EL FUNCIONAMIENTO COGNITIVO Y LA COMPRENSIÓN DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA

Raymond Duval

La prueba[10] constituye un umbral crucial en el aprendizaje de las matemáticas. ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en atravesarlo verdaderamente? Aunque probar no se puede reducir a razonar, este grave problema didáctico tiene que ver con la variedad de enfoques de lo que comúnmente se designa por "razonamiento", en particular cuando el razonamiento se requiere en el marco de una actividad científica o matemática. Poco a poco han surgido tres grandes tendencias en la investigación sobre el desarrollo del razonamiento del estudiante.

- La corriente psicológica en la que los modelos de razonamiento son formas lógicas de razonamiento válido, como los silogismos aristotélicos o la implicación material con el uso de conectores para las funciones de verdad (Piaget e Inhelder, 1955; Johnson-Laird, 1983; Rips, 1988).
- La tendencia didáctica en la que los modelos de razonamiento son los que se usan para investigar-explicar, principalmente en situaciones geométricas que requieren una interacción entre la exploración visual de figuras y la aplicación de unos pocos teoremas y definiciones que se deben usar como "herramientas" de "justificación". La meta es determinar la verdad de un enunciado propuesto inicialmente como conjetura y convencer a otros. En esta corriente se presta considerable atención a los sucesivos intentos y explicaciones de los estudiantes y, por tanto, a sus producciones discursivas (Lakatos, 1976; Balacheff, 1987).
- La corriente de la Inteligencia Artificial en la que los modelos de razonamiento son reglas de condición-acción que funcionan como "máquinas de inferencia". Esta tendencia se debe subdividir en un modelo cognitivo de la prueba para diseñar tutores computarizados (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987), y la construcción de micromundos para las interacciones dialécticas con los estudiantes (Luengo, 1997).

Lo que es común a estos diferentes enfoques es que parten de algunas características externas del razonamiento –ya sean lógicas o matemáticas– y las toman como referencias para modelar la actividad de razonar. En consecuencia, se olvida por completo la comprensión real de cómo funciona esta actividad, y en qué puede ser diferente del razonamiento espontáneo en la vida cotidiana o en áreas diferentes a las matemáticas. El funcionamiento cognitivo del razonamiento no es la imagen o la reproducción de patrones matemáticos o

10 He traducido los términos "proof" y "proving" como "prueba" y "probar", respectivamente, y no como "demostración" y "demostrar", para poder usar estos últimos cuando el autor se refiere a la deducción a partir de axiomas. [N. T.]

lógicos. Por ello, Schoenfeld, después de realizar en 1984 un experimento de aula durante un semestre, señaló con acierto: "quizá lo que se necesita, y lo que ha estado faltando, es una comprensión de cómo funciona realmente la prueba" (Schoenfeld, 1986, p. 253).

Tal comprensión se basa en la percepción del significado de las proposiciones en cualquier prueba: la dificultad de esta percepción se debe a la multidimensionalidad del significado de las proposiciones. Los estudiantes se deben percatar de los diferentes componentes del significado de las proposiciones. Y esta multidimensionalidad está conectada estrechamente con las diferentes maneras de organizar las proposiciones en un discurso que puede ser una argumentación ordinaria o una prueba o un razonamiento formal, aunque la redacción sea algunas veces similar. Por eso se requiere una suerte de doble conciencia, que haga posible que los estudiantes comprendan "cómo funciona en realidad la prueba" y se convenzan verdaderamente con las pruebas. En este capítulo expondremos las características principales del funcionamiento cognitivo del acto de razonar. Luego examinaremos las consecuencias para el problema didáctico de aprender a probar. Por último, abordaremos las variables que deben usarse para generar la doble conciencia.

Visión panorámica de la complejidad cognitiva del funcionamiento del razonamiento

Para analizar la complejidad cognitiva de la actividad de razonar matemáticamente, primero se requiere hacer unas distinciones. Algunas son bien conocidas, como por ejemplo la distinción del estatus operativo de una proposición en la deducción (hipótesis, teorema, etc.), pero las principales, que se pueden ver como innecesarias, tal como la distinción entre valor de verdad y valor epistémico, han salido a la superficie al observar a estudiantes durante experimentos de enseñanza de la prueba. Las explicaciones de los estudiantes, el cambio repentino de sus producciones textuales, mostraron que la brecha que tienen que atravesar consiste en percatarse de la complejidad implícita del significado de una proposición dentro de las diferentes organizaciones posibles de proposiciones, subyacentes a los varios tipos de razonamiento (Duval, 1991, pp. 247-253).

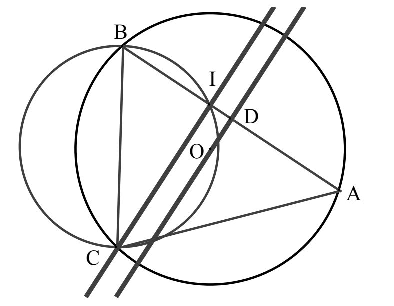
Características del razonamiento: un espacio de significado para la organización discursiva de proposiciones

En cualquier acto de razonar, implícita o explícitamente se trabaja con proposiciones, es decir, con enunciados que tienen un valor por sí mismos y un estatus en relación con otras proposiciones. El valor y el estatus son componentes específicos del significado de cualquier proposición.

Componentes internos del significado de una proposición

Ante todo, el significado de cualquier proposición es más complejo que el significado de cualquier palabra. El significado de una proposición está determinado con respecto a varias dimensiones: una dimensión semántica a través de su contenido, una dimensión de conocimiento a través de su valor epistémico (obvio, probable, absurdo, irreal, posible, necesario, etc.) y una dimensión lógica a través de su valor de verdad (verdadero, falso, indecidible, etc.). El valor epistémico está conectado estrechamente a la manera en que alguien comprende el contenido de una proposición: depende de la base de conocimiento del sujeto.

Por ejemplo, la manera de comprender puede ser “teórica”, es decir, tiene un trasfondo de definiciones, teoremas y práctica deductiva, si el sujeto es un matemático experto, o puede ser solo “semántica”, es decir, refleja una comprensión del lenguaje ordinario, si el sujeto es un aprendiz joven. Así, una proposición cuyo contenido se enfoque en propiedades matemáticas que se pueden ver de manera inmediata en una figura (paralelismo, perpendicularidad, etc.) puede tener valores epistémicos bien diferentes: puede ser visualmente obvia para un estudiante pero solo posible o, quizá, imposible desde un punto de vista matemático. Una propiedad matemática incluye la necesidad de su enunciado. ¿Cómo percatarse de tal necesidad y cómo hacer para que los estudiantes se percaten de ella?



En una circunferencia de centro O, marque tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB]. Pruebe que las rectas (OD) y (CI) son paralelas.

Figura 1. Problema propuesto a estudiantes de entre trece y catorce años

El contenido de la proposición “las rectas (OD) y (CI) son paralelas” se puede verificar en la figura. Comprender lo que significa esta proposición es solo un asunto de ver algo obvio. ¿Qué más podemos querer para saber que es verdadera?

La distinción entre valor epistémico y valor de verdad es importante. Nos permite explicar lo que se logra al razonar. El resultado de cualquier acto de razonar no solo es producir nueva información sino también, y sobre todo, cambiar el valor epistémico de una proposición cuya verdad queremos probar o con respecto a la cual queremos convencer a alguien más. Si la verdad de una proposición parece posible, el acto de razonar muestra que la proposición es necesaria o, por el contrario, imposible; si se cree que una proposición es absurda, el acto de razonar hace que su declaración sea probable o necesaria, y así sucesivamente. El punto clave para probar y para comprender cómo funciona una prueba en matemáticas es la conexión entre los varios valores epistémicos y el valor lógico "verdadero". Aquí debemos tener en cuenta dos características específicas.

La primera es epistemológica. Si bien en otros campos como la botánica, la historia, etc., el valor lógico "verdadero" puede estar conectado con diferentes valores epistémicos en relación con los datos provenientes de la percepción o de algunos dispositivos técnicos o de testimonios, ¡en matemáticas la única conexión acordada es la que hay entre el valor lógico "verdadero" y el valor epistemológico "necesario"! La segunda es cognitiva. Si bien usualmente los valores epistémicos están asociados de manera directa a la comprensión del contenido de la proposición, en matemáticas es muy diferente: los valores epistémicos dependen del estatus de las proposiciones y no, ante todo, de su contenido. Eso significa que no podemos cambiar un valor epistémico espontáneo de una proposición por el valor "necesario" por medio del razonamiento si no hay una comprensión del estatus como uno de los componentes del significado de la proposición.

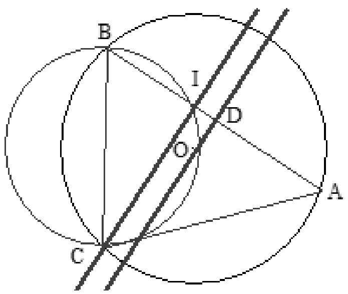
Estatus de las proposiciones y diferencias funcionales entre ellas en un desarrollo discursivo (razonamiento, argumentación, prueba, etc.)

Por lo anterior, el acto de razonar se puede describir como dar pasos de unas proposiciones a otras, como "conectar de manera lógica" proposiciones, como presentar proposiciones para justificar una afirmación, etc. Para entender la actividad de razonar, tenemos que percibir las diferencias funcionales de las varias proposiciones que se movilizan en ella. No hay razonamiento sin una organización discursiva regulada por diferencias funcionales entre las proposiciones que lo constituyen. Llamaremos "estatus" a la función específica, al papel particular de cada proposición dentro del conjunto de las otras proposiciones que son requeridas o declaradas para obtener una prueba o para producir una argumentación. Por ejemplo, los términos "hipótesis", "premisa", "conclusión", "afirmación", "argumento", etc., hacen referencia al posible estatus de una proposición en un razonamiento.

El estatus es el tercer componente del significado de una proposición con respecto a la organización discursiva de proposiciones (Figura 4). Por tanto, debemos distinguir el estatus que es intrínseco a cualquier organización del razonamiento (premisa, hipótesis, conclusión, etc.) del que es intrínseco a una estructura teórica (axioma, definición, teorema, conjetura, principio, regla, etc.). Denominamos al primero, estatus "operativo", y al segundo, estatus "teórico".

El estatus operativo hace referencia al nivel de una prueba local, es decir, a una organización de proposiciones. El estatus teórico hace referencia a un nivel más alto de organización, como una conexión axiomática de pruebas locales, como la del primer libro de Euclides o la del *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Por supuesto, hay interacciones entre estos dos niveles. Pero quien no comprende cómo funciona una prueba local, no puede comprender por qué una prueba prueba, de la misma manera que alguien que no puede comprender una página o un episodio de un libro no puede comprender todo el libro (Duval, 2001). En el aula, los estudiantes fueron entrenados para escribir pruebas en las que ellos mismos explicitaban el estatus de cada proposición mediante el uso de tres términos: hipótesis, propiedad, conclusión (Figura 2).

El verdadero problema para la enseñanza es que sigue faltando la distinción entre los diferentes estatus operativos de las proposiciones, aun cuando ya no haya confusión superficial o circularidad en las expresiones. Muchos estudiantes, sin cometer errores evidentes, no captan exactamente cómo operan en una prueba las diferencias funcionales entre las proposiciones de un discurso o de una "explicación". No ven por qué y cómo el estatus operativo, y no solo el estatus teórico (definiciones, teoremas), son herramientas para desarrollar el razonamiento de una manera bien diferente a la de la argumentación en el lenguaje natural. Se ha observado la misma incomprensión en estudiantes de entre quince y dieciséis años.



Hipótesis: (OD) es perpendicular a [AB]

Propiedad: Si una recta es perpendicular a un segmento en su punto medio, entonces es la mediatriz de este segmento

Conclusión: (OD) es perpendicular a [AB]

Figura 2. Producción de un estudiante de trece años

Funcionamiento cognitivo específico de una prueba matemática

Hay diferentes maneras de pasar de una o varias proposiciones a otra. Pero no todas ellas permiten la construcción de una prueba legítima. Una prueba requiere un razonamiento válido. Eso quiere decir que la conclusión de cada paso debe ser necesaria y entre dos pasos no debe haber baches. Es este tipo de razonamiento, a menudo denominado "deductivo", es el que se usa en cualquier prueba en geometría. De manera que, a partir de las distinciones previas, debemos hacer dos preguntas: el razonamiento válido, ¿qué tipo de organización de proposiciones requiere? y tal organización, ¿qué componente del significado de las proposiciones trae a primer plano?

Cualquier razonamiento deductivo involucra dos niveles bien diferentes de organización discursiva: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso de deducción y el nivel de organización de varios pasos en una prueba.

En el nivel de un paso de deducción, cada proposición toma una de las siguientes tres categorías del estatus operativo: premisa, conclusión, tercer enunciado. Con frecuencia, los profesores solían decir "propiedad" en vez de "tercer enunciado". Pero ese es un término engañoso porque lo que se denomina "propiedad" es en realidad un teorema, es decir, un enunciado que tiene la organización bipartita de cualquier regla *si…entonces*: una o varias condiciones por verificar y siempre que se cumplan se debe realizar una acción o se debe presentar una proposición.

Por consiguiente, al contrario de la mayoría de modelos psicológicos (Johnson-Laird, 1983; Rips, 1988), un paso de deducción opera en forma diferente a los silogismos clásicos o a las explicaciones en el habla ordinaria con el trasfondo de redes semánticas. Y esta asimilación frecuente corresponde a uno de los puntos oscuros para muchos estudiantes. Para ellos, usar un teorema significa solamente referirse a un simple argumento, no consiste en usar un enunciado partido en dos para verificar las premisas requeridas y afirmar la conclusión (Bourreau-Billerait, Dewitte y Lion, 1998, p. 13, 25). La falta de distinción entre un teorema y su recíproco es un síntoma de este punto oscuro (Duval, 1991, pp. 237-239).

Esta manera operativa de usar teoremas, definiciones o axiomas involucra una consecuencia semántica crucial. Las conexiones entre las proposiciones dentro de cualquier paso dependen solamente de su estatus operativo, lo que significa que no se requieren los conectores (si…entonces, por tanto, etc.) entre premisa y conclusión. Cuando se usan los conectores, son solo claves lingüísticas del estatus operativo, que está previamente determinado por el estatus teórico.

En el nivel de organización de pasos, los pasos están conectados por proposiciones que se superponen: algunas conclusiones del último paso se toman como premisas para el nuevo paso. A esto se debe que no haya brecha entre dos pasos. En este nivel, el uso de los conectores no es relevante. Esta manera específica de hacer conexiones produce una expansión discursiva en forma de árbol y no una organización secuencial lineal.

Podemos visualizar la articulación de estos dos niveles bien diferentes de organización deductiva, con sus tipos específicos de conexiones, mediante el gráfico proposicional que se presenta en la Figura 3.

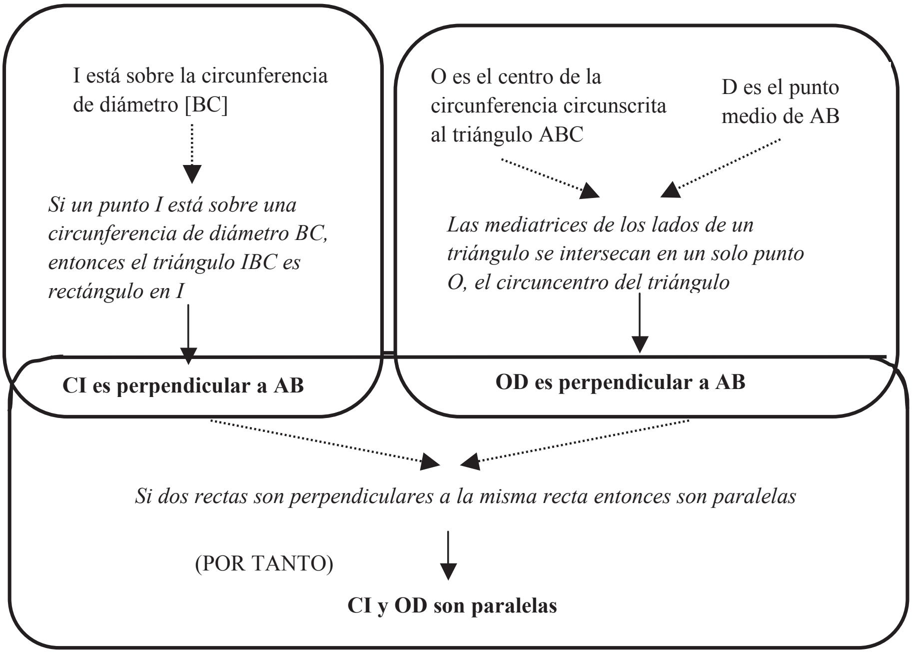


Figura 3. Los dos niveles de organización deductiva en cualquier razonamiento válido

Una verdadera comprensión de la prueba matemática requiere el entendimiento de la manera operativa de usar los teoremas dentro de cada paso (los estilos de letra, plana, cursiva y negrilla de la Figura 3 corresponden a las tres categorías de estatus operativo), y el entendimiento de la conexión de pasos mediante la superposición. La construcción de una prueba incluye enfocarse de manera continua en los dos niveles, yendo de abajo hacia arriba y viceversa, lo que obviamente presupone una conciencia previa de la organización particular de los niveles.

Sin embargo, desde un punto de vista epistemológico, con frecuencia se consideran las pruebas desde un tercer nivel: el nivel teórico. Este nivel involucra un cambio de escala: se pasa de la deducción local de una proposición a la deducción global dentro de un conjunto de proposiciones. Así, por ejemplo, saltamos de la comprensión de la prueba de cualquier proposición en los *Elementos* de Euclides a la evaluación de la derivación deductiva, sin brechas o apoyos externos, de todas las proposiciones del primer libro de los *Elementos*. En esta escala podemos encontrar alguna brecha en la cadena de las pruebas locales. Pero este tercer nivel está más allá de las capacidades de los aprendices, porque requiere, al mismo tiempo, que ya hayan comprendido cómo fluye una organización deductiva de proposiciones y que puedan tener en cuenta un conjunto de pruebas locales. Este requerimiento epistemológico se tropieza con el problema didáctico clásicamente conocido como "círculo hermenéutico".

Cambiar el foco dentro del espacio del significado

Comprender este funcionamiento específico de una prueba matemática requiere un cambio de foco en el componente predominante del significado de una proposición. Según el tipo de discurso (conversación ordinaria o debate, descripción, explicación, argumento o deducción válida, etc.), para los distintos componentes del significado de una proposición no son las mismas características las que se tienen en cuenta. Por ejemplo, los valores epistémicos no interesan en una descripción o una explicación, pero están en primer plano cuando se trata de cualquier tipo de razonamiento. Y entre el argumento y la deducción válida, la diferencia está en el papel que se asigna al estatus.

Así, en cualquier debate podemos obtener un argumento convincente sin probar, es decir, sin estar obligados a aseverar proposición alguna, sin que sea necesario hacerlo. Para que tal necesidad exista, el estatus debe predominar, pues así las diferencias funcionales entre proposiciones con respecto a su estatus en la organización de un paso de deducción se convierten en el proceso operante, como ya lo hemos señalado. Por lo general, siempre que cambiamos el tipo de discurso, cambiamos tanto la dimensión predominante del significado en cada proposición como la manera en que se organizan las proposiciones dentro de un proceso de pensamiento intencionado.

En el habla ordinaria y las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación. De otra parte, en el razonamiento, los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Y surge entonces la pregunta: ¿de dónde provienen los diferentes valores epistémicos? ¿Del contenido? ¿De los valores lógicos? ¿Del estatus? Las maneras cognitivas de funcionar para razonar son tantas como los componentes y las características en el espacio de significados de una proposición. Por tanto, podemos describir fácilmente la brecha entre el razonamiento como argumento y el razonamiento como deducción válida.

En la organización deductiva, el componente del significado que predomina es el estatus de las proposiciones y no su contenido. El estatus operativo de cada proposición está fijado por su estatus teórico y, por tanto, su valor epistémico se hace dependiente de su valor teórico y no de su contenido. Es casi lo opuesto de lo que ocurre en una argumentación o en una explicación en el habla ordinaria.

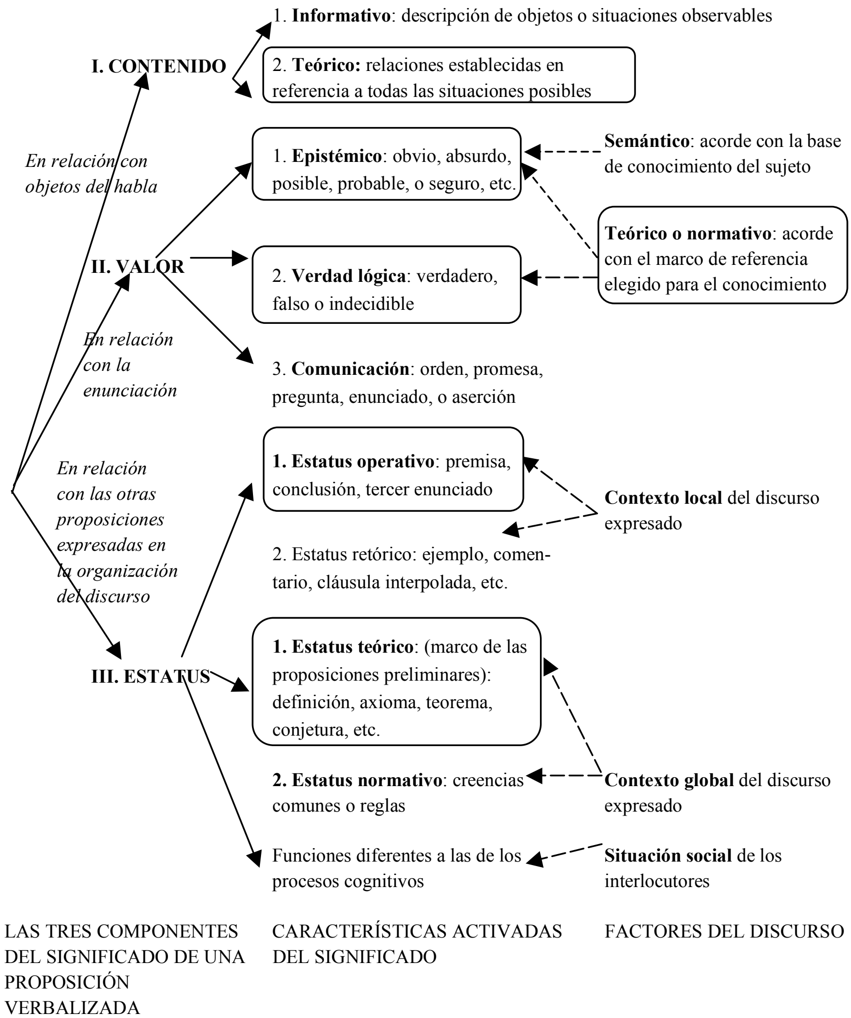


Figura 4 . Posibles variaciones dentro de un espacio de significado de una proposición

A diferencia del habla ordinaria, el razonamiento moviliza los tres componentes posibles del significado de cada proposición, pero están combinados de maneras bien específicas para el argumento y para la prueba matemática. El argumento no fluye como una deducción válida porque el contenido se impone sobre los otros componentes, como lo hace en el habla ordinaria. En un argumento o en el habla ordinaria, la 'garantía' no opera como lo hace cualquier tercer enunciado matemático. No se requiere operación específica alguna para verificar primero si se dan las diferentes cláusulas de la parte del SI de un teorema para luego desprender la parte del ENTONCES como conclusión.

Una inclusión semántica o una asociación verbal es suficiente para "obtener una conclusión o hacer una afirmación" (Toulmin, 1958, p. 98). Más aún, "las condiciones de excepción o refutación" también son posibles y se incluyen en el paso para obtener la conclusión (p. 101). De hecho, en el modelo de Toulmin para el uso de argumentos no se hace distinción entre dos niveles de organización de la deducción. Entre todas las características del significado, solo las que están dentro de rectángulos redondeados en la Figura 4 son relevantes para cualquier razonamiento. La Figura 5 muestra los papeles contrastantes que aquellas características juegan en un argumento y en una prueba matemática. Por tanto, podemos ver por qué el proceso cognitivo subyacente a la comprensión del razonamiento válido que se requiere en la prueba matemática no es principalmente un asunto de lógica o de lenguaje formal, como se supone en algunos modelos mentales o en algunas investigaciones de corte cognitivista.

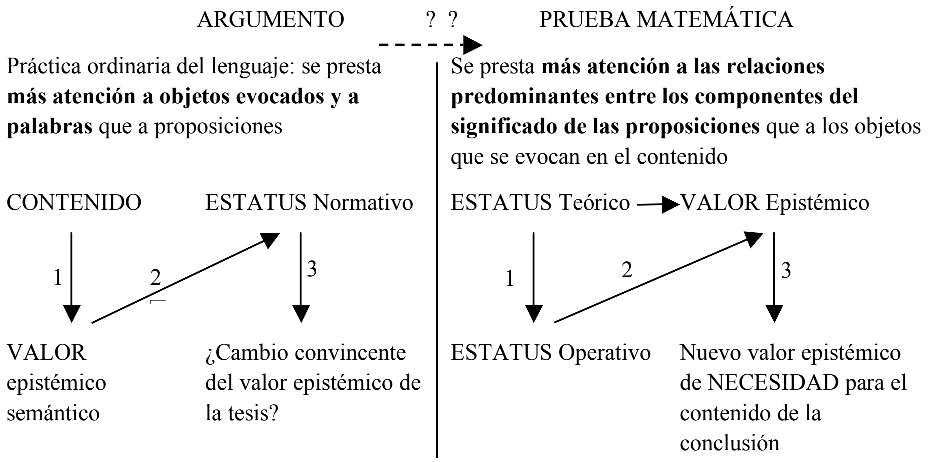


Figura 5. Se requiere cambiar el foco sobre los componentes del significado para comprender el razonamiento deductivo

Esto plantea inmediatamente el problema crucial desde un punto de vista cognitivo y, por tanto, para la enseñanza: ¿el paso de una manera de operar a la otra ocurre naturalmente? ¿Es fácil para los estudiantes darse cuenta de ello o se requiere un enfoque específico para el aprendizaje (Duval, 1993b)? Con mucha frecuencia los profesores creen que este paso es fácil porque sienten que la dificultad principal consiste en descubrir qué "propiedades" usar, o tener las ideas correctas (las imágenes sugerentes) para proporcionar una prueba. Y creen que luego solo es necesario explicar o escribir en tan pocas palabras como sea posible. Pero en realidad las cosas pasan de manera distinta.

Razonamiento y lenguaje: dos tipos de variación

Este es el tema más controversial en la educación matemática. Tenemos dos afirmaciones opuestas: "las matemáticas son independientes de todo lenguaje", "las matemáticas necesitan intrínsecamente algún dispositivo simbólico o representacional para procesar objetos (cálculo, visualización, razonamiento, etc.) y no solo para la comunicación". Para apoyar la primera afirmación, se hace referencia a la introspección matemática o a la teoría conceptual piagetiana; para la segunda afirmación, se destacan las dificultades que la mayoría de los estudiantes encuentran sistemáticamente con la variedad de dispositivos representacionales y simbólicos usados en matemáticas. Este debate subyace a las elecciones hechas en la enseñanza de la prueba matemática.

Por ejemplo, si se cree que las matemáticas son independientes de todo lenguaje, se puede considerar que aprender a probar reside en resolver problemas. Entonces, la actividad básica es la heurística: después de encontrar una respuesta, nada importante queda por hacer, solo comunicar la respuesta. Pero si se tiene en cuenta que el pensamiento matemático involucra, incluso en su representación mental, alguna actividad semiótica, se debe considerar que aprender a probar también requiere un trabajo específico para descubrir los cambios en el significado de la proposición y en la organización discursiva requerida para moverse de una argumentación estándar a una prueba (Figuras 3, 5).

De un modo u otro, no hay razonamiento válido sin lenguaje, porque solo las proposiciones pueden ser verdaderas y porque no hay proposición sin enunciado. Por tanto, el problema de la relación entre razonamiento y redacción explícita no se puede desconocer, especialmente en la educación matemática. ¿Cuáles son las interacciones entre el razonamiento como organización específica de proposiciones y la redacción, o expresión, como expresión explícita en un lenguaje particular? Dos tipos de variación caracterizan estas interacciones:

1. Para expresar en la lengua materna las proposiciones que conforman un paso

de deducción y para expresar el estatus de ellas se tienen muchos grados de libertad. En primer lugar, no es necesario que cada proposición de un paso se exprese explícitamente en una oración, o incluso en una cláusula. Muy a menudo, por razones de economía, se deja implícita alguna proposición, sea una premisa o un tercer enunciado. O todas las proposiciones de un paso se pueden expresar en una oración (Duval y Egret, 1993, pp. 127-129). Debemos expresar rápidamente para captar la organización de todo el paso y para no perdernos en los detalles de cada uno. También hay muchas maneras de expresar el estatus de cada proposición. Podemos usar conectores lógicos, actitudes proposicionales o incluso el mero orden de sucesión de las proposiciones. Estas claves lingüísticas también se usan en la argumentación ordinaria y en la explicación. Algunas veces el conector "si… entonces…" se usa para señalar las premisas y la conclusión. Pero este conector también expresa la relación de implicación, que es una organización intrínseca a una proposición y no a la organización del paso.

Así, estas variaciones libres pueden generar textos muy diferentes para la misma organización de la proposición y pueden ser una fuente de confusión para los aprendices. Y, aún más, es posible observar grandes variaciones de un profesor a otro. De ahí, este problema de comprensión: ¿cómo puede un aprendiz distinguir entre el razonamiento válido y el no válido si la expresión de ambos tiene una estructura superficial similar?

2. También se usan otros tipos de registros de representación para expresarse en matemáticas: lenguaje formal o simbólico, redes, configuraciones, etc. Desde un punto de vista técnico, los lenguajes formales y los símbolos algebraicos son más poderosos y rigurosos que la lengua materna, y en algunas áreas son esenciales. En estos registros, la prueba se realiza mediante cálculo y se pueden describir los métodos de prueba. Esa es la razón por la cual probar en estos registros más técnicos puede parecer menos complicado que el razonamiento deductivo en una lengua materna. Pero con frecuencia se ha notado que los estudiantes pierden el significado de los procesos y las operaciones que están realizando dentro de tales registros porque, para ellos, a menudo no hay coordinación entre estos diferentes registros de representación (Duval, 1995a; 1996a).

Es mediante la lengua materna como los aprendices se pueden percatar de lo que se requiere para una prueba matemática y lo que ella produce. Por una simple razón. ¡Razonar en lengua materna requiere tomar en cuenta el estatus y el valor epistémico de cada proposición al mismo tiempo! Solo así el razonamiento puede funcionar como un verdadero razonamiento para un sujeto, es decir, como un razonamiento convincente. En contraste con esto, en el cálculo lo importante es enfocarse en las reglas de uso y la sustitución para cada símbolo (variables, cuantificadores, operadores, relaciones, etc.). El estatus y el valor epistémico de las expresiones simbólicas no interesan. Desde un punto de vista cognitivo, esta es la diferencia profunda: el cálculo es más fácil que el razonamiento. Y esa es la razón por la que la afirmación de que el razonamiento es "nada más que procesos de cálculo" (Johnson-Laird, 1983, p. 12) es falsa desde un punto de vista cognitivo e inútil desde un punto de vista educativo.

¿Cómo se puede formular el problema de aprender a probar?

Los procesos cognitivos que ponen al estudiante en capacidad de comprender cómo funciona una prueba matemática y de probar dependen de una doble conciencia: una concierne a la distinción entre diferentes causas para el sentimiento de necesidad que puede ser experimentado y la otra concierne a la distinción entre diferentes procesos de organización en un desarrollo discursivo. Pero esta doble conciencia va en contra de dos prácticas comunes y familiares.

Percatarse de la discrepancia entre un razonamiento válido y uno no válido: un cambio en la práctica epistemológica común

Todos sabemos que el sentimiento de necesidad ha sido la línea principal de investigación de Piaget con respecto al desarrollo cognitivo del niño. Es un cambio en la sensibilidad a nuevos tipos de causas en la experiencia de necesidad del niño lo que indica las etapas de las operaciones concretas y formales. Pero también se sabe que el logro de la etapa de las operaciones formales es inducido por la actividad experimental espontánea (disociación o combinación de parámetros en la aplicación del principio del control de variables: hacer variar una variable mientras las demás se mantienen constantes; véase Piaget e Inhelder, 1955), y que eso está lejos de ser suficiente para comprender la prueba matemática. Y, puesto que la meta de la prueba no es solo lograr más información sino también cambiar el valor epistémico de la información declarada en una proposición, no podemos evitar la pregunta: ¿qué es lo que genera la necesidad de afirmar una proposición?

Esa pregunta no es un asunto de lógica, sino un asunto de las estructuras cognitivas del sujeto: ¿cuáles son las condiciones previas para la sensibilidad hacia lo que genera una prueba matemática? Para encontrar tales condiciones, debemos comenzar a partir de estos dos requerimientos:

1. solo un razonamiento válido puede producir la necesidad de la verbalización de una proposición;
2. en matemáticas, la verdad solo puede estar conectada a una derivación discursiva intrínseca de este valor epistémico.

Pero, y aquí está la dificultad, tenemos diferentes causas posibles que conducen a una persona a reconocer la necesidad de una verbalización, y por tanto diferentes tipos de significado de necesidad.

Tres experiencias bien diferentes que conducen a la conciencia de necesidad

La primera experiencia que conduce a la conciencia de la necesidad de alguna proposición es que su contenido corresponde a datos sensoriales, percibidos con o sin instrumentos. Ahí podemos verificar lo que se dice examinando lo que se puede percibir. Esa es la práctica epistemológica común. De esa manera, la mejor prueba común es la observación directa. "¡Mire, eso se ve en la figura!". No se necesita nada más. Para todo el mundo esta práctica es la más natural y es difícil comprender por qué no se puede usar en geometría como, por ejemplo, en botánica, geología, etc. Aquí, las raíces cognitivas de la necesidad son extrínsecas y no intrínsecas al razonamiento. Aquí, las raíces de la necesidad y la convicción están en la experiencia, y el razonamiento debe funcionar como una descripción precisa de las relaciones observadas. Es lo que Leibniz denominó la "necesidad física" como opuesta a la "necesidad lógica o geométrica" (Leibniz, 1969/1710, p. 51; Piaget, 1967b, p. 60, 188).

La segunda experiencia que conduce a la afirmación de la necesidad de alguna proposición reside en el hecho de que otros están de acuerdo en que es verdad. Esta causa puede ser suficientemente fuerte para cambiar el juicio individual en un grupo como lo han mostrado algunos experimentos: cada sujeto cambia su apreciación de la ilusión autocinética cuando se informa de la apreciación de los otros. Aquí las raíces del sentimiento de necesidad están en la regulación normativa de las interacciones entre los miembros de cualquier grupo: cada quien debe reducir divergencias y conflictos para mantener la cohesión del grupo o su propia integración individual. Lo que es así reconocido se convierte en una necesidad, en una necesidad consensual.

La tercera experiencia ocurre siempre que se ve que expresar una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque vaya en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general. Pero aquí la enseñanza puede descarriar a los estudiantes. Cuando los profesores hacen énfasis en la resolución de problemas, lo que se destaca es la búsqueda de teoremas apropiados para usar en la prueba. En este caso, el significado de necesidad puede estar atado al uso de tal o cual teorema para resolver un problema dado: en este problema, uno "debe" usar estos teoremas como herramientas. Aquí hay solo una "necesidad metodológica" porque podemos encontrar otras maneras matemáticas de resolver un problema: tal necesidad concierne solamente a lo que es pertinente para obtener la solución cuando se adopta algún marco teórico. No concierne a la manera en que un teorema conduce a expresar necesariamente una proposición como conclusión.

Aquí obtenemos una necesidad discursiva intrínseca: cualquiera sea el teorema empleado, de lo que ya se ha dicho y acordado, no hay elección distinta a expresar esta proposición. En vez de "necesidad lógica", preferimos denominarla "necesidad discursiva operante". Sobre una tal necesidad inmanente en el pensar es como se puede desarrollar o derivar una explicación teórica. Pero este tipo de necesidad puede permanecer oculta para los estudiantes, incluso cuando ellos citan los teoremas pertinentes, si nunca han tenido la oportunidad de comprometerse en una actividad específica para darse cuenta de ella.

Una clasificación funcional de las pruebas

En la primera investigación sistemática de la prueba matemática desde un punto de vista educativo, Nicolas Balacheff distinguió cuatro tipos de pruebas (1987, pp. 163-166; 1988, p. 55): empirismo ingenuo, experimento crucial, experimento genérico y experimento mental. Los dos primeros tipos corresponden a pruebas pragmáticas porque se enfocan en la observación: "funciona". Los dos últimos corresponden a pruebas intelectuales porque apuntan al "carácter necesario" de la afirmación. Entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales hay un "rompimiento" (Balacheff, 1988, p. 55).

A la distinción entre cuatro tipos de pruebas se debe agregar una distinción entre dos tipos de explicación (Balacheff, 1987, pp. 147-148; 1988, pp. 28-30) atendiendo al hecho de que las pruebas intelectuales requieren "herramientas de lenguaje" y del control de posibles contradicciones. Por tanto, adoptamos la distinción entre "prueba" como "una explicación reconocida por una comunidad [...] en relación con un sistema de validación común a los interlocutores" y "demostración" (*apodeixis*) como "una secuencia de enunciados organizados de acuerdo con reglas específicas".

Esta clasificación corresponde a los diferentes tipos de necesidad que cada quien puede experimentar. Si de esta clasificación excluimos el empirismo ingenuo porque está confinado a la obviedad de cualquier percepción inmediata, podemos notar que el "experimento crucial" descansa sobre la "necesidad física", "la prueba como una explicación reconocida" descansa sobre la "necesidad consensual", y la "demostración" descansa sobre la "necesidad discursiva operante". Esta clasificación es principalmente funcional y deja al margen los medios y el proceso de probar. Sin embargo, estos medios y procesos no solo dependen del tipo de prueba, sino que también cambian de acuerdo con el área de conocimiento.

En el marco de tal clasificación funcional, el punto es el paso cognitivo de un tipo de prueba al otro. En una vía piagetiana, se propone la hipótesis de una "jerarquía y línea directa" cognitiva entre los tipos de prueba (Balacheff, 1988, pp. 565-566). Pero el paso esperado del "experimento mental" a "demostración" (prueba matemática), o de interacción social a demostración, genera dificultades (Balacheff, 1987, p. 166; 1988, p. 451, 461). ¿Por qué?

Percatarse de lo que es específico en la organización válida y creativa de las proposiciones: un cambio en la práctica discursiva del habla

En cualquier debate, en cualquier discusión y, de manera más general, cuando quiera que las interacciones sociales sean orales, nunca argumentamos de la manera como se requiere en una prueba matemática. Las interacciones sociales orales fluyen siguiendo una organización de proposiciones muy diferente a la de una secuencia de enunciados acorde con reglas del razonamiento válido (Duval, 1993b; 2001).

Hemos destacado antes que el razonamiento deductivo reúne dos niveles de organización discursiva y, en particular, que la manera de funcionar es diferente para cada nivel. En el primer nivel, hay una inversión en la predominancia usual entre el contenido y el estatus de las proposiciones (Duval, 1993b, pp. 44-45). Pero es difícil darse cuenta de esta inversión porque ella incluye una sustitución implícita: ¡el valor epistémico teórico debe reprimir al valor semántico del que está cargado! Para un aprendiz, el uso correcto y significativo de cualquier teorema depende, en primer lugar, de la conciencia de esta inversión. De otra manera, los pasos se entienden como organizaciones binarias en las que no se requiere verificar las premisas para aplicar los teoremas. Por tanto, entre otros errores importantes, está el riesgo de producir argumentos circulares sin notarlos o de confundir un teorema y su recíproco (Figura 6).

En el segundo nivel, la conexión entre dos pasos se basa en volver a usar implícita o explícitamente proposiciones que ya se han sido expresado como conclusiones o como hipótesis dadas, pero con un cambio de estatus de un paso al siguiente, lo que hemos denominado “reciclar”. En consecuencia, el razonamiento avanza de una conclusión a otra conclusión sin saltos. Se tiene entonces otro fracaso muy diferente: la prueba no es realmente una prueba porque hay un salto que no se ha notado.

	Funcionamiento del razonamiento válido	Tipos de malentendidos
I. Organizar proposiciones dentro de un paso deductivo teniendo en cuenta tres tipos de estatus.	(1) Cambiar el foco sobre lo que se considera el primer componente del significado de una proposición: estatus en lugar de contenido. (2) Hacer funcionar el teorema: separar su parte “entonces”. *Un teorema no es un argumento.*	Disfuncional: • Confundir hipótesis (dada) con conclusión. • Confundir un enunciado con su recíproco o su contrario. • No revisar las condiciones de aplicación de teoremas.
II. Organizar pasos deductivos dentro de una prueba de ...	Traslapar pasos deductivos. Dos condiciones: (1) La conclusión de un paso debe ser la premisa de otro. Hipótesis y premisa no se refieren al mismo nivel. (2) Se usan todas las propiedades matemáticas pertinentes al problema.	• No distinguir el mecanismo de sustitución • Avanzar dejando “baches” en la prueba: No se perciben todas las condiciones del problema que se va a resolver.

Figura 6. Indicadores de incomprensión de la organización de la “demostración”

En la tabla que se presenta en la Figura 6, todo lo que concierne a las condiciones cognitivas de comprensión está en letra negrilla (columna de la derecha). Todos estos tipos de malentendidos están conectados con la organización específica de una prueba matemática y su manera de fluir.

En el nivel superficial del lenguaje natural, la deducción válida no se puede distinguir del argumento espontáneo. La organización deductiva de una prueba y su modo específico de funcionar no son visibles a través de la explicación en lenguaje natural. Por ejemplo, los dos niveles de organización deductiva están evidentemente confundidos en las expresiones superficiales de tipo lineal. Pero el modo espontáneo de redactar oscurece esto. Hay dos características de la manera espontánea de redactar. Primera, el hablante describe lo que ha visto o lo que ha hecho, explicitando solo lo que estaba planeando con respecto a su acción o a lo que observó. Y el hablante se guía por asociaciones, que con frecuencia están activadas y guiadas por redes semánticas.

En esta manera espontánea, el hablante se enfoca solamente en los resultados de sus operaciones, mientras que la prueba matemática requiere enfocarse sobre operaciones discursivas que el hablante está realizando. Estas operaciones discursivas no pueden ser confundidas con la redacción, aunque esto se hace a menudo en el campo de la educación matemática a través de oposiciones entre conceptos, o representaciones mentales, y lenguaje. Las operaciones discursivas son operaciones que no se dirigen hacia los objetos sino hacia las diferentes posibilidades de nombrar objetos, para afirmar proposiciones acerca de objetos y, principalmente, acerca del espacio multidimensional del significado abierto por las proposiciones. En esta forma espontánea de redactar, tener en cuenta el estatus de las proposiciones solo puede carecer de importancia.

Podemos ver, entonces, por qué redactar una explicación matemática no depende de los mismos procesos cognitivos y no corresponde a atajos similares en un matemático y en un joven aprendiz. Cuando quien redacta es un profesor o un matemático está presente la preocupación de hacer tan fluido como sea posible el enfoque de arriba a abajo y viceversa, teniendo en cuenta también el nivel teórico. En estas circunstancias, hay poca posibilidad de que un joven estudiante descubra qué es una producción discursiva intrínsecamente válida. Aunque se pida a los estudiantes que enuncien explícitamente el estatus de las proposiciones, nombrándolo (hipótesis, propiedad, etc.) o usando conectores, esto podría ser solamente una pantalla. La organización específica de un paso de deducción solo puede captarse a través de la articulación de las dos organizaciones diferentes de proposiciones.

En síntesis, fuera de las matemáticas, la única organización de proposiciones para un paso, que realmente se concibe, es una binaria y no una ternaria. Tenemos o bien un enunciado y su justificación como la presentación de algo que se puede exhibir, o bien la palabra correspondiente a una propiedad y su derivación natural como una inferencia semántica. Pero no hay distinción entre diferentes tipos de organización de proposiciones; esto es, entre diferentes tipos de estructuras para los procesos de razonar y de probar. Así que es sorprendente ver que los modelos mentales del pensamiento se refieran a los silogismos clásicos tomados como patrones de deducción (Johnson-Laird, 1983), mientras que estos silogismos tienen una organización binaria y trabajan como inferencias semánticas, sin teorema alguno u otro tercer enunciado (Duval, 1995a, pp. 238-241, 251-255).

El punto clave: un cambio total del componente que predomina en el significado de las proposiciones

Hemos destacado previamente que el tipo de organización del discurso depende del componente predominante y de las características de los significados de las proposiciones expresadas en el discurso. Ser capaz de distinguir entre una prueba matemática y un argumento, que tienen redacciones similares o las mismas marcas verbales (conectores gramaticales y lógicos), incluye cambiar de foco con respecto a lo que se considera como el primer componente de los significados de las proposiciones: su estatus en lugar de su contenido. Percatarse de este cambio es la condición para comprender cómo fluye una prueba matemática y qué cambios aporta al conocimiento.

Ahora podemos recordar que los diferentes tipos de pruebas se pueden clasificar de acuerdo con las varias experiencias de necesidad en las que están basadas. Debemos agregar que tales experiencias requieren medios y procesos específicos y no se pueden disociar de ellos. En otras palabras, el salto desde una experiencia de necesidad física y/o desde una experiencia de necesidad consensual, a una experiencia de "necesidad lógica o geométrica", es un cambio en el tipo de prueba. Este cambio involucra un rompimiento estructural en el modo de razonar debido a que la "necesidad lógica o geométrica", que es de hecho una necesidad discursiva operante, se puede experimentar solamente en la comprensión de una deducción válida. Para darse cuenta de que un razonamiento válido produce la necesidad de la expresión de proposiciones como conclusión, se requiere un cambio en el foco de atención, pero tal cambio va en contra de la práctica epistemológica común: la necesidad de afirmar alguna proposición no puede provenir de la experiencia como es usual sino de una producción discursiva intrínsecamente válida, que no es lo que ocurre en otros campos del conocimiento.

Todo este análisis da lugar a un asunto educativo de carácter crucial: ¿cuál es la implicación de este cambio estructural para la introducción de la prueba en el currículo y en la enseñanza de las matemáticas? Tenemos alternativas muy opuestas. N. Balacheff enfatizó la importancia de que los profesores mismos se encarguen de todo lo relacionado con el estatus de las proposiciones verbalizadas durante un debate (Balacheff, 1988 p. 450, 462, 531). En la misma tónica, Anderson, Boyle, Farell y Reiser (1987) propusieron un tutor geométrico en el que los estudiantes no necesitaran tomar en cuenta el estatus de las proposiciones, y donde la construcción de una prueba gráfica se enfocara principalmente en "submetas" (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987, pp. 113-117). De esta manera, los estudiantes no se pueden enfrentar con la posibilidad de malentendidos disfuncionales (véase Figura 6). En la alternativa opuesta, hacer a los estudiantes conscientes del papel decisivo del estatus se convierte en un objetivo de incuestionable importancia para la enseñanza. De ahí que Luengo (1997) haya integrado esto al intercambio entre los estudiantes y el tutor Cabri-Géomètre.

La distinción entre los diferentes tipos de prueba da lugar al asunto educativo del paso cognitivo de un tipo de prueba a otro, y principalmente de un argumento dentro de una interacción social a una prueba matemática. Es un cambio profundo en el tipo de prueba, porque la prueba matemática requiere la experiencia de un tipo muy diferente de necesidad. Tal experiencia no puede tener lugar o descubrirse dentro de interacciones orales. Y es inútil pedir que se escriba acerca de lo que se ha explicado en cualquier debate, para hacer explícito el estatus de las proposiciones expresadas (Figura 2). Ahora podemos formular el problema del aprendizaje de la prueba: ¿Qué factores se deben poner en juego para lograr que los estudiantes experimenten un cambio tanto en su práctica discursiva del habla como en su práctica epistemológica común y, por tanto, hacer que logren la doble conciencia? Es decir, esta doble conciencia que es la fuente intrínseca de convicción y la guía heurística efectiva. Los factores deben depender de la arquitectura cognitiva del sujeto y se deben corresponder con las condiciones básicas para el aprendizaje de las matemáticas.

¿Cómo inducir a los estudiantes en el funcionamiento cognitivo del razonamiento deductivo?

Esta manera de formular los requisitos para aprender a probar nos aleja de las concepciones clásicas sobre este tema. Así, para aprender a probar, muchos profesores creen que es necesario y suficiente aprender varios métodos de prueba (*reductio ad absurdum*, división de casos posibles, etc.) o varios modos matemáticos de probar una proposición (geométrica, vectorial, analítica, etc.). Y si esto no es suficiente del todo, ellos creen que es lo que más importa. No discutimos eso. Pero necesita la adquisición de varias habilidades. Por ejemplo, producir diferentes pruebas matemáticas de una proposición requiere distintos marcos matemáticos de referencia y cambiar el marco, con mucha frecuencia, involucra un cambio de registro de representación.

Pero aquí nos enfrentamos a una dificultad bien conocida: los diferentes registros de representación permanecen, para muchos estudiantes, aislados entre sí. Además, esto no resuelve el problema básico inicial de distinguir un razonamiento deductivo válido de uno que no lo es, principalmente en la lengua materna. Otra concepción clásica hace énfasis en la actividad de investigar sobre problemas estimulantes. Aquí, puede ser difícil distinguir entre las maneras de producir una conjetura y las de probarla o refutarla. Estas concepciones clásicas, que se niegan a alejarse siquiera un poco de los procesos matemáticos, subyacen a los problemas reales de aprender a probar.

La necesidad de un rodeo para respetar las dos condiciones básicas para aprender matemáticas: la diferenciación y la coordinación entre registros de representación semiótica

Al examinar de cerca el aprendizaje de las matemáticas por parte de estudiantes de entre diez y dieciséis años, siempre hay un hecho apremiante: muchos estudiantes no piensan para realizar o no comprenden cómo realizar las diferentes acciones requeridas para resolver un problema, o para aplicar algún conocimiento adquirido, ¡aunque las tareas asignadas puedan parecer sencillas, obvias, naturales para los profesores y los matemáticos! Lo que parece sencillo o natural en la realización de cualquier actividad matemática involucra de hecho diferenciación y coordinación implícitas y complejas de registros de representación semiótica en un modo que por lo general no se requiere en otros campos de actividad mental (Duval, 1996a).

El aprendizaje de las matemáticas tiene lugar a través de la construcción de una arquitectura cognitiva del sujeto, arquitectura que nunca o con muy poca frecuencia se obtiene como el resultado de aprender tal o cual contenido (conceptos, algoritmos, o incluso modos de representación como gráficas, sistemas numéricos, etc.). En otras palabras, la comprensión no sigue el orden de la construcción matemática del conocimiento, sino que supone el desarrollo de algunas habilidades específicas que son fructíferas también para otros campos. No se puede enseñar matemáticas en un nivel inferior, sin tener en cuenta los requisitos básicos para desarrollar la arquitectura cognitiva del sujeto. Y esto es particularmente cierto para la prueba matemática.

Según el campo matemático y según su carácter elemental o complejo, una prueba se puede construir en lengua materna o puede requerir notaciones específicas del lenguaje formal, por ejemplo el uso de cuantificadores. Este es uno de los dos grandes tipos de variaciones en las interacciones entre el razonamiento y el lenguaje, como se mencionó antes. En primer lugar, si nos limitamos a la lengua materna, hemos visto que dos procesos muy diferentes de expansión discursiva generan organizaciones de proposiciones con diferencias profundas. Y esto no siempre es visible a través de su expresión superficial. No es posible imaginar una enseñanza confiable de la prueba que no propicie en los estudiantes la diferenciación de estos dos usos de la lengua materna.

Sin embargo, en algunos casos, el razonamiento depende del uso de un sistema de símbolos para hacer explícito el aspecto extensional de las oraciones: conectores de negación, de implicación material para proposiciones, cuantificadores universal y existencial para variables y predicados (Carnap, 1958). Aquí cambiamos los registros de representación semiótica para los procesos discursivos: algo más llega a ser necesario además de la comprensión de cómo usar las reglas del si…entonces… para una operación de separación. Pero si una prueba matemática puede jugar con diferentes registros semióticos, queda por descubrir el modo específico en que trabaja la expansión discursiva. Y para los sistemas simbólicos o el lenguaje formal, la comprensión de cómo funciona una prueba requiere también una coordinación con la lengua materna (Duval, 1995a, pp. 151-155).

Para inducir a los estudiantes a la comprensión de la manera en que funciona una prueba, se deben organizar actividades matemáticas divididas en tres etapas: una primera etapa de exploración libre, una segunda etapa de investigación específica de la organización deductiva de proposiciones en un registro no discursivo, y una tercera etapa de descripción o explicación verbal de la organización deductiva que se ha descubierto. Esto viene a ser lo mismo que separar primero en lo que se considera ordinariamente como actividad heurística, o asunto de intuición, y luego en lo que se considera bien sea como actividad lógica o una actividad de comunicación. ¿Por qué hay esa separación doble y qué conciencia puede producir tanto en los estudiantes como en los profesores?

La variable que dispara esta doble separación: cambiar el registro de representación en el que se trabaja

Reunir las propiedades o los teoremas pertinentes para la construcción de una prueba

La primera etapa de exploración libre es la usual. Con frecuencia, esta exploración tiene lugar en pequeños grupos. Esto puede ayudar a numerosos estudiantes que no tienen éxito en distinguir las "propiedades" y los teoremas pertinentes que se podrían usar, o incluso en darse cuenta de por qué algún teorema es pertinente y otro no lo es. Pero esto no siempre es suficiente y se requiere una confrontación general para hacer que las ideas clave surjan de las variadas producciones de cada grupo pequeño.

Entonces, todo parece casi completo, ya que no se ha omitido nada, excepto producir un registro escrito de la prueba. Eso puede ser cierto desde la perspectiva matemática, pero es engañoso desde la perspectiva del aprendiz. Conocer todos los teoremas que se van a usar en una prueba no ayuda al aprendiz a comprender por qué ellos prueban y, por tanto, a ganar perspicacia con respecto a por qué una proposición es verdadera y a convencerse realmente. La verdadera utilidad de esta etapa es lograr que los estudiantes se adentren en el problema y proporcionarles las "propiedades" pertinentes como datos para una investigación específica en la organización deductiva de las proposiciones. Estamos en el punto de partida.

Investigar dentro de la organización deductiva y su funcionamiento

Si nos limitamos al campo de la geometría elemental, la actividad matemática en esta primera etapa se lleva a cabo en la mezcla de dos registros: el registro de la figura geométrica para "ver" y el registro del lenguaje natural para "explicar" (la mayor parte de las veces en forma oral). Debemos recordar que los teoremas y las definiciones, que se expresan o formulan en lenguaje natural, no funcionan como los enunciados de la práctica ordinaria. Esta mezcla es con mucha frecuencia intrincada y confusa para muchos estudiantes. Así que parece indispensable un tercer registro para hacer visibles las operaciones discursivas involucradas al organizar las proposiciones en una deducción.

Podría parecer que el registro de representación más natural es el gráfico. Por lo menos se lo ha destacado en la investigación psicológica o didáctica bajo varios nombres. Pero este registro no tiene más valor que los otros: es una vía cerrada. Lo que realmente importa es para qué se usa este registro y qué hacen los estudiantes con él.

Brevemente, la construcción de una gráfica proposicional se puede emprender desde una perspectiva heurística: la gráfica de proposiciones se usa para disparar procesos que van hacia adelante y hacia atrás (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987; Rips, 1988), y lo que los estudiantes tienen que hacer es solamente hallar el "camino" entre la hipótesis y la conclusión, escogiendo los teoremas pertinentes. En este caso, el marco del gráfico de proposiciones está ya fijado, puesto que las hipótesis y la conclusión se han ubicado ya al comienzo y al final de la pantalla, respectivamente; la tarea se enfoca en la elección de los teoremas pertinentes para hallar las conexiones. Esto significa que la tarea de tener en cuenta el estatus de las proposiciones llega a ser una actividad latente que desaparece de la vista; el estudiante tiene solamente que elegir los teoremas pertinentes, es decir, no va más allá del contenido de las proposiciones.

Pero la construcción de una gráfica proposicional también se puede pedir en una perspectiva de organización deductiva: la construcción de una representación gráfica se usa para distinguir entre el estatus y el contenido de las proposiciones y también para diferenciar el uso de los teoremas del uso de las justificaciones argumentativas naturales o del de las explicaciones físicas. En este caso, ningún marco se ha fijado de antemano. Entonces, lo que el estudiante debe hacer es escoger las proposiciones de acuerdo con su estatus para construir la totalidad de la gráfica, ya que los teoremas pertinentes se conocen desde la primera etapa. Solo tiene que habérselas con tres reglas de construcción que tienen que ver solamente con la distinción del estatus. Estas reglas de construcción se enfocan exclusivamente en la representación del estatus de una proposición:

1. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.
2. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.
3. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella.

Para construir una gráfica que represente cómo el uso de teoremas resuelve el problema, los estudiantes solo tienen que usar flechas para conectar dos enunciados de acuerdo con su estatus. A través de esta tarea, que descansa en un cambio de registro de representación, el proceso de conciencia ha comenzado (Duval y Egret, 1989).

En cada experimento de enseñanza, uno encuentra la misma evolución en el comportamiento de los estudiantes y la misma transformación profunda en su producción al cabo de varias secuencias didácticas. En primera instancia, pueden estar desconcertados por este tipo de tarea y, sobre todo, pocas veces tienen éxito. Todos los malentendidos latentes con respecto a la deducción matemática, con frecuencia ocultos por las formulaciones lingüísticas que no son ni falsas ni precisas o explícitas, aparecen: confusión entre hipótesis y conclusión, entre un teorema y su recíproco o, más sutil y profunda, confusión entre inclusión de clases (relación natural parte-todo) y la implicación proposicional, despreocupación por las condiciones que aplican a un teorema, reducción del razonar a la mera conexión lineal de las oraciones mediante conectores, despreocupación por la posibilidad de baches, etc. Por ejemplo, entre las primeras producciones de los estudiantes hemos encontrado gráficas de este tipo, que corresponden a una comprensión incorrecta acerca de la organización matemática de la prueba:

Hipótesis 1 $\rightarrow$ Hipótesis 2 $\rightarrow$ Hipótesis N $\rightarrow$ Teorema A $\rightarrow$ Teorema B $\rightarrow$ Conclusión

Las reglas de construcción proporcionan a los estudiantes los medios para construir el gráfico proposicional y también para verificar por sí mismos la validez de su construcción pero, sobre todo, les ayuda a percatarse de dónde y por qué se equivocaron (Egret y Duval, 1989). Todos esos malentendidos aparecen a través de los gráficos construidos y se hacen evidentes fácilmente para estudiantes y profesores. Y es en este momento cuando se percatan de la especificidad del razonamiento deductivo y, a través de nuevas construcciones gráficas, pueden comenzar una verdadera investigación de cómo trabaja una organización deductiva de proposiciones. Y para la elección de pruebas, el profesor puede usar, a través de construcciones de gráficas, variaciones en la complejidad de la organización: la prueba es más o menos arborescente, las condiciones dadas son, o no, necesarias solamente para los pasos iniciales, etc. (Bourreau-Billerait, Dewitte y Lion, 1998).

Una nueva situación representacional para la redacción

La tercera etapa solo puede comenzar cuando los estudiantes organicen todo un gráfico de proposiciones, es decir, verifiquen por sí mismos la validez de las conexiones, de acuerdo con el estatus de cada proposición, y darse cuenta de qué es un bache en el razonamiento de una prueba. Entonces el profesor puede pedir un segundo cambio de registro: describir o explicar el gráfico proposicional que han construido. Para la redacción, la situación cognitiva es bien diferente. En la redacción hay un cambio en la referencia de los datos: ya no es la figura geométrica, como sucede en la primera etapa, sino la organización discursiva lo que está representado por un diagrama. Así que mediante esta representación transicional se crea un retroceso con respecto a la obviedad visual de la figura geométrica.

Ahora la redacción hace que los estudiantes se percaten del valor epistémico de las proposiciones y, sobre todo, de la transformación del valor epistémico que ocurre a través del razonamiento deductivo: lo que era obvio solo visualmente, o lo que parecía no ser posible, llega a ser teóricamente necesario. Sin embargo, acá no se hablará sobre los procesos de esta nueva conciencia (Duval, 1995a, pp. 223-231). Lo que importa es quizá la pregunta siguiente: ¿por qué recurrir al lenguaje natural para eso? Por dos razones bien conocidas. En primer lugar, los valores epistémicos solo pueden ser expresados en el lenguaje natural. En segundo lugar, el sujeto se puede percatar de lo que está involucrado en su actividad –en este caso, la construcción de la gráfica de proposiciones– solo en el lenguaje natural, tal como lo explicó Piaget (1967b). La comprensión en el aprendizaje de las matemáticas no se puede alcanzar verdaderamente al excluir el lenguaje natural.

Para esta tercera etapa, uno encuentra también una evolución. Cuando se confrontan con la visión intimidante de la organización deductiva que han encontrado, los estudiantes pueden escribir más de lo necesario y de esta manera los textos de sus pruebas parecen una palabrería. Pero, gradualmente, su expresión se vuelve más concisa y no sienten la necesidad de construir una gráfica de proposiciones. Entonces han alcanzado la capacidad para dominar un razonamiento deductivo válido que es más complejo que cualquier simple silogismo (además, la mayor parte de los silogismos no constituyen razonamiento válido, ¡como lo explicó Aristóteles (trad. 1964) extensamente!).

Lo que se pretende a través de esta doble separación: una coordinación de registro

Las operaciones que parecen simples desde un punto de vista matemático son con mucha frecuencia cúspides sumergidas. Debajo tenemos la sinergia entre varios sistemas cognitivos heterogéneos, algunos de los cuales requieren una práctica específica transicional. En otras palabras, lo que es sencillo no está en el comienzo de las secuencias de aprendizaje sino al final. De ahí lo que hemos denominado el rodeo cognitivo requerido.

En el campo de la geometría elemental, la prueba requiere la coordinación entre dos registros de representación: el registro de la figura geométrica para “ver” y el registro del lenguaje natural para “explicar” (¡con mayor frecuencia oralmente!). La introducción de un tercer registro, para un rodeo temporal, parece destacar la presentación discursiva de la prueba en detrimento de su exploración y construcción que con frecuencia se reducen a la primera etapa. Pero nada de ello sucede; más bien, lo opuesto. De esta manera, los estudiantes llegan a distinguir verdaderamente la aprehensión discursiva de una figura geométrica (a través de hipótesis dadas, definiciones, etc.) de su aprehensión meramente perceptiva y se dan cuenta de la prioridad de la aprehensión discursiva sobre la perceptiva. En otras palabras, obtienen un marco para guiar sus investigaciones en el campo de la geometría: no hay una verdadera intuición figural sin alguna base deductiva.

Con esa perspectiva, la introducción de un tercer registro respalda el desarrollo de una coordinación entre el registro de la figura geométrica y el lenguaje natural. Cuando tal coordinación explícita comienza, los estudiantes se sienten liberados del mutismo mental que puede acarrear una irreversible falta de interés en la resolución de problemas matemáticos o incluso un desinterés total en muchos estudiantes jóvenes.

Pero si queremos también desarrollar una habilidad de intuición, principalmente para la primera etapa, cuando lo que se pretende es hallar las propiedades o los teoremas pertinentes para construir una prueba, o incluso para resolver un problema, se requiere también un entrenamiento específico en el registro de la figura geométrica. Por ejemplo, ¿cómo encuentra uno los teoremas pertinentes para resolver el problema dado antes (Figura 1)? Quizá nos hallamos aquí ante algún "círculo hermenéutico" con respecto al papel de la figura en el hallazgo de los teoremas pertinentes.

Cada una de las tres subfiguras que se presentan en la Figura 7 corresponde a uno de los tres teoremas que se usan para construir una prueba. Si estas subfiguras se requieren para evocar propiedades, ¿cómo pueden los estudiantes distinguirlas y reconocerlas en la figura inicial? Si, por otra parte, se necesitan los teoremas para ver las subfiguras, entonces ¿para qué se usan las subfiguras? Esto da lugar al asunto más global acerca de las interacciones cognitivas entre visualización, construcción y razonamiento, que están involucradas en toda actividad geométrica (Duval, 1998b; 2005). Y desde este punto de vista más global, probar en geometría requiere la capacidad para activar de manera fluida los enunciados o sus representaciones figurales. Pero la mayoría de los estudiantes es incapaz de desenredar esta compleja y escondida interacción, ¡que es completamente inconsciente o automática para los matemáticos!

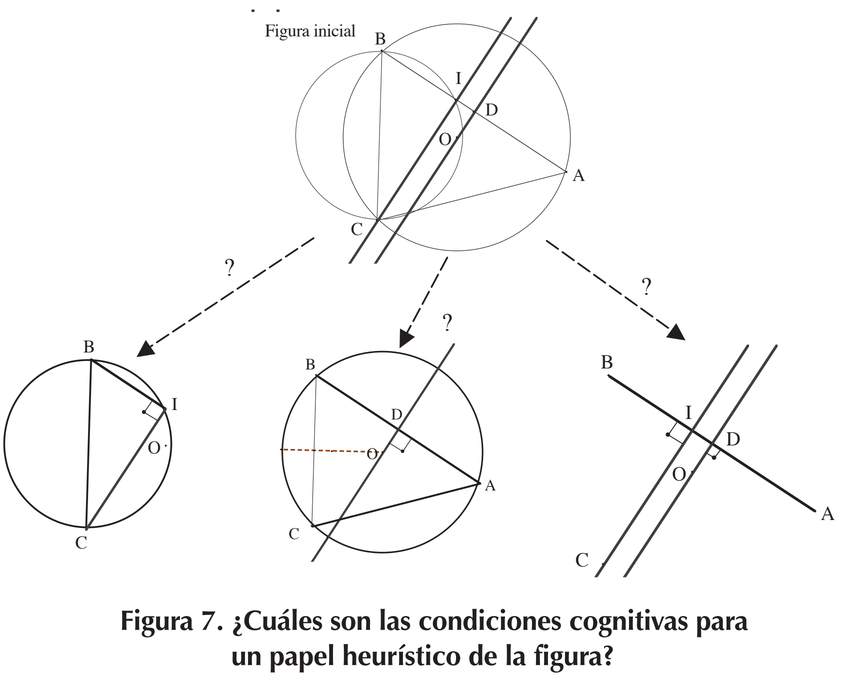


Figura 7. ¿Cuáles son las condiciones cognitivas para un papel heurístico de la figura?

Cualquiera sea la tarea geométrica (analizar figuras, probar, construir, etc.) que se asigne comúnmente a los estudiantes, en ella se traslapan procesos heterogéneos de una gama muy amplia. El aprendizaje en geometría requiere tareas diseñadas para hacer que los estudiantes distingan y practiquen cada uno de esos procesos heterogéneos. Así que esto vale para figuras geométricas lo mismo que para el lenguaje natural: la manera matemática de observar una figura, o de describir su construcción, difiere de la manera perceptual de observar e interpretarla. En una figura que pertenece a una tarea dada, hay factores diferentes que disparan o inhiben la visibilidad de las subfiguras pertinentes que muestran las ideas clave para resolver el problema. Los estudiantes se deben percatar del papel de estos factores en cualquier visualización geométrica también (Duval, 1995b).

Desde luego, la cuestión es si hay un orden de adquisición o alguna jerarquía en las "habilidades". A diferencia de otros modelos que suponen esto, podemos ver que no hay un orden de adquisición entre visualización y razonamiento, pues la actividad geométrica se basa en una sinergia entre varios sistemas cognitivos que deben fluir paralelamente. Y sería una ilusión y un callejón sin salida en la educación matemática promover un registro como más fácil que los otros. La comprensión de la actividad geométrica moviliza, implícita o explícitamente, varios registros de representación y surge al mismo tiempo que su sinergia.

Conclusión

En la educación matemática, la comprensión, lo mismo que el aprendizaje, se debe examinar, no solamente desde el punto de vista matemático, sino también desde un punto de vista cognitivo, porque puede haber una discrepancia en las condiciones de la comprensión entre un punto de vista y el otro: lo que puede parecer simple desde un punto de vista, puede ocultar una verdadera complejidad evidente desde el otro punto de vista. En este artículo hemos destacado la complejidad subyacente a los procesos cognitivos para los pasos involucrados en el aprendizaje de la prueba, incluso para situaciones matemáticas que parecen fáciles porque parecen cercanas a situaciones naturales de percepción y no requieren herramientas técnicas o un registro específico de representación (notaciones de lógica simbólica, escritura algebraica, etc.). Puede parecer como un rodeo complicado, pero la naturaleza de los errores recurrentes y los fracasos de los estudiantes ponen de manifiesto la necesidad de tal rodeo. Hemos distinguido dos tipos de fracasos:

1. Disfunciones en el razonamiento válido, como confusión del estatus, no distinción entre un enunciado y su recíproco, etc. Pueden ser explícitos o permanecer implícitos, escondidos por omisiones o por explicaciones torpemente expresadas o, incluso, por una torpe presentación formal de las pruebas.

2. Baches o deficiencias en el progreso de una prueba; algunos pueden ser obvios y fáciles de detectar mientras que otros requieren un examen cuidadoso.

Debemos agregar a estos fracasos este comportamiento bien conocido y extendido:

3. Bloqueo mental y mutismo mental en respuesta al pedido de construir una prueba, lo que puede llevar a los estudiantes a abandonar cualquier actividad de prueba o desarrollar una aversión a ella más o menos considerable.

Los matemáticos y los profesores se enfocan principalmente en el segundo tipo de fracaso porque refleja la complejidad de las propiedades matemáticas y de los objetos. Desde este punto de vista, las dificultades pueden cambiar con cada situación matemática; también parece posible hallar situaciones o problemas en los que las pruebas están al alcance de cualquiera. Y desde ese punto de vista, uno trata de sobreponerse a los bloqueos mentales (tercer tipo de fracaso) sugiriendo ideas clave.

En contraste con esto, nos hemos enfocado en el primer tipo de fracasos porque ellos son persistentes, cualquiera sea el problema matemático que se dé a los estudiantes. En la medida en que permanecen sin ser conscientes de la manera específica en que marcha el razonamiento deductivo, no pueden ir más allá de la disfunción latente y como resultado está la profunda razón de los bloqueos mentales. Más aún, una prueba no puede funcionar como tal mientras no haya comprensión de la organización deductiva específica del discurso que determina incluso el modo matemático de definir.

La primera ventaja de la doble separación y del cambio de registro es hacer visibles las disfunciones y los bloqueos a los ojos de estudiantes y profesores. La segunda ventaja es proporcionar una herramienta para revelar lo que hay detrás de maneras aparentemente naturales de redactar y visualizar.

La cuestión aquí no es oponer los puntos de vista matemático y cognitivo en educación matemática, sino articularlos. Uno puede aprender a probar solamente en situaciones matemáticas, pero no puede hacerlo si las situaciones de aprendizaje no están organizadas de acuerdo con las variables cognitivas. Cada vez que se han tenido en cuenta esas variables, los estudiantes han experimentado un adelanto en su práctica de razonar e investigar.

La importancia de la geometría elemental para descubrir lo que es una prueba matemática se debe al hecho de que moviliza dos registros multifuncionales: el del lenguaje natural y el de las configuraciones *gestalt*. De esta manera, lo que está en juego primero que todo en el aprendizaje de la prueba es hacer descubrir que el razonamiento en matemáticas no funciona de la misma manera que el razonamiento dentro de una discusión que pretende convencer a otras personas, fuera de las matemáticas.

Además, percatarse del funcionamiento del razonamiento válido es absolutamente esencial, siempre que la deducción tenga que compensar las limitaciones de visión y visualización. Este es el caso, por ejemplo, para el razonamiento *ad absurdum* (y para la geometría tridimensional, donde el respaldo de las figuras se muestra más complejo y limitado que en la geometría del plano). Dentro de su práctica de organizar la conversación es donde los estudiantes pueden experimentar verdaderamente un cambio original y fortalecer su habilidad para hacer prueba matemática.

El uso de los cuantificadores es distintivo de los registros discursivos y no se puede considerar separadamente del uso de la negación. Omnipresentes en el lenguaje natural, pero con frecuencia de manera implícita, estos elementos se hacen explícitos en el lenguaje formal. Pero las dificultades de razonamiento con cuantificadores en relación con la negación (no hay lenguaje sin negación) surgen dentro del registro monofuncional en el que los tratamientos son los del cálculo de predicados.

Aquí estamos frente a un problema específico de aprendizaje para hacer que los estudiantes conecten y desconecten las maneras de referirse a objetos y cuantifiquen tanto en lenguaje natural como formal. Y esto es especialmente necesario puesto que los enunciados del cálculo (para definiciones y teoremas) emplean una mezcla de lenguaje natural y lenguaje formal. Pero el aprendizaje de la cuantificación puede carecer de significado para los estudiantes que no se hayan dado cuenta de lo que es el razonamiento válido y de cómo funciona.

Es obvio que las pruebas en la mayoría de los campos de las matemáticas no están fundamentadas y desarrolladas como en la geometría elemental, porque uno no trabaja con los mismos registros de representación, es decir, con figuras geométricas y lenguaje natural. Así que, ¿cuál puede ser la contribución de este aprendizaje para la educación matemática general de los estudiantes? Dos experiencias parecen básicas para el aprendizaje posterior. Primera, el descubrimiento de lo que es el razonamiento válido, que es tan importante como lo es la precisión en los cálculos. Segunda, la conciencia de maneras diferentes de trabajar con el lenguaje natural y con configuraciones de *gestalts*. El lenguaje natural y la representación *gestalt* no son registros de representación técnica en matemáticas. Pero ningún registro de representación técnica se puede introducir en la educación matemática sin una coordinación con uno u otro de esos registros primitivos, para destacar semejanzas y diferencias, congruencia y no congruencia, en las maneras de referirse a los objetos y de procesar la información.

Anderson, J.R., Boyle, C.F., Farell, R. *et al.* (1987). Cognitive principles in the design of computer tutors. En P. Morris (Ed.), *Cognition modeling* (pp. 93-133). Nueva York: John Wiley & Sons Ltd.

Aristóteles (1964). *Aristotelis analytica priora et posteriora* (trad. W.D. Ross). Nueva York: Oxford University Press.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Tesis de doctorado, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Disponible en http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/en/

Bourreau-Billerait, S., Dewitte, M.C. y Lion, I. (1998). *Comment les réseaux peuvent-ils aider les élèves à mieux appréhender la démonstration en géométrie?* Lille: IUFM Collection Mémoires Professionnels.

Carnap, R. (1958). *Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic* (2ª ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Duval, R. (1993a). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1993b). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1996a). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1996b). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. En A. Antibi (ed.), *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (pp. 3-15). Toulouse: Université Paul Sabatier.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 139-163.

Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? En E. Barbin, R. Duval, I. Giogutti *et al.* (eds.), *Produire et lire des textes de démonstration*. París: Ellipses.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept. Figur*, p.147-182. Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Duval, R. y Egret, M.A. (1989). L'organisation déductive du discours: interactions entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *2*, 41- 65.

Egret, M.A. y Duval, R. (1989). Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *A nnales de Didactique et de Sciences Cognitives, 2,* 65-89.

Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models*. Nueva York: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1976) *Proof and refutations*: *The logic of mathematical discovery*. Nueva York: Cambridge University Press.

Leibniz, G.W. (1969). *Essais de théodicée*. París: Garnier-Flammarion. (Obra original publicada en francés en 1710).

Luengo, V. (1997). Cabri-Euclide: un micro-monde de preuve intégrant la réfutation. Principes didactiques et informatiques. Réalisation. Grenoble: Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

Piaget, J. (1967a). *Biologie et connaissance*. París: Gallimard.

Piaget, J. (1967b). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: P.U.F.

Rips, L.J. (1988). Deduction. En R.J. Sternberg y E.E. Smith (eds.), *The psychology of human thought* (pp. 116-152). Nueva York: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A.H. (1986). On having and using geometric knowledge. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Toulmin, S.E. (1958). *The use of arguments*. Nueva York: Cambridge University Press.