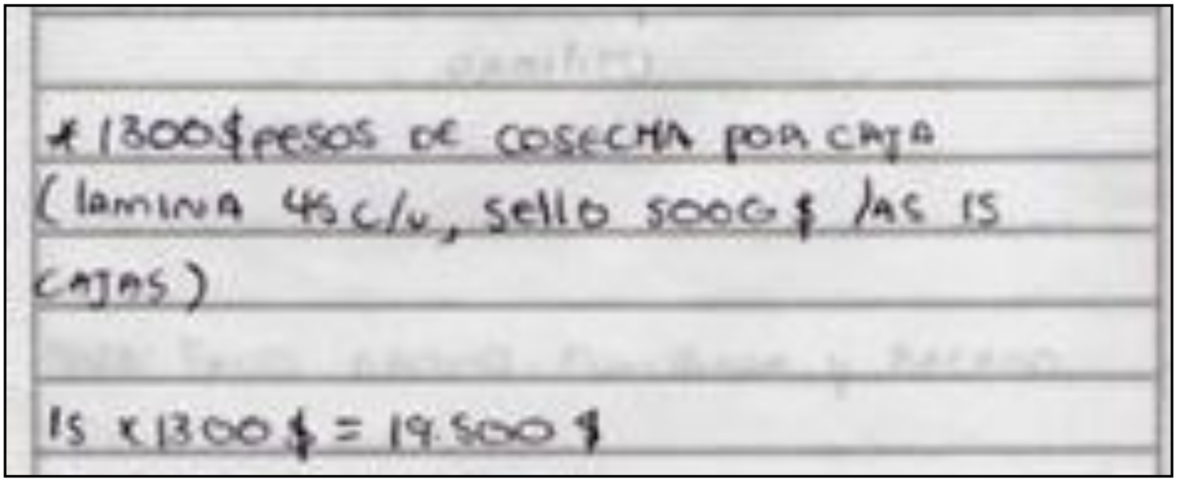
$22,000

* TRansporte TERRESTRE
$ 700 Valor unitario

Total 60 cajas $ 42.000

* TRASPorte bongo (agua)
$ 607 valor unitario

Ilustración 24 Gastos del proceso de embarque. Ezel



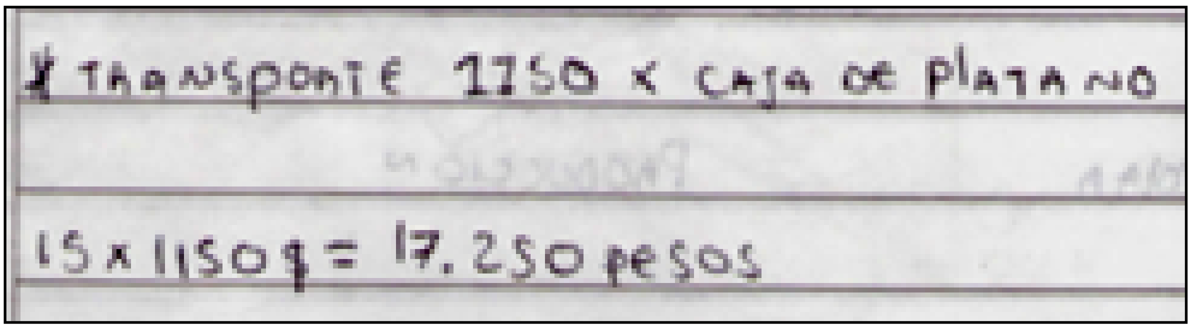
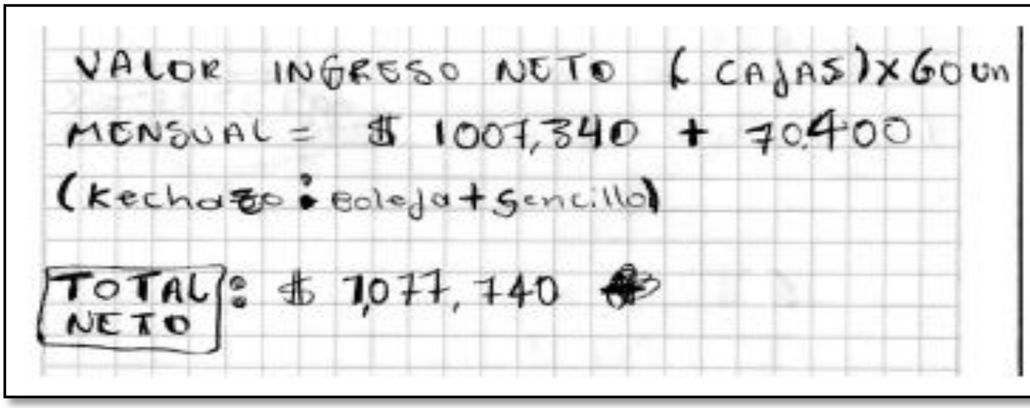


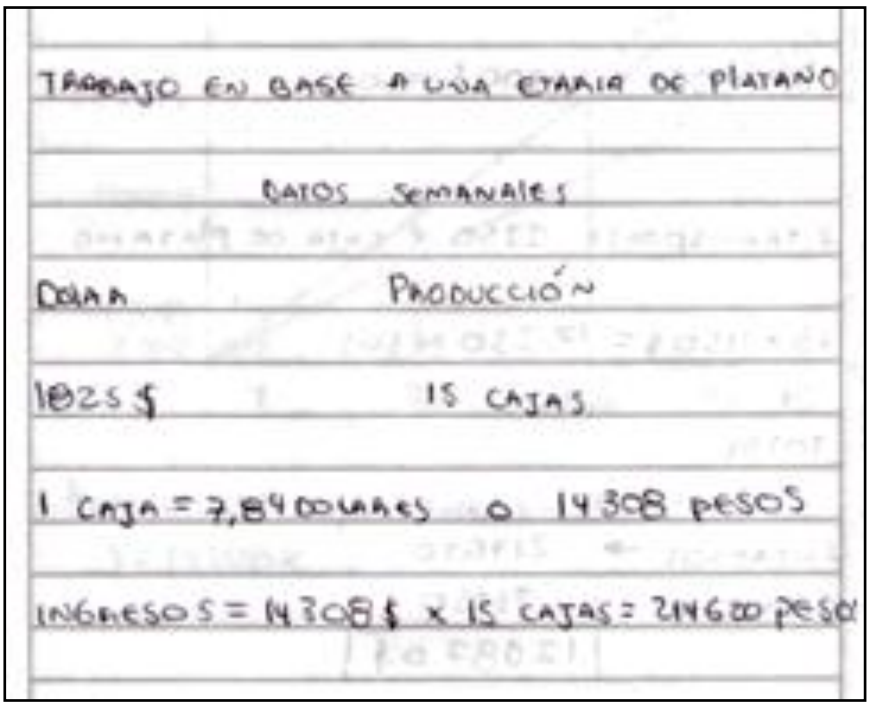
Ilustración 25 Gastos del proceso de embarque. San

Tercer momento: la descripción de los ingresos que se generan por cada caja exportada, esto lo suponen los estudiantes a partir de la cotización de cada caja en dólares y llevado a pesos colombianos. Hecho que se materializa en la transferencia a la cuenta de ahorros de sus padres por la comercializadora. Esto se evidencia en las siguientes ilustraciones.



VALOR INGRESO NETO (CAJAS)x60 un
MENSUAL = $ 1007,340 + 70400
(Rechazo: Boleja+Sencillo)
TOTAL NETO: $ 1,077,740

Ilustración 26 Ingresos mensual por cajas exportadas. Ezel



TRABAJO EN BASE A UNA ETAPA DE PLATANO
DATOS SEMANALES
DOLAR PRODUCCIÓN
1825 $ 15 CAJAS
1 CAJA = 7,84 DOLARES o 14308 PESOS
INGRESOS = 14308 $ x 15 CAJAS = 214600 PESOS

Ilustración 27 Ingresos mensual por cajas exportadas. Ezel

La información de las anteriores ilustraciones fue delimitada por los estudiantes a una hectárea de cultivo de plátano, y los cálculos promediados con base a un mes de producción, en el caso de Ezel. Esto se puede observar cuando describe un total de 60 cajas exportadas por mes, por otra parte, incluye en los ingresos de la venta por rechazo. La venta por rechazo, consiste en vender los plátanos que no cumplen con las normas de calidad para ser exportados, de tal manera son vendidos al mercado interno. Aunque según Ezel, este tipo de venta se realiza esporádicamente por su padre en la parcela. En el caso de San, la diferencia con respecto a Ezel, los promedios, fueron calculados a partir de 15 cajas exportadas, es decir, promedio con base a un embarque, y es habitual en la parcela vender los plátanos por rechazo al mercado interno.

Es importante la discriminación entre número y cantidad, según Sierpinska (1992) el número es abstracto y una cantidad de algo son dos conceptos distintos y el conocimiento de esto es tan necesario como un concepto unificado de número abstracto. Un número abstracto es una razón. En este caso, los estudiantes desde la situación en el contexto se observa que relacionan el gasto del "transporte" a lo que se cobra por cada caja (primera magnitud) a la cantidad de cajas exportadas (segunda magnitud) representado a través de números. Es decir, la relación de dos magnitudes en una situación en el contexto es representada a través de números. Esto también se puede observar cuando describen los "ingresos" el cual los relacionan con las cajas exportadas (primera magnitud) con el valor de la cotización de la caja tipo exportación (segunda magnitud). Por tanto podemos decir, que la situación en el contexto les permite a los estudiantes relacionar magnitudes para luego asociarlo a los números para describir las cantidades. En este sentido, los estudiantes toman la cantidad de cajas como uno de los puntos claves para realizar distintas relaciones, teniendo en cuenta que el número de cajas surge de una relación de la extensión de tierra cultivada (primera magnitud) a la cantidad de plátanos cosechados (segunda magnitud).

Ezel y San, a partir de su experiencia y consultas realizadas a sus padres y personas cercanas que también son propietarios de cultivos de plátano, les permitió desarrollar el subproceso de construcción de la situación. Esto leído desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) como un proceso de construcción mental del problema, reflejándose a través de un modelo de la situación, este puede ser un boceto o una imagen de la situación. En relación a lo anterior, Ezel y San, el proceso de construcción de la situación lo desarrollaron en tres momentos: los gastos en las tareas de campo; los gastos en el proceso de embarque del plátano; y los ingresos económicos por la venta de las cajas exportadas. Por tanto, la construcción de la situación no la describen los estudiantes a través de imágenes o bocetos como se afirma en Blum & Borromeo-Ferri (2009), sino que el modelo de la situación fue construido a través de números asociados a los significados de las distintas relaciones entre magnitudes, que percibieron los estudiantes en la situación en el contexto, y distintos métodos matemáticos desarrollados como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. El uso de estos métodos también se puede entender desde el ciclo de modelación como trabajo matemático.

También podemos describir que desde la situación en el contexto los estudiantes al construir el modelo de la situación combinaron dos subprocesos del ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) como el subproceso de construcción del problema y el subproceso de trabajo matemático. Y por otra parte, es un momento visto desde Sierpinska (1992) para expresar los cambios y sus relaciones el cual perciben a través de su experiencia como algo problemático digno de estudiarlo. De tal manera que, se puede considerar este momento como herramienta importante para que los estudiantes hagan frente a los cambios desde esa situación en el contexto como algo introductorio a la noción de función. Esto se puede afirmar cuando Ezel describen en la *Ilustración 20 Descripciones de la construcción del problema. Ezel:* "*en el sentido que la producción no es estable a como sube puede bajar. Ellos tienen su semana que la producción muy baja y a veces le devuelven las cajas por la mala producción que tienen, porque el peso no corresponde a lo indicado o los plátanos están mal empacados."* Noción de función comprendida desde Sierpinska (1992) como el resultado del esfuerzo humano para ponerse de acuerdo con los cambios observados y experimentados en el mundo circundante.

Ezel y San, procedieron a simplificar y estructurar la información del modelo de la situación, es decir, la simplificación entendida al tomar la información del modelo de la situación al considerar los datos importantes y luego ordenarlos que le permiten explicar la situación desde un modelo real. Esto se puede evidenciar en las siguientes ilustraciones generadas por Ezel y San:

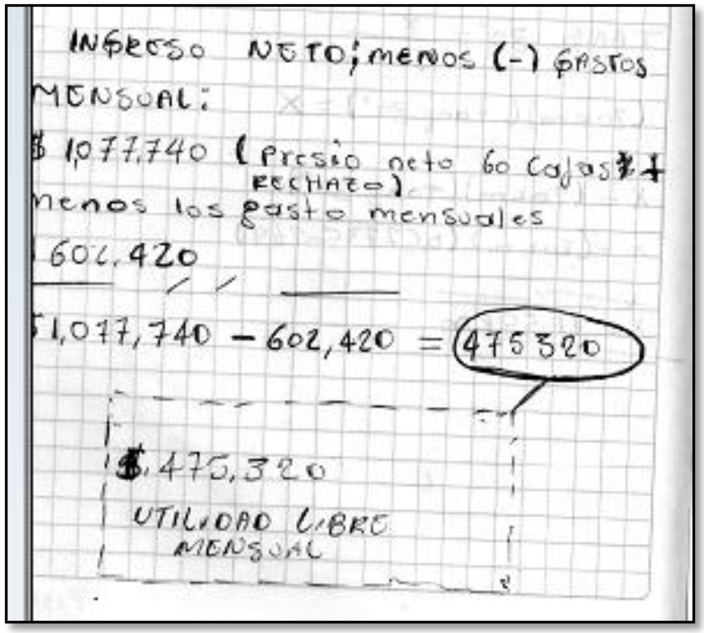


Ilustración 28 Modelo real que describe una noción de ganancia. Ezel

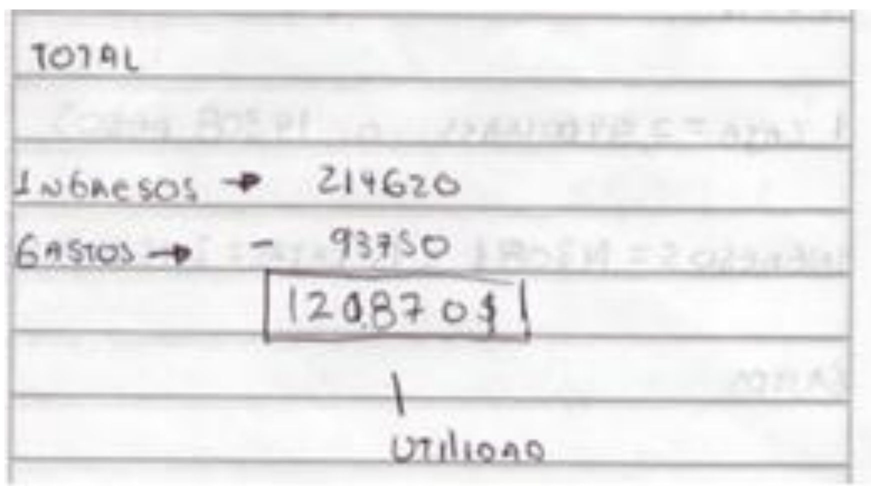


Ilustración 29 Modelo real que describe una noción de ganancia. San

Al construir los modelos reales por parte de los estudiantes, fue con el propósito de hallar los gastos generales y diferenciarlos con los ingresos, experimentando así una noción de utilidad o ganancia. En el caso de Ezel, describe un valor de ganancia por mes de $475.320, y San describe un valor $120.870 por semana. Esto puede ser interpretado desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) como el modelo real. Es decir, los estudiantes al simplificar y estructurar la informacion presentada en el modelo de la situación, generaron el modelo real para describir de manera particular una nocion de ganancia.

Desde los modelos reales construido por los estudiantes (ver *Ilustración 28 Modelo real que describe una noción de ganancia. Ezel*) se puede observar en los estudiantes el modo de reconocer los “ingresos” y “gastos” como los sujetos[4] que cambian en la situación del contexto, y estos son repesentados a traves de números que describen las cantidades que intervienen en este fenomeno. Y la “utilidad” es generada por la diferencia entre los “ingresos” y “gastos”. De tal manera que, los subprocesos de simplificacion y estructuración desde la situación en el contexto lleva a los estudiantes a reconocer los cambios y describirlos a traves de números con mayor nivel de abstracción, entendiendo los números desde la mirada de Sierpinska (1992) como razones abstractas el cual se hace necesario dos magnitudes para definirlos.

Hasta este momento, podemos decir que, el desarrollo del subproceso de construcción realizado por los estudiantes desde la situación en el contexto del cultivo de plátano, consistió en generar el modelo de la situación para describir de manera general el problema. Luego este modelo fue simplificado y restructurado generando asi el modelo real. Esta actividad posibilitó que los estudiantes asociaran los números como razones abstractas con los sujetos que cambian en la situación en el contexto.

A continuación observaremos como desde la situación del contexto de la energía prepago, Rita desarrolla el subprocesos de construcción para generar el modelo de la situación, luego los subprocesos de simplificación y estructuración para presentar como producto el modelo real. Modelos y subproceso entendidos desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009).

[4] Los sujetos en un fenómeno leído desde Sierpinska (1992) los sujetos que cambian en el estudio de los cambios.

4.2 Construcción de relaciones y significados en la situación en el contexto de la energía prepago

En el contexto de la energía prepago, la construcción del problema entendida desde Blum & Borromeo-Ferri (2009) como la forma de adquirir los significados y sus relaciones, y al mismo tiempo, el estudiante entiende la cuestión en la situación en el contexto. Esto se puede observar a partir de las siguientes descripciones realizadas por Rita a través de preguntas realizadas por su profesor.

Profesor: *"¿Cómo funciona la recarga de energía?"*

Rita: *"Si usted paga por una recarga de energía de $ 5.000 pesos que contiene 30 kilovatios hora, dependiendo del consumo, ella se va descargando. Una vez que llegue a cero se corta la energía".*

Profesor: "E*ntonces, ¿qué es lo que dice tú familiar?"*

Rita: "S*i, ella me dijo que no entendía por qué la recarga se gastaba tan rápido, por qué los hielos no se vendían a ese mismo ritmo. O sea, los hielos no daban para cubrir ese gasto de la energía."*

Profesor: *"¿Cómo funciona la venta del hielo?"*

Rita: "*Los hielos se venden 5 unidades diarias aproximadamente, es decir, $ 1000 pesos diarios de la venta del hielo. Porque hay días que se venden 10 unidades o no se vede nada, pero yo lo promedie a 5 hielos diarios, más o menos."*

Ilustración 30 Descripción del problema. Rita

El problema en esta situación, surge al detectar por parte de la familiar de Rita un excesivo consumo de energía, al mismo tiempo, describe los aspectos que se encuentran relacionados con el problema. Y también explica, la idea de generar ingresos adicionales a través de la venta de cubetas de hielo para asumir el gasto de la energía. El problema en esta situación converge con la situación en el contexto del cultivo de plátano, en el interés demostrado por los estudiantes en apoyar al mejoramiento de la economía familiar. Desde esta situación en el contexto, fue que emergió el problema el cual impulsó a Rita a realizar un proceso de modelación matemática. En este sentido, el término "problema" lo describe Blum (2002) cuando se usa para abordar no sólo problemas prácticos, sino también de carácter objetivo al describir, explorar, comprender o diseñar las partes del mundo. Esto es evidenciado cuando Rita describe de manera particular el sistema de crédito prepago en kilovatios hora que otorga la empresa de energía por ciertas sumas de dinero. Y por otro lado, la venta de cubetas de hielo con la idea de asumir el gasto del consumo de energía en el hogar. De este modo, el problema fue planteado para el proceso de modelación en la situación del contexto de la energía prepago en buscar una solución al excesivo consumo de energía.

El conocimiento del esquema de energía prepago fue adquirido por Rita, al ser ella la responsable para la gestión de la compra y el ingreso del PIN que proporciona el crédito de energía. Es decir, la cantidad de Kilovatios hora que otorga la empresa de energía al realizar cada recarga por cierta suma de dinero. Este hecho, le permitió a la estudiante comprender lo que cambia y cuanto cambia, de tal manera que, desde Sierpinska (1992) es entendido cuando se refiere a la identificacion de los sujetos del cambio en el estudio de los cambios. Por otra parte, el modelo de la situación desde el contexto de la energía prepago se evidencia en la descripcion del problema y sus aspectos relacionados. Teniendo en cuenta que el modelo de la situación desde Blum & Borromeo-Ferri (2009) es visto como un proceso de construcción mental del problema reflejándose a través de un modelo de la situación, este puede ser un boceto o una imagen de la situación. En este caso se refleja a través de las descripciones verbales por parte de la familiar de la estudiante, y es Rita que asume el problema llevándolo al aula de clase para iniciar a desarrollar un proceso de modelación, proceso delimitado de la siguiente manera:

Rita: "*para responder a la pregunta que me hizo mi tía, debía saber que electrodomésticos consumía más energía en la casa, esto puede ser el televisor, el DVD, la nevera, el congelador, los dos ventiladores, los 4 bombillos o la lavadora".*

Ilustración 31 Manera de responder la pregunta. Rita

La pregunta para el proceso de modelación, al ser orientada con el propósito de entender el excesivo consumo de energía, Rita de manera intuitiva identifica como conveniente conocer el consumo de cada electrodoméstico utilizado en la casa de su familiar. El modo de construir este conocimiento se puede reconocer en las siguientes preguntas realizadas por el profesor:

Profesor: "*¿Cómo hiciste para manejar lo de la energía? es decir, ¿cómo calculaste los consumos de esos aparatos electrónicos?"*

Rita: "*Bueno, teniendo en cuenta cuando uno mete la recarga, instantáneamente empieza a consumir. Pero, lo primero que yo hice fue desconectar todos los electrodomésticos de la casa, todos, solamente dejé el que iba averiguar cuántos kilovatios se consumía. Y hay observe, como disminuía los kilovatios, claro eso trae los vatios, al bajar los vatios, bajaba los Kilovatios. Entonces, dado el tiempo que pase hay, el congelador se gastaba aproximadamente 4 Kilovatios hora, la nevera 2 kilovatios hora y así lo hice con los otros electrodomésticos".*

Ilustración 32 Modo de medir la energía de los electrodomésticos. Rita

El dispositivo digital módem instalado por la empresa de energía el cual es usado por las personas para ingresar el código del PIN y generar la recarga (ver *Ilustración 30 Descripción del problema. Rita*). Este dispositivo fue utilizado por Rita como herramienta para medir el consumo de energía de cada electrodoméstico usado por su familiar. Al conectar cada equipo electrónico de manera individual, y observar por una hora, la cantidad kilovatios hora de consumo. Con esta manera de explorar observó que el congelador consumía 4 kilovatios hora, la nevera consumía 2 kilovatios hora, la licuadora 0.3 kilovatios hora, el ventilador 0.5 kilovatios hora, el televisor de 21'' y DVD 0.2 kilovatios hora, 4 bombillas 0.04 kilovatios hora, la lavadora 0.7 kilovatios hora. Es decir, Rita observó en el display del módem el consumo de energía de cada aparato electrónico para luego promediar el consumo de energía eléctrica por hora transcurrida.

A partir de la situación en el contexto de la energía prepago podemos decir que, el modelo real como es entendido desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) el cual emerge al simplificar y estructurar el modelo de la situación. De tal manera que este modelo real emergió en la situacion abordada por Rita, al encontrar la manera de medir el consumo de energía de cada eletrodoméstico, para luego promediarlo con base a hora trasncurrida. A diferencia del modelo real generado por Ezel y San, que con base a su experiencia, el apoyo de sus padres y amigos cercados construyeron una noción aproximada de utilidad.

Hasta este momento las dos situaciones en contexto les han brindado a los estudiantes la información necesaria para plantear el problema, desarrollar el subproceso de construcción del problema el cual permitió el surgimiento del el modelo de la situación, este fue simplificado y estructurado hasta convertirse en un modelo real. En el caso del contexto de la energía prepago el modelo real refleja los distintos consumos promedios de energía de los electrodomésticos usados en la casa de la familiar de Rita, y en el contexto del cultivo de plátano las descripciones y la relación de los ingresos y gastos para deducir la noción de utilidad de la parcela familiar. A continuación, observaremos como los estudiantes a partir de la información del modelo real realiza las traducciones necesarias hacia las matemáticas mediante el subproceso de matematización.

4.3 La correspondencia entre la situación en el contexto y la aproximación a la noción de función lineal

Luego de haber expuesto en el apartado anterior la manera como los estudiantes plantearon el problema desde la situación en el contexto y, el desarrollo del subproceso de simplificación y estructuración para dar origen al modelo real; a continuación, describiremos inicialmente las distintas relaciones realizadas por los estudiantes desde el contexto del cultivo de plátano, seguido, del contexto de la energía prepago, con el fin de, exhibir la manera como los estudiantes desarrollaron el subproceso de matematización desde ambas situaciones.

La correspondencia entre la situación en el contexto del cultivo de plátano y las matemáticas fue generada por los estudiantes a través del uso de las letras. Hecho que se evidencia de la siguiente ilustración:

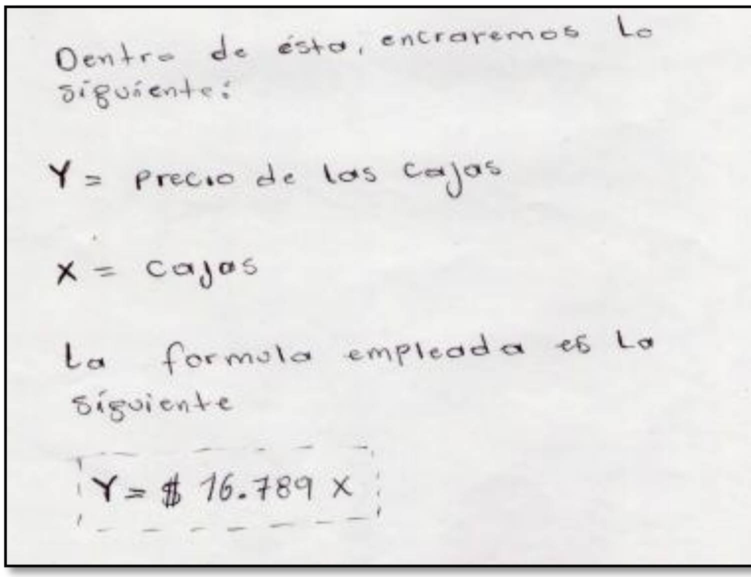


Ilustración 33 Uso de las letras como variables y el modelo lineal. Ezel

Ezel: *"En este caso estamos trabajando el valor de la caja a \$16.789 pesos, entonces hicimos una fórmula para la venta de las cajas y=\$16.789(x)."*

Ilustración 34 Descripción de modelo lineal. Ezel

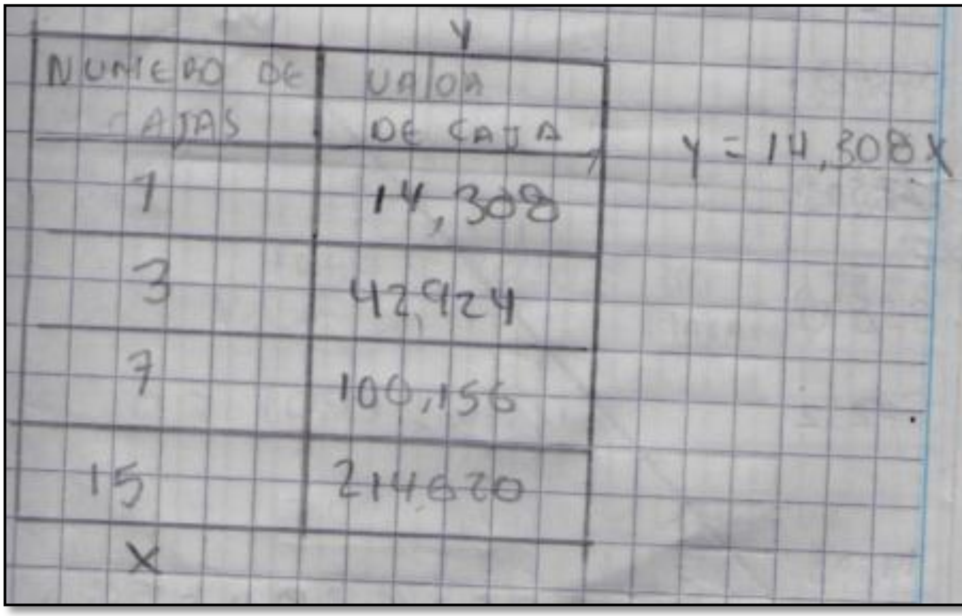


Ilustración 35 Uso de las letras como variables y el modelo lineal. San

Los estudiantes al considerar en el aula de clase uso de las letras "*x*" y "*y*" como manera de representar las variables implicadas en el fenómeno de su vida cotidiana. Y además, estas dos variables son relacionadas por Ezel y San en el sentido de Trigueros, Ursini, & Lozano (2000) como variables en relacion funcional para describir las conexiones observadas en la situación en el contexto, esto al observándose a "*x*" como la variable independiente y a "*y*" como la variable dependiente.

Ezel, a la variable "*x*" la nombró "cajas", para describir cada caja exportada al lado de una constante de proporcionalidad por un valor de $16.789 pesos, el cual sería el valor del precio venta por unidad de caja exportada. En la mirada San, a la variable "*x*" la nombró "número de cajas" y la constante de proporcionalidad fue por un valor de $14.308 pesos. Por otra parte, Ezel a la variable dependiente "*y*" la nombró "precio de las cajas" y San "valor de cajas" para describir el ingreso pagado por la comercializadora a sus padres por las cajas exportadas. Este hecho se puede comprender desde Sierpinska (1992) como la manera de arreglarselas para distiguir entre cantidades constantes y variables. En este sentido, los estudiantes realizaron una relación entre dos variables a lo que se puede asociar al concepto matemático llamado función lineal. Esto se afirmar a partir de Posada &

autores (2006) cuando describe que: *“Determinar en el enunciado si la razón de cambio es explícita o implícita es importante puesto que, en ambos casos, si dicha razón de cambio es constante, entonces se puede asociar a una función lineal.”* (pp. 140 - 141). En esta mirada, la razón de cambio constante de cada una de las expresiones determinadas por Ezel y San fue mediante los valores de \$16.789 pesos y \$14.308 pesos el cual hacen referencia al valor de cada caja exportada. De tal manera que, las expresiones algebraicas *y=16.789(x)* y *y=14.308(x)* serían los modelos lineales generados por los estudiantes para describir los ingresos económicos de cada una de las parcelas de sus familias.

A partir de los modelos lineales construidos y representados mediante expresiones algebraicas, los estudiantes iniciaron a construir las representaciones gráficas como una estrategia para ir en búsqueda de la solución al problema desde el punto de vista visual. Esto se puede entender a partir de los siguientes comentarios de los estudiantes:

Ezel: “E*n este caso, estamos trabajando el valor de la caja a \$16.789 pesos, entonces hicimos una fórmula para la venta de y=\$16.789(x). Lo que tratamos de hacer con los datos es construir una gráfica y encontrar el punto donde chocan los gastos y los ingresos, y que pasará ahí cuando en ese punto, o sea que, de ahí para allá, obviamente, es lo que le llamamos nosotros como ganancia, si sabemos esa cantidad de gastos, obviamente, ejemplo, con 30 cajas tengo para cubrir los gastos. Lo que necesitamos es trazar la linea y que pasa de aquí para allá, eso es lo que pensamos hacer, cuantas cajas necesitamos para librar los gastos y que pasa de ahí para allá.”*
San: *“Queremos construir un gráfico que describa el precio de las cajas en un determinado valor del dólar y luego vamos a ver sí el rechazo podía alcanzar el valor de las cajas, podemos bajar de pronto el precio del dólar a 1500 pesos, si lo ponemos a bajar con el presupuesto que nos dé con el rechazo, se puede unir la venta del rechazo con la de las cajas. Lo vamos a organizar en ese esquema con el dólar a tanto y a ver si el rechazo pude subir hasta allá, esto es lo que queremos hacer.”*

Ilustración 36 El propósito del uso de las representación gráficas. Ezel y San

La intención de los estudiantes al orientar el uso de las representaciones gráficas, consiste por una parte, en relacionar los ingresos, y por la otra, los gastos generales a través de líneas rectas para identificar las ganancias en la parcela familiar. En el caso de San, decide proyectar la representación gráfica para comparar las dos formas de ingresos de la parcela, cajas exportadas y venta por rechazo. Pero en el sentido de Ezel, se hace suficiente analizar el ingreso por cajas exportadas con los gastos generales. Las presentaciones gráficas expresadas verbalmente por los estudiantes en los episodios anteriores, se podrán observar en los siguientes apartados al considerar la descripción el uso de las representaciones gráficas.

En la situación en el contexto de la energía prepago el uso de las letras para representar las variables y crear correspondencia con las matemáticas, lo describiremos a partir de los siguientes comentarios de la estudiante:

Profesor: "*¿Por qué utilizar las letras, "x" y "y"?*"

Rita: *"Porque podemos relacionar la causa con el efecto, "x" y "y" son las letras comunes que nos lleva a una aproximación. Entonces, yo utilice "x" y "y" con una línea que va hacia arriba, de un lado puse el consumo por horas y el otro lado puse lo que se gastaba. Por ejemplo, las horas van en "x" y "y" el consumo en Kilovatios hora. Bueno, entonces, si el congelador se gastaba en una hora 4 kilovatios en una sola hora, en dos horas serían 8 kilovatios y así sucesivamente."*

Ilustración 37 Uso de las letras "x" y "y" para representar variables. Rita

En el episodio anterior, Rita describe "*causa y efecto*" que pueden entenderse desde la perspectiva de Sierpinska (1992) en la que describe causa y función como un esfuerzo humano de intentar explicar los cambios en el mundo. Al mismo tiempo, Se puede observar el uso de las letras en relación función en la mirada de Trigueros, Ursini, & Lozano (2000), en el sentido de generar correspondencia entre la situación en contexto y las matemáticas: "x = H" "y = Kwh". Lo anterior, Al entender el modo que se encuentra relacionado el valor de la recarga con el consumo en kilovatios hora, basada en su experiencia, Rita comprende estas relaciones desde el esquema de la energía prepago al ser la encargada de la compra e ingresar el código del PIN que otorga el crédito de la recarga. A esto se le suma, el haber experimentado el cambio en el consumo de energía, al establecer como conveniente el uso del dispositivo digital módem para observar el consumo promedio de energía en kilovatios hora de cada electrodoméstico. Recordando que, el modo de hacer estas mediciones fue dejando un aparato electrónico conectado a la energía con el fin de observar la cantidad promedio de consumo por hora. Con lo anterior, construyó dos líneas rectas en el plano cartesiano, con el propósito de comparar el consumo de energía del congelador y la nevera. Esto fue posible mediante el uso de las letras como variables para generar una correspondencia entre la situación en el contexto y las matemáticas. La representación de las líneas rectas se pueden observar en la siguiente ilustración.

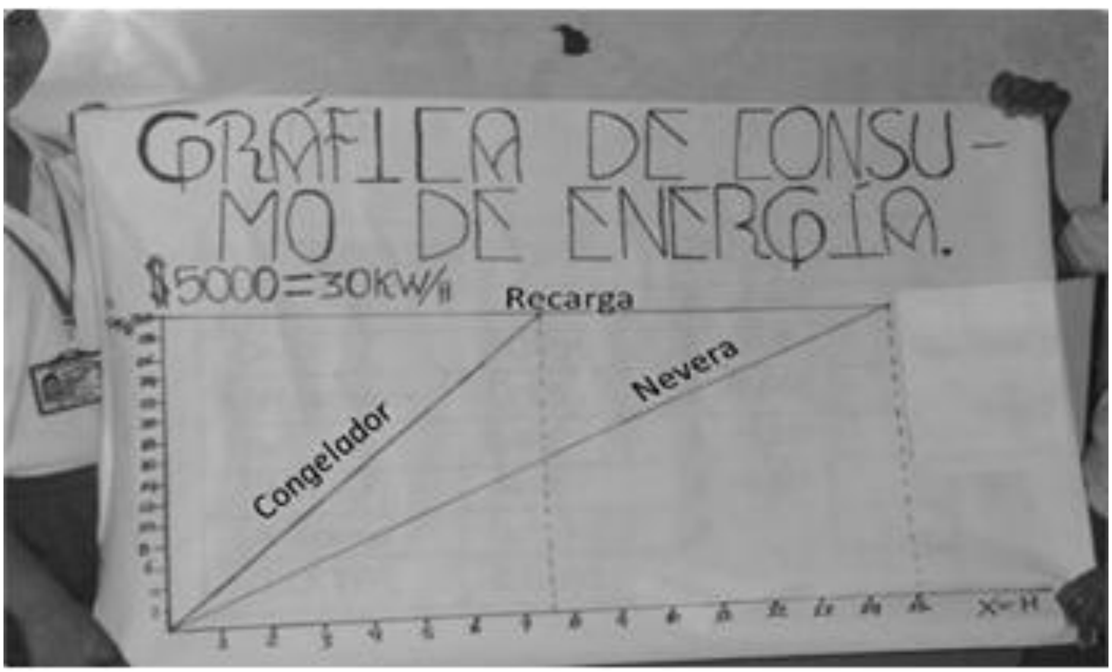


Ilustración 38 Presentación gráfica consumo de energía congelador y nevera. Rita[5]

[5] Hemos modificado la representación gráfica adicionándole nombres a cada línea recata (recarga, congelador y nevera) como manera de resaltar el sentido de cada línea recta por la estudiante.

Las representaciones de las líneas rectas en el plano cartesiano para comparar el consumo del congelador con la nevera, le permitió a Rita interpretar las pendientes de las rectas en el plano cartesiano, al identificar que, a mayor inclinación de una línea recta en el plano existiría mayor consumo de energía. Esta acción corresponde a lo que Blum & Borromeo-Ferri (2009) describen al referirse al estilo de pensamiento visual matemático (pictórico), que refleja los hechos matemáticos y conexiones a través de imágenes ilustrativas. Este estilo de pensamiento se puede evidenciar desde el contexto de la energía prepago a partir del siguiente comentario realizado por Rita:

Rita: "*El consumo es de acuerdo a la inclinación de la línea, por lo que la línea del congelador se inclina más cerca del eje "y", que la línea de la nevera. Esto nos da a entender que el congelador consume más energía que la nevera.*"

Ilustración 39 Descripción de la pendiente de las líneas rectas en la energía prepago. Rita

La estudiante al identificar la variación del consumo de energía tanto de la nevera como el congelador, a partir de las representaciones gráficas, le permite superar lo que describe Sierpinska (1992) la dificultad que tiene el estudiante en identificar el proceso de iteración de una función en su representación gráfica y dinámica. Es decir que, Rita identifica qué hace una línea recta cuando presenta mayor inclinación, al diferenciar el consumo de energía de cada electrodoméstico, posibilitándole observar en la representación gráfica que cambian con base a las condiciones de cada sujeto que genera el cambio.

Para modelar la situación en el contexto, Rita hace uso de expresiones algebraicas para describir el consumo de energía tanto de la nevera y el congelador, y otra expresión para calcular el costo de consumo de cada electrodoméstico. Esto puede estar relacionado con lo que Niss, Blum and Galbraith (2007) describen como el uso de modelos estándar para describir una situación en el mundo real. Esto se puede observar a partir de la siguiente ilustración:

Rita: "*Bueno, en este gráfico [ver Ilustración 38 Presentación gráfica consumo de energía congelador y nevera. Rita], estoy mostrando el congelador y el consumo de la nevera. Con el fin de calcular el consumo del congelador que era necesario hacer esta fórmula: "y" igual a cuatro kilovatios hora (y = 4x). La fórmula para la nevera es "y" igual a 2 kilovatios hora (y = 2x). Aquí podemos ver que el congelador consume 4 kilovatios por hora, en dos horas que consume 8 kilovatios hora, en tres horas 12 kilovatios hora.... Mientras que la nevera consume 2 kilovatios hora, 4 kilovatios hora en dos horas.... y una recarga [de energía] de $ 5.000 que contiene 30 kilovatios hora quedaría entonces a $ 166.66 pesos cada uno (y = 166,66x).*"

Ilustración 40 Uso de modelos estándar para modelar una situación. Rita

Se puede deducir que, Rita utiliza expresiones algebraicas para modelar el consumo de energía tanto de la nevera y congelador. Por lo tanto, desde Posada y otros autores (2006) cuando se describe que: "*determinar a partir de la declaración si la tasa de cambio es implícito o explícito es importante, ya que, en ambos casos, si la tasa de cambio es constante, entonces se puede asociar con una función lineal.*" (pp. 140 - 141). Desde este punto de vista, son generan los modelos lineales cuando la estudiante expresa el promedio de consumo de energía a una tasa de cambio basado en los kilovatios hora por hora transcurrida de cada electrodoméstico, de tal manera, Rita hace el uso de una función lineal para modelar una situación en el contexto cotidiano. Por otra parte, se posibilita observar aspectos relacionados a la proporcionalidad cuando la estudiante describe: "*Aquí podemos ver que el congelador consume 4 kilovatios hora por cada hora, en dos horas consume 8 kilovatios hora, en tres horas 12 kilovatios hora....*" (*Ilustración 40 Uso de modelos estándar para modelar una situación. Rita*). En esta situación, Rita suma cada hora transcurrida: *por horas, en dos horas, en tres horas…*, en relación a los kilovatios hora de consumo del electrodoméstico: *4 kilovatios hora, 8 kilovatios, 12 kilovatios hora…* Esto se puede comprender desde Posada & otros autores (2006) cuando describen *"que a través del estudio de situaciones que impliquen la proporcionalidad se ponen en correlación dos o más variables, entonces se conceptualiza la proporcionalidad tanto en relación con la aritmética, como en relación con el concepto de función."* (p. 77). De tal manera que, la situación en el contexto de la energía prepago y el cultivo de plátano son dos contextos que le permitieron a los estudiantes, desde las líneas rectas en el plano cartesiano, observar por una parte, la proporcionalidad directa vista desde la suma o la multiplicación (*en relación con la aritmética*), y por la otra, los aspectos de la función lineal.

Los mecanismos utilizados por Rita para generar los modelos fueron diferentes a los utilizados por Ezel y San. Rita generó los modelos a partir de líneas rectas en el plano cartesiano, asociando al eje "*x*" con el tiempo, y por el eje "*y*" los kilovatios hora consumidos dependiendo de cada hora transcurrida. En el caso de Ezel, inició generando una relación descriptiva asociadas a las letras "*x*" y "*y*" para representar las variables involucradas en el contexto del cultivo de plátano, representando la tasa de cambio constante con el valor de la caja exportada. Y San, utilizó una tabla de doble entrada de dos columnas y varias filas, con los valores de la primera columna, describió las cajas exportadas y asignó a esta secuencia la letra "*x*"; en la otra columna, describió el ingreso económico por cada caja exportada en relación a los datos de la primera columna, esta secuencia de valores se la asignó a la letra "*y*", y la tasa de cambio constante consideró el estudiante que era el primer valor de la segunda columna. Por lo tanto, a pesar que los estudiantes en un grupo desarrollen un proceso de modelación y compartan algunos elementos en el aula de clase, esto no indica que ellos consideren las mismas rutas para generar un modelo lineal. Es decir, los estudiantes pueden generar el modelo a partir del plano cartesiano, de una tabla de doble entrada o de los significados y sus conexiones de la situación en el contexto.

En el siguiente apartado describiremos la manera como los estudiantes a partir de los modelos lineales generados, en relación a la situación en el contexto, desarrollaron el subproceso de trabajo matemático en la mirada de Blum & Borromeo-Ferri (2009), el cual nos permite explicar como los estudiantes construyeron los argumentos necesarios para resolver el problema, y al mismo tiempo, observar como los estudiante se aproximaban a la noción de función lineal.

4.4 Las representaciones gráficas: Una manera visual de comprender una situación en el contexto del cultivo de plátano

Ezel, luego de haber construido el modelo lineal representado a través de la expresión algebraica *y=\$16.789 (x)*, por medio del cual describe los ingresos por cada caja exportada. Procedió a construir la gráfica de la siguiente manera:

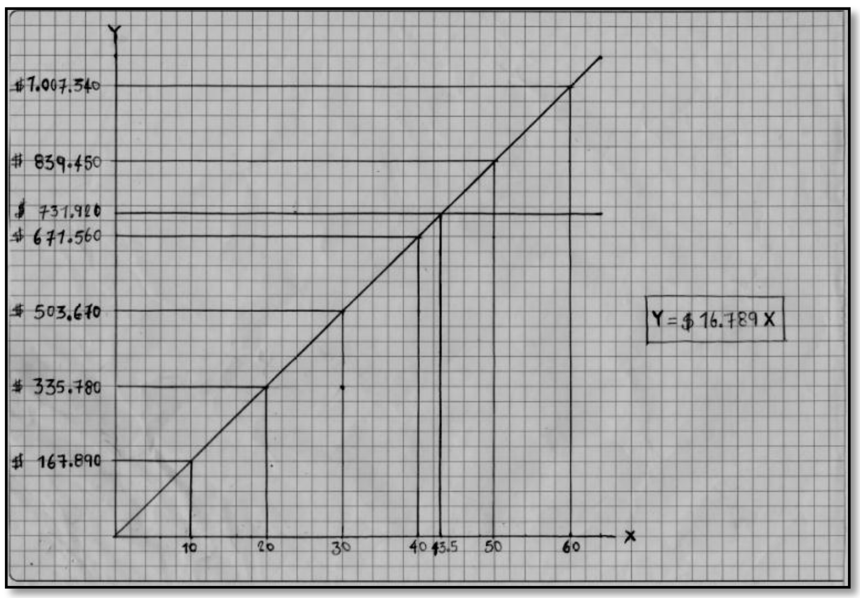


Ilustración 41 Representación gráfica del modelo lineal de ingresos y la relación con los gastos. Ezel

En el plano cartesiano se observa la construcción de escala de 10 en 10 en el eje *"x" (cantidad de cajas embarcadas)* hasta llegar al número 60, y sus respectivos valores en el eje *"y" (valor del ingreso por cada caja exportada).* Con lo anterior, Ezel construye a lo que se conoce en las matemáticas como la representación gráfica de una función lineal de la forma *f(x)=mx+b, m y b constantes y b=0*, la cual es una línea recta que pasa por el origen (0,0). Esto puede estar relacionado con lo que Blum, Galbraith, Henn & Niss (2007) describen como el uso de modelos estándar para describir una situación en el mundo real. Perspectiva considerado por el estudiante, cuando hace uso de la función lineal para modelar una situación en el contexto del cultivo de plátano, con el propósito de hallar la manera de deducir la ganancia de la parcela familiar. Por otra parte, al observar la tabla de doble entrada construida por Ezel para representar los gastos generales, como se puede ver en la siguiente ilustración:

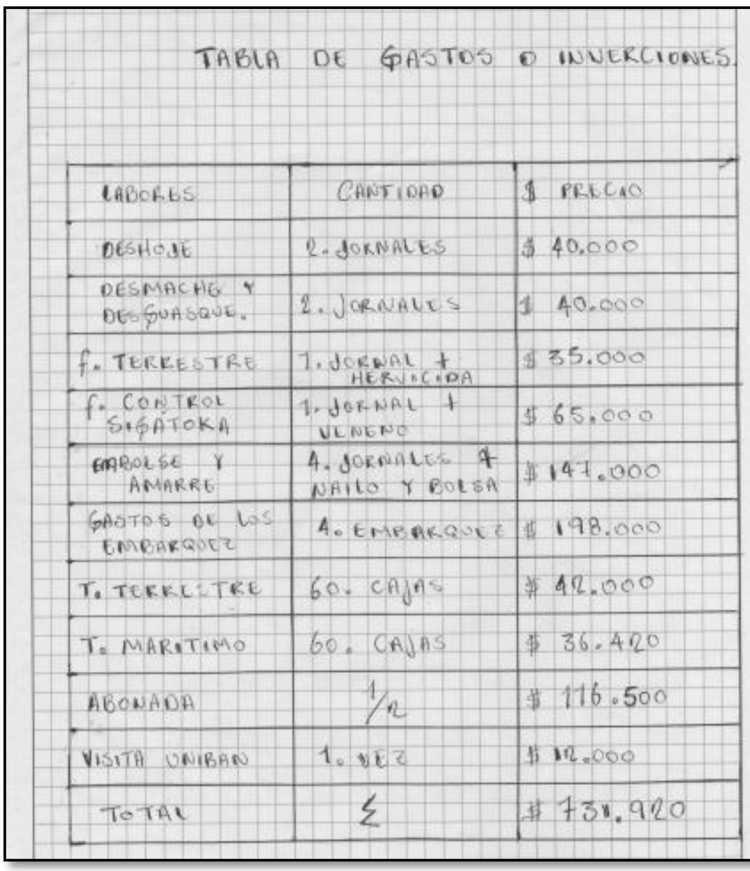


TABLA DE GASTOS O INVERCIONES.

LABORES	CANTIDAD	$ PRECIO
DESHOJE	2. JORNALES	$ 40.000
DESMACHE Y DESGUASQUE.	2. JORNALES	$ 40.000
f. TERRESTRE	1. JORNAL + HERVICIDA	$ 35.000
f. CONTROL SIGATOKA	1. JORNAL + VENENO	$ 65.000
EMBOLSE Y AMARRE	4. JORNALES + NAILO Y BOLSA	$ 147.000
GASTOS DE LOS EMBARQUEZ	4. EMBARQUEZ	$ 198.000
T. TERRESTRE	60. CAJAS	$ 42.000
T. MARITIMO	60. CAJAS	$ 36.420
ABONADA	1/2	$ 116.500
VISITA UNIBAN	1. VEZ	$ 12.000
TOTAL	Σ	$ 731.920

Ilustración 42 Tabla de gastos generales de la parcela. Ezel

En relación a lo anterior, Ezel genera otro tipo de función, esto es visto cuando traza una línea paralela al eje “*x*” y hace énfasis en el valor que se encuentra en el eje “*y*” por $731.920 pesos, se puede afirmar que, el estudiante representa gráficamente una función constante o de grado cero (f(x)=k). Esta línea recta, el estudiante la llamó la línea de los gastos.

Las descripciones de la relación entre las líneas rectas en el plano cartesiano la podemos comprender a partir de los comentarios realizados por Ezel en la siguiente ilustración:

[…]

Profesor: "Me puedes decir, ¿qué significan esas líneas rectas en el plano?"

Ezel: *"Esta línea [horizontal] representa lo que son los gastos. Esta otra línea que va hacia arriba indican la cantidad de cajas que se necesitan para cubrir los gastos. Este punto indica donde inicia la utilidad en este caso sería a las 43.5 cajas.*

Profesor: *"¿Cuál es el punto donde inicia la utilidad?"*

Ezel: *"Este punto hacia allá, esto quiere decir que acá, ya se libró los gastos. Es decir, a partir del punto inicia la utilidad."*

Ezel: *"Pues la plantación estando al control y todas sus labores al día, simplemente puede aumentar la producción, quiere decir que la línea puede estirarse más hacia arriba, puede producir más utilidad."*

Profesor: *"Ezel, tú dices que en este punto inicia la ganancia. Entonces ¿de qué punto hasta qué punto hay ganancia?"*

Ezel: *"Hasta el límite."*

Profesor: *"¿Cuál es el límite?"*

Ezel: *"Hasta las 60 cajas."*

Profesor: *"Usted dijo que los gastos se libran en 43.5 cajas. Entonces ¿Hasta el límite cuánto es la utilidad?*

Ezel: *prácticamente se está librando un embarque, la ganancia es un embarque.*

Ilustración 43 Exposición de Ezel de los resultados en el aula de clase. Ezel

El estudiante al trazar las dos líneas rectas y cruzarlas en el plano cartesiano genera un punto de intersección, el cual es expresa verbalmente por Ezel mediante los significados de *"librar los gastos"* y *“donde inicia la utilidad”.* Comprendiendo el estudiante que, a partir de ese punto es donde los ingresos son iguales a los gastos. En este momento, la situación en el contexto del cultivo de plátano le permitió al estudiante aproximarse a lo que se describe en las matemáticas como punto de equilibrio. Por otra parte, a partir del punto generado, Ezel traza una línea perpendicular al eje “*x*” para hallar, de manera aproximada, las cantidades de cajas necesarias para librar los gastos mensuales de la parcela familiar.

De acuerdo a lo anterior, se puede observar como los estudiantes a partir de la representación gráfica describe la situación en el contexto. Esto fue posible al generar una correspondencia de algunos elementos tales como punto, tramos de líneas, relación entre líneas; en correspondencia con el contexto del cultivo de plátano. De tal manera que, el estudiante logra describir de varias maneras la ganancia en la parcela familiar, ejemplo: *“este punto hacia allá, es decir, a partir del punto inicia la utilidad”; “prácticamente se está librando un embarque, la ganancia es un embarque*”. Por lo anterior, se puede inferir que, en este proceso de modelación matemática desarrollado en el aula de clase, se observa en el estudiante, una fuerte inclinación por realizar el trabajo matemático a partir de la representación gráfica cartesiana. Es decir, nos referimos a lo que describen Blum & Borromeo-Ferri (2009) cuando puntualizan sobre el estilo de pensamiento visual matemático. De este modo, Ezel traduce los resultados matemáticos a los significados correspondientes al contexto del cultivo de plátano. Por lo tanto, estas matemáticas desarrolladas por el estudiante, durante el proceso de modelación, se pueden observar ajustadas a las necesidades e intereses del estudiante, con el propósito de, responder a la pregunta sobre como de deducir la ganancia en la parcela familiar. Y este proceso de modelación, en el contexto del cultivo de plátano, también le permitió conocer una nueva mirada para abordar los problemas en su vida cotidiana.

A continuación, describiremos las representaciones gráficas desarrolladas por San para describir la situación de la economía familiar en relación con el cultivo de plátano. En el caso en la parcela de San, sus padres generan los ingresos mediante la exportación y/o la venta de plátano por rechazo, ambas, de manera estratégica. Es decir, cuando la venta del plátano al mercado interno se encuentra a la baja, los padres de San prefieren exportar el plátano. Pero, se vende por rechazo cuando el pago en el mercado interno está mejor que la cotización de la caja exportada. Esta compleja situación, en el contexto, le brinda la oportunidad al estudiante de construir las siguientes representaciones gráficas en miras de deducir la ganancia y diferenciar cuál de los dos tipos de venta generan mayor beneficio para la economía familiar.

En correspondencia con lo anterior, San a diferencia de Ezel que, sólo trazó dos líneas rectas en el plano cartesiano para relacionar los ingresos y los gastos generales de la parcela, San en este sentido, seda a la tarea de trazar tres líneas rectas en el plano cartesiano con las que describe los ingresos por cajas exportadas, ingresos venta por rechazo y los gastos generales de la parcela. Generando así, a diferencia de Ezel, una línea recta adicional debido al otro tipo de venta en la parcela, venta por rechazo. Esto se puede observar en la siguiente representación gráfica:

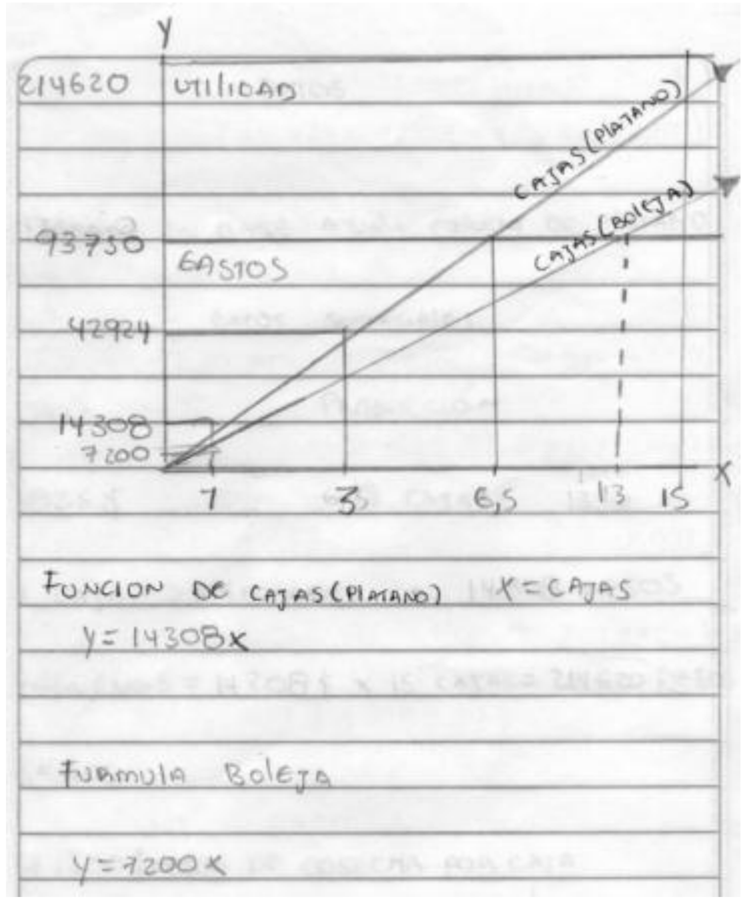


Ilustración 44 Representación de gráfica exportación vs venta por rechazo. San

Una de las líneas rectas que San trazó fue en relación a la expresión algebraica *y=14308 (x)* con el propósito de representar los ingresos por cajas exportadas. Algo similar, a lo desarrollado por Ezel en el plano cartesiano pero San sus descripciones son con base a la que se produce o exporta en una semana en la parcela. Con respecto a la otra línea, se encuentra relacionada con la expresión *y = 7200 (x),* el cual es la manera para describir la venta por rechazo que, particularmente San la llamó por el nombre de fórmula de boleja. El término de "boleja", es usado para describir un estado del plátano que no puede ser exportado debido a que no cumple con el tamaño exigido por las normas de calidad, es decir, puede estar demasiado grande y por tal razón es vendido en al mercado interno. La cantidad de plátanos que en promedio son almacenados en una caja oscilan entre 70 – 75 plátanos por caja, pero cuando el plátano es de tipo boleja sólo caben en la caja entre 30 –

35 plátanos. Por tal motivo, San describe la venta por rechazo en cajas a través de la expresión *y = 7200 (x)*, en este sentido aproxima el precio de cada caja de rechazo a $7.200 pesos. En coherencia a lo anterior, San cree conveniente particularizar al eje "*x*" con el nombre de "cajas" y trazar otra línea recta en el plano cartesiano.

Hasta este punto hemos esbozado la manera de representar los dos tipos de ingresos de la parcela de los padres de San, a través de expresiones algebraicas y líneas rectas en el plano cartesiano. Recordando que, el estudiante fue impulsado por la necesidad de deducir la ganancia en la parcela familiar, pero a la vez, se ha enfrentado a la compleja situación que en la parcela se generan dos tipos de ingresos. Esto lo describiremos a partir de la siguiente ilustración:

Profesor: *"¿Por qué utilizaron ese tipo de gráfica (*gráfica lineal en el plano cartesiano*)?"*
San: *"Nosotros utilizamos esa gráfica para saber a cuantas cajas podemos librar los gastos, y de cuantas para allá es la utilidad. Ya la línea por acá, significa lo de la boleja, lo del rechazo, que habíamos dicho si de pronto con cuantas cajas de boleja se podían librar los gastos. Aquí pusimos las cajas de boleja que equivalen a 30 plátanos, entonces pusimos que más o menos a las 13 cajas podrían librar los gastos, porque vea que en una caja de plátano que vale $14308 pesos, y la caja de boleja $7.200 pesos, si con el plátano normal la libramos con 6,5 cajas, es el doble para librarla con cajas de boleja, que nos da 13 cajas para librar los gastos."*
Profesor: *"¿Cuáles son los gastos en la gráfica?"*
San: *"La raya esta* (línea paralela al eje x indicando los gastos de $93750 pesos)*, la raya que divide las líneas en dos."*
Profesor: *¿En los gastos está incluido todo?*
San: *"No, falta el abono, fumigada y recargos. Por ahora son $93.750 pesos."*
Profesor: *"Eso quiere decir que esos gastos pueden aumentar"*
San: *"Si, porque aquí tenemos apenas unos pequeños trabajos de cada quien, pero si nosotros nos ponemos a meterle lo que es el abono, la encintada, eso se nos eleva, y*

bastante."

Profesor: ¿Q*ué pasaría con la línea de gastos?*

San: *"No quedaría por ahí, sino que subiría hacia arriba."*

Profesor: *"¿Qué pasaría si sube demasiado?"*

San: *"Eso quiere decir que habrían más gastos."*

Ilustración 45 Significados de las líneas rectas en el plano cartesiano. San

Luego después de haber trazado San la línea recta para representar los ingresos por cajas exportadas y la recta de los ingresos por venta por rechazo, trazó la tercera línea recta en el plano cartesiano para describir los gastos generales. Desde el plano, es una recta paralela al eje "*x*" el cual se conoce como una función constante o de grado cero. Esta línea corta a las otras dos líneas generando dos puntos de intersección el cual le permitió a San observar la cantidad de cajas necesarias, en cada tipo de venta, para librar los gastos generales. Es decir, para poder librar los gastos que hasta el momento los había determinado en $93.750 semanales, el punto de intersección de la línea recta con que describió los ingresos de las cajas exportadas, observó que, con 6,5 cajas libraba los gastos de la parcela, y las demás cajas, deducían que eran las ganancias. Por otra parte, el punto de intersección en relación a la línea recta de los gastos generales y la de los ingresos por venta de rechazo, el estudiante observó que necesitaba alrededor de 13 cajas para poder librar los gastos por semana.

Esta situación en el contexto del cultivo de plátano, San al representar la situación y describirla a través de líneas rectas en el plano cartesiano, también le permitió superar a lo descrito en Sierpinska (1992), la dificultad de identificar el proceso de iteración de una función en su representación y dinámica. Esto es entendido, que el estudiante a pesar que las líneas rectas sean trazadas en el papel y se observen estáticas, el estudiante las consideran dinámicas al tener una correspondencia con los sujetos de los cambios de la situación en el contexto. Este hecho se puede confirmar a partir del siguiente comentario realizado por San:

Profesor: *“¿Qué pasaría con las líneas de las cajas?”*

San: *“Se tendría que vender más cajas para poder librar los gastos. Supongamos que en un mes gaste por ahí, $ 510.000 pesos y embarcando sería $810.000 pesos, le quedaría de utilidad $ 300.000 pesos. Profe, es que como sube esta línea [de ingresos] es porque se le está metiendo a la parcela, entonces inmediatamente sube. Entonces ella va producir más y esta línea [de gastos] igual mente sube más. Mediante esa línea de gastos quiere decir que es casi imposible librar los gastos con boleja, debido que cada embarque, solo sale caja y un poquito, eso quiere decir que, se necesitaría 13 semanas para poder librar los gastos de una semana, por esa razón la gente deja la boleja para el consumo de la casa, por eso es mejor trabajar con el plátano de exportación, porque ese es el que más se produce, ese es más importante. También puede haber un problema, si el dólar baja siguen siendo los mismos gastos y hay menos ingresos con las mismas quince cajas, siendo este análisis por semana. Ejemplo. Esta línea [de los gastos] que pasa por acá se necesitarían 13 cajas para librar los gastos, eso quiere decir que sólo dos cajitas es la utilidad, son como $28.000 pesos por ahí, porque el dólar está a $1800 pesos más o menos y cada caja es pagada a 7.84 dólares. Siendo las cajas reales y el dólar reales, realizamos la fórmulas para saber a las cuantas se puede librar los gastos y porque es mejor trabajar el dólar [con precio] estable. Esta es la fórmula de las cajas [y=14308x] y esta es la fórmula de las boleja [y=7200x]. Lo que faltaría incluir más gastos de la platanera que sería el abono, la fumigada, el desflore, embolse, amarre y los jornales.*

Ilustración 46 Análisis ingresos por exportación y venta de rechazo. San

A través del análisis realizado por el estudiante, mediante relaciones entre líneas rectas en el plano cartesiano y los puntos de intersección le ha permitido generar resultados matemáticos. Con los cuales, le posibilitó deducir que la venta por rechazo no era favorable para los ingresos en la parcela familiar. Es decir que, vender el plátano tipo boleja en cajas, comparado con los ingresos por cajas exportadas, se hacía necesario producir más cajas de plátano tipo boleja. Además, San describe la falta de incluir algunos gastos como “*el abono, la fumigada, el desflore, embolse y amarre; y los jornales”*, razón suficiente, para que el estudiante continúe analizando la situación a través de los modelos lineales generados hasta el momento. Esta acción se puede comprender desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) como el subproceso de validación, entendido que cuando el modelo no satisface la solución del problema o no representa el fenómeno para el cual fue construido, el ciclo se debe repetir hasta encontrar un *modelo matemático* satisfactorio. En este caso, el estudiante reconoce que los modelos lineales no están ajustados a la situación en el contexto, al identificar la falta de incluir algunos gastos. Por tanto, retorna hasta el modelo de la situación para corroborar datos bajo el desarrollo del subproceso de construcción del problema, y por otro lado, encontró otro inconveniente: San no consideró que en la parcela también se vendían los plátanos en la modalidad de rechazo tipo plátano sencillo. Esto quiere decir que, el plátano tipo boleja no es el único vendido como rechazo. El plátano rechazo tipo sencillo es un plátano mediano que por alguna razón tampoco puede ser exportado y termina siendo vendido al mercado interno. Al incluir la venta del plátano sencillo, como rechazo, la situación le exigió a San rediseñar la representación gráfica y decide analizar la situación desde dos representaciones gráficas, de la siguiente manera:

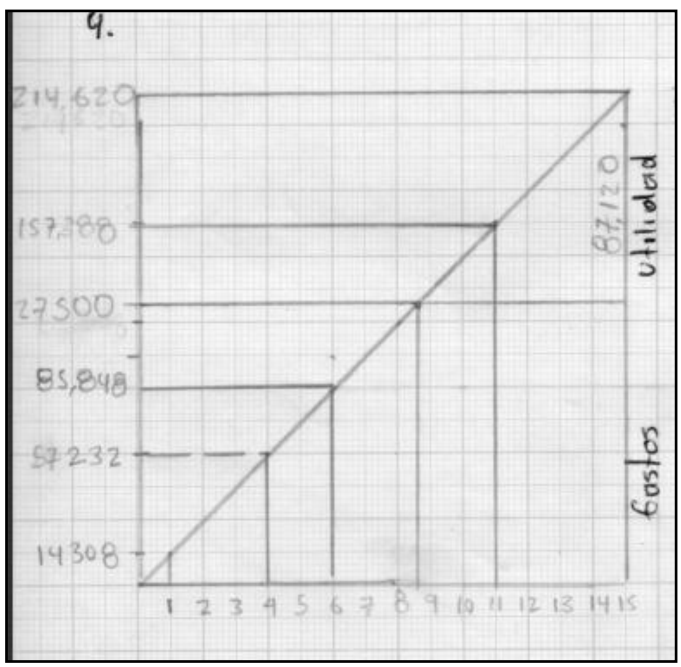


Ilustración 47 Ingresos en relación a los gastos por semana. San

El propósito del estudiante consistía en realizar un análisis de la situación en el contexto de manera amplia, con base en las modalidades de ingresos realizadas en la parcela familiar: ingresos por cajas exportadas y ingresos por venta por rechazo tipo boleja y sencillo. Por tanto, la primera representación gráfica construida por San fue similar a la construida por Ezel. La diferencia consiste en que, San presentó la información con base a una semana de producción, es decir, aun embarque. A diferencia de Ezel, que el análisis de la información lo realizó con base a un mes de producción en la parcela. En este sentido San describe lo siguiente:

[…]

San: *"Para librar los gastos se necesitan más o menos unas nueve cajas que vienen valiendo $129.300 pesos, y estas son las cantidades de cajas que se embarcan en la semana, estas son 15 cajas que vienen valiendo 220.000 pesos y esta es la fórmula que se deduce: "y" el valor que resulta de multiplicar el valor de la caja por cada caja embarcada."*

Profesor: *"San, ¿qué pasaría si la caja baja su precio?"*

San: *"La línea bajaría hacia el eje "x", entonces se necesita más cajas para librar los gastos, de igual forma la fórmula también cambia en el valor de la caja."*

Profesor*: "¿Cómo qué representaron los gastos?"*

San: *"Los gastos es "y" igual a todos los gastos, es decir, a la suma de todos los gastos."*

Profesor: *"¿Qué le pasaría a la línea de los gastos si los gastos se reducen?"*

San: *"La línea de los gastos que esta horizontal también baja hacia el eje "x"."*

Profesor: *"¿A partir de donde se libran los gastos?"*

San: *"A partir de este punto, más o menos con 9 cajas embarcadas se libran los gastos, y este pedacito de línea es la ganancia, es decir, 6 cajas más o menos es la ganancia."*

Ilustración 48 descripción de los ingresos por exportación mediante representaciones gráficas. San

Se evidencia en las descripciones verbales de San, la madera de deducir la ganancia en relación a los ingresos por las cajas exportadas de manera aproximada a partir de las relaciones entre líneas rectas en el plano cartesiano. Esto es entendiendo como una manera particular para desarrollar del trabajo matemático desde un estilo de pensamiento visual matemático (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). En este sentido, pareciera que San ya hubiera cumplido con el propósito de deducir la ganancia de la parcela. Pero durante el proceso de modelación, no solo decide deducir las ganancias, sino que también, intenta identificar cuál es el modo más conveniente de generar los ingresos de la parcela, ya sea por ingresos por cajas exportadas o ingresos por venta del plátano tipo rechazo. Por tanto, para analizar los ingresos generados por la venta de plátano tipo boleja y sencillo San construye la siguiente representación gráfica:

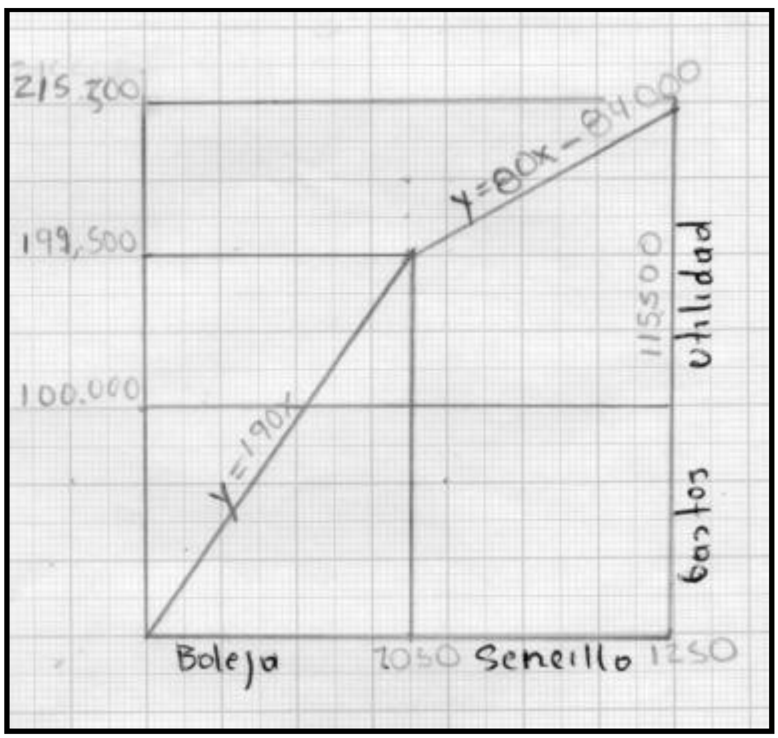


Ilustración 49 Ingreso por venta de rechazo tipo boleja y sencillo en relación a los gastos. San

La situación de la venta de plátano por rechazo tipo boleja y sencillo impulsó al estudiante aproximarse a lo que se describe en D. Hoffmann (1989) cuando se refiere a la relación de fórmulas múltiples, esto se genera, al unir dos líneas rectas en el plano cartesiano con sus respectivas expresiones algebraicas. Con esta situación, se resalta la necesidad del estudiante de construir un sistema particular de líneas rectas para analizar los ingresos de la venta por rechazo, en relación a los gastos de la parcela. El modo como fue construido este sistema particular es entendida a partir de las siguientes descripciones realizadas por el estudiante:

[…]

San: *"Aquí lo que hice fue pasar las 15 caja por boleja y por plátano sencillo, aquí se muestra es que eran $100.000 pesos de gastos, estas líneas son similares a las del otro gráfico, sino que aquí, esta línea tiene la misma fórmula y precio es por caja de boleja. Entonces ya no es por caja sino por cantidad. Que pasa hay, aquí yo vine y le puse a que sumará lo que se vende por plátano sencillo a $80 pesos, aun que, eso a veces vale como $70 pesos a veces $50 pesos. Y yo me imagino porque dirán que está más abajo (*refiriéndose a la línea de plátano sencillo*) porque el plátano sencillo no vale lo mismo que la boleja. El plátano boleja esta $190 pesos y el sencillo a $80 pesos, y el número que está detrás de la fórmula es la multiplicación de las bolejas para que nos diera la fórmula, la suma de las dos líneas me dan más o menos $210.000 pesos."*

Ilustración 50 Modo de representar fórmulas múltiples en una situación en el contexto. San

Con lo anterior podemos decir que, la situación del contexto del cultivo de plátano, con respecto a la venta por rechazo tipo boleja y plátano sencillo, impulsó al estudiante a lo que el mismo llamó de manera particular "*sumar dos líneas rectas*". De tal manera que, lo aproxima al concepto de relación de fórmulas múltiples el cual se describe en D. Hoffmann (1989). Por otra parte, San al haber ajustado uno de los modelos con el que describe la venta de plátano sencillo, es decir, la expresión $y = 80\ (x)$ la transforma por $y = 80\ (x) - 84000$ para trazar la línea recta en relación a la línea de venta por boleja, expresada a través $y = 190\ (x)$. Esta acción, es entendida cuando Blum & Borromeo-Ferri (2009) se refiere al estilo de pensamiento matemático analítico (simbólico), refiriéndose a que los pensadores analíticos poseen la capacidad de comprender y expresar hechos matemáticos a través de expresiones simbólicas o verbales, describiendo paso a paso los procedimientos para solucionar los problemas. Por otra parte, San ha desarrollado el subproceso de trabajo matemático tanto un estilo de pensamiento matemático visual como analítico, de modo que, San busca maneras de combinar el estilo de pensamiento visual y analítico al mismo tiempo, estando en correspondencia al estilo de pensamiento matemático integrado (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). También se supera, en lo descrito en Sierpinska (1992) cuando se refiere la dificultad que tiene el esudiante en identificar el proceso de iteración de una función en su representación gráfica y dinámica. En esta mirada San supera esta dificultad al describir la dinámica de las lineas rectas en el plano cartesiano, y además, en las tranformaciones realizadas en una expresión algebraica. Hecho evidente, cuando el estudiante le adiciona un término independiente por el valor de -84000 a la expresión $y=80(x)$, concluyendo con la siguiente expresión: $y = 80(x) - 84000$.

La solución del problema, proviene de los argumentos construidos a partir de las interpretaciones de los resultados matemáticos. Esto se puede observar en las siguientes descripciones realizadas por el estudiante:

San: *"En este caso, para convertir un plátano sencillo en boleja se demora dos semanas más. Yo creo que mientras se espera que el plátano sencillo se convierta en boleja es mejor venderlo por sencillo [exportarlo], debido a las dos semanas que se esperan, entonces ¿de dónde se va a sacar la plata para comer y sostener los gastos y pagar los servicios? Yo digo que es mejor venderlo por embarque [exportarlo] porque a lo menos lo pagan más fijo, aunque puede bajar pero el dólar baja de a poquito, no tanto como baja la boleja, que baja de $200 pesos a $70 pesos, entonces imagínense!. Es mejor negocio venderle el plátano a la comercializador. Por ejemplo, nosotros tenemos la boleja en la gráfica a $200 pesos cada una y hoy la están pagando $180 pesos cada una, esto quiere decir que la línea se cae (*queriendo decir que se inclina hacia el eje *x) y el plátano sencillo lo tenemos en la gráfica a $80 pesos cada uno, pero hoy lo están pagando a $40 pesos, también esa línea se cae. Entonces los gastos suben y los ingresos bajan dando pérdidas. Porque hay una temporada que hay mucho plátano entonces es mejor empacarlo y vendérselo a la comercializadora, porque el plátano por rechazo lo comprarían muy barato y esto haría que la parcela diera pérdidas. En cambio, a uno le reciben todas las cajas que salgan de la parcela en la comercializadora, y además, el dólar es más o menos estable. A diferencia, cuando es en boleja y hay demasiada, baja mucho. Entonces es mejor venderlo en cajas así el dólar que a veces baja pero no tanto. Por lo tanto, ganancia es igual a los ingresos menos los gastos entonces son $127.200 pesos lo que se ganan por semana."*

Ilustración 51 Construcción de argumentos de solución de problema. San

El uso de los modelos lineales en una situación en el contexto del cultivo de plátano, le permitió al estudiante observar dos tipos de fenómenos de manera simultánea y construir los argumentos para comprender el problema. En este sentido el estudiante deduce la ganancia por un valor de $127.200 pesos por semana, eligiendo la exportación del plátano como la modalidad de mayor estabilidad en los ingresos, aun que describe que hay temporadas que genera mayor utilidad la venta por rechazo, pero el estudiante considera a bien la estabilidad que ofrece la fluctuación del dólar el cual describe que no es muy alta, a diferencia como fluctúa el valor de los plátanos tipo rechazo en el mercado interno. Los modelos lineales en relación con las representaciones gráficas, son utilizados por el estudiante para apoyar el análisis de la situación en el contexto. Podemos decir que, un proceso de modelación en situaciones en el contexto del cultivo de plátano el estudiante integra las expresiones algebraicas con sus representaciones gráficas durante el proceso de modelación mediante el fenómeno abordado.

4.5 Las representaciones gráficas: Una manera visual de comprender una situación en el contexto de la energía prepago

Hasta el momento hemos realizado las descripciones del uso de los modelos lineales y las representaciones gráficas de Ezel y San desde el contexto del cultivo de plátano, en la necesidad de deducir las ganancias en la parcela familiar. Pero en los estudiantes se observó, que a partir de los análisis realizados durante el proceso de modelación construyeron argumentos orientados a modificar aspectos de la actividad productiva para mejorar el ingreso económico familiar, es decir, estos argumentos están orientados por los estudiantes a reestructurar algunas actividades de exportación de los plátanos para mejorar el bienestar del hogar. A continuación, describiremos la manera de hacer uso de los modelos lineales y las representaciones gráficas desde el contexto de la energía prepago, desarrollado por Rita para comprender el excesivo consumo de energía eléctrica en su hogar. Esto lo describiremos a partir de la siguiente ilustración:

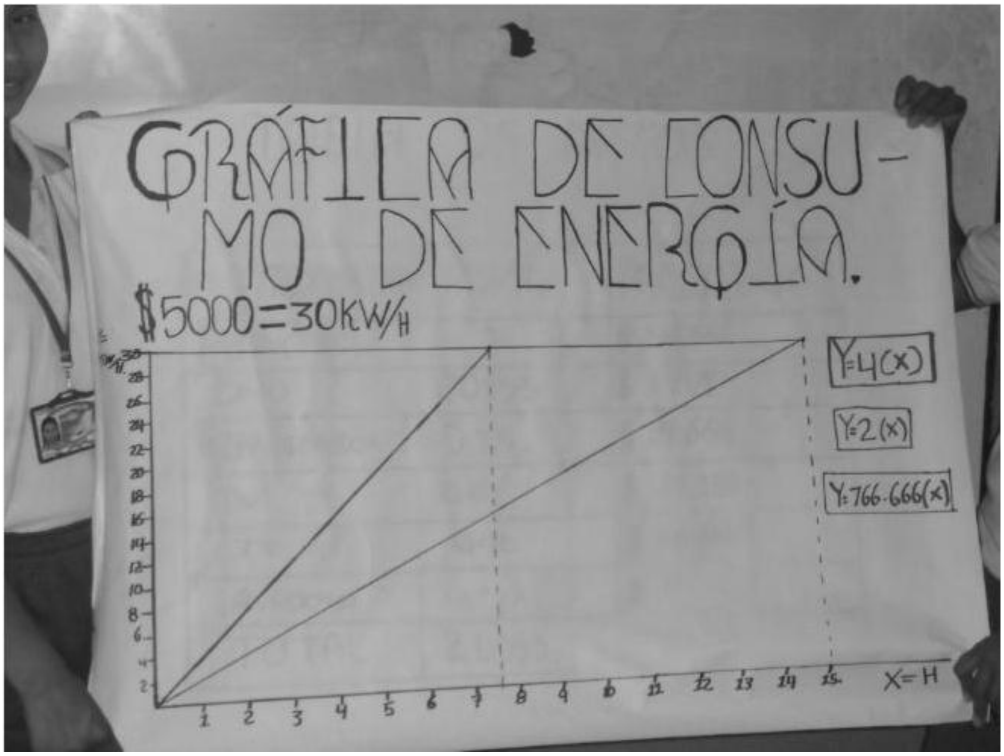


Ilustración 52 Representación gráfica del consumo de energía del congelador y nevera. Rita

Al representar el consumo de energía tanto del congelador y la nevera a través de líneas rectas en el plano cartesiano, esto le permitió a Rita el desarrollo del subproceso visto desde el ciclo de modelación de Blum & Borromeo-Ferri (2009) llamado trabajo matemático. Los cálculos fueron realizados mediante las expresión algebraicas del consumo del congelador $y = 4(x)$ y de la nevera $y = 2(x)$. Luego, los resultados matemáticos, fueron trasladados por Rita hacia el modelo $y = 166{,}66(x)$ para calcular el costo de la energía de ambos electrodomésticos. Estos valores fueron confrontados a partir de los puntos de intersección generados por las líneas rectas en el plano cartesiano, permitiéndole a la estudiante aproximarse a lo que se conoce en las matemáticas como el punto de equilibrio. Esto se evidencia, cuando la línea paralela al eje *"x"* la cual está describiendo crédito de la recarga de energía, se choca con las dos líneas que describen el consumo del congelador y la nevera. Por lo tanto, cuando un estudiante combina trabajo matemático entre representaciones simbólicas y gráficas, se entiende a partir de Blum &

Borromeo-Ferri (2009) como un estilo de pensamiento matemático integrado, al combinar el estilo de pensamiento matemático visual y analítico. Así que los resultados matemáticos Rita los describe de la siguiente manera:

[…]
Rita: *"Para una recarga de energía de $ 5.000 pesos que contiene 30 kilovatios hora, el congelador sólo tardaría 7 horas y media para gastarse la recarga, más la nevera necesitaría 15 horas."*

Ilustración 53 Significado de los resultados matemáticos. Rita

La solución del problema es planteado por la estudiante en la perspectiva de reducir el consumo de energía. Esto fue posible durante un proceso de modelación en el aula de clase para reproducir los modelos lineales necesarios en la mirada de deducir el electrodoméstico el cual generaba un alto consumo de energía agotando el crédito de la recarga de manera rápida. La traducción de los resultados matemáticos hacia la situación en el contexto se puede evidenciar en la siguiente parte de una entrevista:

[…]
Profesor: "*Entonces la solución que le distes a tu familiar ¿cuál fue?"*
Rita: *"A profe, como observamos el congelador gastaba más [energía] si ya teníamos la nevera los hielos como aproximadamente diarios se vendían 5 podíamos meterlos en la nevera, en la parte de arriba del congelador que ella trae. Y el congelador, pues, ya no lo utilizáramos más, a parte ya estaba muy viejo yo le dije que lo vendiera y prácticamente le abriera la venta, y así, utilizaría un sólo electrodoméstico para gastar [energía], o sea, ya quedaría sólo la nevera porque antes se utilizaban ambos."*
Profesor: "*¿Cuál era la diferencia en consumo de los dos electrodomésticos?"*
Rita: "L*a diferencia era mucho profe, el congelador consumía 4 kilovatios hora y por ahí de 2 kilovatios hora por lo que la nevera no consumía tanto."*

Profesor: "*¿Cuál fue la primera pregunta?"*

Rita: "*¿Por qué se gastaba tan rápido la recarga de energía?"*

Profesor: "E*ntonces, ¿qué información le brindaste a tu familiar?"*

Rita: "*Me toco explicarle a mi Tía para que pudiera comprender, porque no le podía decir, ¡Tía vea el problema es el congelador es porque esta gasta más!, tenía que explicarle el por qué gastaba más energía o por qué llegue a la conclusión que el congelador se gastaba aproximadamente 4 Kilovatios hora por hora, siendo esto mucho! Y 30 kilovatios hora no daba, o sea, el problema era el congelador."*

Profesor: "*¿Tú familiar aceptó la solución?"*

Rita: "S*i, porque obviamente no siendo otra persona al ver este resultado o esta inclinación [en la recta] se va dar cuenta que gastaba mucho y a nadie le conviene perder plata, ¡de poderla ganar!"*

Ilustración 54 Traducción de resultados matemáticos. Rita

Rita concluye que el electrodoméstico que más consumía energía era el congelador, llevando esta solución a su hogar y transformando la manera de usar este servicio público de energía eléctrica. Y a la vez, mejora la perspectiva de la venta de las cubetas de hielo como manera de generar recursos económicos adicionales para el hogar, al utilizar la nevera para congelar las cubetas de hielo.

4.6 Un proceso de modelación matemática desde las situaciones del contexto: Una motivación para el estudiante en el aula de clase de matemáticas

No sólo un proceso de modelación matemática les posibilita mejorar asuntos de la economía familiar, sino también, el gusto por las matemáticas desarrolladas a través de las situaciones en los contextos. Dándonos a entender, sobre la importancia de abordar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase a partir de situaciones conocidas por los estudiantes. Esto se puede evidenciar desde las siguientes entrevistas finales:

Profesor: "*¿Qué es lo que más te gusta de trabajar de esta forma las matemáticas?"*

Rita: "L*o que más me llama la atención es que trabajamos matemáticas desde nuestra vida cotidiana, o sea, las trabajamos como la comprendemos, no ese poco de números que uno no sabe que significa. Por ejemplo, aquí utilice los números y los sumé para llegar el resultado hasta llegar hasta los 30 kilovatios, pero, me divertí haciéndolo desde mi vida cotidiana porque es algo que me llama la atención."*

Profesor: "*¿Te llamó la atención el estudiar el consumo de energía de los electrodomésticos?"*

Rita: "S*i, ¡bastante¡ porque es algo que utilizo a diario en los bombillos, el televisor, la nevera, la licuadora, el ventilador, o sea, todos los utilizo siempre. Pero en realidad, no sabía que estaba haciendo con todos esos electrodomésticos, cuanta plata se estaba perdiendo o que plata podría ganar al darle un buen uso. Es decir, tal vez no nos damos cuenta del uso que le estamos dando a los electrodomésticos o, del robo que nos estamos haciendo así mismos porque se le puede llamar robo. Porque si usted prende el televisor y se va ver otra cosa por allá y lo deja prendido, usted puede venir y seguir viendo, el tiempo que estuvo prendido sin que nadie lo viera es energía, es plata que usted está perdiendo."*

Ilustración 55 Entrevista final. Rita

Profesor: *"¿Te gustó trabajar las matemáticas de esa forma?"*

Ezel: *"Si, una forma como le diría yo, una forma más innovada, más práctica, más cercana al contexto que nos rodea, algo que nos motiva y algo que estamos viendo en nuestro alrededor. Es porque si estamos viendo esto, con más ganas lo hago, me gustaría saber y afianzar más lo que tengo a mi alrededor."*

Profesor: "*¿Qué crees tú de cómo funcionan las matemáticas en este proceso? (referido al proceso de embarque de plátano)"*

Ezel: *"Haber, la matemática en este medio, [ajustada] a mi contexto es una forma mejor,* *porque no estamos viendo números y unos ejercicios y tenga! y hágame esto, no, simplemente que la matemática se ve de otra forma que usted va asimilando un contexto por medio de la matemática y lleva a otra realidad, y así va construyendo fórmulas y va consiguiendo datos, no una forma de tantos ejercicios tráigame esto, no! Usted mismo va deduciendo, va planeando lo que va hacer y qué es lo que necesita, y uno se puede ir a su matemática."*

Profesor: *"¿Qué fue lo que más te llamó la atención del uso de las matemáticas en tu contexto?"*

Ezel: *"Haber, lo que más me llamaba la atención, ya finalizando por ahí, fue el contexto que se vive como productor con todo lo que se realiza, porque a simple vista se ve como sencillo, aparentemente, no se ve que llevara tantos gastos y eso dale, dale, dale y eso me llamo la atención, porque uno se descuida ve como que hay quiebra y me llamo la atención porque hay que analizar. Eso fue lo que más me llamó la atención."*

Profesor: *"¿Estás matemáticas te servirían para ayudar a tus padres en la parcela?"*

Ezel: *"Claaaaaro!!!!! Profe, porque es una nueva matemática para mí, es una nueva forma de como proyectar, de cómo calcular y todo eso."*

Ilustración 56 Entrevista final. Ezel

Vale la pena resaltar en Rita, Ezel y San, el interés por usar el conocimiento matemático al ser impulsados por las necesidades de mejorar la economía de sus familias. Se observa que la motivación no sólo se puede brindar a partir de las orientaciones del profesor en el aula de clase, sino que, al vincular los problemas de los estudiantes, especialmente los de sus hogares, esto parece estimular los deseos de usar las matemáticas. De tal manera que, un proceso de modelación matemática con estudiantes de un contexto campesino de la región de Urabá, está orientado a fortalecer el uso de las matemáticas, y a la vez, les permite una nueva manera de observar los asuntos que desestabilizan el bienestar económico del hogar.

5 CONCLUSIONES

Con los resultados esbozados en el capítulo anterior el cual emergieron a partir del análisis de los datos cualitativos con el propósito de responder a la pregunta *¿De qué manera los estudiantes del grado décimo desarrollan un proceso de modelación matemática en una situación del contexto del cultivo de plátano al generar modelos lineales?* A continuación, describiremos las conclusiones.

5.1 Un proceso de modelación en una situación del contexto

Las situaciones en el contexto analizadas en este estudio, guardan una estrecha relación con los asuntos de la economía familiar en las comunidades campesinas. El problema para iniciar a desarrollar un proceso de modelación en el aula de clase no es planteado por el profesor ni el estudiante. Este emerge a partir de las problemáticas concebidas al interior de los hogares campesinos, y es el estudiante, que asume el problema llevándolo al aula de clase para hacer a abordado bajo un proceso de modelación. Esto con el propósito de encontrar los argumentos necesarios para solucionar el problema.

El estudiante mentalmente al comprender el problema en el interior de una situación en el contexto, le permite exteriorizar la información necesaria para describir los diferentes aspectos y condiciones que rodean el problema. Esto se presenta de manera natural gracias a que conoce la problemática al interior de sus hogares. Como consecuencia, construye el modelo de la situación mediante significados que describe magnitudes, y que más adelante se convierten en cuantificables. Estos significados fueron a través de cantidades asociadas a los números para desarrollar cálculos matemáticos. En ese momento, Los subprocesos de mayor intervención para generar el modelo de la situación fueron el subproceso de construcción y el trabajo matemático, al igual que, el subproceso de validación el cual fue desarrollado a la hora de construir cada modelo que conformó las distintas rutas del proceso de modelación. Al mismo tiempo, es una oportunidad para los estudiantes identifiquen los sujetos que cambian en ese mundo de los cambios y describir su estado a través de cantidades numéricas, como paso importante para experimentar la noción de función. Aun que algunos cambios no son percibidos a través de la experiencia en la situación en el contexto, sino que, se hace necesario el uso de dispositivos tecnológicos como herramientas que permita acceder a esos cambios, donde la percepción de las personas no alcanza a identificarlos.

El estudiante al tener una visión amplia del problema en la situación en el contexto desde el modelo de la situación, decide clasificar la información relevante en el sentido de la necesidad de resolver el problema llevándolo a rediseñar este modelo. Esto es entendido como el desarrollo del subproceso de simplificación y estructuración a partir del modelo de la situación para dar origen al modelo real. Es decir, el estudiante profundiza en los datos del modelo de la situación y reflexiona sobre cuál información es relevante para solucionar el problema, y con ésta información construye una versión simplificada del modelo de la situación, es decir el modelo real.

La traducción del mundo real hacia las matemáticas, es decir, el desarrollo del subproceso de matematización, fue posible al generar correspondencia entre los elementos del modelo real con los elementos que conformaron los modelos lineales. Esta correspondencia se realizó mediante el uso de las letras "x" y "y" para representar las magnitudes variables involucradas y sus relaciones desde la situación en el contexto.

El trabajo matemático desarrollado desde una situación en el contexto se observó desde tres estilos de pensamiento matemático. El visual, el cual es utilizado por los estudiantes con base a las representaciones gráficas para deducir resultados matemáticos. Es decir, que a partir del plano cartesiano en las relaciones entre puntos, líneas rectas, tramos de líneas y en correspondencia a la situación en contexto, les brindó a los estudiantes la oportunidad de hacer cálculos para hallar los resultados matemáticos. El otro estilo de pensamiento matemático es observado desde el punto de vista analítico, en este caso, los estudiantes realizaron cálculos matemáticos a partir de las relaciones simbólicas construidas a través de letras, con las cuales le posibilitó representar las variables en correspondencia a los cambios observados en la situación en el contexto. Y el estilo de pensamiento integrado (visual – analítico), el estudiante desde la situación en el contexto desarrolla el trabajo matemático utilizando los dos estilos de pensamiento al mismo tiempo. Pero se observa en los estudiantes mayor inclinación por desarrollar el trabajo matemático bajo el estilo de pensamiento visual, llevando a los modelos lineales hacer parte de un conjunto de elementos relacionados para analizar una situación en el contexto.

Los estudiantes al deducir los resultados matemáticos, generados desde cualquier estilo de pensamiento, estos fueron validados frente a la lógica de la situación en contexto. Es decir, analizaron la coherencia de los datos producto del trabajo matemático en correspondencia a la situación, incluso, llegaron a no estar de acuerdo con algunos resultados matemáticos. Por lo tanto, realizaron análisis en retrospectiva para comparar los datos que fueron considerados durante el proceso de modelación, llegando a modificar los modelos lineales hasta que la información fuera coherente a la situación en el contexto.

La solución del problema, surge a partir de la construcción de los argumentos necesarios para favorecer la familia en la sociedad. En este sentido, si la solución no correspondía a tal fin o no era coherente con la situación en el contexto, nuevamente el estudiante validaba información hasta que la solución del problema fuera satisfactoria.

Por lo tanto, un proceso de modelación matemática en relación a las situaciones familiares y sociales, es considerado como una manera innovadora de hacer uso diferente de las matemáticas en el aula de clase. Al permitir integrar las representaciones gráficas, los modelos lineales y la situación en el contexto para hallar la solución del problema. Aunque, es la primera vez que los estudiantes realizan este proceso, vale la pena resaltar el papel de la situación en contexto que impulsó a los estudiantes a producir unas matemáticas para satisfacer sus necesidades de comprender los asuntos relacionados con la economía familiar.

5.2 Un modelo de solución: como modelo adicional en el ciclo de modelación matemática

La vida cotidiana de los estudiantes existen situaciones el cual los motivan a desarrollar un proceso de modelación matemática en el aula de clase. Estas situaciones son percibidas por los estudiantes como una necesidad de resolver el problema en relación a las dificultades de las familias, mediante argumentos construidos a partir del uso de los modelos lineales. Cada modelo lineal, es producido por los estudiantes para describir un fenómeno que percibe desde la experiencia o mediante el uso de herramientas tecnológicas. Esos cambios experimentados, son representados mediante líneas rectas en el plano cartesiano y/o expresiones algebraicas, posibilitando observar y analizar otros factores que intervienen en la situación en el contexto.

La relación entre líneas rectas en el plano cartesiano, es una manera de construir una correspondencia con la situación en el contexto y analizar un comportamiento de un fenómeno en relación a otro. De tal manera, la linealidad cobra significado a partir de las expresiones verbales ligadas al contexto cotidiano del estudiante. En ésta mirada las expresiones algebraicas con las que el estudiante representa los modelos lineales son relegadas, hasta cierto punto, por los movimientos de las líneas rectas en el plano cartesiano. Es decir, los estudiantes ven conveniente desarrollar el trabajo matemático y simulaciones de la situación en el contexto a partir de las representaciones gráficas cartesianas. En este caso, Las expresiones algebraicas son asumidas con el nombre de fórmulas y son utilizadas para hallar valores exactos, cundo surge la necesidad de hallar el valor de la variable independiente, siendo el uso de las letras “x” y “y” como los únicos símbolos considerados para representar las variables, reflejándose en este sentido, la insistencia de la enseñanza de la escuela en apoyarse sólo en usar esas letras para representar una relación funcional.

Los anteriores elementos, fueron considerados por los estudiantes en un proceso de modelación al abordar una situación en el contexto, al observarse la manera de desarrollar el subproceso de matematización para generar los modelos lineales, los cuales son representados a través de expresiones algebraicas e hicieron parte de un conjunto de elementos para desarrollar el trabajo matemático. Estos resultados matemáticos, producto de ese trabajo matemático, fueron interpretados a la luz de la situación en el contexto y se perciben como elementos correspondientes a los argumentos para solucionar o contrarrestar el problema. En este sentido se observa que, el subproceso de interpretación a la medida que se va desarrollando el ciclo de modelación reproduce a lo que podemos llamar como un modelo de solución.

Un modelo de solución está construido para describir la manera de contrarrestar el problema en la situación en el contexto, así, como el modelo de la situación describe el problema de manera general. El modelo de solución orienta a modificar la manera de pensar y actuar frente las actividades relacionadas con una situación en el contexto, posibilitando favorecer a las familias en la sociedad. En caso tal, este favorecimiento no es percibido por el estudiante, esto lo lleva a repetir el ciclo nuevamente.

El modelo de solución no está contemplado en el ciclo de modelación, debido a que sólo se encuentran contemplados en el ciclo el modelo de la situación, modelo real y modelo matemático. Desde esta perspectiva postulamos, un modelo de solución como una manera de reflejarse los diferentes argumentos necesarios que modifican ciertos conocimientos y maneras de actuar en una situación en el contexto, en la mirada de favorecer la familia en los contextos sociales.

5.3 Una aproximación a la noción de función lineal

No ha sido nuestro objetivo en este estudio describir las condiciones de aprendizaje del concepto de función lineal, sino, permitirle a los estudiantes por medio de un proceso de modelación matemática y una situación del contexto, aproximarse a la noción de éste concepto matemático a partir de la elaboración de tablas de doble entrada, representaciones cartesianas y expresiones algebraicas el cual se vieron representados los modelos lineales.

Se observa interesante el proceso de modelación al abordar una situación en el contexto en el aula de clase de matemáticas, porque es una manera diferente de las técnicas de transmitir las soluciones de problemas con base a modelos idealizados. La modelación como proceso pasa a ser un método que estructura la situación en el contexto en relación al conocimiento matemático de los estudiantes, exige mayor esfuerzo en la lectura de la situación en el contexto para el profesor que para los estudiantes. Debido a que, ellos presentan mayor experiencia en los asuntos relacionados con el fenómeno de su vida cotidiana, en cambio, el profesor debe pasar por un proceso de interpretación del contexto que ha elegido el estudiante para desarrollar el proceso de modelación, como también las herramientas tecnológicas utilizadas. Esto con el fin de no desorientar a los estudiantes al brindar la orientación estratégica necesarias en el aula de clase en relación al contexto abordado.

Los estudiantes desde la situación en el contexto percibieron los cambios y las relaciones entre ellos interesándose en explicarlos en relación al problema, esto es visto como una oportunidad para usar inicialmente el conocimiento acerca de las funciones en la explicación de los fenómenos de la vida cotidiana. Los modelos lineales describen por un lado algunos aspectos de la función lineal, y por el otro, las relaciones que se observan en la situación en el contexto. Pero estos también se observaron como herramientas para representar distintas situaciones en el contexto, es decir, los modelos lineales fueron transformados sin perder la linealidad para describir otra situación relacionada al problema.

La presentación de la situación en el contexto no se encontraba idealizada para hallar una respuesta única. Esta situación estuvo sujeta a las consideraciones del estudiante durante el desarrollo del proceso de modelación, de tal manera que, al generar los modelos lineales fue producto de las distintas discusiones en el aula de clase y construcciones de los argumentos necesarios para solucionar el problema. Argumentos cargados de orientaciones que modificarían la manera de realizar ciertas actividades en la situación en el contexto.

No es pre-requisito la introducción de la definición del concepto de función lineal antes de iniciar a desarrollar un proceso de modelación para generar los modelos lineales desde una situación en el contexto. En este caso, el papel de la situación consintió en llevar a los estudiantes a percibir y verbalizar los sujetos de los cambios, hasta describir no sólo esto cómo cambia, si no también qué cambia. Brindándole la oportunidad de adquirir cierta flexibilidad en el uso y construcción de expresiones algebraicas y representaciones gráficas para describir los cambios. En esta medida, la situación en el contexto promovió el uso de métodos matemático, permitiéndoles a los estudiantes identificar el proceso de iteración de una función en su representación gráfica y dinámica, descritas mediante las expresiones verbales ligadas a la vida cotidiana.

5.4 Propuesta para el aula de clase de matemáticas

Cuando es desarrollado un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto, existe una fuerte inclinación por parte de los estudiantes de involucrar las problemáticas que se generan en el núcleo familiar. Esto permite que emerja el problema en el aula de clase e iniciar el proceso modelación. De tal manera que, las diferentes actividades y momentos que se resaltan durante el desarrollo de esta propuesta en el aula de clase fueron las siguientes:

Actividades	Momentos
Discusión entre los estudiantes en el aula de clase	Describir la situación en el contexto
Exteriorización y Exploración para generar información en relación al problema	Análisis de la situación y construcción
Reducción de la información de la situación en el contexto	La simplificación/estructuración de la información
Identificar el uso de los sistemas de representación	Identificación de los cambios a través de los sistemas de representación de manera particular
Construir gráficas e interpretación de dependencia entre variables	Traducción de una expresión verbal a una representación gráfica
Correspondencia entre el contexto y las variables	Los modelos lineales
Contrastar el modelo a la luz de la situación el contexto	Reflexionar sobre el modelo desde una mirada en retrospectiva – Validar los modelos: trabajo matemático; interpretación de resultados
Solución del problema	construcción de argumentos de solución del problema
Presentación los modelos y resultados en aula de clase	Exposición y discusión

5.5 Para futuras investigaciones

En este estudio, el cual tuvo como propósito analizar un proceso de modelación matemáticas desde una situación en el contexto de los estudiantes de un sector de la región de Urabá. Con esto, Se buscó contribuir a la línea de investigación de la Modelación Matemática en Colombia, partiendo de los aportes y reflexiones del grupo EDUMATH y la Recomem, con la mirada que este proceso sea tenido en cuenta en las prácticas de nuestras aulas de clases. En un futuro las próximas investigaciones se podrían realizar referentes a:

- La caracterización de un modelo idiosincrásico desde una situación en el contexto.
- La producción de modelos lineales en una situación en el contexto con la ayuda de software educativo (e.g. GeoGebra).
- La caracterización del *contexto inmediato* o del aula de clase, *contexto escolar* o contexto institucional, *contexto extraescolar* o contexto sociocultural desde un enfoque educativo de modelación matemática.

5.6 Divulgación del trabajo de investigación

Ponencias:

- ICTMA 16 Conference, held on 14-19 July 2013 hosted by Regional University of Blumenau - Brazil, Blumenau at Palace Hotel Himmelblau. Analysis of a school production about linear models in the context of energy prepaid.

- V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Análisis de una producción escolar de una producción de modelos lineales en el contexto del cultivo de plátano. Universidad de Medellín. Mayo 8, 9 y 10 de 2013.

- IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. El papel de las situaciones en contexto: El caso del cultivo de plátano en la producción de modelos matemáticos. Universidad de Medellín. Mayo 5. (2012).

- 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME-14. Modelación matemática en el aula clase: una producción de modelos lineales desde el contexto del cultivo de plátano. Los días 9, 10 y 11 de octubre de 2013 en la Universidad de Atlántico, Barranquilla-Colombia.

- VIII Foro Educativo Municipal de Turbo – Antioquia. Por la formación de ciudadanos políticamente responsables. 28 de septiembre de 2012 en el Auditorio Guillermo Gaviria Correa de la sede Sagrado Corazón de Jesús.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos(as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *Revista EMA*, *10*(2 y 3), 375-412.

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*, 40-92.

Berrío, A. (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hace los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo de café.* Medellín, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática Santillana, 16*, 105-125.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. *National Center for Mathematics Education*, 145-159.

Blomhøj, M., & Carreir, S. (jun de 2009). Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. 252.

Blomhoj, M., & Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM, 38*(2), 163-177.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education: Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*, 45-58.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th (ICMI) Study*. Springer.

Correa, M., & Gallo, R. (2005). Modelo matemático para la determinación de las tarifas sociales destinadas a los clientes residenciales del servicio eléctrico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 828-833.

D. Hoffmann, L. (1989). *Cálculo aplicado para administración , economía, contaduría y ciencias sociales.* McGraw-Hill.

Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (2010). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Springer.

Gomez, W. (2011). Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la comprensión del concepto de función lineal. Bogota, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

González, F. E., & Diaz, M. M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *13*.

Hein, N., & Biembengut, M. (mar de 2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno*. Colegio Universitario de Puntarenas, Puntarenas, Costa Rica.

Hitt, F. (2001). El Papel de los Esquemas, las Conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática. *INICIACION A LA INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LA MATEMÁTICA. HOMENAJE AL PROFESOR MAURICIO CASTRO*.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo-Ferri, R., & Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling — Preface. En *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: Ictma14* (pág. 1). Springer.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). *Mathematics education as design science* (Vol. 37). Zentralblah fur Didaktik der Mthematik.

Londoño, S. M., & Muñoz, L. M. (2011). La modelación matemática: Un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Londoño, S. M., Muñoz, L. M., Jaramillo, C. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2011). Una aproximación a la noción de ecuación lineal.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas* . Bogota, Colombia: Ministerio de Educacion.

MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencia.* Bogota, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., & Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: the interaction of culture and practice. *Kluwer Academic Publishers*, 167-183.

Morales, P. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de historia de las matemáticas*.

Posada, F. A., & autores, o. (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* (Primera, Ed.) Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.

Quintero, R., Ruiz, D., & Terán, R. (2006). Las interpretaciones del síimbolo "X" en los polinomios. *EDUCARE - Investigación arbitraria, 10*, 315-326.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. (16), 141-155.

Sierpinska, A. (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (E. Dubinsky, & G. Harel, Edits.) Mathematical Association of America.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM, 38*(3), 247-254.

Sriraman, B., Kaiser, G., & Blomhøj, M. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM, 38*, 212-213.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 75-87.

Trigueros, M., Ursini, S., & Lozano, D. (2000). La conceptuaclización de la variable en la enseñanza media. (12, Ed.) *Educación Matemática*, 27-48.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. 134--148.

Villa-Ochoa, Bustamante, Q., Berrio, A. D., Osorio, C., & Ocampo, B. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemáticas: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educagao em Ciencia e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación matemática como proceso en el aula de las matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A., Bustamante, C. A., & Berrio, M. (2010). Sentido de Realidad en la Modelación Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*.

Villa-Ochoa, J. A., Ruiz, V., & Héctor, M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 1-21.

ANEXOS

Consentimiento de participación

Consentimiento de Participación

Yo Marisol Cubides Florez. estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Una producción de modelos matemáticos en el proceso del cultivo y embarque de plátano" que es conducida por las profesor José Luis Bossio Vélez, estudiantes de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa el Dos. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Analizar las construcciones de modelos matemáticos inmersos en la situación de cultivo y proceso de embarque con estudiantes del grado decimo. Permitiendo desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo frente a situaciones de la vida del estuante.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico copiando2010@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación.

José Luis Bossio V.		24/VI/2011
Nombre del investigador	Firma	Fecha
Marisol Cubides F.		
Nombre del participante	Firma	Fecha
Blanca elvia Florez		
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

Consentimiento de Participación

Yo DIBISR ANDRSS VEGA USMA estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Una producción de modelos matemáticos en el proceso del cultivo y embarque de plátano" que es conducida por las profesor José Luis Bossio Vélez, estudiantes de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa el Dos. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Analizar las construcciones de modelos matemáticos inmersos en la situación de cultivo y proceso de embarque con estudiantes del grado decimo. Permitiendo desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo frente a situaciones de la vida del estuante.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico copiando2010@gmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación.

José Luis Bossio		24/10/2011
Nombre del investigador	Firma	Fecha
DIBISR ANDRSS VEGA U.	DVU	
Nombre del participante	Firma	Fecha
Enrrique Vega	Enrrique Vega	
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

Consentimiento de Participación

Yo SANTIAGO ACEVEDO ALVAREZ estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "Una produccion de modelos matematicos en el proceso del cultivo y embarque de platano" que es conducida por las profesor Jose Luis Bossio Velez, estudiantes de maestria de la Facultad de Educacion de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa el Dos. Entiendo que mi participacion es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razon y sin sufrir ninguna penalizacion. Puedo pedir que la informacion relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es Analizar las construcciones de modelos matemáticos inmersos en la situación de cultivo y proceso de embarque con estudiantes del grado decimo. Permitiendo desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo frente a situaciones de la vida del estuante.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educacion Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clase y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante sera confidencial. La información sera guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitira el acceso a la informacion bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

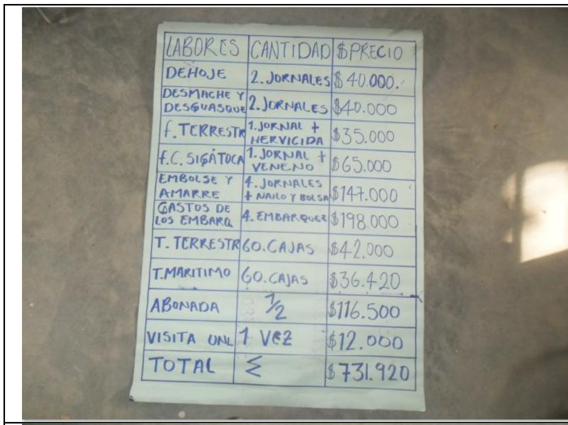
Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a traves de correo electronico copiando2010@gmail.com

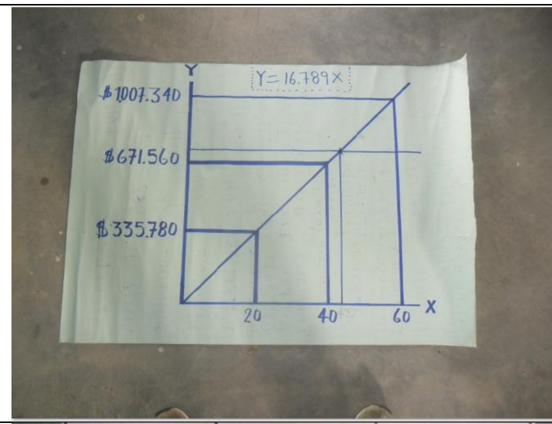
Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

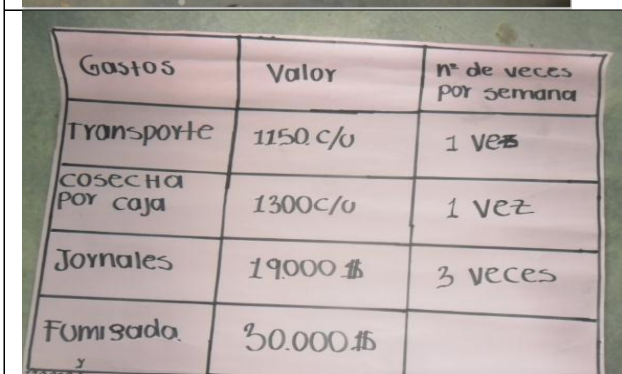
Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación.

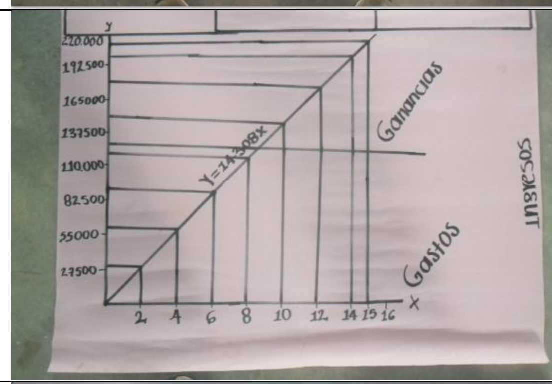
José Luis Bossio		24/10/2011
Nombre del investigador	Firma	Fecha
SANTIAGO ACEVEDO		
Nombre del participante	Firma	Fecha
Claudia Marcela		
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

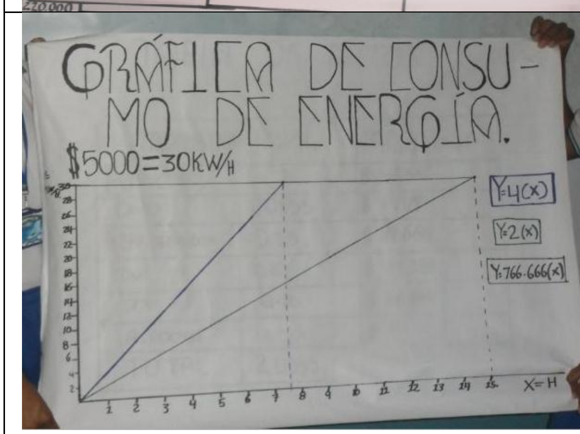
Carteleras de exposición final

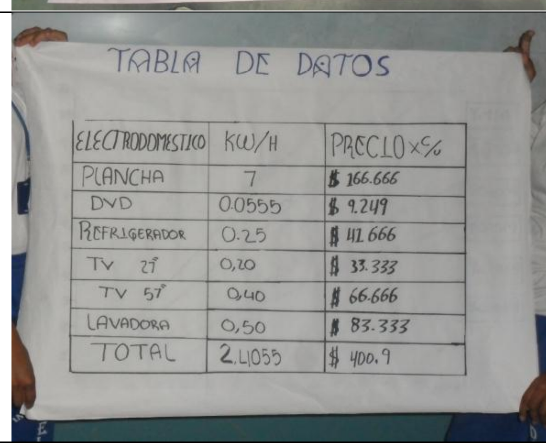












Certificados

FURB

www.furb.br

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU

Blumenau, July 2013

CERTIFICATE OF PRESENTATION

José Luis Bossio Vélez

Has presented the paper

Analysis of a school production about linear models in the context of energy prepaid

at ICTMA 16 Conference, held on 14-19 July 2013 hosted by Regional University of Blumenau, Blumenau at Palace Hotel Himmelblau.

Maria Salett Biembengut
Conference Organizing Chair
ICTMA 16 2013 Conference

CNPJ: 82.662.958/0001-02
Inscrição Estadual: 250.974.665
Reconhecida pela Portaria Ministerial nº. 117 de 13/02/1986
D.O.U. de 14/02/1986
Mantenedora: Fundação Universidade Regional de Blumenau

CAMPUS I - Central - Rua Antônio da Veiga, 140 - Victor Konder - 89012-900 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3321-0200 - Fax.: (47) 3322-8818
CAMPUS II - Complexo Tecnológico - Rua São Paulo, 3250 - Itoupava Seca - 89030-000 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3221-6000 - Fax.: (47) 3221-6001
CAMPUS III - Rua São Paulo, 2171 - Itoupava Seca - 89030-000 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3321-7300
CAMPUS V - Hospital Regional Universitário e Futuro Complexo de Saúde - Rua Samuel Morse, 768 - Fortaleza - 89058-010 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3334-6431
CAMPUS VI - Horto Florestal Experimental - Rodovia Jorge Lacerda, s/nº - 89110-000 - Gaspar/SC - Tel.: (47) 3332-0238
CAMPUS VII - Fund. de Psicicultura Integrada do Vale do Itajaí - FUNPIVI - Estr. dos Tiroleses, s/nº - 89120-000 - Timbó/SC - Tel.: (47) 3382-0512

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Medellín, 11 de mayo de 2012

Doctor
JOSÈ LUIS BOSSIO VÈLEZ
Ponencia
IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas
Medellín

Estimado doctor Bossio,

El éxito de este **IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas**, se debe en gran parte al compromiso y profesionalismo ejercido por cada uno de los conferenciantes durante sus intervenciones, que lograron la atención y cautivaron al público asistente.

Su presencia con la ponencia: **"El papel de las situaciones en contexto: el caso cultivo de plátano en la producción de modelos matemáticos"**, fue fundamental en este proceso y los organizadores estamos seguros que no nos equivocamos en elegirlo como uno de los expositores del Congreso. Su experiencia, reconocimiento y sabiduría, fueron vitales para eso.

En nombre de la Universidad de Medellín y el Departamento de Ciencias Básicas, le doy las más infinitas gracias por su aporte. Este Congreso, siempre lo recibirá con los brazos abiertos, máxime cuando usted aporta a la solución de los problemas de la sociedad y a la formación de los futuros Profesionales que tendrán en sus manos el futuro del mundo.

De nuevo mil gracias por todo y cuente con nosotros.

Cordialmente,

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento Ciencias Básicas

Nit. 890.902.920-1
Carrera 87 No. 30-65 • Teléfono: (574) 340 5555
Fax: (574) 340 5216 • Apartado Aéreo 1983
www.udem.edu.co • e-mail: udem@udem.edu.co
Medellín, Colombia, Sur América

IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

JOSE LUIS BOSSIO VELEZ

PONENTE

Asistió al IV Congreso Internacional de Formación y Modelación de las Ciencias Básicas, realizado los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012 en la Universidad de Medellín, con una intensidad de 24 horas.

	JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO	**JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ**
Vicerrectora Académica	Jefe Departamento de Ciencias Básicas

V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

JOSÈ LUIS BOSSIO VÈLEZ

Asistió en calidad de

PONENTE

Con su presentación: **ANÁLISIS DE UNA PRODUCCIÓN ESCOLAR DE MODELOS LINEALES EN EL CONTEXTO DEL CULTIVO DE PLÀTANO",** dictado en el marco del *V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, realizado en la Universidad de Medellín los días 8, 9 y 10 de mayo de 2013.

	JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO	**JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ**
Vicerrectora Académica	Jefe Departamento de Ciencias Básicas

14º ENCUENTRO COLOMBIANO de matEmática Educativa

ECME - 14

La Universidad del Atlántico a través de su Facultad de Ciencias de la Educación
y la Asociación Colombiana de Matemática Educativa - ASOCOLME

CERTIFICAN QUE

JOSÉ LUIS BOSSIO VÉLEZ, SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO, CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

Presentaron la Comunicación Breve titulada

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA CLASE: UNA PRODUCCIÓN DE MODELOS LINEALES DESDE EL CONTEXTO DEL CULTIVO DE PLÁTANO

en el 14° *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa ECME-14*, realizado en la Universidad del Atlántico (Barranquilla - Colombia) los días 9, 10 y 11 de octubre de 2013.

JANETH DEL CARMEN TOVAR GUERRA
Decana Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad del Atlántico

GILBERTO DE JESUS OBANDO ZAPATA
Presidente Asociación Colombiana de Matemática Educativa

Universidad del Atlántico
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

COLCIENCIAS


La Secretaria de Educación y Cultura
TURBO
Hace un reconocimiento especial a la
Institución Educativa El Dos
Por la Socialización del Proyecto Modelación Matemática, una
manera de abordar los problemas de la sociedad
en el VIII Foro Educativo Municipal por la Formación de Ciudadanos
Politicamente Responsables
Turbo, 28 de Septiembre de 2012