LA CONSTRUCCIÓN DE CURVAS FRACTALES COMO OBJETOS QUE TRASCIENDEN DE PROCESOS ITERATIVOS INFINITOS

Diana Villabona Millán, Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander, Grupo de Investigación EDUMAT-UIS. (Colombia)
diana.villabona@gmail.com, sroa@matematicas.uis.edu.co

Palabras Clave: Infinito, APOE, Estructuras, Mecanismos, Fractales
Keywords: Infinity, APOS, Structures, Mechanisms, Fractals

RESUMEN

Las características propias del proceso de construcción de una curva fractal permiten abordar el problema de la construcción del infinito matemático, ya que en este contexto es posible identificar procesos iterativos infinitos así como los objetos que trascienden de dichos procesos. En este trabajo se usan los elementos de la Teoría APOE, estructuras y mecanismos, para realizar un análisis sobre la manera en que estudiantes de posgrado, maestría en Matemáticas y maestría en Educación Matemática, construyen curvas fractales como objetos trascendentes a partir de procesos iterados. Hemos logrado evidenciar que la construcción de la concepción objeto de infinito está directamente relacionada con la capacidad que tenga el individuo de coordinar procesos en uno único (construcción de un único proceso iterativo infinito), el cual pueda ser visto como un todo, es decir, el individuo deberá imaginarse el proceso de acercamiento infinito inmerso en el límite como terminado.

ABSTRACT

The own features of the construction process of a fractal curve deal with the problem of the construction of the mathematic infinite, since in this context it is possible to identify infinite iterative processes as well as the objects which transcend from those. In this work, elements of the APOE theory, structures and mechanisms/devices are used to make an analysis about the way in which postgraduate students, Mathematic Master and Mathematic Education Master, construct fractal curves as transcendent objects from iterated processes. We have managed to evidence that the construction of the object conception of infinite is directly related to the capacity that the individual has to coordinate processes in only one (construction of an only iterative infinite process), which could be seen as a whole, that is, the individual will have to imagine the process of infinite immersed approximation in the limit as finished.

■ Introducción

La geometría fractal no solo constituye una atractiva alternativa de trabajo en el campo de la educación matemática debido a lo llamativo de las figuras que estudia y a la viabilidad que éstas ofrecen para ser analizadas a partir de herramientas tecnológicas, sino que puede ser utilizada como un contexto que permite analizar la naturaleza dual del infinito matemático: infinito potencial e infinito actual. Por ejemplo, a través de la construcción geométrica de curvas fractales debido a la transformación iterada de una figura inicial que puede ser descrita en términos de *procesos iterativos infinitos*, que en miras a dar respuesta a un cuestionamiento sobre alguna característica propia del objeto que se obtiene cuando esta transformación es completada (el fractal), debe tomar en cuenta la situación límite del proceso iterativo.

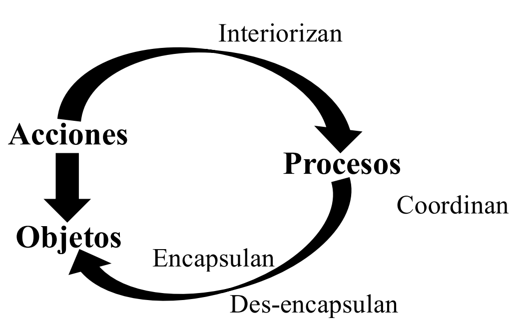
En estos términos, analizar las construcciones que desarrolla un individuo cuando se enfrenta a la construcción geométrica de un fractal puede ofrecernos información sobre la forma en que se construye el infinito matemático en términos cognitivos, para tal fin utilizaremos los constructos teóricos ofrecidos por la Teoría APOE.

■ Teoría APOE: el infinito y algunos aspectos metodológicos

La Teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) es una teoría de corte cognitivo que se ha encargado de estudiar la forma en que los individuos construyen conceptos o nociones matemáticas. El producto principal que genera una investigación realizada a través de la teoría APOE se denomina *descomposición genética*, la cual es un camino cognitivo viable de construcción de un concepto o noción, avalado por evidencias empíricas y descrito en términos de estructuras y mecanismos mentales (Interiorización, Encapsulación, Coordinación, Tematización, entre otros).

En la figura 1, mostramos cómo se relacionan estas estructuras y mecanismos en su forma más elemental cuando un individuo se enfrenta a una situación que requiere de la construcción de un concepto o noción matemática.

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996, p.9)



La teoría APOE tiene como requisito estructuras construidas previamente por el individuo. Como se muestra en la figura 1, el individuo realizará acciones sobre un objeto cognitivo construido previamente, estas acciones se caracterizan por ser explicitas, consecutivas y guiadas por instrucciones externas. Si el individuo realiza estas acciones reflexionando sobre ellas, puede llegar a interiorizarlas convirtiéndolas en procesos cognitivos, los cuales son implícitos y no necesariamente consecutivos. De tal manera que las acciones son externas al individuo, mientras que el proceso es una estructura interna. Si el individuo se percata de que puede aplicar acciones sobre la totalidad del proceso que construyó, encapsulará el proceso convirtiéndolo en un nuevo objeto sobre el cual podrá aplicar nuevas acciones. La construcción de procesos no se realiza exclusivamente mediante la interiorización de acciones, también a partir de la coordinación de dos o más procesos previos, es posible obtener un único proceso el cual puede ser encapsulado en un objeto. Si un individuo que se encuentra en una concepción objeto de un concepto matemático, requiere volver al proceso que la originó, podrá aplicar el mecanismo de des-encapsulación y de esta forma obtener dicho proceso, el cual podrá ser coordinado con otros procesos (Para más detalles sobre aspectos específicos de la Teoría APOE, revisar Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

La Teoría APOE ha sido utilizada para analizar la construcción del infinito matemático en diferentes contextos, a continuación abordaremos algunas aspectos relevantes para nuestra investigación.

■ Teoría APOE y el infinito

La noción de infinito matemático ha sido ampliamente estudiada en términos de la Teoría APOE, dejando resultados alentadores para la Matemática Educativa y también contribuyendo directamente sobre el desarrollo de la teoría misma, ya que algunos elementos teóricos que se consideraban tradicionales han ganado especificidad en el estudio del infinito. Dubinsky, Weller, McDonald y Brown (2005a; 2005b) han identificado a las estructuras proceso y objeto como las correspondientes estructuras cognitivas del infinito potencial y actual, respectivamente. Además, estas estructuras no son los procesos u objetos "tradicionales", los procesos son *procesos iterativos infinitos* y los objetos son *objetos trascendentes* que no son el último elemento del proceso, en cuanto no conservan características del proceso que le dio origen (Brown, McDonald & Weller, 2010). Esto ha hecho que sea necesario el estudio de la forma en que un proceso iterativo infinito pasa a ser un objeto trascendente, dado que el mecanismo tradicional de encapsulación parece no ser suficiente o incluso puede obstaculizar la construcción de los objetos trascendentes asociados al infinito.

Roa-Fuentes (2012) propone un nuevo mecanismo denominado *Completez* (C), como una versión refinada del mecanismo encapsulación, que permite al individuo, a través de un conocimiento consciente de algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos de Cantor, ver el proceso iterativo completo sin necesidad de analizar la situación en términos del último elemento obtenido a partir del proceso; de tal manera que el individuo podrá imaginar las características del objeto trascendente, aun si este objeto no puede ser representado explícitamente. En contraste, una nueva estructura fue propuesta por Dubinsky, Arnon y Weller (2013), esta estructura denominada *Totalidad* es ubicada entre el proceso y el objeto, y permite al individuo ver el *proceso iterativo infinito* como una entidad. Tradicionalmente, la capacidad de ver el proceso como una totalidad y de aplicar acciones sobre esta totalidad correspondía a una concepción objeto, sin embargo en este estudio se encuentran evidencias empíricas que señalan que aunque un individuo pueda ver un *proceso iterativo infinito* como una totalidad esto no necesariamente implica que pueda realizar acciones sobre ésta, lo cual muestra que cada una de estas capacidades corresponden a estructuras diferentes.

Hemos considerado que la estructura *Totalidad* se hace evidente cuando el contexto requiere de la aplicación de acciones sobre el *proceso iterativo infinito* completo, en el caso de la construcción de curvas fractales no requerimos de la aplicación de dichas acciones. Por tal motivo el análisis preliminar en nuestra investigación se ha realizado tomando en cuenta el mecanismo *Completez,* como el constructo teórico que permite el paso de un *proceso iterativo infinito* a un objeto trascendente; sin embargo es pertinente aclarar que los trabajos para explicar el infinito matemático en la teoría APOE son pocos y es necesario seguir haciendo más investigación.

■ Aspectos del método

La Teoría APOE propone un paradigma de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos (Para mayor detalle sobre las componentes del paradigma metodológico propuesto por la Teoría APOE revisar Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). En este estudio utilizamos la primera y la tercera componente: Análisis teórico y Recolección, observación y análisis de datos respectivamente. En nuestro caso no se hizo necesaria la implementación de la componente pedagógica debido a que nuestra investigación se propuso estudiar la forma en la que un individuo, que ha estado bajo formación matemática fuerte pero tradicional, construye el infinito matemático, cómo usa su intuición y los conocimientos adquiridos a lo largo de su vida académica.

En nuestra investigación, la primera componente del método de investigación hace referencia al análisis histórico y epistemológico del infinito en diversos contextos, específicamente en un contexto de paradojas y un contexto de construcción de curvas fractales. Además, hemos tomado en cuenta nuestra experiencia en el aprendizaje y la enseñanza de conceptos y tópicos relacionados con el infinito matemático, en cursos de cálculo, álgebra lineal, análisis matemático, como en teoría de conjuntos; todo esto aunado a los principales aportes de algunas de las investigaciones más resaltantes, principalmente las que se han llevado a cabo tomando en cuenta la Teoría APOE como marco de investigación. Como producto principal del desarrollo de esta primera componente se propone una descomposición genética preliminar de la construcción del triángulo de Sierpinski.

A partir de la descomposición genética preliminar diseñamos y aplicamos entrevistas de corte didáctico a 7 estudiantes de maestría en Matemáticas y Educación Matemática, estas entrevistas fueron filmadas y transcritas. Cabe resaltar que seis de estos estudiantes son egresados de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, y el otro es egresado de un programa de ingeniería. Esto nos ha permitido tener una población con una variedad importante en cuanto a instrucción matemática se refiere, este aspecto está siendo tomado en cuenta en el análisis de datos y nos permitirá, de alguna forma inferir si la instrucción matemática está directamente relacionada con las construcciones que desarrollan los individuos cuando se enfrentan al infinito matemático. Por otra parte, con *entrevista didáctica* nos referimos a una entrevista que busca motivar la reflexión del individuo en pro de la construcción de estructuras que le permitan a los estudiantes abordar coherentemente cada situación

(Roa-Fuentes, 2012). Los resultados del análisis de datos permitirán refinar la descomposición genética preliminar de tal forma que se obtenga un camino verás de construcción de la noción de infinito en el contexto de la construcción del triángulo de Sierpinski avalado por datos empíricos.

En la siguiente sesión planteamos la versión de la construcción del triángulo de Sierpinski que hemos utilizado en nuestra investigación y su respectiva descomposición genética preliminar.

■ El triángulo de Sierpinski: un objeto que trasciende de un proceso iterativo infinito

A continuación, planteamos la versión de la construcción del triángulo de Sierpinski que plantemos en la entrevista.

> Se tiene inicialmente un triángulo equilátero relleno de lado a. Al unir los puntos medios de los lados del triángulo, éste queda dividido en cuatro triángulos equiláteros y congruentes de los cuales se elimina el triángulo central (ver figura 2). De esta forma quedan 3 triángulos cada uno de lado $\frac{a}{2}$.
> Al repetir el mismo procedimiento sobre cada uno de los triángulos resultantes, se van obteniendo curvas que preceden el triángulo de Sierpinski. ¿Cuál es el perímetro del triángulo de Sierpinski? (Adaptado de Sabogal y Arenas, 2011)

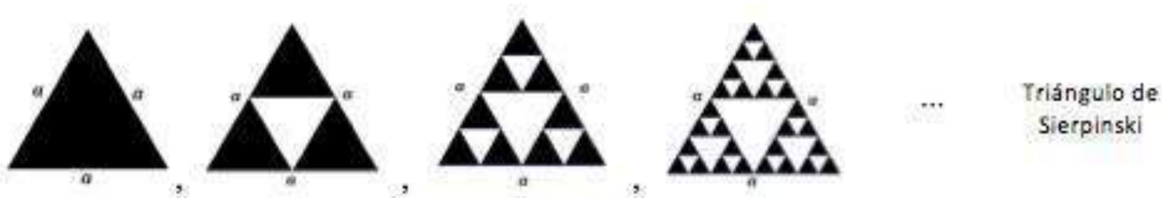
El triángulo de Sierpinski es el estado al infinito de una trasformación iterada que se realiza sobre un triángulo equilátero relleno de lado a, por lo cual podemos identificar a este triángulo inicial como el objeto sobre el cual realizaremos las acciones. A continuación presentamos la descomposición genética preliminar de la construcción del triángulo de Sierpinski.

■ Descomposición genética preliminar de la construcción del triángulo de Sierpinski

Dado al planteamiento explícito del proceso iterativo que permite generar el triángulo de Sierpinski, esperamos que sin dificultad todos los estudiantes logren comprender su construcción y realizar acciones explícitas sobre cada curva para dar respuesta a la pregunta planteada.

Para esto esperamos que los individuos inicialmente identifiquen los procesos inmersos en la construcción de la curva: El número de triángulos (específicamente el número total de segmentos en cada iteración) y la longitud de los mismos. Los procesos particulares están directamente relacionados con la pregunta principal que plantea la situación.

Figura 2. Construcción del triángulo de Sierpinski.



Los procesos particulares son abordados de forma individual y son transformaciones del conjunto de los números naturales *(procesos iterativos infinitos).*

Proceso 1: Aumento en el número de triángulos y los segmentos totales:

$$\begin{array}{ccccc} Iteración & \to & \#\,Triángulos & \to & \#\,Segmentos \\ 0 & \to & 1 & \to & 3 \\ 1 & \to & 3 & \to & 9 \\ 2 & \to & 9 & \to & 27 \\ 3 & \to & 27 & \to & 81 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Proceso 2: Longitud de cada segmento:

$$\begin{array}{ccc} Iteración & \to & Longitud\ de\ segmentos \\ 0 & \to & a \\ 1 & \to & a/2 \\ 2 & \to & a/4 \\ 3 & \to & a/8 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

La imposibilidad de seguir representando de forma gráfica el proceso generador y la necesidad de entender cómo se comportan los procesos en términos generales motiva la interiorización de las acciones anteriormente descritas en procesos que permitan determinar el número de triángulos y la longitud de cada segmento para cada una de las curvas que preceden el triángulo de Sierpinski, esto es plantear el término general de cada proceso particular, donde $n = 1, 2, \ldots$

$$\text{Proceso 1: } n \;\to\; 3^n \;\to\; 3^{n+1} \qquad \text{Proceso 2: } n \;\to\; \frac{a}{2^n}$$

Los procesos particulares deben ser coordinados en un único proceso para dar respuesta a la pregunta. Sin embargo, esta coordinación no es sencilla dada la naturaleza de los procesos particulares (el proceso 1 es divergente y el proceso 2 converge a cero). El individuo puede pensar en un número infinito de segmentos cada uno de longitud cero, esto puede generar que empiece a argumentar sus posturas desde sus concepciones primarias y lo puede evidenciar con afirmaciones como *"el perímetro del triángulo de Sierpinski es cero dado que la suma infinita de ceros es cero"*. La necesidad de ver los procesos particulares como un único proceso para cada una de las curvas precedentes hará que el individuo coordine los procesos 1 y 2, no entendemos exactamente cómo ocurre esta coordinación pero creemos que está íntimamente relacionada con la característica que se busca analizar.

Los procesos coordinados generan un único proceso que permite obtener la longitud de los triángulos precedentes al triángulo de Sierpinski, este procesos es, desde luego, un proceso iterativo infinito.

$$\text{Proceso Coordinado: } n \;\to\; 3a\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

El individuo a través del *proceso iterativo infinito* debe generar la concepción objeto de infinito para lo cual esperamos que proponga el límite al infinito del proceso coordinado; pero no basta solo con proponer el límite sino que debe poseer una concepción objeto de límite lo cual propiciaría el mecanismo de *Completez*, lo que le permitirá imaginar el proceso de acercamiento infinito inmerso en el concepto de límite como terminado, lo cual está íntimamente relacionado con lograr ver el conjunto de los números naturales a través de su cardinalidad. Si un individuo no posee una concepción objeto de límite puede llegar a concluir que no es lógico cuestionar la longitud del triángulo de Sierpinski, ya que no podrá concebir el triángulo de Sierpinski como un objeto terminado.

■ Un resultado interesante y conclusiones

A continuación exponemos el caso de Julio, un estudiante de maestría en Matemáticas que logró construir el objeto trascendente a partir de *procesos iterativos infinitos.* Julio realiza las primeras acciones sobre el objeto inicial y logra plantear los términos generales de cada uno de los procesos identificados en el contexto. Luego logra coordinar efectivamente estos procesos, generando un único proceso iterativo que posteriormente analiza en el infinito con el planteamiento de la situación al límite; esto le permite concluir que la longitud del triángulo de Sierpinski es infinita. Como hemos mencionado anteriormente el individuo no solo debe alcanzar la solución matemática sino que debe mostrar evidencias de que tiene una concepción objeto de límite, Julio hace una interesante reflexión con la cual creemos que evidencia que ha construido su concepción objeto de infinito:

> Julio: Entonces yo le diría que el perímetro sería infinito, a pesar de que cabe en una palma de la mano ¿no? Es como lo… Por ejemplo, yo tomo aquí una longitud a, de tal manera que me quepa en la mano (haciendo referencia al lado del triángulo inicial) pero cada vez como que empiezo a hacer el fractal, eso es curioso ¿no? A pesar de que es de perímetro infinito pero yo lo puedo coger con la mano, si yo tomo un a adecuado. Por ejemplo si yo tomo un a de 2 cm, me cabe acá en la mano pero empiezo a hacer Sierpinski y queda infinito. Eso es lo paradójico ¿no? Uno no lo ve porque uno pensaría que infinito no va a caber nunca en la sala, ni en el planeta tierra pero cabe ¿no? Entonces yo le diría que el perímetro es infinito.

En la anterior reflexión podemos ver cómo Julio concibe el infinito en acto, que aunque le puede llegar a parecer paradójico, da muestras de que está viendo el *proceso iterativo infinito* como un todo, como un proceso terminado, acepta la idea del infinito dentro de un marco de características finitas representado en el triángulo inicial que cabe dentro de su mano.

Podemos concluir, tanto de la evidencia mostrada aquí como de otras tantas muy interesantes que están siendo analizadas en nuestra investigación que el mecanismo de *Completez* está fuertemente relacionado con la concepción que tenga el individuo del conjunto de los números naturales y del concepto de límite. Lo cual puede representar la diferencia entre la solución matemática de una situación y la respectiva concepción que el individuo construya. Además, tal y como fue planteado en la *descomposición genética preliminar* hemos podido evidenciar la dificultad que se genera a la hora de coordinar procesos de diversa naturaleza, creemos, por evidencias empíricas encontradas en este estudio, que la coordinación debe hacerse de forma consciente y encaminada a responder la pregunta detonante sobre el objeto terminado.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *(16),* 115-141.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *(58),* 335–359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *(60)*, 253–266.

Dubinsky, E., Weller, K. & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999... and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*. 13(3), 232-258.

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sabogal, S. y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*. Bucaramanga: Publicaciones Universidad Industrial de Santander.