DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO

Martín M. Socas
(msocas@ull.es)
Universidad de La Laguna

RESUMEN

El propósito de esta ponencia es presentar algunos resultados de investigaciones relevantes realizadas en torno a las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del Lenguaje algebraico, tomando en consideración el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) como marco teórico de análisis de las dificultades y errores de los alumnos en Álgebra. En el desarrollo de la ponencia se describirá, también algunos supuestos básicos en los que se sustenta el Enfoque Lógico Semiótico.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to present some results of relevant researches concerning the difficulties and errors that students present in the construction of the algebraic Language, taking into account the Semiotic Logical Approach as a theoretical framework of analysis for the students' difficulties and errors in Algebra. In the development of the presentation we will also describe some basic assumptions in which the Semiotic Logical Approach is based.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación SEJ2005-08499 del Plan Nacional de I+D+I del MEC y cofinanciado con fondos FEDER de la CEE.

INTRODUCCIÓN

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas es hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas.

En las investigaciones en Educación Matemática se observa un creciente interés por lograr modelos que faciliten las concepciones inadecuadas ("misconceptions") y prevean e interpreten los errores de los alumnos.

La mayoría de los autores consideran que los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas.

En general aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, ocultan probablemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente de cómo lo hacemos, los errores de los alumnos. Esta información permitirá al profesorado arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores.

Investigaciones realizadas en los últimos años han mostrado la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, en los errores que cometen.

En este análisis sobre las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, tomaremos como contenido matemático el Lenguaje algebraico y a él nos remitiremos para ilustrar de manera concreta las cuestiones que se van planteando a lo largo de la ponencia.

Muchos profesores e investigadores preocupados por las dificultades y errores que el aprendizaje del Álgebra ocasiona a los alumnos, han desarrollado diferentes investigaciones sobre el método más adecuado para realizar la transición de la Aritmética al Álgebra.

El propósito de esta ponencia es hacer una presentación, desde la perspectiva de la investigación, sobre un tema central en el aprendizaje de las Matemáticas y analizar los aspectos más relevantes sobre las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del Lenguaje algebraico desde el marco teórico que nos ofrece el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), describiendo los esquemas teóricos que se utilizan, así como las técnicas de análisis para interpretar los resultados.

Asimismo se quiere señalar que el marco teórico ELOS es un marco en construcción que desarrollan el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna que orienta la investigación hacía la elaboración de modelos de competencias, en este caso modelo de competencia formal y modelo de competencia cognitivo, para entender y actuar en los fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en este caso dificultades y errores en el aprendizaje del Lenguaje algebraico.

A efectos de la presentación, esta ponencia se organiza en varios apartados. En el primero, Identificación del problema: Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, se analiza de manera general y desde el punto de vista de la investigación, las dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y se formulan diferentes preguntas de investigación y objetivos relativos a los trabajos realizados por el grupo de investigación de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna. En el segundo, Marco teórico, se dedica a presentar diferentes aspectos teóricos en el que se sustenta el Enfoque Lógico Semiótico, describiendo algunos supuestos básicos, así como los modelos de competencias que se utilizan en estas investigaciones. En el tercero, Diseño de la investigación, se describe brevemente el diseño de la investigación así como las dos fases de análisis. En el cuarto apartado, Resultados y discusión, se presentan diferentes resultados de la primera y segunda fase de análisis relativos al Lenguaje algebraico, y se discuten, en el primer caso en relación a un grupo de alumnos de ESO, y en el segundo caso en relación con un alumno de nivel medio bajo en Álgebra. Se termina finalmente con un quinto apartado, conclusiones en el que se hacen unas breves consideraciones finales al trabajo presentado.

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA: DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En Rico (1995), se aporta una revisión sobre el estudio de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas hasta principio de los noventa, poniendo de manifiesto que ha sido un objeto de investigación constante en Educación Matemática, que se ha caracterizado por aproximaciones e intereses diferentes, condicionadas por los objetivos y formas de organización de los currículos de Matemáticas y por ciertas corrientes predominantes de la Psicología y la Pedagogía.

En Radatz (1980), se presenta un estudio de las contribuciones más significativas al análisis de los errores hasta finales de los años setenta del pasado siglo, agrupando a los autores por países y destacando los estudios en Alemania, Unión Soviética y Estados Unidos. En este último país destaca la aportación Brueckner (1935), citada en Radatz, que junto con otros investigadores orientaron los trabajos sobre cinco objetivos:

- Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
- Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y a las operaciones con el cero.
- Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.
- Tratar de clasificar y agrupar los errores.

En la versión española de Brueckner y Bond (1984) se presenta un tratamiento y desarrollo sistemático de los objetivos anteriores. Es una corriente de investigación que ha tenido influencia en los trabajos que se han realizado en España.

Una muestra del interés por el estudio de los errores cometidos por los estudiantes, en nuestro país hasta finales de los ochenta, lo refleja el esfuerzo realizado en la mayor parte de los trabajos publicados en la Editorial Síntesis, colección Matemáticas: cultura y aprendizaje.

Podemos decir, a grandes rasgos, que los estudios sobre errores en una primera etapa consistían, prioritariamente, en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y en hacer una análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permita examinar cómo éstos surgen a partir de la solución correcta, y, hacer inferencias sobre qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error.

En una segunda etapa, a partir, aproximadamente, de la década de los ochenta, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores, no únicamente desde cuestionarios generales, sino, además, profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como recurso para saber en que están pensando.

Al comenzar estas observaciones más cuidadosas del trabajo en Matemáticas de los alumnos se van obteniendo resultados, a veces inesperados. Por ejemplo en Brousseau, Davis, y

Werner (1986), se describe que: los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente; los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas (“misconceptions”) sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores; llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios ignorando el método propuesto por el profesor. Esto les lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse: los errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, los errores como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, los errores como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, en general informales, entre otros.

Otros trabajos como los de Mulhern (1989) resumen las características generales de los errores cometidos por los alumnos: sorprendentes, extremadamente persistentes, sistemáticos o por azar, ignorando el significado de los objetos matemáticos. Mostrando igualmente la variedad de métodos de investigación que se habían utilizado hasta finales de los ochenta para el estudio de los errores en Matemáticas:

1) Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas (método diagnóstico de orientación psicométrica).
2) Análisis de los tipos de errores cometidos. Técnica que implica la clasificación de errores y el análisis de cómo se desvían los errores de la solución correcta para hacer inferencias sobre los factores que han originado el error.
3) Análisis de patrones de error. Técnica que permite, por un lado, revelar errores sistemáticos que sean consecuencia de concepciones inadecuadas y, por otro, al variar las tareas, los patrones de error que resultan, facilitan información sobre las estrategias utilizadas.
4) Análisis de los patrones de error que se dan en problemas construidos para provocar errores. Técnica que permite observar los patrones de error que cometen los individuos y especular sobre las posibles causas de estos errores, y se basa en el supuesto de que nuevos problemas de la misma naturaleza inducirán a errores similares.

Esta segunda etapa se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto (sociocultura, institucional)…, y de sus interacciones, lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos, como señalaba Radatz (1979).

De esta línea de trabajo sobre el análisis, clasificación y causas de los errores, hemos de señalar, varias cuestiones: en primer lugar, que algunas investigaciones ponen de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; en segundo lugar, que en las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, que a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente, no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático a los mismos.

Como consecuencia de ello, en la actualidad parece necesario desde la Didáctica de la Matemática, avanzar en la delimitación de las causas posibles de los errores que cometen los alumnos y tener una explicación general de cada error o particular para cada alumno, de manera que podamos actuar sobre él a nivel de grupo o a nivel individual, siendo conscientes de las dificultades debidas a las distintas variables que interaccionan en el proceso educativo y que condicionan el error al convertirse en dificultades u obstáculos en el aprendizaje.

Esta línea de trabajo en el estudio de lo errores han generado otras que están fuertemente relacionadas con la primera y que tienen que ver con el uso de las dificultades y errores en el desarrollo curricular o en la formación del profesorado de Matemáticas. En el primer caso, podemos citar la enseñanza diagnóstica (Bell, 1986), en la que se utilizan lecciones con unos cuantos problemas críticos para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación se proponen problemas similares que sirven de retroalimentación para la corrección de los errores por el alumnado; o los trabajos de Borassi (1987) y otros autores, que parten de la idea de que la interpretación exclusiva del error como instrumento de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error cometido. Así amplían este punto de vista, que puede resumirse en que, los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. Destacando que los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la naturaleza de las Matemáticas.

En la formación inicial y permanente del profesorado se sostiene, por una parte, que el profesorado debe tener un conocimiento general de las fundamentaciones teóricas y prácticas sobre las tipologías de los errores, el conocimiento de sus posibles causas, su repercusión en el desarrollo curricular, de forma que les permita hacer un diagnóstico y aportar un tratamiento para la superación de los errores; y por otra, se trata de poner en evidencia las concepciones previas del profesorado sobre los errores, para que estos clarifiquen sus concepciones sobre los errores y de paso sobre las Matemáticas y su aprendizaje (Tirosh y Graeber, 1989).

El Lenguaje algebraico no es ajeno a este proceso de estudio de las dificultades y errores. Veamos algunas referencias:

El proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth, 1984) centró más el interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos que en el tipo de cuestiones que los alumnos resuelven correctamente y, especialmente, en el caso de que tales errores sean cometidos por un amplio número de estudiantes. Del análisis de estos errores comunes, observamos que muchos de ellos podían ser atribuidos a aspectos tales como: la naturaleza y significado de los símbolos y las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y el uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos". Los tres primeros aspectos generan errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra, mientras que el cuarto se debe fundamentalmente a falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Al grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, sus investigaciones le ponen de manifiesto la importancia que tiene centrar la atención, no sólo en las respuestas correctas de los alumnos, sino también en los errores que comenten. Las investigaciones acerca de los errores que cometen los estudiantes han permitido, por ejemplo, realizar clasificaciones en relación con los errores de los alumnos cuando trabajan con el lenguaje algebraico. Por ejemplo, una de estas primeras organizaciones de los errores está en (Socas et al., 1989):

1) Errores del Álgebra que están en la Aritmética: errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso de recíprocos y errores de cancelación.
2) Errores de Álgebra debidos a las características propias del Lenguaje algebraico. Son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la Aritmética (operaciones, estructuras y procesos).

En Palarea (1998) se estudian y clasifican los errores más comunes cometidos por alumnos de 12 a 14 años en el Lenguaje algebraico. En Ruano, Socas, Palarea, (2003), se analizan los errores que cometen alumnos de Educación Secundaria en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, cuando trabajan situaciones problemáticas que implican alguno de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, se aporta, además, una clasificación y se hacen supuestos sobre sus posibles orígenes.

Las investigaciones desarrolladas en este sentido nos han llevado a profundizar más en el origen y causa de los errores y a revisar los errores desde dos puntos de vista: las dificultades inherentes a las Matemáticas y las dificultades inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas en el ámbito escolar (Socas, 1997).

Esto nos condujo a caracterizar de manera más precisa los errores en dos grupos: errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En la actualidad la propuesta de trabajo del grupo intenta ir más allá; además de realizar un análisis y clasificación de los errores que cometen alumnos de secundaria en relación con las operaciones, las estructuras y los procesos cuando trabajan en tareas de sustitución formal, generalización y modelización, se pretende determinar los orígenes de los mismos, basándose en el marco teórico propuesto por Socas (1997), para así poder arbitrar procedimientos que ayuden a los alumnos a corregir sus errores.

En resumen hemos de señalar que el propósito general del Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna es determinar en el marco de una teoría del conocimiento algebraico las dificultades y errores que tienen los alumnos de la ESO, para comprender y trabajar con competencia, objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico.

Señalamos también que los diferentes resultados de los trabajos realizados han ido conformando un enfoque propio del grupo que hemos denominado Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001). La investigación en este marco se caracteriza entre otros aspectos por ser una investigación vía la elaboración de Modelos de Competencia, en este caso para el estudio de los errores.

El ámbito de actuación para el estudio de las dificultades y errores se sitúa en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Las investigaciones se han planteado diferentes preguntas, objetivos y supuestos. Se expresan a continuación algunas de las más significativas en el estudio de los errores.

Preguntas:

Pregunta 1: ¿Los errores cometidos por los alumnos dependen del tipo de pensamiento que utilicen: operacional, estructural o procesual?

Pregunta 2: ¿Es posible determinar el origen más frecuente de los errores que cometen los alumnos en tareas relacionadas con los aspectos operacionales, estructurales o procesuales?

Pregunta 3: ¿Los errores son más consistentes o generales cuando se dan en la estructura superficial o cuando se dan en la estructura profunda del objeto estudiado?

Objetivos:

Objetivo 1: Analizar y clasificar los errores cometidos por los alumnos en tareas relacionadas con el Lenguaje algebraico en la ESO.

Objetivo 2: Determinar el origen de los errores cometidos por los alumnos.

Supuestos:

Supuesto 1: Conjeturamos que existen errores que se cometen independientemente de los contenidos de las tareas presentadas y de las operaciones, de la estructura y del proceso desarrollado.

Supuesto 2: Conjeturamos que el origen de muchos de los errores que se cometen en el aprendizaje del Álgebra, se encuentran en problemas que han quedado sin resolver en la Aritmética, especialmente aquellos que tienen que ver con las estructuras y los procesos numéricos.

MARCO TEÓRICO

En este apartado describiremos los modelos de competencia formal y cognitivo que servirán de base para el estudio de las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje del Lenguaje algebraico en el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).

La investigación desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) trata de elaborar modelos teóricos y prácticos (Modelos de Competencia), a partir del análisis empírico, que aporten los supuestos básicos que permitan interpretar fenómenos específicos que se dan en Educación Matemática, así como los métodos de investigación y resultados que se deben tomar como evidencias.

En Educación Matemática se identifican y separan, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente: conocimiento matemático, aprendizajes, enseñanza, procesos de enseñanza/aprendizaje,... La separación de estos campos de actividad, se observa en la mayor parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática que tienen un sesgo a lo epistemológico, a lo cognitivo o a lo pedagógico. No parece ésta una propuesta acertada ya que se encuentran estrechamente relacionados entre sí, pero aún más, no parece razonable entender los problemas o fenómenos de enseñanza/aprendizaje de la Matemática desde estos análisis parciales; el análisis lógico semiótico nos ofrece una propuesta integradora y nos define las relaciones principales a determinar en las diferentes situaciones problemáticas para entender estos fenómenos y actuar en consecuencia.

ELOS toma como punto de partida el "Microsistema Educativo", que está formado por tres elementos básicos: Profesores, Alumnos, Disciplina (triángulo didáctico) y por dos componentes: la Sociocultural y la Institución Escolar. La Didáctica de la Matemática como conocimiento profesional se sitúa tanto en el micro como en el macrosistema educativo, aunque centra su campo de actividad en el funcionamiento del microsistema y de él deriva el espacio sistémico que podemos caracterizar como Didáctico y constituye el primer Sistema Didáctico objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática.

Para el estudio del microsistema educativo necesitamos conocer: sus componentes, sus tres elementos y sus relaciones esenciales. Esto nos lleva a planificar y gestionar la investigación para el sistema didáctico fundamental. En él cabe destacar el conocimiento matemático curricular y las tres relaciones esenciales que caracterizan, respectivamente, a los modelos de competencia: formal, cognitivo y de enseñanza. En este informe de investigación utilizaremos los dos primeros.

Modelo de competencia formal en ELOS para el Lenguaje algebraico

Para establecer el modelo de competencia formal es necesario explicitar el lenguaje algebraico y su relación con el objeto matemático.

El modelo de competencia formal se caracteriza por los aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales de los contenidos algebraicos curriculares implicados en la situación problemática a tratar. Tendremos, en consecuencia, que explicitar la organización lógico-formal del lenguaje algebraico, es decir, los conceptos, relaciones y procedimientos que caracterizan al lenguaje algebraico, así como el conjunto de situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos del lenguaje algebraico implicados.

El modelo de competencia formal tiene entonces como punto de partida la organización funcional, fenomenológica y conceptual de los objetos algebraicos y éstos se organizan desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado (Peirce, 1987), y pasa necesariamente por la organización de los signos del Lenguaje algebraico y sus procesos de significación.

Para desarrollar los aspectos funcionales es necesario abordar el papel de los signos en el lenguaje algebraico. En Kieran y Filloy (1989) se sugiere sustituir la noción de Sistema de Signos Matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos, con su código correspondiente. La noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos sino también las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

Analizamos, ahora, las diferentes funciones del Lenguaje algebraico. Podemos decir que éstas se concretan en: “expresiva” (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), “señalizadora” (que evoca, desencadena, estimula,...una reacción en el receptor), “descriptivas” y “argumentadoras”.

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos “las situaciones problemáticas” o “fenómenos” de naturaleza didáctico matemática, podemos caracterizar a los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: “Expresiones semióticas”, “Descripciones algebraicas” y “Argumentaciones algebraicas”.

Las “expresiones semióticas”, se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras,... en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico y constituyen las manifestaciones externas del Sistema Matemático de Signos de los diferentes agentes que intervienen en el microsistema educativo.

Las “descripciones algebraicas”, se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procedimientos, algoritmos, operaciones, etc.

Las “argumentaciones algebraicas” son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien desde el punto de vista de la Teoría Semiótica tenemos que suponer que una “expresión de signos matemáticos” no designa un objeto matemático del mundo real sino que transmite un contenido de la cultura matemática.

Las situaciones fenomenológicas que organiza el Lenguaje algebraico las podemos relacionar con las capacidades del pensamiento algebraico y se pueden describir de forma reducida como: “Desarrollar capacidades para dar significado a los signos del Álgebra, usarlos para mostrar cantidades y poner en relación cantidades y cantidades de cantidades, manejar lo desconocido, hacer y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular y lo particular en lo general, es decir, ser conscientes de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización y controlarlos”.

Los aspectos conceptuales del Lenguaje algebraico se pueden describir al relacionar los signos con los objetos matemáticos y sus significados, esto quiere decir que debemos concretar la dualidad objeto/proceso en el lenguaje algebraico.

A efectos de caracterizar esta dualidad objeto/proceso en el modelo de competencia formal, incorporamos algunos aspectos que permiten precisar mejor la dualidad en el sistema matemático de signos asociado al Lenguaje algebraico; en este sentido, tomamos de los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. Ellos señalan:

> "Conocimiento conceptual se caracteriza claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento.
>
> Conocimiento procedimental se construye en dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las matemáticas. La otra parte consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas... En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos".

Es ciertamente una forma sencilla de explicitar a nivel conceptual la dualidad proceso/objeto, es decir la convivencia de los tipos de conocimiento en Matemáticas, el conceptual y el procedimental. Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. El conocimiento conceptual indica que es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

Es conocido que la caracterización y relación entre estos dos tipos de conocimiento es también considerada por muchos otros autores, como, por ejemplo Douady (1986) o Sfard (1991), incluso en un contexto más amplio y con mejor precisión desde la perspectiva del aprendizaje. Hiebert y Lefevre (1986), no profundizan, por ejemplo, en las representaciones externas y su relación con las representaciones internas, que es un objeto clave en la investigación que realizamos. No obstante, para la configuración del modelo de competencia formal, son aspectos relevantes que vamos a tener en consideración al configurar el modelo de competencia cognitivo para el pensamiento algebraico, es decir, vamos a establecer relaciones entre estos conocimientos en términos de representaciones externas e internas.

El estudio de los aspectos funcional, fenomenológico y conceptual nos permite describir el modelo de competencia formal del Álgebra de la ESO que consideramos en la investigación.

Como conclusión relevante de este análisis observamos que el pensamiento algebraico se desarrolla en tres aspectos relacionados: operacional, estructural y procesual, que vamos a tomar como referentes para caracterizar la dualidad del conocimiento matemático conceptual/procedimental.

Modelo de competencia cognitivo en ELOS para el Lenguaje algebraico

El modelo de competencia cognitivo se organiza en torno a tres componentes:

1. Las representaciones semióticas.
2. Los Estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra.
3. Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

Describamos, brevemente, cada una de estas tres componentes.

Las representaciones semióticas

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra representación en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el desarrollo curricular de las Matemáticas.

Por ejemplo, Goldin (1993) presenta, como resumen del grupo que trabajó sobre representación en los Congresos del PME, las diferentes interpretaciones dadas a este término y que organiza en cuatro grupos: soportes físicos externos (incluyendo entornos de ordenador), soportes lingüísticos, construcciones matemáticas formales y representaciones cognitivas internas.

Un concepto de representación comúnmente usado en Educación Matemática es el que propone Kaput (1987) “cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado, habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirán las siguientes cinco entidades: el mundo representado, el mundo representante, qué aspectos del mundo representado han sido representados, qué aspectos del mundo representante hacen la representación, y la correspondencia entre los dos mundos”.

Las representaciones semióticas tienen una estrecha relación con el funcionamiento cognitivo del pensamiento como han puesto de manifiesto diferentes autores.

Para Skemp (1980), la imaginación mental de las personas puede clasificarse en dos tipos: visual y verbal, de manera que en la representación de los conceptos matemáticos se plantean dos sistemas de símbolos a utilizar denominados visuales y verbales.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1990). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

Conviene destacar la importancia que las representaciones tienen para la formación adecuada de conceptos; en este sentido diversos investigadores, Hiebert (1988), Duval (1993, 1995), Castro, Rico y Romero (1997), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Duval (1993, 1995) distingue entre lo que llama objetos matemáticos y sus representaciones, y sostiene que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento, y es esencial en la actividad matemática poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que: "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

En este trabajo consideramos la noción de Representación desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico, en este enfoque la representación es un elemento determinante en el análisis semiótico. La Semiosis debe ser entendida como un triple proceso: de generación de signos (productor de signos), de acciones del signo (signo-acción), y de inferencia. El análisis semiótico será el estudio del funcionamiento de esa semiosis. De esta manera, la designación de un objeto matemático mediante un signo es un proceso de inferencia (semiosis) por el cual la representación determina en quien la recibe una interpretación mental que consiste en remitir la representación al objeto que ésta representa.

Conviene, entonces, caracterizar lo que entendemos por representación ya que esta noción es la que nos permitirá realizar el análisis semiótico.

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) toma en consideración, como hemos señalado, la Fenomenología de Peirce (1987) y la adapta para analizar y comprender, planificar y gestionar, las situaciones problemáticas o fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática.

El Signo se presenta para Peirce como una genuina relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo aparece en su propuesta relacionado con tres instancias separables analíticamente: Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento), Fundamento del Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que lo conecta con el objeto).

La propuesta semántica de Peirce se fundamenta en el hecho de que un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos, es decir, el significado de un signo no es otra cosa que el conjunto de signos que permiten desarrollarlo y explicitarlo.

En consecuencia adoptamos la siguiente posición en este enfoque: todo signo pertenece a un sistema de signos y en él puede ser analizado y comprendido (condición de la significación), pero no todos los signos funcionan idénticamente ni dependen de un único sistema. Es necesario caracterizar diferentes sistemas de signos y establecer en ellos una relación de diferencias y analogías.

Para analizar desde esta perspectiva la construcción y el aprendizaje del conocimiento didáctico matemático necesitamos de dos nociones primitivas. La primera se refiere a las "situaciones problemáticas" o "fenómenos didácticos matemáticos", y se describe como cualquier circunstancia en la que se pueden realizar actividades de matematización (Freudenthal, 1991), o actividades de profesionalización matemática. La segunda es que cualquier sistema didáctico debe estar organizado en torno a la triada primaria (triada epistemológica): “Contexto”, “Referente” y “Significado”. Las razones que justifican esta elección están, entre otras, en que:

- Todo fenómeno didáctico matemático necesita tener en cuenta un Contexto para determinar a qué se refiere, es decir, se necesita una referencia contextual, en la que el Contexto determina la cualidad del fenómeno o situación problemática.
- El fenómeno o situación problemática remite a un conjunto de objetos, el Referente, que está constituido por cada uno de los elementos de dicho conjunto. El Referente determina la relación real del fenómeno con los objetos.
- El Significado estará formado por las descripciones asociadas a las relaciones que se dan en el conjunto de objetos a los que remite el fenómeno o la situación problemática.

Se entenderá que el significado es atribuible tanto a los objetos como a las relaciones entre los objetos en relación con la situación problemática o fenómeno.

En este sentido el modelo de competencia que describe la noción de representación en el Enfoque Lógico Semiótico viene dado por el contexto (en término general se refiere a ciertos aspectos del Microsistema Educativo); los referentes: signo, objeto y significado; y las tres relaciones esenciales que se dan entre los referentes: signo-significado, signo- objeto y objeto-significado.

La noción de representación en el enfoque Lógico Semiótico es, pues, una adaptación que deriva del concepto de semiosis en Peirce y está descrita por el modelo de competencia caracterizado por el Contexto, los tres referentes y las tres relaciones esenciales. De manera más concreta, en un contexto determinado, la representación es un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios
(2) Establece una relación diádica con el significado
(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado.

La noción de representación pone en relación el objeto matemático con el signo y el significado, como hemos indicado anteriormente. Se debe tener en cuenta que la cualidad del signo es la representación y sus diferentes formas, y que además, podemos establecer relaciones entre el signo y el objeto matemático, y entre el signo y el significado. El objeto matemático debe ser entendido en su relación con el contexto y con su fenomenología, sin olvidar que el significado siempre alude a un interpretante que puede ser individual o colectivo, y que éste se hace observable y ostensible a través del signo.

Señalemos finalmente que para Vygotsky (1962), los signos causan transformaciones básicas en las funciones psicológicas que intervienen en el funcionamiento mental que permite al individuo la comprensión del objeto matemático, y distingue en los signos dos funciones básicas en la comunicación de los objetos matemáticos, la función indicativa (en la que el signo depende del contexto en el que aparece) y la función simbólica (en la que el signo se usa en situaciones descontextualizadas y abstractas, e implica la organización de los objetos en categorías y la formación de relaciones entre categorías).

En este sentido Vygotsky, para quien los procesos mentales pueden entenderse solamente mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan de mediadores, coincide con Peirce (1987), al manifestar que el lenguaje es el que marca y distingue al sujeto.

Los Estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra

Los objetos matemáticos se comunican mediante los sistemas de representación semióticos (SRS). Aceptamos que existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, no obstante se constata la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemáticas, para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido los SRS más formales frente a los SRS más visuales o también caracterizados como representaciones más intuitivas.

Pero el dominio de un SRS formal es más una meta que un camino, en la que aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan, hasta producir competencia, en el uso del SRS formal. Estos estadios cognitivos han sido descritos de maneras diversas, y especialmente extraídos y analizados en el proceso de la culturización matemática, es decir, en la sociogénesis del conocimiento matemático. Optamos por la organización denominada: estadios semiótico, estructural y autónomo. El estadio semiótico es aquél en el que el alumno aprende y usa los signos nuevos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él. El estadio estructural se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; sin embargo aparecen en este estadio verdaderas dificultades cognitivas para el alumno, ya que determinados comportamientos de los signos no pueden ser explicados en términos del sistema antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado. El estadio autónomo es aquél en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. Es éste el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es por tanto el sistema nuevo, una fuente de dificultades para el aprendizaje del alumno, al encontrarse con elementos que él no controla en términos del sistema antiguo como es el caso del Lenguaje algebraico en relación con el Lenguaje aritmético al que hacemos constantemente referencia para explicitar el Lenguaje algebraico en el estadio semiótico del mismo (un estudio más detallado puede verse en Socas, 1997).

En este supuesto compartimos la tesis de las ventajas que supone el uso de diferentes sistemas de representación como fuentes de significado para el lenguaje algebraico, en especial el objeto geométrico como un registro del Álgebra que permite los procesos de generalización y transferencia del conocimiento algebraico.

Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra

Dificultades

En Socas (1997), se analiza las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas y cómo éstas tienen orígenes distintos que se sitúan generalmente en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

En el trabajo anterior se describen cinco grandes categorías para describir la procedencia de estas dificultades, dos asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento matemático, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, la cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y la quinta está asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

- Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos básicos de las matemáticas que se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos complementarios objeto de la Matemática.
- Con referencia a las dificultades asociadas a las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento matemático, podemos indicar a modo de ejemplo, dentro del pensamiento numérico: la transición de lo natural a lo entero, de lo natural a lo decimal, de lo racional a lo irracional, o la transición del Pensamiento Numérico al Pensamiento Algebraico, etc.
- Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas. Estas dificultades tienen procedencias distintas: la institución escolar, el currículo de Matemáticas y los métodos de enseñanza.
- Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituyen una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. Diferentes son los enfoques que podemos considerar: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre otros muchos. Conviene en este apartado señalar que abordamos cuestiones que tienen que ver con dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas y no nos referimos, en ningún caso, a alumnos con dificultades de aprendizaje y trastorno del desarrollo que estudian Matemáticas (García, 1999; González, 2003).
- Las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, se relacionan con los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas.Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., genera bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos (McLeod y Adams, 1989).

Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

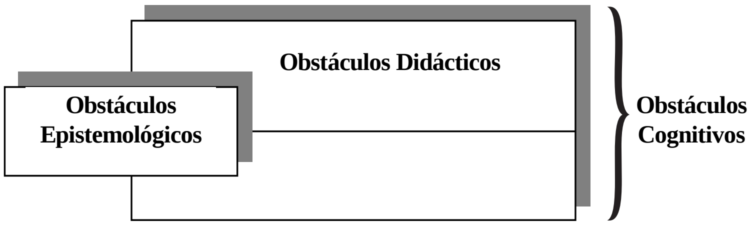
Errores

Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Como señala Matz (1980), “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”. Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste.

Tomaremos también como referencia para el estudio de los errores el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: Obstáculo, Ausencia de sentido y Actitudes afectivas y emocionales.

En Socas (1997) se da una revisión de la noción de obstáculo desde sus orígenes en Bachelard (1938), hasta su traslado al campo de la Didáctica de las Matemáticas, Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989)…, constructo que ha sido y es objeto de debate, ya que plantea dificultades, como predecía Brousseau (1983), que “la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso”. Otra orientación la encontramos en Herscovics (1989), que se sitúa en un punto de vista esencialmente constructivista e interpreta la noción de obstáculo cognitivo en términos de la teoría piagetiana.

Sin embargo, una revisión y organización de esta noción y de sus posibles implicaciones en el análisis de errores, nos puede ayudar a tener una visión más amplia en el tema que nos ocupa. La propuesta que se formula en el citado trabajo (Socas, 1997) es una propuesta de organización posible y útil de los obstáculos en términos de:



En el que se aportan datos para justificar desde el punto de vista operativo esta organización y clasificación de los obstáculos. La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy. Esta diferenciación se indicará de manera explícita en los ejemplos tratados.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

(a) Errores del álgebra que tienen su origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
(b) Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.
(c) Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo "=" en Álgebra y la sustitución formal.
Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Una vez descritas las componentes del modelo de competencia cognitivo, este se puede representar mediante el siguiente esquema:

El desarrollo de los diferentes elementos y relaciones del modelo permitirá analizar los distintos significados que dan los alumnos al objeto algebraico y determinar el nivel de comprensión que el alumno tiene en relación al objeto.

Veamos, en primer lugar, como se describe la comprensión del alumno para completar luego el marco de la investigación en el que se analizarán las dificultades y los errores de los alumnos.

La comprensión puede ser descrita por dos vías diferentes, una, estableciendo relaciones entre el sistema de representación utilizado en la actividad y las dificultades y errores del alumno para el objeto algebraico tratado, en ese caso es el binomio procedimental/conceptual del objeto el que se utiliza para expresar la comprensión en términos de operacional, estructural y procesual. Otra, estableciendo relaciones entre los sistemas de representación, los estadios de desarrollo del objeto y las dificultades y errores. Veamos este último con más detalle, pero antes hagamos una breve reflexión sobre la comprensión en algunos autores.

Skemp (1980) que estudió la construcción de los conceptos en general y la de los matemáticos en particular, consideraba a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales llamadas esquemas, y señala:

> "...Cada uno de estos conceptos por su naturaleza está dentro de una estructura con otros conceptos. Cada uno de éstos se deriva de otros anteriores y contribuye a la formación de nuevos conceptos, o sea forma parte de una jerarquía....Comprender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado".

Hiebert y Carpenter (1992), transforman la idea de esquema de Skemp en la idea de red, y nos hablan de las redes formadas por las representaciones internas generadas por la manipulación de representaciones externas, bajo la siguiente caracterización de la comprensión:

> "Iniciamos definiendo la comprensión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y las fuerzas de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes y numerosas conexiones".

En nuestra propuesta tomaremos como referencia el modelo de coordinación de registros de Duval (1993) en el que integra los aspectos teóricos desarrollados por Saussure por un lado y de Skemp por el otro.

La relación entre el significante y el significado de Saussure está integrada en el modelo de Duval en la relación que él establece entre el representante de un registro y el concepto. Bajo este supuesto teórico la "unidad" indisoluble de Saussure integrará más unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático. Las tareas de conversión entre representaciones generarán la integración de esas unidades en las estructuras mentales del individuo. Esto quiere decir que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático.

La adaptación del modelo fenomenológico de Peirce a la propuesta de Duval supone considerar la tríada: signo-objeto-significado, como "unidad" indisoluble que integrará más unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático. Se trata en definitiva de expresar coherentemente las tres relaciones principales que se dan en ésta.

En primer lugar para establecer la relación objeto-significado consideramos los tres estadios de desarrollo del signo para el objeto cognitivo representado: semiótico (1), estructural (2) y autónomo (3). En cada uno de ellos distinguimos dos categorías de comportamiento que pasamos a describir:

Categoría 1A: El alumno tiene ideas imprecisas sobre el objeto matemático y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

Categoría 1B: El alumno reconoce los elementos de un sistema de representación semiótico en relación con el objeto matemático.

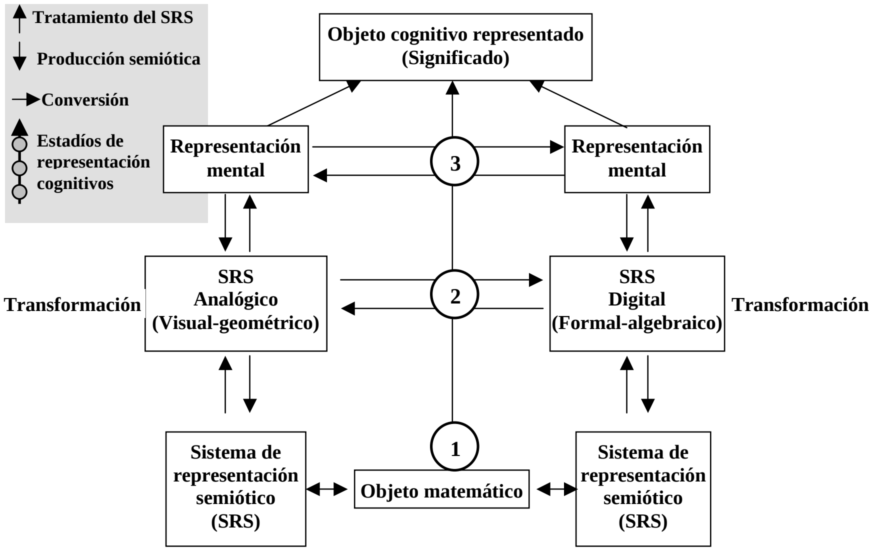
Categoría 2A: El alumno conoce un sistema de representación semiótico y realiza transformaciones en el interior del sistema de representación.

Categoría 2B: El alumno realiza correctamente actividades de conversión de un sistema de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.

Categoría 3A: El alumno articula dos sistemas de representación semióticos. Puede tomar cualquiera de ellos para significar correctamente el objeto matemático independientemente del otro. El alumno maneja autónomamente los dos sistemas de representación semióticos.

Categoría 3B: El alumno articula coherentemente diferentes sistemas de representación semióticos, ejerce un control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimiento del objeto matemático como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes del mismo.

Las otras dos relaciones signo-objeto y signo-significado quedan integradas y organizadas en la unidad que se expresa en la siguiente figura:



Para caracterizar las acciones que se realizan cuando se utilizan, por ejemplo, las representaciones formales (F), las geométricas (G) o las esquemáticas (E), establecemos:

- Reconocimiento de los elementos de un sistema de representación semiótico:

$$R_F, R_G, R_E$$

- Transformaciones internas en un sistema de representación semiótico:

$$T_F, T_G, T_E$$

- Conversiones (transformaciones externas) entre sistemas de representación semióticos:

$$C_{F\to G}, C_{G\to F}, C_{E\to F}\ldots$$

- Coordinación entre diferentes sistemas de representación semióticos:

$$C_{F\leftrightarrow G}, C_{G\leftrightarrow F}, C_{E\leftrightarrow F}\ldots$$

- Producción de representaciones semióticas en la resolución de una tarea algebraica. Distinguimos:

Producciones relacionadas con los SRS: PS_F, PS_G, PS_E

Producciones idiosincrásicas: PI_A, PI_D, PS_E...

De acuerdo con esta notación podemos organizar las demandas a los alumnos de las actividades propuestas en los cuestionarios, en los diseños de instrucción y en los protocolos de las entrevistas videograbadas. Un estudio en esta dirección se encuentra en Socas (2001).

Observemos finalmente cómo el modelo cognitivo nos facilita el estudio de los errores dentro del análisis de los significados que los estudiantes atribuyen al objeto matemático.

La valoración de la comprensión del conocimiento por los estudiantes implica, bajo este marco conceptual, analizar las actividades de los estudiantes para esclarecer las conexiones o articulaciones realizadas por los mismos durante la construcción de algún concepto dado.

El vértice de las dificultades y errores es el vértice del significado en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en la que el error puede ser estudiado desde tres perspectivas diferentes: afectividad, ausencia de sentido y obstáculo. Estos tres elementos a su vez se organizan en semiosis distintas: la afectividad en, emociones, actitudes y creencias; la ausencia de sentido en, semiótico, estructural y autónomo; y los obstáculos en, epistemológico, didáctico y cognitivo, que permiten hacer análisis más fino del error. Desde este análisis el error puede ser estudiado desde diferentes puntos de vista y es preciso diseñar actividades *ad hoc* para detectar la naturaleza del mismo.

El estudio de las dificultades y errores se puede hacer desde tres niveles diferentes que denominamos: producto, proceso y origen.

El estudio de los errores a nivel producto se realiza, en general, considerando la estructura superficial del objeto algebraico en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual.

El estudio de los errores a nivel proceso se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo. Para el estudio de los errores en la estructura profunda es necesario trabajar el objeto con al menos dos representaciones semióticas del mismo. En este caso, siguiendo la organización propuesta en el modelo de competencia cognitivo, es necesario el diseño de actividades que, proporcionen: reconocimiento o no de los elementos de un SRS, transformaciones internas en un SRS, conversiones (transformaciones externas) entre sistemas de representación semióticos, coordinación o no entre diferentes SRS y las producciones de representaciones semióticas por parte de los alumnos en la resolución de una tarea algebraica, elementos para entender qué construcción sobre un concepto dado ha realizado el estudiante, y que tipo de errores provienen de la estructura superficial o profunda del objeto. Los errores pueden ser analizados en el nivel proceso tanto en los estadios semiótico, estructural y autónomo, como de la perspectiva operacional, estructural o procesual.

El estudio de los errores a nivel origen se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico, en los estadios semiótico, estructural o autónomo como en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual. Su origen puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales (Socas, 1997).

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para responder a los objetivos de la investigación sobre dificultades y errores en el Lenguaje algebraico se elaboran diferentes instrumentos: diseños de instrucción, cuestionarios, protocolos entrevistas…(Palarea, 1998; Ruano y Socas, 2001; Socas, 2001).

Se utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. La clasificación de los errores, por ejemplo, la realizamos ayudándonos de esquemas de análisis en los que se refleja primero, el tipo de error cometido, segundo, los códigos de los alumnos, tercero, el ítem en el que han fallado y al final, el número total de errores de cada tipo. En algunas preguntas con respuestas abiertas, hemos empleado redes sistémicas para la recogida de la información utilizando los parámetros fijados por Bliss y otros (1987), con algunas modificaciones para ajustarlas a nuestro propósito. En concreto, en el lado derecho de la red, hemos incluido un recuadro con el número del alumno que ha recorrido cada itinerario (Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Fases de análisis

El procedimiento de análisis seguido, implica, en primer lugar, el análisis de cada individuo a partir del análisis de cada tarea del cuestionario y las entrevistas de un grupo reducido de alumnos. Estos análisis nos permiten un estudio global de todas las tareas escritas de los estudiantes participantes y de todas las tareas escritas y vídeograbadas de un grupo muy reducido de estudiantes. Este tipo de análisis nos permite, observar en tres direcciones, primera, en relación con el nivel de comprensión del estudiante en los aspectos operacional, estructural y procesual; segunda, facilitando una primera clasificación de los errores y permitiendo hacer ciertas conjeturas sobre el origen de los mismos; y tercera, analizar la consistencia o no del cuestionario en determinadas actividades, por ejemplo, distintas tareas, pueden situarnos a un alumno para un determinado contenido, en diferentes niveles de comprensión.

En resumen, en este primer análisis se tiene información da cada individuo y de la globalidad del grupo, a través especialmente, del contenido matemático en sus aspectos operacional, estructural y procesual y una clasificación de errores atendiendo al contenido matemático en la que se puede conjeturar ciertos orígenes.

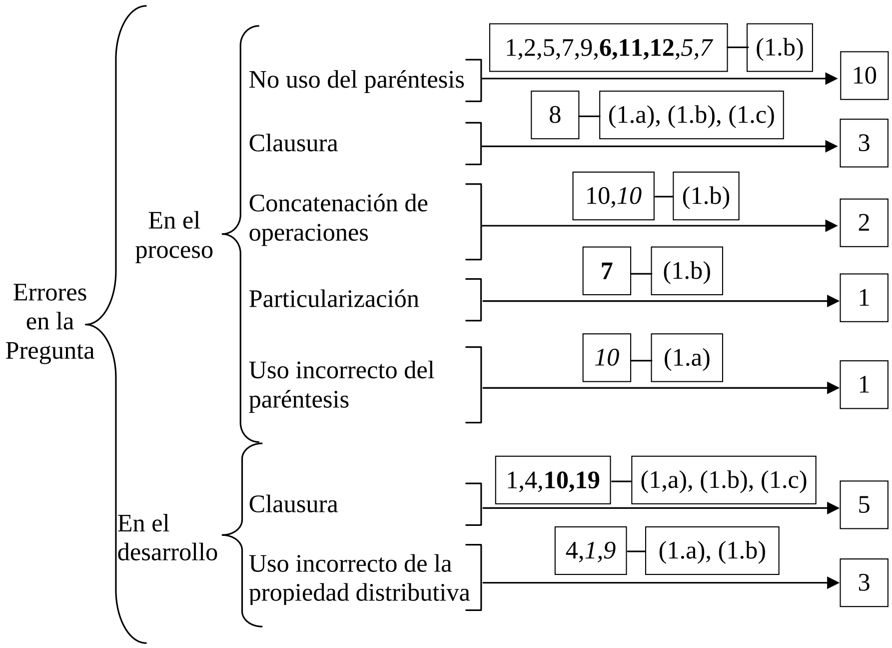
En una segunda fase se analiza a un grupo seleccionado de estudiantes y se observa cómo han resuelto todas las tareas seleccionadas del cuestionario para un determinado contenido y cómo las resuelve en situación de entrevista. Este análisis más fino de un grupo pequeño de individuos nos permite estudiar los niveles de comprensión semiótico, estructural y autónomo (Socas, 2001) y analizar el origen de los errores en términos de afectivos, ausencia de sentido u obstáculo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Mostramos en primer lugar el análisis de la fase 1 para un grupo de alumnos de Educación Secundaria que procedían de tres clases diferentes. Seleccionamos, para ello, una pregunta relacionada con un proceso de sustitución formal.

Realiza las siguientes transformaciones:
a) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?
b) Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?
c) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?

En primer lugar, se organizan los errores de esta pregunta, relativa a la sustitución formal, atendiendo a si se han producido en la sustitución (proceso) o en el desarrollo y simplificación de las expresiones, mirando la parte operacional y estructural implicada. Así, esquemáticamente, podemos organizarlos del siguiente modo:



En este esquema, los números que figuran en el interior del primer recuadro sobre la flecha representan el número asignado al alumno que ha cometido el error con distintos tipos de letra, normal, negrilla o cursiva según pertenezcan, respectivamente, a las clases 1, 2 ó 3. Unido a este rectángulo se encuentra otro en el que se indica el ítem que presenta el error y, por último, en el recuadro tras la flecha, se muestra el número total de errores cometidos de cada tipo.

Comenzamos con el análisis de los errores cometidos al realizar el proceso de sustitución formal. En general, los alumnos no parecen tener demasiados problemas al realizar las sustituciones, pues de las 120 respuestas dadas, sólo ha habido 17 incorrectas.

El mayor número de fallos se produjo en el ítem (1.b), y el error más frecuente es el de no usar paréntesis donde es necesario, o usarlo incorrectamente.

Otro tipo de error cometido está relacionado con la clausura de la operación: los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (no dé un número) y que quede, por ejemplo, $10 \cdot b+3$, ven la necesidad de completarla, de cerrarla y dan como resultado $13 \cdot b$ (en este caso se trata de un error que se situará tanto en el proceso como en el desarrollo).

Otro tipo de error que se detecta es la concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos.

La necesidad de particularizar, es también otro tipo de error que se da en el desarrollo de esta actividad, el alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en este contexto formal, no sabe cómo trabajar con letras, o éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder al lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Nos fijamos, ahora, en los errores producidos al realizar el desarrollo de las expresiones tras la sustitución formal y tomamos en consideración los aspectos operacionales y estructurales. Observamos que el error más frecuente es el error estructural: la clausura. El resto de los errores está relacionado con el uso incorrecto de la propiedad distributiva, error que tiene una doble componente estructural y operacional.

El análisis de estos errores desde una perspectiva global nos sugiere diferentes conjeturas sobre el origen de los errores.

De esta manera pensamos que los errores relativos al uso del paréntesis: no usar paréntesis donde es necesario o usarlo mal, pueden tener su origen, o bien en una ausencia de sentido, o bien en un obstáculo. En el primer caso, el uso incorrecto del paréntesis es un tipo de error que se comete en Álgebra y que tiene que ver, en muchas ocasiones, con problemas de la Aritmética no superados. En el segundo caso, el origen estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis (Socas, 2001).

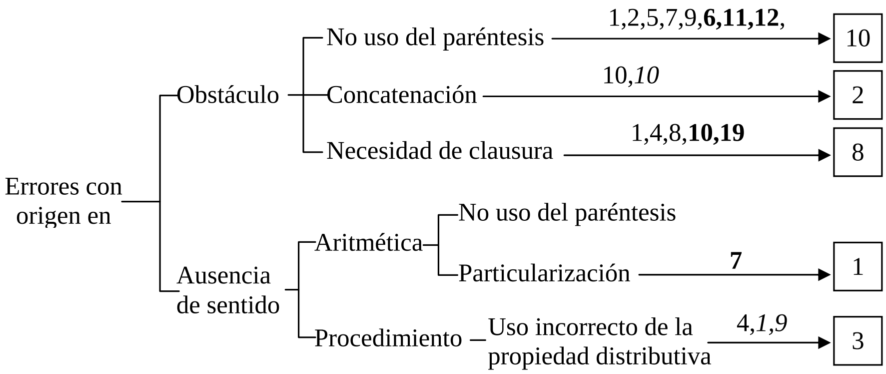
El error de clausura generalmente tiene su origen en un obstáculo cognitivo o bien en ausencia de sentido. Algunos alumnos que estudian álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que a veces son incompletos, en algunos casos, el error tiene su origen en una falta de sentido de las operaciones con monomios.

En el caso de la concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos, también suele tener su origen en un obstáculo cognitivo.

La necesidad de particularizar las expresiones algebraicas aparece como un error que pensamos que tiene su origen en una ausencia de sentido. El alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras, ya que éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder al Lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Al uso incorrecto de la propiedad distributiva se le atribuye el origen a la ausencia del sentido y puede situarse en el ámbito estructural u operacional. Se trata de un error conceptual o de procedimiento en el que los alumnos usan inadecuadamente una propiedad conocida. El primero de ellos se ha producido por la extensión de la propiedad distributiva (que supone dos operaciones) de la multiplicación en relación con la adición, al caso de la multiplicación (una sola operación), así, $5\cdot(2\cdot b)+3=10+5\cdot b+3$. Es posible que este tipo de error esté motivado por la forma de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Generalmente, se enseñan todas las propiedades juntas, sin hacer hincapié en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos operaciones para que se pueda dar la distributividad, lo que puede llevar a mezclarlas. En este caso, es posible que se haya confundido la propiedad distributiva con la asociativa del producto, o bien porque se introducen propiedades como extensión de las ya conocidas, lo que también genera confusión si no se extrema el cuidado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se trataría en este caso de un error estructural. El segundo error está igualmente relacionado con la propiedad distributiva, los alumnos tratan de distribuir la multiplicación respecto a uno de los factores, en este caso el numérico. Posiblemente este tipo de error se produce por no reconocer las letras como uno de los sumandos para aplicar la propiedad distributiva, lo que implicaría un pensamiento numérico, se trataría de un error operacional/estructural.

En el esquema siguiente recogemos la clasificación de los errores cometidos por los alumnos en esta pregunta, atendiendo a los supuestos orígenes de los mismos.



Como se observa en el esquema, el grupo de investigación decidió situar únicamente al “no uso del paréntesis” en dos orígenes diferentes: obstáculo y ausencia de sentido (Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Es necesario profundizar en el análisis del origen del error a nivel individual, para ello se decidió pasar a la fase 2 del análisis y realizar entrevistas clínicas que nos darían más información acerca del proceso seguido por los alumnos al responder a las preguntas y que nos aportarían más datos sobre el origen de los errores.

En esta ocasión comentaremos los resultados de un alumno en el que detectamos el error del no uso o uso inadecuado del paréntesis, con la intención de analizar si podíamos determinar el origen del error.

Se trata de un alumno, identificado en la institución escolar, de nivel medio bajo y denominado (J) a efectos de esta experiencia didáctica.

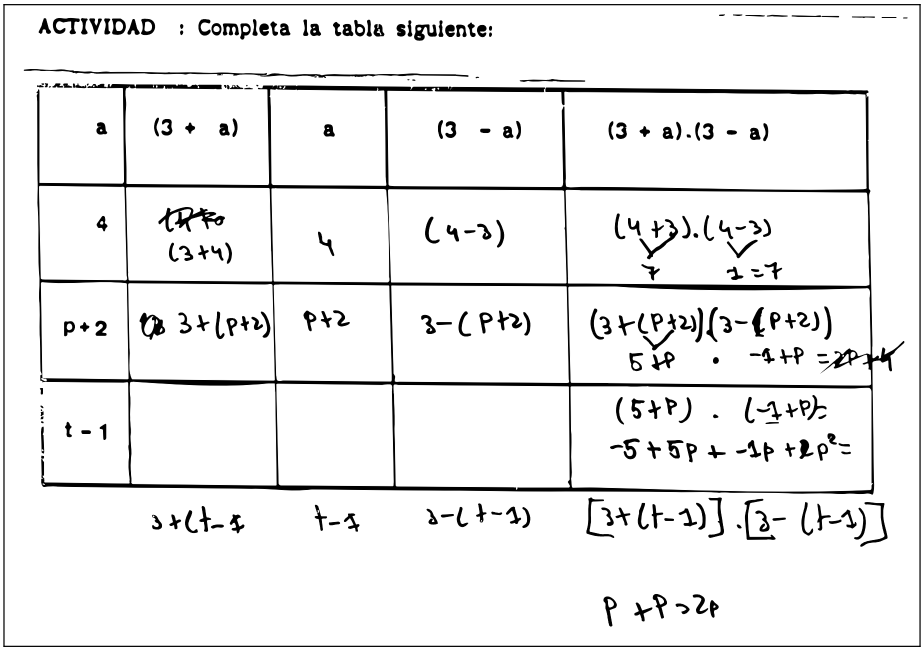
Hemos seleccionado dos cuestiones, la primera tiene que ver con el proceso de sustitución formal y la segunda con los aspectos operacionales aditivos y multiplicativos en los que intervienen o no los paréntesis.

Desde el punto de vista cognitivo: (J) es un alumno que reconoce tres sistemas de representación semióticos: R_F , R_G , R_E (formal, geométrico y esquema).

(J), es un alumno que situamos en la categoría 2B, es decir, en el nivel segundo del estadio estructural, sin embargo, no puede realizar transferencias a otro registro cuyos códigos conoce a nivel de la categoría 1B.

(J), se sitúa en 2B, al no manejar autónomamente los dos sistemas de representación semióticos (Socas, 2001).

Al alumno se le propone ahora una actividad de sustitución formal en la que tendrá que realizar cálculos con paréntesis.



ACTIVIDAD : Completa la tabla siguiente:

a	(3 + a)	a	(3 - a)	(3 + a).(3 - a)
4	(3+4)	4	(4-3)	(4+3).(4-3) 7 1=7
p + 2	3+(p+2)	p+2	3-(p+2)	(3+(p+2))(3-(p+2)) 5+p · -1+p = ~~2p+4~~
t - 1				(5+p) . (-1+p)= $-5+5p+-1p+2p^2=$

3+(t-1 t-1 3-(t-1) [3+(t-1)].[3-(t-1)]

p+p=2p

Veamos parte del episodio vídeograbado del alumno resolviendo esta actividad:

…

A: (Continúa escribiendo, la actividad de la segunda fila del cuadro)

<u>3</u> (y luego lo tacha)

<u>3 + (p + 2)</u>

<u>p + 2</u>

<u>3 – (p + 2</u>) (Duda un poco en la casilla siguiente de la derecha)

<u>3 + (p + 2) 3 – (p + 2)</u> (deja pequeño espacio).

E: Y esto que está aquí ¿qué es? (señalando 3 + (p + 2) – (p + 2)).

A: <u>p + 2</u>

E: ¿Multiplicando?

A: <u>Sí.</u>

E: Entonces, ¿Qué debes poner?

A: (El alumno escribe un punto entre 3 + (p + 2) y 3 – (p + 2) y entre (4 + 3) y (4 – 3) y entre (3 + a) y (3 – a) de los ejercicios anteriores).

E: Bien. Pero para que todo esto (señalando a 3 – (p + 2)) multiplique a todo esto (señalando a 3 + (p + 2)), ¿Qué debes poner?

A: <u>¿Para que esto </u>(señalando a 3 – (p + 2))<u> multiplique a esto</u> (señalando a 3 + (p + 2))?

E: Sí, ¿qué se suele utilizar para indicar que toda una expresión multiplica a toda otra expresión? ¿Poner paréntesis?

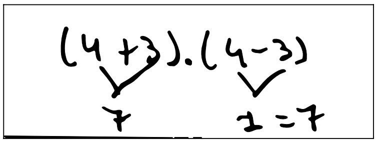
A: (El alumno va a colocar paréntesis tachando primero el paréntesis de p + 2).

E: No, fíjate ese está bien.

A: <u>¡Ah! ¡Ya!</u> (El alumno coloca los paréntesis correctos (3 + (p + 2)) (3 – (p + 2)).

E: Muy bien. Ahora te voy a pedir que calcules este otro (señalando (4 + 3) y (4 – 3)). ¿Cuánto daría ese cálculo?

A: (El alumno escribe)



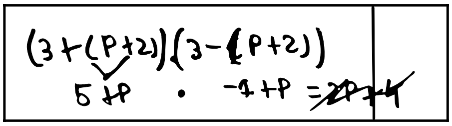
(y contesta) 7

E: Calcula el siguiente (señalando al de abajo).

A: (Escribe lentamente y dice) 2p + 4.

E: Fíjate si tienes estas dos expresiones (refiriéndose a (5 + p) y (-1 + p)) el signo de multiplicar, ¿cómo es que lo sumas? Me has dicho que es 2p + 4, pero ¿El signo de multiplicar que hace?

A: (Tacha 2p + 4).



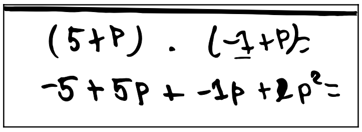
¿Lo hago aquí? (indicando a continuación de lo tachado).

E: Sí, debajo, en el espacio en blanco. Vuelve a repetirlo.

A: (Escribe) (5 + p) . (-1 + p) =

Luego 5

Luego 5+ p (Se queda pensando y escribe) 5 – p.



E: Bien, explícame lo que hiciste.

A: Multipliqué éste (señalando el 5) por éste (señalando el –1) y éste (señalando el 5) por éste (señalando el p).

E: ¿Y éste (señalando el p del primer paréntesis)?

A: ¡Ah! Sí. (El alumno añade) + -1p (y le queda) –5 + 5p + -1p.

E: Vamos a ver. ¿No te acuerdas de multiplicar? ¿Tienes dudas acerca de como hacer la multiplicación?

A: No me acuerdo.

E: Vale, no te preocupes seguro que la recordarás. Sigue, sigue...

A: (El alumno escribe) –5 + 5p + -1p + 2p =

E: ¿De dónde obtienes 2p?

A: p por p.

…

(J) pone de manifiesto nuevamente que las dificultades para usar e interpretar los paréntesis continúan. Estas dificultades se ponen de manifiesto tanto en ambientes aditivos como multiplicativos en los aspectos estructurales y operacionales, no así en el aspecto procesual (sustitución formal). El equipo de investigación decide continuar la entrevista limitada al aspecto operacional.

Se muestra, a continuación, parte de un episodio del comportamiento de (J) en la actividad 2 del protocolo de la segunda sesión (operaciones aditivas, con y sin paréntesis).

E: Ahora debes comenzar a realizar los ejercicios de la actividad 2 (señalando a la página del protocolo)
2a + 5a =
2a + 5b =
(a + b) +a =
2a + 5b + a =
(a – b) + b =
A: (El alumno comienza a efectuar los cálculos y da como resultado)

2 a + 5 a = ...7a..........
2 a + 5 b = ...2a+5b......
(a + b) + a = ...(a+b)+a..
2 a + 5 b + a = 3a +5b
(a – b) + b = ...(a-b)+b = a-b +b = 0+a = a

(Veamos la secuencia del proceso seguido por el alumno)
2a + 5a = 7a
2a + 5b = 2a + 5b
(a + b) +a =
(Duda y luego escribe) (a + b) + a
(Sigue efectuando)
2a + 5b + a = 3a + 5b
(a – b) + b = (a – b) + b (ahora no duda).
E: Bien. Éste (señalando (a + b) + a), ¿lo pusiste igual?
A: Sí, porque no puedo sumar a + b
E: Bien, y... ¿a + a? ¿No lo puedes hacer?
A: Sí, pero primero tendría que hacer el paréntesis, y como el paréntesis no se puede hacer ¿no?... ¿no?
E: Bien. Tú primero tendrías que hacer el paréntesis. El paréntesis en este caso no lo puedes hacer y lo dejas sin resolver. Por ejemplo, en esta actividad (señalando (a – b) + b), ¿se queda igual?
A: Sí.

E: ¿Tendrías que dejarlo igual?
A: Ja, ja.
E: (Continúa el profesor), pero un paréntesis, ¿se podría quitar, en algún caso?
A: No sé
E: Bueno, sigamos, calcula esta expresión (señalando 3a - (b + a) =)
A: Se queda igual también.

E: (El entrevistador decide facilitarle una regla para hacer los cálculos cuando intervienen paréntesis). “Si encuentras un paréntesis que tenga delante el signo menos, lo puedes quitar cambiando el signo de todo lo que está dentro”, ¿De acuerdo? ¿Cómo quedaría el ejercicio anterior?

A: ¡Eh! (señalando 3a – (b + a)), contesta: 3a - b –a
E: Bien, escríbelo.
A: (El alumno escribe) 3a - b – a =
E: ¿Y eso a qué sería igual?
A: ¡Eh! 2a – b

$3a - (b + a) =$ 3a-b-a=2a-b

E: Exactamente; ese tipo de paréntesis se puede quitar con esa regla y éste (señalando (a – b) + b), ¿qué signo tiene delante del paréntesis?

A: Más.

E: La nueva regla establece que se puede quitar, conservando el mismo signo que tienen las letras y los números de dentro del paréntesis.

A: ¿ a + b?
E: No, conservando el que tiene dentro del paréntesis, ¿b qué signo tiene delante?
A: Un menos.
E: Por lo tanto, ¿cómo quedaría?
A: a – b + b

El alumno termina y completa la actividad:

Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a = 7a	3 a – (b + a) = 3a-b-a=2a-b
2 a + 5 b = 2a+5b	a + 4 + a – 4 = 2a
(a + b) + a = (a+b)+a	3 a – b + a = 4a-b
2 a + 5 b + a = 3a+5b	(a + b) + (a – b) = a+b+a-b = 2a
(a – b) + b = (a-b)+b = a-b+b = 0+a = a	

Al comienzo de la tercera sesión, al día siguiente, el entrevistador propone al dictado una actividad no prevista en los protocolos de la sesión 3.

E: Vamos a comenzar por esta actividad, dictando:

A: (Escribe)

2 a + 5 b - 3 a + 4 b =

(a + 2b) + (4a - 3) =

(a + 3) – (2a + 5) =

(a + 3) . (4 + b) =

El alumno resuelve correctamente y da como respuestas a los dos primeros cálculos:

$$2a + 5b - 3a + 4b = -1a + 9b$$

$$(a + 2b) + (4a - 3) = 5a + 2b - 3$$

$$(a + 3) - (2a + 5) = 3a - 8$$

En el tercer cálculo el alumno entra de nuevo en una conflictividad que se agrava con la presencia de las expresiones multiplicativas.

…

E: Vamos ahora a calcular la tercera expresión algebraica.

A: (El alumno escribe) 3a (Duda y escribe) –8 (quedando (a + 3) – (2a + 5) = 3a – 8

E: Cuando tú ves un paréntesis, lo primero que tienes que hacer es resolver el paréntesis.

A: Sí.

E: Pero el paréntesis no lo puedes hacer (tapando –(2a + 5) de la expresión), yo creo que tú decides hacer los cálculos como si no existiera el paréntesis.

A: No sé. Lo veo muy lógico... porque si, lo único que hago es como si tuviera paréntesis, lo mismo que ahí no están, lo hago como si estuvieran. Hago el paréntesis normal.

(El entrevistador cambia la actividad y sitúa al alumno en una situación multiplicativa)

E: Si te digo, ahora que calcules (a + 3) por (4 + b)

A: (El alumno escribe lentamente)

7 · (a + b) (quedando) (a + 3) · (4 + b) = 7 · (a + b)

E: ¿Qué has hecho? ¿Cómo has encontrado el 7?

A: 4 + 3 ¡Ah!, pero es multiplicando.

E: Claro.

A: (Tacha el 7 y pone 28)

E: ¿De dónde sale el 28?

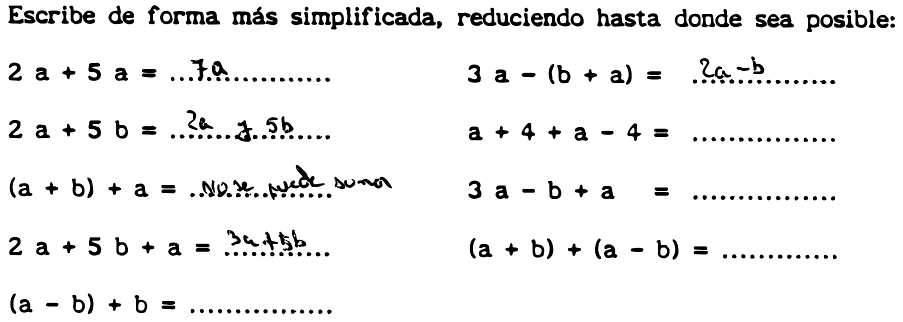
A: ¡Ah! digo ¡Ay! Es un 3... 12 (tacha el 28 y escribe 12).

…

DISCUSIÓN

En un primer momento, (J), es un alumno que identifica el paréntesis como un signo de acción que tiene prioridad en el cálculo. En las actividades aditivas en las que intervenían paréntesis y no las podía realizar las dejaba sin hacer, en algunos casos tenía tanta seguridad que escribía o decía: “no se puede hacer” y en otras ocasiones su actitud se dirigía a dejar de lado los paréntesis y actuar como si no existieran.

En un segundo momento el entrevistador decide corregir este comportamiento y le facilita la regla de los paréntesis:



Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a = ...7a...........

2 a + 5 b = ...2a + 5b....

(a + b) + a = ...No se puede sumar

2 a + 5 b + a = ...3a+5b...

(a – b) + b = ...

3 a – (b + a) = ...2a–b........

a + 4 + a – 4 = ...

3 a – b + a = ...

(a + b) + (a – b) = ...

E: Si encuentras un paréntesis que tenga delante el signo menos, lo puedes quitar cambiando el signo de todo lo que está dentro.

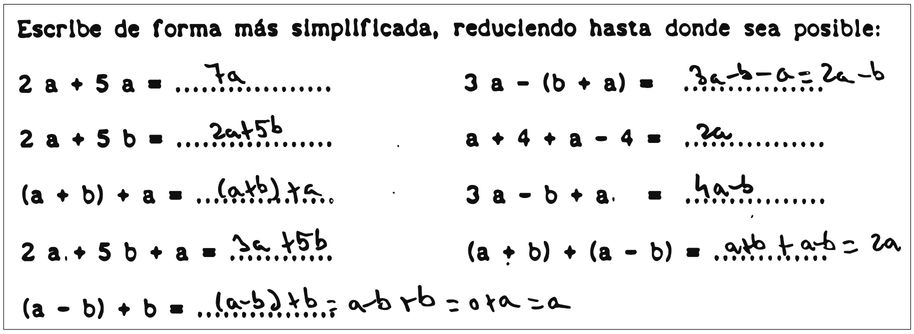
...

E: Exactamente; ese tipo de paréntesis se puede quitar con esa regla y éste (señalando (a – b) + b), ¿Qué signo tiene delante del paréntesis?

A: <u>Más.</u>

E: La nueva regla establece que se puede quitar, conservando el mismo signo que tienen las letras y los números de dentro del paréntesis.

El alumno termina y completa la actividad correctamente después de la información facilitada.



Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a = ...7a...........

2 a + 5 b = ...2a+5b......

(a + b) + a = ...(a+b)+a.

2 a + 5 b + a = ...3a+5b

(a – b) + b = ...(a–b)+b = a–b+b = 0+a = a

3 a – (b + a) = ...3a–b–a = 2a–b

a + 4 + a – 4 = ...2a..........

3 a – b + a = ...4a–b........

(a + b) + (a – b) = ...a+b+a–b = 2a

Al día siguiente al comienzo de la tercera sesión el entrevistador propone al alumno una actividad en la que tiene que considerar aspectos aditivos y multiplicativos con las expresiones:

2 a + 5 b - 3 a + 4 b =

(a + 2b) + (4a - 3) =

(a + 3) – (2a + 5) =

(a + 3) . (4 + b) =

Como observamos de las transcripciones el alumno resuelve los dos primeros cálculos y da respuestas correctas:

2 a + 5 b - 3 a + 4 b = -1 a +9 b

(a + 2b) + (4a - 3) = 5 a +2 b -1

Al trabajar con la tercera expresión comienzan de nuevo los problemas. El alumno escribe 3a, duda y escribe –8, dejando como definitivo (a+3) – (2a + 5) = 3a – 8.

Se observa que el alumno tiene dificultades para recuperar la regla de los paréntesis que utilizó el día anterior. Sabe que le están pidiendo que realice cálculos y opta por trabajar ignorando los paréntesis.

Cuando se le pide que calcule un producto la situación empeora; el alumno se queda sin recursos para recuperar la información que controlaba en las sesiones anteriores.

Este tipo de errores es identificado en el modelo de análisis que proponemos como un error que proviene de varias causas a la vez, es claramente un error que se origina por falta de significado por parte de (J), pero no es únicamente un problema de falta de significado. El entrevistador trata de dotar de significado procedimental a los cálculos aditivos en los que interviene el paréntesis, el alumno reacciona aparentemente con corrección, pero esta información no parece ser suficiente y lo que genera es una mayor conflictividad. (J) no sólo no recupera información para trabajar en el contexto aditivo sino que además los paréntesis que en el contexto multiplicativo no le presentaban dificultad y que controlaba en sesiones anteriores, ahora se vuelven problemáticos y (J) no encuentra enlaces cognitivos para recuperar la información como era el caso del "esquema" en situaciones multiplicativas.

En este caso además de la falta de significado (sentido) para el alumno, los errores tienen también su origen en un obstáculo didáctico, asociado al paréntesis como signo de acción que desarrolló en sus clases de Matemáticas cuando el año anterior trabajó los paréntesis en el contexto de los números enteros.

CONCLUSIONES

Este marco teórico que estamos construyendo para la investigación desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), vía la elaboración de modelos de competencia (en este caso modelo de competencia formal y modelo de competencia cognitivo) se muestra como una alternativa plausible para entender y actuar en los fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en este ejemplo dificultades y errores.

Se debe distinguir entre la competencia del Modelo, descrita en Socas (2001), y la competencia del alumno, en este último caso entendida desde la perspectiva semiótica como la articulación coherente de diferentes registros de representación de un objeto algebraico, en los aspectos operacional, estructural y procesual. En este sentido se considera que los objetos del álgebra pueden ser representados bajo diferentes registros semióticos, aceptando que las operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo en el que entendemos la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

En este sentido, el modelo desarrollado permite profundizar en las dificultades y obstáculos que tienen los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y posibilita nuevas maneras de enfocar el estudio de los errores, especialmente desde dos perspectivas:

–Los errores que tienen su origen en un obstáculo.

–Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta última, se le asigna dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

En los estudios sobre dificultades y errores (Rico, 1995; Socas, 1997), los diferentes resultados ponen de manifiesto, que los errores que cometen los alumnos no se deben al azar, sin embargo, existen dos carencias básicas en estas investigaciones: los resultados no ofrecen una perspectiva de generalidad y los resultados no determinan el origen de los errores ni a nivel general ni a nivel individual.

En el primer caso, observamos que cuando el error se mira a niveles más profundos, es decir, se considera no sólo la estructura superficial del objeto sino también la estructura profunda, esta falta de generalidad podría evitarse, ya que si se mira en los niveles de representación más profundos, en los que evoluciona un sistemas de significados que controlan las realizaciones superficiales, cuando se detectan principios erróneos, en este nivel profundo, es posible explicar no sólo un caso, sino toda una clase de errores.

En el segundo caso, vienen a colación las afirmaciones de Freudhental en el año 1981, que aún hoy son válidas:

> "Diagnóstico y remedio son términos de la medicina adoptados por los educadores que pretenden emular a los doctores en medicina. Lo que emulan es la medicina del pasado, la de los cuáqueros de la actualidad. La diagnosis médica estaba orientada a identificar lo que estaba dañado como lo hacen los llamados exámenes de diagnóstico en educación, la verdadera diagnosis indica porqué algo se dañó. La única forma de determinar esto consiste en la observación de los errores de un niño tratando de entenderlos".

Se está intentando para el estudio de lo errores construir marcos teóricos generales desde los que tratarlos sistemáticamente. Parece más acertado establecer marcos teóricos locales relativos a un contenido temático curricular y determinar no sólo una clasificación sino una explicación de su origen, al menos a nivel individual.

En este sentido, el modelo desarrollado desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) permite profundizar en las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y posibilita nuevas maneras de enfocar el estudio de los errores que cometen los alumnos. En este caso el estudio:

-Utiliza al menos dos registro de representación del objeto lo que permite estudiar la estructura superficial y profunda del mismo.

-Analiza el error en los estadios de desarrollo del signo: semiótico, estructural y autónomo.

-Toma en consideración el binomio conceptual/procedimental del objeto en su triple perspectiva: operacional, estructural y procesual.

En nuestras investigaciones hemos encontrado también que en general los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y de los procesos del Lenguaje algebraico que queramos tratar, si embargo, hay algunos que se han repetido independientemente del proceso (sustitución formal, generalización y modelización) desarrollado: la clausura, la particularización, el uso incorrecto del paréntesis…, lo que le confieren un carácter de mayor generalidad, pero esto no resta importancia a la necesidad de prestar especial atención al origen individual de los mismos.

Es el caso del alumno (J) el origen del error sobre el uso incorrecto del paréntesis estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñar el uso de los paréntesis en el estudio de los números enteros. Al enseñar la resolución de expresiones con operaciones combinadas de números enteros se suele seguir dos estrategias. En la primera, los cálculos se efectúan de "dentro hacia fuera", los paréntesis tienen preferencia y se resuelven en primer lugar, luego el corchete y finalmente, la llave. Esto para algunos alumnos supone que cuando se pasa a realizar operaciones en las que intervienen números y letras, los alumnos sigan el mismo procedimiento, lo que produce errores bien porque se bloquean al no poder resolver paréntesis del tipo,$-(a-2b)+b$, o bien, porque omiten el paréntesis y actúan como si no estuviera. La segunda estrategia consiste en resolver expresiones de "fuera hacia dentro", lo que probablemente evitaría para el caso del Álgebra, que se produjeran errores del tipo anterior.

Es en esta dirección del estudio de las dificultades y errores en la que debemos seguir avanzando para identificarlos en su origen y tratar de corregirlos con garantías en el ámbito que proceda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1989). Epistémologie et Didactique. *Cahier de Didirem.* Université. París VII.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. México: Siglo Veintiuno).

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4(3),* 199-208.

Bliss, J.; Monk, M.; Ogborn, J. (1987). *Qualitative Data Analysis For Educational Research.* USA: Croom Helm.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* Windsor: NFER- Nelson.

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics, 7*, 2-9.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2),* 165-198.

Brousseau, G.; Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G.; Otte, M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Brueckner, L. y Bond, G. (1984). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje.*Madrid: Rialp.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*. 15 (3), 361-371.

De Vega, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza. Madrid.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*, 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang. Suisse.

Freudenthal, H. (1981). The Mayors problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 6-15.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

García, J.N. (Coord.) (1999). *Intervención psicopedagógica en los trastornos del desarrollo.* Madrid: Pirámide.

Goldin, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. En Hirabayashi, Ichiei *(Ed.) Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1.

González, E. (Coord.) (2003). *Necesidades educativas específicas. Intervención psicoeducativa.* Madrid: CCS.

Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M.ª M.; Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188.

Herscovics, N. (1989) Cognitive Obstacles Encounteres in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19 (3)*, 333-335.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan y N.C.T.M.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencia*s, *7 (3)*, 229-240.

McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds.) (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* New Cork: Springer-Verlag.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3, 1,* 93-166.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. y Mulhern, G. (Eds.). *New Directions in Mathematics Education.* Londres: Routledge.

Paivio, A. (1978). Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and cognition, 6*, pp. 199-208.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students´ Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 1-20.

Resnick, L. B. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós y MEC. (Del inglés: *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1981).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). "Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO". En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 239-265.CAMPUS. La Laguna.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 311-322.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1)*, 1-36.

Sierpinska A: (1985) *La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques.* Comptes-rendus de la 37e rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M. (Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur), Leiden, 73-95.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. ; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1989). Preservice Elementary Teachers´ Explicit Beliefs about Multiplication and Division. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 79-96.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press (versión castellana: *Pensamiento y Lenguaje.* Buenos Aires: Fausto, 1992).