

UNA MIRADA COGNITIVA A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES. ARTICULACIÓN ENTRE LAS INTERPRETACIONES: MATRICIAL Y FUNCIONAL

Isabel Maturana Peña y Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Chile

Resumen. Fundamentamos nuestro estudio en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), como marco teórico referencial y una propuesta de investigación, en la que reconocemos diferentes interpretaciones del concepto transformación lineal, las que hemos denominado interpretación funcional y matricial. Nos propusimos documentar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en práctica en la articulación de las interpretaciones del concepto transformación lineal. Haciendo uso de la metodología propia de APOE y el grupo RUMEC, diseñamos descomposiciones genéticas para cada interpretación. En su dimensión metodológica es un estudio de caso. Las evidencias obtenidas dan cuenta, que para los estudiantes próximos o que han construido el objeto transformación lineal, existe una prevalencia en el conocimiento residual para la interpretación matricial, lo que resulta contradictorio, pues este es la resultante de una simplificación de la interpretación funcional.

Palabras clave: Articulación, Matriz, Transformación Lineal, APOE

Abstract. We base our study on APOS theory (Action, Process, Object, Schema) as theoretical framework and a research proposal, which recognize different interpretations of the linear transformation concept, which we call functional and matrix interpretation. We set out to document the construction and mental mechanisms that students put into practice in the articulation of the concept of linear transformation interpretations. Using the methodology of APOE and RUMEC group, we designed genetic decompositions for each performance. In its methodological dimension is a case study. The evidence obtained realize that for students coming or have built in order linear transformation, there is a prevalence in knowledge for interpreting residual matrix, which is contradictory, because this is the result of a simplification of the functional interpretation.

Key words: Articulation, matrix, Linear Transformation, APOS

Introducción

Nos propusimos, como objetivo de investigación, indagar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en juego para la (re)construcción del concepto transformación lineal; reconoceremos, en el concepto, componentes de origen funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática para carreras como ingeniería, licenciatura y pedagogía en ciencias; por otra parte existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que poseen los estudiantes para comprender los conceptos relativos al álgebra lineal, según Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis (1994) el problema central radica en que, en esta materia, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. En particular sobre el concepto de transformación lineal la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en matemática

educativa que han abordado su problemática de aprendizaje, por ejemplo, el estudio de Roa y Oktaç (2010) proporcionó como resultado una descomposición genética del concepto, que consideró dos formas de construcción. Por otra parte, Montiel y Batthi (2010) abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz cambio de base y la representación matricial de las transformaciones lineales, bajo el enfoque ontosemiótico, centrando su atención en el rol de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula. Ambos son ejemplos de investigaciones recientes, que por separado abordan las problemáticas de aprendizaje del concepto transformación lineal, relacionadas a las interpretaciones funcional y matricial respectivamente. Nuestra propuesta apunta a establecer una primera aproximación a la construcción del esquema del concepto transformación lineal, esto es considerando la construcción de estas dos interpretaciones fundamentalmente como objeto.

Fundamentación teórica APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones (mentales): acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos un fragmento F de conocimiento matemático. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad a encapsulado el proceso en una concepción objeto de F . Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética, DG, describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño metodológico de la investigación

Incorporaremos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso, pues son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo,

identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Las unidades de estudio son alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. La selección de los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como “caso”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes señalados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las que se grabaron. Por otra parte es preciso aclarar que al caso de estudio se le aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como (DG); un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos.

El diseño de investigación

Dentro del diseño se consideró realizar dos descomposiciones genéticas, una para la interpretación funcional y otra para la interpretación matricial, del concepto transformación lineal, que a continuación presentaremos parte de sus relatos. Para desarrollar la investigación se presentó a los estudiantes del caso un cuestionario por interpretación (matricial y funcional), con diez preguntas, cinco por interpretación, el cual se entregó en una carpeta a los estudiantes, donde el orden para dar respuesta a las preguntas quedó abierto a sus criterios.

Descomposiciones genéticas hipotéticas

A continuación presentamos parte central de los relatos de las DG propuestas:

❖ DG de la interpretación funcional:

Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre transformaciones lineales, sostenemos que, para que un estudiante llegue a construir el concepto de transformación lineal como una construcción mental objeto, es necesario que muestre una construcción mental objeto de los conceptos: espacio vectorial real de dimensión finita y función sobre un conjunto, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo de los números reales (R), con dimensiones finitas, digamos n y m respectivamente; y el concepto función sobre conjuntos, es decir $f: A \rightarrow B$, donde $x \rightarrow f(x)$. Desde estas construcciones mentales objetos desencapsularemos como procesos, los espacios vectoriales V , W y el concepto de función, además de considerar la combinación lineal como un proceso dentro de los espacios vectoriales, de la siguiente forma $\forall v, v_1, v_2 \in V; \alpha_i \in R \text{ y } v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$. Paso seguido se tiene una

coordinación por la restricción de la función definida sobre conjuntos a espacios vectoriales, de esta forma se tiene una construcción proceso del concepto de función entre espacios vectoriales, posteriormente tenemos dos coordinaciones del proceso antes mencionado y los vectores en los espacios dados, uno, a través de la combinación lineal de vectores en el espacio de partida y el otro el reconocimiento que las imágenes de la función son vectores del espacio de llegada. Se da, así una coordinación por la restricción de la función definida sobre conjuntos a espacios vectoriales, de esta forma se tiene una construcción proceso del concepto de función entre espacios vectoriales, posteriormente tenemos dos coordinaciones del proceso antes mencionado y los vectores en los espacios dados, uno, a través de la combinación lineal de vectores en el espacio de partida y el otro el reconocimiento que las imágenes de la función son vectores del espacio de llegada.

Los anteriores procesos serán coordinados por la igualdad, para obtener el proceso que define la transformación lineal, y encapsular como un objeto que posteriormente se rotula como transformación lineal.

❖ DG de la interpretación matricial:

Relato de la descomposición genética referida a la interpretación matricial, esto es la matriz asociada a la transformación lineal (MATL). Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre MATL, sostenemos que: para que un estudiante llegue a construir la MATL como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales V y W , con dimensiones finitas: digamos n y m respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de los espacios V y W respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector w al espacio vectorial W , también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas B y B' de V y W respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base B . La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de W , con la pertenencia de un vector w a W , se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada B' de W , este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector w en la base B' , es decir, $[w]_{B'}$. Por otra parte, y a continuación la DG, da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector v de V , ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial,

formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_{B^B}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_B$.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada pregunta del cuestionario, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en las descomposiciones genéticas. Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, una por cada interpretación, para mostrar parte de las evidencias obtenidas.

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación funcional

Pregunta 4.- Encuentre la transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(-5,3)$ y

$f(-1,1)=(5,2)$. Para esta transformación lineal ¿Es posible determinar $f(1,2)$?

La pregunta tiene por propósito obtener evidencia de la forma en que la combinación lineal es usada como elemento coordinador de las construcciones mentales que un estudiante pone en juego al coordinar los procesos provenientes de la preservación de la estructura algebraica del dominio en el recorrido. La construcción mental que da cuenta este tramo es proceso para la construcción de la igualdad de las imágenes dadas por la transformación lineal. Como el vector $(1,2)$ es combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$, y la función es una transformación lineal se tiene: $f(1,2) = \frac{3}{2}f(1,1) + \frac{1}{2}f(-1,1)$, por lo que se obtiene: $f(1,2) = \frac{3}{2}(-5,3) + \frac{1}{2}(5,2) = (-5, \frac{11}{2})$.

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación matricial

Pregunta 3: Sea $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal definida por

$T=(a+ b-c, d)$. Considere $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de \mathbb{R}^3 y $B_2 = \{(1,1), (0,1)\}$

base de \mathbb{R}^2 . Determine $[T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})]_{B_2}$.

La intención de la pregunta, es proponer al estudiante una situación que lo aparta de la dimensión del cálculo numérico, por lo que en su respuesta daría muestra de una construcción proceso del concepto coordenada de un vector general. Es un paso previo a la generalización necesaria para la construcción de la matriz asociada a la transformación lineal. Por lo que su respuesta esperada: $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+b-c, d)$, un estudiante debería coordinar el concepto de función con el de vector para calcular la imagen anterior, luego para encontrar las coordenadas, deberá

escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2 , esto es $(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$, de donde $\alpha = a+b-c$ y $\beta = d-a-b+c$. Por lo que se tiene

$$\left[T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix}.$$

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, se presenta, a continuación una selección del trabajo realizado por los estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 4 interpretación funcional

La figura 1 muestra, cómo el estudiante E2 tiene dificultades en la coordinación de los procesos para la construcción del concepto transformación lineal en su interpretación funcional. Esto es, al no escribir al vector $(1,2)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$ y aplicar la transformación lineal. Desde la DG interpretación funcional, podemos argumentar que E2, no coordina los procesos relacionados con la igualdad, al señalar no recordar un teorema que hace explícita esta relación –el teorema fundamental del algebra lineal–.

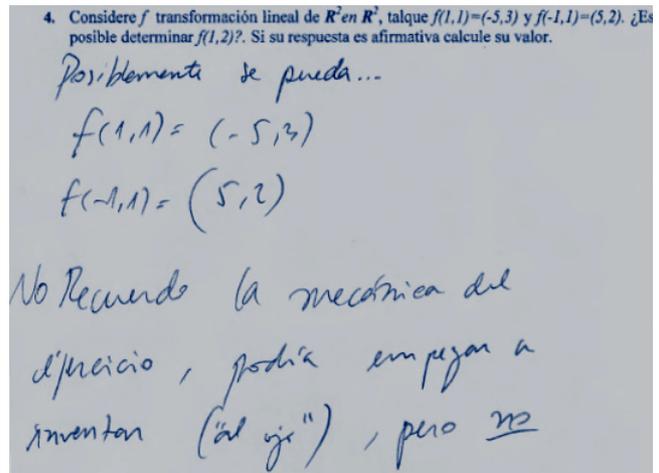


Figura 1. Respuesta que realiza el E2 a la pregunta 4de la interpretación funcional.

ES POSIBLE.

$$f(0,2) = f((1,1) + (-1,1)) = f(1,1) + f(-1,1) = (-5,3) + (5,2) = (0,5).$$

$$f(0,2) = (0,5) \cdot / \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} f(0,2) = \frac{1}{2} (0,5) \rightarrow \text{enho escala } \times \text{ se T. 4}$$

$$f(0,1) = (0, \frac{5}{2})$$

$$f(1,2) = f((1,1) + (0,1)) = f(1,1) + f(0,1) = (-5,3) + (0, \frac{5}{2}) = (-5, \frac{11}{2})$$

Figura 2. Respuesta que realiza el E9.

En la figura 2, se muestra cómo E9 da respuesta a la pregunta 4, mostrando una construcción objeto del concepto TL en su interpretación funcional, pues para coordinar los conceptos de base con el de función entendiendo que es la propiedad que define a la transformación lineal, mediante la combinación lineal, debió desencapsular los procesos antes descritos.

$T\left(\begin{pmatrix} a+b-c \\ d \end{pmatrix}\right)_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ d \end{pmatrix}_{B_2}$

$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$
 $(a+b-c, d) = (\alpha, \alpha+\beta)$

i) $\alpha = a+b-c$
 ii) $\alpha + \beta = d \Rightarrow a+b-c + \beta = d$
 $a+b-c-d \Rightarrow \beta = d-a-b+c$

luego $T\left[\begin{pmatrix} a+b-c \\ d \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ (c+d)-(a+b) \end{bmatrix}$

Figura 3 Respuesta de E3 a la pregunta de la interpretación matricial

La figura3, muestra la respuesta del E3, donde las coordenadas del vector imagen $(a + b - c, d)$ en la base B_2 son obtenidas mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Esto es, E3 nos muestra que y rotula la construcción objeto del concepto coordenadas de la imagen un vector.

Sobre la articulación

En búsqueda de organizar las evidencias recopiladas en la investigación, ordenamos en tablas por: interpretación - pregunta - estudiante- concepto y construcción mental, desde allí se extrajo información relevante sobre cómo se construye el concepto transformación lineal. A continuación un resumen sobre los estudiantes del caso que mostraron en sus respuestas a ambas interpretaciones las construcciones mentales próximas a la construcción objeto. Además se proporciona información referida a él orden en que seleccionaron sus preguntas, esto es las preguntas de la interpretación matricial (M) y funcional (F).

Tabla 1. Fuente de datos investigación.

Estudiante	Orden en que se respondió al Cuestionario	Construcción mental mostrada Interpretación Funcional	Construcción mental mostrada Interpretación Matricial	Se destaca en ambos cuestionarios
E3	MF	Proceso	Objeto	
E4	FM	Objeto	Objeto	Ambos
E5	MF	Proceso	Acción	
E9	MF	Objeto	Objeto	Ambos
E10	MF	Proceso	Proceso	
E13	MF	Acción	Proceso	
E15	FM	Proceso	Proceso	
E18	MF	Proceso	Proceso	

La explicación dada por los estudiantes al orden de selección es que les “resulta más fácil”. Por otra parte, del total de los estudiantes del caso (20), 11 eligieron la configuración FM y 9 la MF,

casi la mitad de los estudiantes, por lo que podríamos concluir que el orden no es determinante en la construcción del concepto, pero en tabla I se muestran a los mejores, y de estos 6 eligieron la configuración MF, y sólo 2 la configuración FM, por lo que el orden en general de selección podría dar información como estos han construido el esquema del concepto transformación lineal.

Algunas conclusiones

Interpretación Funcional: Las evidencias obtenidas para la interpretación funcional, dan cuenta que los estudiantes que no logran construir como objeto el concepto transformación lineal dicen: no recordar la definición de transformación lineal, esto es se encuentran en una construcción mental acción, pues requieren del incentivo externo para dar respuesta a estas preguntas. Por otra parte están los estudiantes que dan evidencias de poseer una construcción proceso, estos recuerdan la propiedad, pero no coordinan la igualdad que define a la transformación lineal en el sentido de lo descrito en nuestra descomposición genética, esto es la coordinación mediante la igualdad para preservar la estructura algebraica del espacio vectorial de partida en el espacio de vectorial de llegada.

Interpretación Matricial: Las evidencias en el caso de estudio indican que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción objeto de la matriz asociada a la transformación lineal, tal como la búsqueda de coordenadas en un objeto general. De esta forma en la construcción de la interpretación matricial, los dos temas substantivos, según los datos del estudio, vale decir, transformación lineal y matriz de coordenadas, son ignorados por el estudiante, quien se dedica inmediatamente a comprobar que la operación entre la matriz cambio de base y las coordenada del vector en una determinada base, den la igualdad esperada.

Sobre la articulación de estas dos interpretaciones del concepto transformación lineal, se vislumbró una relación que afecta la construcción del esquema del concepto, esto es la interpretación matricial como un esquema que asimila a la interpretación funcional, pero que se construye con el concepto transformación lineal.

En general hemos de considerar que las descomposiciones genéticas propuestas para la investigación dan cuenta: para la interpretación funcional de algunas perspectivas no contempladas en investigaciones sobre la temática de aprendizaje del concepto transformación lineal, por ejemplo sobre la igualdad proveniente de la preservación de la estructura algebraica aditiva

mediante el concepto de combinación lineal (homomorfismo). Para el caso de la descomposición genética de la interpretación matricial es la primera propuesta que muestra sus evidencias.

Referencias bibliográficas

Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Montiel, M., y Bhatti, U. (2010). Advanced mathematics online: Assessing particularities in the online delivery of a second linear algebra course. *Online Journal of Distance Learning Administration*, 13(2). Distance Education Center.

Roa, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), 89-112.