estándares curriculares
Área matemáticas

Aportes para el análisis

ASOCIACIÓN COLOMBIANA
DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

CINCO 5

CUADERNOS DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

gaia Grupo Editorial

COLECCIÓN: CUADERNOS DE

MATEMÁTICA EDUCATIVA

CUADERNO No. 5
ESTÁNDARES CURRICULARES - ÁREA MATEMÁTICAS:
APORTES PARA EL ANÁLISIS
ISBN COLECCIÓN: 958-96440-4-X
ISBN LIBRO: 958-96440-6-8

© ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, **ASOCOLME**
Primera edición, 2002
1000 ejemplares

COMPILADOR
Pedro Javier Rojas Garzón

DIRECCIÓN EDITORIAL,
DISEÑO GRÁFICO E IMPRESIÓN
Grupo Editorial Gaia
Calle 74 No. 22-70 Bogotá
Tel. 3102668311 - gaiaeditorial@gmail.com

Reservados derechos de autor. Prohibida la reproducción total o parcial de esta publicación
mediante cualquier proceso de reproducción, digital, fotocopia u otro, sin permiso escrito del editor.

IMPRESO EN COLOMBIA. 2002

estándares curriculares
Área matemáticas

Aportes para el análisis

Profesores e investigadores que han participado en los encuentros sobre Estándares Curriculares para el Área de Matemáticas. Convocados por ASOCOLME

Carlos E. Vasco
Olga Lucía León Corredor
Universidad del Valle

Gloria García
Celly Serrano
Alberto Donado
Hernán Díaz R.
Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional

Myriam Acevedo
Universidad Nacional de Colombia

Jorge Castaño G.
Amparo Forero
Pontificia Universidad Javeriana

Pedro Javier Rojas G.
Martha Bonilla Estévez
Neila Sánchez H.
Orlando Lurduy Ortegón
Universidad Distrital F. J. de Caldas

Silvia Bonilla Jaramillo
Universidad Externado de Colombia

Edgar Guacaneme
Una empresa docente-Universidad de los Andes

Cristina Carulla
Universidad de los Andes

Marco Antonio Feria
Anillo de Matemáticas-SED

Patricia Pedraza Daza
Nidia Rodríguez C.
ICFES

Blanca Felisa Alarcón
Teresa León Pereira
Rodolfo Vergel C
Cecilia Barón Páez
Virginia Cifuentes
Héctor Bejarano
Filena Jiménez
Maria Cristina Pérez
Yuly Marcela Villegas

ASOCIACIÓN COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
ASOCOLME

Contenido

Presentación

El 19 de Mayo de 2002, el Ministerio de Educación Nacional presentó en la ciudad de Santa Marta el Documento de Estudio ***Estándares para la excelencia en la educación,*** en el cual plantea una propuesta de Estándares curriculares para las áreas de matemáticas, lengua castellana y ciencias naturales, y, educación ambiental para la educación preescolar, básica y media.

La Asociación Colombiana de Matemática Educativa –ASOCOLME–, convocó a profesores e investigadores vinculados a instituciones de Bogotá, varios de ellos con reconocimiento entre la comunidad de educadores matemáticos a nivel nacional, con quienes realizó dos encuentros iniciales en los cuales se estudió la propuesta del MEN y, en el último de ellos, se le presentó al Doctor Bernardo Recamán S., quien en esa época se desempeñaba como Director de la Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media, una síntesis del análisis realizado y de las debilidades encontradas en dicho documento, no sólo respecto a su coherencia y pertinencia, sino también a nivel conceptual.

Producto de estas primeras reuniones fue la conformación de seis grupos interinstitucionales que abordaron un análisis crítico de cada una de las seis componentes propuestas en el documento: pensamiento numérico y sistemas numéricos, espacial y sistemas geométricos, métrico y sistemas de medidas, aleatorio y sistemas de datos, variacional y sistemas algebraicos y analíticos, y, procesos matemáticos; además de un grupo de miembros de ASOCOLME que abordó una reflexión de carácter general sobre dicha propuesta[1].

[1] Dicho documento fue presentado a la Revista Educación y Cultura para su publicación.

Teniendo en cuenta la importancia de dichos análisis, en cuanto aportan elementos teóricos en relación con las diferentes componentes propuestas en el documento del MEN, nuestra Asociación publica el libro número 5 de su colección *Cuadernos de Matemática Educativa,* titulado ***"Estándares Curriculares–Área de Matemáticas: Aportes para el Análisis"***, cuyo lanzamiento se hizo en el marco del Cuarto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, realizado en la Universidad de Caldas, en la ciudad de Manizales (Octubre de 2002). En este libro se presentan los siete documentos, producto del trabajo de los grupos mencionados y de las diversas discusiones realizadas, tanto en los dos eventos iniciales como en diversos encuentros posteriores de dichos grupos. Las ideas aquí expresadas son de responsabilidad de sus autores y no comprometen a ASOCOLME.

Si bien para la construcción del *Documento de Estudio* que contiene la propuesta sobre estándares del MEN, no se convocó a la comunidad de educadores matemáticos –la cual se ha venido consolidando desde hace varios años en el país–, y posiblemente se desconocieron algunos avances que sobre la reflexión teórica y la investigación se han venido desarrollando desde hace ya varias décadas, la construcción del documento final debe estar precedida por un proceso de participación y discusión de la Comunidad de Educadores Matemáticos. En tal sentido, y como aporte para este proceso, ASOCOLME ofrece esta publicación que recoge diversas perspectivas en relación con la propuesta de estándares curriculares.

La asociación agradece a todos los profesores que participaron con sus ideas en los distintos encuentros y, de manera especial, a quienes dedicaron parte de su tiempo a elaborar los documentos que componen este número de la Colección Cuadernos de Matemática Educativa.

Pedro Javier Rojas Garzón
Presidente-ASOCOLME

COMPONENTE

REFLEXIONES SOBRE LOS ESTÁNDARES CURRICULARES PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

CAPÍTULO **uno**

Pedro Javier Rojas G.
Gloria García O.
Myriam Acevedo
Leonor Camargo U.
Asociación Colombiana de Matemática Educativa
asocolme@tutopia.com

Presentación

La publicación por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de una propuesta de Estándares Curriculares para las áreas de Matemáticas, Lengua Castellana y Ciencias, ha empezado a generar un debate en la comunidad de educadores que se inicia con la discusión en torno al significado que se le asigna al término «estándares curriculares», y suscita inquietudes acerca de preguntas fundamentales como: ¿cuáles son las razones para crear estándares nacionales?, ¿cuál es o debería ser el proceso para construir una propuesta de Estándares?, ¿para qué se diseña un sistema de estándares?.

En el área de matemáticas un colectivo de profesores que ha venido estudiando e investigando los problemas de la educación matemática en la básica y media respondió a la convocatoria de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa[1], para iniciar un debate académico alrededor de los interrogantes planteados y la propuesta presentada por el Ministerio.

En este escrito presentamos unos primeros elementos para aportar y ampliar el debate, los cuales son resultado del trabajo que el colectivo ha desarrollado en reuniones generales y de comisiones[2]. En primer lugar damos un marco de referencia sobre el significado del término estándar en el contexto educativo, y en particular sobre el carácter de los llamados estándares curriculares; en segundo lugar, nos referimos al proceso de elaboración de los estándares, asociado con posibles respuestas a las preguntas sobre el porqué y para qué se diseñan los estándares; mencionando además algunas inconsistencias que presenta el documento de estudio propuesto por el MEN; para –aprovechando estos primeros elementos de análisis– sugerir a la comunidad de educadores, posibles caminos y estrategias para participar y enriquecer el debate a nivel nacional.

El significado de la expresión estándar en Educación

Desde una revisión rápida en el contexto del discurso educativo, podríamos afirmar, que el término estándar se inscribe en políticas educativas globales que buscan, por una parte, regular y ordenar los sistemas escolares a través de los currículos y, por otra, asegurar calidad y generar cambios. El término se

[1] La Asociación Colombiana de Matemática Educativa -ASOCOLME- ha realizado desde el mes de abril tres reuniones en Bogotá y programa un panel sobre los estándares curriculares, de carácter nacional, en el marco del Cuarto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, que se realizará en la ciudad de Manizales, entre el 3 y 5 de octubre de 2002, organizado por la Asociación, conjuntamente con la Universidad de Caldas.

[2] En el marco de las discusiones han participado el profesor Carlos Eduardo Vasco y varios profesores de diversas instituciones de Bogotá.

refiere a proposiciones que pueden ser utilizadas para juzgar la calidad de un currículo o de unos métodos de evaluación o de enseñanza, es decir, proposiciones acerca de lo que se valora, las metas, entendidas no sólo como lo que debería hacerse, sino también como una medida de progreso hacia ellas. Según los propósitos podrían definirse estándares en relación con contenidos y currículos, así como estándares en relación con desempeño escolar y evaluación. Los primeros describen lo que los maestros deben enseñar; los curriculares son principios expresados como juicios de valor, para conseguir los objetivos sociales y escolares del proceso educativo e incluyen propuestas para orientar cambios en las prácticas docentes. Por su parte, los estándares de desempeño definen grados de dominio o niveles de logro; los de evaluación pretenden ayudar al profesor a tomar decisiones sobre la docencia y orientar propuestas sobre procesos y métodos para valorar avances en los niveles de logro. Estos últimos, son coherentes con los curriculares, en cuanto se considera a la docencia y al currículo como parte esencial del proceso evaluativo. Como se deduce de esta primera referencia no tendría sentido tener estándares de contenido o curriculares sin contar con estándares de desempeño o de evaluación.

¿Por qué y para qué, Estándares Curriculares en Matemáticas?

La construcción de Estándares en el ámbito nacional, no surge de manera aislada, se enmarca en el desarrollo de las políticas establecidas por el Proyecto de Educación en América Latina y el Caribe, para el período 1993-1996, donde se afirma al respecto: "tanto en el contexto externo vinculado a la Educación como al interior de los sistemas educativos, se ha generado un conjunto de condiciones, posibilidades y necesidades que reclaman el establecimiento de políticas para la superación del endémico desfase entre las características del sistema educacional y los requerimientos individuales y sociales". Con el propósito de superar los problemas existentes se formulan objetivos para alcanzar la calidad y eficiencia de los sistemas educativos; los cuales deben lograrse mediante la incorporación de estándares nacionales y sistemas de medición y evaluación de los productos del proceso educativo; se asigna a los Ministerios de Educación la responsabilidad de ejecutar esta gestión y se les insta a proponer estándares cada vez más exigentes para cada grado, dirigidos al desarrollo de aprendizajes de nivel superior. Es de anotar que en mayo de 1997, en el Seminario Internacional sobre Medición y Estándares reunido en Fortaleza (Brasil) organizado por la oficina regional de la UNESCO para América Latina y el Caribe, se avanzó en la discusión y se propuso un marco para la generación de estándares en la región, sobre el que nos interesa destacar algunos elementos para la reflexión: una propuesta de estándares, debe ser el resultado de un proceso de construcción de conocimiento y de consensos, ser internamente coherente y externamente válida, estar en consonancia con las políticas del sector e insertarse en planes de desarrollo, aplicable a subpoblaciones o grupos heterogéneos, respetuosa de la cultura y condiciones locales así como de la cultura global; y además debe transformarse en objeto de un proceso sistemático de consulta y difusión.

Si en nuestro país pretendemos construir una propuesta de estándares que esté en consonancia con las políticas derivadas de la Ley General de Educación, no se pueden desconocer los avances en el pensamiento educativo, la elaboración de proyectos institucionales, y los desarrollos curriculares logrados por la comunidad educativa, que se plasman en buena medida en los Lineamientos Curriculares; en este sentido no se ha justificado el «retroceder» hacia un diseño de estándares de contenido, cuando se esperaba la construcción de estándares curriculares que desarrollaran las orientaciones dadas en los lineamientos, con el propósito de relacionar objetivos sociales y escolares, en busca de revisar o redefinir los fines educativos. Esta construcción en el caso de la educación matemática, exigiría reflexionar sobre: las funciones sociales, culturales y políticas de las matemáticas en la sociedad colombiana; la necesidad de las matemáticas en nuestra sociedad; las exigencias para el desempeño con racionalidad y conocimientos matemáticos en la vida social, cultural y laboral; además de las exigencias que impone una sociedad en la que se incorpora cada vez más la tecnología.

Otra reflexión esencial para la elaboración de Estándares se refiere al significado de la Educación Básica y la función que ésta cumple en nuestro medio. La obligatoriedad de la básica implica aceptar que la matemática que se proponga para este ciclo debe ser adecuada y pertinente para todos, es decir, que las matemáticas que se ofrecen deben constituirse en la base de una cultura general requerida por todo ciudadano y al mismo tiempo deben reflejar las matemáticas que todos los estudiantes tienen la oportunidad de aprender. Este trasfondo de justificación social que orienta la educación obligatoria debe ser expresado en los Estándares; por tal razón ellos se convierten en expresiones de la equidad que se busca, y se constituyen en un medio no sólo para alcanzar con eficiencia la calidad, sino fundamentalmente para conseguir igualdad de oportunidades con calidad. Con los argumentos anteriormente expuestos se reitera que la construcción de estándares requiere de la participación, discusión y concertación de diversos estamentos de nuestra sociedad.

Apuntes críticos a los Estándares para el área de matemáticas

Como ilustración y con él animo de motivar un análisis detallado y juicioso de cada uno de los planteamientos presentados en la propuesta de estándares, haremos mención de algunas inconsistencias y errores que hemos encontrado en el documento.

Acerca del proceso y los referentes. En primer lugar, y en contravía de procesos que se dieron para la construcción y discusión de los Lineamientos Curriculares, documento que fue fruto del trabajo colectivo de un grupo de investigadores y docentes de universidades y colegios que han colaborado con el equipo responsable de la Educación Matemática en el Ministerio de Educación Nacional desde hace ya varios años, la propuesta de estándares no es el fruto del trabajo de una comunidad académica. Para la construcción del documento no se convocó a la comunidad de educadores matemáticos, ni a grupos de maestros innovadores, ni a grupos que han desarrollado investigaciones en esta área desde hace ya varias décadas. Tampoco participaron en esta discusión y construcción las entidades oficiales (ICFES, Secretarías de Educación, Universidades) encargadas de la evaluación de la calidad de la educación matemática para identificar necesidades, dificultades, demandas de formación, etc.

Un documento de estándares debe tener una sólida fundamentación; mostrar coherencia interna, no sólo en la secuencialidad temática desde el grado cero hasta el grado once, sino también respecto a los tiempos requeridos por los niños y jóvenes para el desarrollo de comprensión en relación con campos conceptuales; además, coherencia externa con los documentos de política educativa del Estado, lo cual no aparece claramente en la propuesta sobre estándares curriculares presentada por el MEN para su estudio –pues hacer referencia a los pensamientos y los procesos, y enunciar una lista de temas por pensamientos, no asegura que se involucre significativamente las orientaciones planteadas en los Lineamientos Curriculares–. Tampoco se tuvo en cuenta que en el país existen unos indicadores de logros curriculares (Resolución 2343), que de una u otra forma han sido referentes para las instituciones y para los educadores matemáticos del país.

Acerca de lo curricular. Una propuesta de estándares puede constituirse en apoyo para construir currículos de calidad y mejorar los sistemas de evaluación, o puede restringir la autonomía escolar y la creatividad curricular, lo anterior significa que puede enviar señales positivas o inhibir la experimentación y la innovación. La propuesta de estándares presentada por el MEN, se aproxima realmente a una propuesta de estándares de contenido, restringiendo de esta manera la autonomía derivada de la Ley General de Educación y reduciendo el problema curricular al diseño de un programa, que en coherencia intenta presentar una organización de contenidos centrada en la lógica de la disciplina.

Por otra parte, en el documento se refleja ausencia de conexión entre las distintas componentes propuestas; por ejemplo, dado que los procesos de medida tienen una importancia capital en la construcción de los conjuntos numéricos (particularmente, de los racionales e irracionales), resulta extraño que, en grado sexto, respecto del componente pensamiento numérico, se exija al estudiante distinguir y dar ejemplos de números racionales e irracionales, mientras que en la componente pensamiento métrico no se haga referencia a procesos de medición que hacen necesario el surgimiento y uso de dominios numéricos diferentes al de los naturales.

Respecto al pensamiento métrico y sistemas de medidas, no se tiene en cuenta que resulta ineludible el uso de unidades informales, propias del contexto, a partir de experiencias de medición directa con objetos concretos, ni que las unidades estandarizadas, tanto en el aula como en la historia de la humanidad, surgen como requerimiento para posibilitar la comunicación sobre situaciones que involucran la medida. Así, debe preguntarse acerca de la pertinencia de exigir a un niño de segundo grado (7 u 8 años) que reconozca unidades tan pequeñas como el gramo, más aún cuando su experiencia no está relacionada con mediciones en el laboratorio, sino con las libras o con los kilogramos, que en su contexto familiar son las medidas utilizadas para referirse al peso de los alimentos.

Respecto al pensamiento numérico, no se presenta un trabajo a fondo en sistema de numeración decimal, pues sólo se hace una ligera mención de los sistemas de base dos y se presentan desorganizadamente las operaciones y las representaciones en la recta numérica, pasando por alto el estudio de las propiedades de las operaciones; además, se ignora la complejidad en la comprensión de los números enteros, que son introducidos desde el grado cuarto, o las fracciones en el grado segundo.

Acerca de la visión de las matemáticas escolares, de la enseñanza y el aprendizaje. Se percibe una visión del conocimiento matemático, como producto, por lo que la enseñanza se vuelve a concebir como transmisión de información, y en consecuencia el aprendizaje se centra en el dominio de destrezas, conocimiento de hechos y notaciones. Saber matemáticas, al parecer, significa repetir definiciones, reconocer la sintaxis, nombrar las partes constitutivas, y aplicar fórmulas para resolver ejercicios. En el documento se proponen estándares como:

Pensamiento	Grado	Estándar
Numérico	2º	Reconoce una fracción como parte de un todo e **identifica sus partes** (numerador y denominador)
Métrico	5º	**Maneja con fluidez** las unidades métricas cuadradas (cm^2, m^2,etc.)
Espacial	7º	Identifica y construye alturas, bisectrices, mediatrices y medianas de un triángulo dado e identifica **catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo**
Variacional	8º	**Reconoce** una expresión algebraica, las variables y términos que la componen

Respecto al aprendizaje, no tiene en cuenta resultados de estudios de investigación que dan cuenta de un desarrollo evolutivo en la apropiación de los conceptos matemáticos y desarrollo de procesos, pues se plantean exigencias de gran complejidad para el grado en el cual se proponen, como puede verse en las siguientes formulaciones:

Grado	Estándar
1º	Describe y **argumenta matemáticamente** acerca de figuras, formas y patrones que pueden ser vistos o visualizados.
5º	**Investiga** y comprende los números negativos.
6º	Utiliza el lenguaje de las matemáticas para **comprender y explicar situaciones complejas.**
8º	**Comprende el significado y las propiedades de la recta real.**

Adicionalmente conviene discutir la pertinencia de formular estándares grado por grado, en lugar de plantearlos por grupos de grados[3], pues se estaría desconociendo que es imposible homogenizar los tiempos requeridos por los escolares para el desarrollo de procesos, y además se limitaría la autonomía de las instituciones para la construcción e implementación de su proyecto educativo (PEI).

Propuesta

A partir de estas primeras reflexiones, convocamos a la comunidad educativa, y en particular a la comunidad de educadores matemáticos, a estudiar a fondo el documento y reflexionar críticamente frente a sus planteamientos, aportando desde las experiencias y los procesos de construcción de propuestas curriculares, que sabemos se están generando en varias regiones del país. Esta reflexión es urgente por las repercusiones que tiene la definición de unos estándares nacionales en la formación de los ciudadanos, en tanto unas orientaciones que desconocen los resultados de investigación pedagógica en las últimas décadas alejaría más a nuestros niños y jóvenes de alcanzar la cultura matemática requerida para la participación autónoma en la sociedad contemporánea. Además reforzaría, por una parte, prácticas tradicionales que han conducido al fracaso escolar y, por otra, mantendría en vigencia textos escolares descontextualizados que obstaculizan los cambios curriculares requeridos.

La Asociación Colombiana de Matemática Educativa ha iniciado el movimiento, creando grupos de estudio en torno a los Lineamientos Curriculares, solicitando el apoyo para que el Ministerio posibilite espacios de carácter regional y nacional, abiertos a la participación de la comunidad de educadores matemáticos.

[3] Como se hizo en los Indicadores de Logro (Resolución 2343 de 1996) y en los Lineamientos Curriculares (1998) del MEN

COMPONENTE

PENSAMIENTO NUMÉRICO

Análisis de la propuesta de estándares

CAPÍTULO dos

Jorge Castaño G. *jorgecastano@hotmail.com*
Amparo Forero Sáenz. *amp2@Yahoo.com*
Universidad Javeriana

Filena Jiménez de Rodríguez. *SED, D.C.*
Marco Antonio Feria. *marcoferia@hotmail.com*
SED, D.C.- Asociación Anillo Matemático

Este artículo tiene como función analizar los estándares relativos al pensamiento numérico. Para ello, como es obvio, en un primer momento, el grupo revisó los estándares incluidos en el sistema numérico y, posteriormente, buscó en otros sistemas y en las tres agrupaciones de procesos, otros estándares que estuvieran directamente ligados a lo numérico; de igual forma estudió las relaciones de los estándares incluidos en este sistema con los de otros.

El procedimiento seguido consistió en agrupar los estándares de este sistema al conjunto numérico al que hacen referencia (naturales, fraccionaros, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos). Al interior de cada una de estas agrupaciones se definieron las siguientes categorías de análisis: tratamiento de la naturaleza de los números, construcción de diferentes significados del conjunto numérico, de sus operaciones y de sus relaciones; estudio de la estructura formal de los diferentes sistemas numéricos, algoritmos de las operaciones, procesos de estimación y relaciones con otros sistemas.

Una vez realizado este análisis y a partir de los datos obtenidos se hicieron inferencias sobre las ideas que subyacen a esta propuesta con relación al mismo concepto de estándar, a la naturaleza de la matemática, a su enseñanza y a su relación con los lineamientos curriculares.

En este artículo el orden de exposición es inverso al seguido para el análisis: primero se presentan unas observaciones generales producto del último momento del análisis, y posteriormente, se presentan los análisis específicos a los diferentes conjuntos numéricos; con esto se busca cumplir una doble función, sustentar las afirmaciones generales, a la vez que ofrecer un análisis más local y detallado.

Uno de los consensos ganado en la comunidad de "didáctica de la matemática", en los niveles internacional y nacional, consiste en reconocer que la enseñanza del número en la escuela debe desplazarse de la enseñanza de hechos numéricos aislados hacia el desarrollo del pensamiento numérico; este hecho se encuentra en la literatura especializada expresado de distintas formas. El MEN lo ha señalado desde varios años atrás.

"El énfasis que ahora hacemos en el estudio de los sistemas numéricos es el desarrollo del pensamiento numérico... En esta propuesta vamos hablar de pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y las destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los ordenes de magnitud, etc". (MEN. Lineamientos Curriculares de Matemática, 1998). Mcintosh (citado en el documento de Lineamientos) afirma que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones”.

Numerosos estudios, desde perspectivas diferentes, han mostrado que los niños se hacen a valiosos y variados significados del sistema numérico de los naturales (los números, con sus operaciones y sus relaciones) cuando enfrentan situaciones de su vida cotidiana, significados que la escuela debe reconocer y comprometerse con ayudarlos a ampliar y profundizar.

Autores como Kamii y Brissiaud, desde perspectivas distintas, coinciden que la comprensión del número por parte del niño, es mucho más que el aprendizaje de la sucesión numérica y el aprendizaje de la lectura y escritura de los numerales, consideran que es ante todo el proceso de apropiarse de un sistema de signos como herramienta cultural en diferentes contextos, en los cuales los niños tengan que resolver problemas relativos a la comparación de la extensión de las cantidades de varias colecciones.

Trabajos de autores como Dickson, Lerner D., Kamii C., Orozco M. Brissiaud R. y Castaño J. muestran lo complejo que resulta para un niño el apropiarse de la idea de unidad relativa y lograr manejar de forma apropiada un sistema basado en diferentes unidades de valores diferentes.

De igual forma existen numerosos estudios descritos por Dickson, Vergnaud y Kamii en los que muestran como a los niños les resulta de gran dificultad hacerse a una comprensión y manejo adecuado de los algoritmos llamados “formales” o “universales” (las formas como los adultos hacemos las operaciones) de las operaciones básicas de la aritmética de los naturales y como conviene incentivar en un comienzo el aprendizaje de procedimiento no formales más cercanos a las comprensiones ganadas por los niños. Kamii muestra, con sobrada razón, que los procedimientos formales pone a trabajar a los niños sobre cifras, dificultándoles la construcción de una apreciación de la cantidad expresada por los numerales.

Aunque existen diferencias entre distintos autores en explicar los múltiples caminos por los cuales el niño accede a significados distintos de las operaciones básicas de las operaciones aritméticas, existe un acuerdo en la necesidad de que la escuela ofrezca en múltiples contextos, variadas oportunidades de modelar situaciones problemáticas con estas operaciones.

A nuestro parecer la propuesta de estándares desconoce estos estudios, pero es al lector con base en el análisis que se ofrece en este artículo, juzgar si esta propuesta se soporta en un requisito mínimo que debe exigirse a cualquier planteamiento que pretenda constituirse en un referente para el mejoramiento de la calidad educativa en un campo disciplinar específico de un país, cual es el ser construida sobre las comprensiones que la comunidad de expertos en la educación y didáctica en este campo ha ganado, como fruto de las investigaciones y debates realizados a lo largo de muchos años.

Observaciones de orden general

A partir del análisis hecho sobre la propuesta de estándares relativos al pensamiento numérico es posible hacer algunas afirmaciones de orden general. Como hemos dicho estas afirmaciones serán sustentadas precisamente a partir del análisis específico.

- La propuesta de estándares presentada por el MEN es un listado de temas, que muestra vacíos en términos de su estructura. Este listado no es completo y tiene carencias de coherencia y de continuidad de un grado a otro.
- Aunque el documento, en su parte introductoria, expresa que la formulación de estándares es un desarrollo de los lineamientos curriculares del área propuesto por el MEN, el análisis hecho obliga a afirmar que tal propuesta no logra la pretensión expresada, ya que no sólo en algunos casos la propuesta de estándares desarrolla los lineamientos en forma incompleta, sino que en otros, le es contradictoria.
- Algunos estándares se formulan de manera imprecisa, con poco rigor y poca exactitud desde el punto de vista disciplinar.
- A juzgar por la organización y la secuencia de los estándares relativos a este pensamiento, se puede afirmar que se desconoce el carácter estructural del cuerpo disciplinar de la matemática.
- En términos curriculares la propuesta de estándares desconoce la idea de currículo en espiral, idea ésta que es prácticamente consenso entre los estudiosos de la educación en general y muy especialmente en la matemática.
- Los estándares propuestos desconocen los procesos que siguen los niños en la construcción de los diferentes conceptos numéricos. En algunos casos se propone enseñar conceptos que desbordan por muchos las posibilidades cognitivas de los niños.
- Se puede afirmar que la propuesta de estándares mantiene la idea de un modelo pedagógico reproduccionista de la enseñanza. Se reduce la educación matemática a la enseñanza de definiciones, procedimientos y algoritmos.

Análisis Específico

Estándares vinculados con la comprensión del Sistema Decimal de Numeración (SDN)[1].

La propuesta no aborda el estudio del Sistema Decimal de Numeración como un sistema que demanda una comprensión lógica de parte del niño,

[1] Se encuentran los siguientes estándares ligados a este aspecto. En primero a) Representa conjuntos de hasta 999 objetos, utilizando materiales concretos, b) Lee, escribe y ordena números hasta 999 y c) Reconoce los valores posicionales de los dígitos en un número de hasta tres dígitos. En segundo: a) Lee, escribe y ordena números de hasta cinco o más dígitos y b) Reconoce los valores posicionales de los dígitos de un número de hasta cinco (o más) dígitos. En tercero: Lee, escribe y ordena números de cualquier cantidad de dígitos.

sino como el simple hacerse a unas reglas sintácticas dirigidas a la lectura y escritura de los numerales. El valor posicional se reduce a "reconocer el valor posicional de los dígitos...", hecho que es relativamente fácil de lograr desde una lógica elemental (significado aditivo de los numerales) y que no garantiza la adquisición de comprensiones más profundas del SDN, necesarias para operar con los números, para entender los algoritmos formales y para el manejo comprensivo de los sistemas de medición.

La propuesta de estándares vinculada con este aspecto específico considera agotado el estudio del SDN en el grado tercero, desconociendo que los estudios existentes sobre la construcción del sistema de numeración por parte de los niños, muestran que conviene hacer una mayor dosificación en su enseñanza, ya que una comprensión profunda demanda operaciones lógicas complejas a las que apenas empiezan a acceder los niños de los grados tercero y cuarto. No es que los niños no sean capaces desde temprana edad de aprender a leer y escribir números, este aprendizaje es relativamente sencillo, lo que no es sencillo es acceder compresivamente a la lógica del sistema de numeración. Al respecto es muy ilustrativo ver trabajos citados por Dickson L., así mismo, se recomienda consultar los trabajos de Lerner D., Kamii C., Orozco M., Brissiaud R., Castaño J. y Poveda Mery.

Estándares relativos a la construcción de significado de las operaciones aditivas de los naturales (modelación de situaciones problemáticas)[2]

Sólo en el grado primero existen unos estándares que hacen referencia a la construcción de significado de la adición y sustracción. La adición como la acción de reunir y la sustracción como la acción de quitar. No existe, en ningún otro grado y en ningún otro campo estándares que exijan explícitamente ampliar y complejizar estos significados tan elementales, excepto porque en el campo de procesos (resolución de problemas) se hace referencia a que se espera que el niño resuelva problema que impliquen las operaciones de adición y sustracción. Si bien las acciones de reunir y separar son los puntos de partida para la construcción de un pensamiento aditivo, es un grave error reducir estas operaciones a significados tan elementales[3].

En primero aparece un estándar que hace referencia a coordinar la adición y la sustracción "Modela, discute, y resuelve problemas que involucran la adición y sustracción, tanto por separado como simultáneamente". Es

[2]Agrupados en el sistema numérico se encuentran los siguientes estándares que exigen de una ampliación del significado de las operaciones de adición y sustracción. En primero: a) Comprende el significado de la adición, reuniendo dos conjuntos de objetos, b) Comprende el significado de la sustracción, retirando uno o varios objetos de un conjunto de ellos, c) Comprende la relación que hay entre la adición y la sustracción, d) Modela, discute y resuelve problemas que involucran la adición y la sustracción, tanto por separado como simultáneamente.

[3]Error que es muy frecuente en la enseñanza primaria y que precisamente se refleja en la poca capacidad de los niños de poder modelar con la suma y la sustracción problemas que se salen un poco de los estereotipos escolares.

necesario distinguir problemas aditivos compuestos que suponen la combinación de las dos operaciones de suma y resta, que exigen una coordinación muy elemental de estas dos operaciones, cuando se hace de forma sucesiva, de aquellos problemas que exigen una coordinación más estrecha, como es el caso por ejemplo de los problemas aditivos compuestos inversos. Las coordinaciones que exigen este tipo de problemas son muy difíciles para los niños, por lo que resulta prematuro hacerlo en primero. Los estudios que se han realizados sobre el desarrollo del pensamiento aditivo muestran que este proceso es lento y se prolonga a lo largo de la primaria, que en especial los problemas aditivos compuestos inversos son muy complejos para los niños, que en el mejor de los casos, empiezan a ser comprendidos, en su versiones más sencillas, en grado tercero. Se recomienda consultar trabajos de Lerner, Gadino y Hojas Pedagógicas Rev. Alegría de Enseñar.

Estándares relativos a la construcción de significado de las operaciones Multiplicativas (modelación de situaciones problemáticas)[4]

La propuesta de estándares propone iniciar la multiplicación y la división en segundo, la primera, como suma abreviada y la segunda como repartición. Aunque en este caso se guarda cierta diferencia con lo aditivo, ya que aparecen dos estándares en tercero y cuarto (uno en cada grado) que permite suponer que los autores de la propuesta pensaron en la necesidad de ampliar los significados elementales de la multiplicación y división dados en grado segundo, sin embargo la propuesta en esta aspecto particular se queda corta; en tercero, se dice "reconoce distintos usos de la multiplicación" y en cuarto plantea "comprende diferentes significados de la multiplicación y la división". Nos queda la pregunta: ¿cuando se habla de distintos usos de la multiplicación, se está pensando en significados distintos al de las agrupaciones y en el caso de la división, al de la repartición?

Este caso ilustra la falta de simetría de la que adolece la formulación de los estándares: mientras que a propósito de lo aditivo en primero hay un estándar que explicita la resolución de problemas aditivos compuestos (problemas que requieren combinar adición y sustracción), a propósito de lo multiplicativo no aparece un estándar semejante en los cinco grados de la primaria. Consultar Vergnaud, Dickson y Hojas Pedagógicas (revista Alegría de Enseñar)

[4] Los estándares relativos a este aspecto son: En segundo • Modela o describe grupos o conjuntos con el mismo número de elementos y reconoce la multiplicación como la operación adecuada para encontrar el número total de elementos en todos los grupos o conjuntos • Reconoce la adición de sumandos iguales como una multiplicación y la representa con los símbolos apropiados. Identifica la división como la operación aritmética necesaria para repartir en partes iguales un número dado de objetos. En tercero: • Reconoce distintos usos de la multiplicación (para encontrar el área de un rectángulo, por ejemplo). En Cuarto: • Comprende diferentes significados de la multiplicación y división de números naturales y la relación que hay entre estas operaciones.

Estándares relativos a los algoritmos de las operaciones aditivas y multiplicativas en los naturales[5]

En primero se enuncia que los niños deben aprender a sumar y restar en el rango del 0-999. En segundo se habla de dividir números menores de 100 por una cifra, no aparece contemplado el algoritmo de la multiplicación. Se supone agotado el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones de aritmética básica de los naturales en cuarto. En relación con lo multiplicativo en cuarto aparece el conocimiento de las tablas de multiplicar y sin embargo en tercero se hacen cálculos de multiplicaciones. Algo que caracteriza la propuesta en este punto es la ausencia de promover en los niños lo que se ha llamado procedimientos "espontáneos" de hacer cuentas, antes de acceder a los algoritmos universales, elemento fundamental para la compresión del sentido numérico –en el que insiste el documento de lineamientos curriculares del MEN– y el desarrollo de la capacidad de hacer matemática.

Estándares relativos al estudio de la estructura de los conjuntos numéricos[6]

Se evidencia la ausencia de una intención de estudiar la estructura de los sistemas numéricos, en este sentido sólo hay una aproximación en tercero. No se encuentran estándares orientados a estudiar la estructura de los enteros, racionales y reales con las operaciones aditivas y multiplicativas.

En los grados de secundaria sólo se hace referencia al estudio de algunas propiedades para el caso de la potenciación, sin que se alcance a tener una visión estructural. Así mismo como no se estudia la estructura de los conjuntos numéricos con relación a las operaciones, se descuida el estudio de la estructura de orden de estos conjuntos numéricos. El orden sólo aparece vinculado al tema de las inecuaciones.

Mientras no se estudian las propiedades de los sistemas numéricos de los naturales, enteros, racionales, reales y complejos, se propone hacerlo con los irracionales, precisamente en un conjunto numérico que no tiene una de las estructuras matemática básica, por no ser cerrado con relación a la adición y multiplicación. Revisar a Vasco.

---

[5] Referidos a este campo específico se identifican los siguientes estándares. En Primero: Lleva a cabo la operación de la adición (con o sin reagrupación) de dos o más números de hasta tres dígitos, b) Lleva a cabo la operación de la sustracción (con o sin desagrupación), utilizando números de hasta tres dígitos c) En Segundo: a) Lleva a cabo la adición o la sustracción (con o sin agrupación), utilizando, b) números de hasta cinco (o más) dígitos, c) Compone y descompone números por medio de la adición, d) Divide números no mayores de 100 entre 2, 3, 4,... hasta 9 partes e indica el resultado y el residuo. En tercero: Hace cómputos con números naturales y aplica las propiedades...En Cuarto: a) Conoce las tablas de multiplicar (12x12) y lleva a cabo cálculos mentales sencillos, b) Suma, resta, multiplica y divide número enteros (naturales) con fluidez (con o sin calculadora. En quinto: a) Tiene habilidad para el cálculo mental, b) Utiliza calculadora en forma creativa.

[6] Con relación a este campo en tercero: • Hace cómputos con números naturales y aplica las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para las operaciones básicas y en octavo: Reconoce las propiedades de los números irracionales.

Estándares relativos a la estimación

No se encuentra en el sistema de medidas una intención clara de trabajar la estimación como un eje que atraviese el currículo. Esto que es un consenso entre los educadores de matemática se diluye en la propuesta En tercero y cuarto se hace referencia a la estimación de los resultados de las operaciones, pero esto no aparece en ningún otro grado.

Estándares relativos a los números fraccionarios y su representación decimal[7]

En este campo los estándares usan la expresión "fracción" y no "fraccionario", lo que muestra el enfoque que se da al estudio de estos números. Es sólo un sistema de signos que tienen una sintaxis, que basta ser dominada para dominar el concepto.

Se propone iniciar el estudio en los fraccionarios en grado segundo y se extiende hasta sexto. En segundo se propone construir un significado como partidor y no existe ningún otro estándar en los siguientes grados, que tenga la intención de ampliar su significado. El concepto de equivalencia se reduce a procedimientos para obtener fraccionarios equivalentes: "reconoce y genera formas equivalentes de una fracción". Este tópico desconoce, como ningún otro de lo numérico, los avances que en el país se han hecho a partir del documento de Vasco "El archipiélago de los fraccionarios".

En relación con los números decimales, no es clara la conexión con los fraccionarios. El estudio de las representaciones decimales de los números racionales se inician en cuarto y se agotan en sexto. Cuando se revisan los sistemas de medida no hay estándares que explícitamente involucren representaciones decimales del valor de la medida de una magnitud.

Estándares ligados al sistema numérico pertenecientes a otros sistemas

En el grado noveno se encuentran estándares relacionados con el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas, en décimo con las permutaciones y combinaciones y en undécimo con las sucesiones y series que nos parece hay más razones para incluirlos en el sistema variacional y el sistema de datos que al numérico. Seguramente las progresiones, las sucesiones y las series no se entienden como parte del pensamiento

[7] Con relación a este campo se encuentran los siguientes estándares. En Segundo: Reconoce una fracción como parte de un todo e identifica sus partes (numerador y denominador). En Tercero: Identifica fracciones equivalentes. Compara y ordena fracciones comunes. Suma y resta fracciones con el mismo denominador. Comprende y halla el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de un conjunto de números naturales. En Cuarto: Reconoce un decimal y puede expresarlo en forma expandida (ejemplo: 2, 31 = 2 + 3/10 + 1/100). Escribe números como porcentajes, fracciones o decimales y realiza la conversión de unos a otros. Reconoce y genera formas equivalentes de una fracción. Reconoce fracciones propias, impropias y mixtas, y hace conversiones entre ellas. Compara fracciones. Suma y resta fracciones. compara decimales. Suma y resta decimales. En quinto: comprende la recta numérica y puede ubicar en ella números enteros, fracciones, decimales, negativos y porcentajes. Multiplica y divide fracciones. Multiplica y divide decimales. En sexto: Distingue entre números racionales e irracionales y da ejemplos de ambos.

variacional precisamente por las deficiencias que muestra el tratamiento de este sistema.

Bibliografía

ACEVEDO M. y HUERTAS C (1999). *Una Mirada a la Aritmética de la Escuela*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

BRISSIAUD R (1989). *El Aprendizaje del Cálculo. Más allá de Piaget y de la Teoría de Conjuntos*. Madrid: Aprendizaje Visor.

BONILLA M. Y OTROS. (1999). *La Enseñanza de la Matemática Escolar y la Formación de Profesores*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

CASTAÑO J.(1991). *Construcción del Conocimiento Matemático del Niño de Grado Cero*. MEN.

CASTAÑO J, NEGRET J.C, ROBLEDO A.M. (1990). *Construcción de la Estructura Aditiva Numérica en el Niño*. Universidad Javeriana.

CASTAÑO J., NEGRET J.C., ROBLEDO A.M. (1991) y otros. *Un Marco para la Compresión del Sistema Decimal de Numeración en el Niño*. Bogotá: Universidad Javeriana.

CASTAÑO J. (1997-1998). *Hojas Pedagógicas*. Serie lo Numérico. MEN-FRB. Bogotá.

CASTAÑO J. *Serie Descubro la Matemática*. *La Matemática con Fotín* (grado transición), *La Matemática con Robotín* (grado primero), *La Matemática con Dadina* (grado segundo) y *La Matemática con Pitagorín* (grado tercero)

D AMORE B. Problemas (1997). *Pedagogía y Psicología de la Matemática en la Actividad de Resolución de Problemas*. Madrid: Síntesis.

DICKSON L y otros.(1991) *El Aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Labor.

GADINO ALFREDO.(1996). *Las Operaciones Aritméticas, los Niños y la Escuela*. Río de la Plata: Magisterio.

KAMII C (1984) *El Número en la Educación PREESCOLAR*.

_______ (1985) *El niño Reinventa la aritmética*. Madrid: Aprendizaje Visor.

_______ (1994) *Reinventando la aritmética III*. Madrid: Aprendizaje Visor.

MAZA C. (1991) *Multiplicar y Dividir*. Madrid: Aprendizaje Visor.

________ (1995) *Aritmética y representación*. Paidós.

MEN (1998): *Lineamientos Curriculares*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

LERNER D. (1995) *La Matemática en la Escuela*. Buenos Aires: Aique.

POVEDA MERY (2001) *Una Aritmética a la Medida de los Niños*. Bogotá: IDEP.

SEGOVIA ISIDORO (1989) *Estimación en Cálculo y Medida*. Editorial Síntesis.

VASCO C. (1994) *Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas*. Serie Pedagogía y Currículo. MEN.

VERGNAUD G (1985) *El niño, las Matemáticas y la Realidad*. México: Trillas.

COMPONENTE

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

Una revisión a la propuesta de estándares curriculares

3

CAPÍTULO tres

Pedro Javier Rojas Garzón
Cecilia Barón Páez
Rodolfo Vergel Causado
edumat@udstrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

En este documento se realiza un análisis crítico de la propuesta de Estándares Curriculares formulada por el Ministerio de Educación Nacional para el área de matemáticas en relación con la componente Pensamiento métrico y sistemas de medidas. El análisis está orientado a evidenciar, por una parte, la ausencia de vinculación entre esta propuesta y resultados de investigación reconocidos por la comunidad de educadores matemáticos y, por otra, el desconocimiento de orientaciones planteadas explícitamente en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, y su posible incidencia en el afianzamiento de prácticas de enseñanza descontextualizadas.

Vinculación con estudios desarrollados en Educación Matemática

En las últimas décadas se ha difundido una gran variedad de resultados de investigación en el campo de la Educación Matemática, relativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, en los que se reconoce la necesidad de abordar formas alternativas para su tratamiento en el aula y de avanzar en un diseño curricular en matemáticas que privilegie al currículo como proyecto de investigación en oposición a la idea de currículo prescriptivo.

En estudios como el TIMSS[1], se pone de manifiesto la diferencia entre el currículo propuesto (declarado), el desarrollado (tal y como lo interpretan los profesores y lo hacen accesible a sus alumnos) y el efectivamente logrado (referido al contenido en matemáticas que han aprendido los estudiantes y sus actitudes hacia este campo del saber) y se concluye que si bien el currículo propuesto a nivel nacional coincide en gran medida con los propuestos a nivel internacional, el currículo efectivamente logrado difiere significativamente de aquellos. En particular, se concluye que "Los puntajes máximos nacionales son inferiores a los puntajes promedio internacional" y que, por ejemplo, los mejores puntajes nacionales son equiparables con los más bajos de los países de alto rendimiento (TIMSS, 1997, p. 34).

Ahora bien, respecto a la construcción de conceptos asociados con la medida, estudios de investigación, basados en los trabajos de Piaget[2],

[1] Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, realizado entre 1991 y 1996 con estudiantes de grados 7° y 8°, de más de cuarenta países, incluido Colombia.
[2] Ver, por ejemplo, Chamorro y Belmonte, 1991; Dickson y Otros, 1991; Vasco, 1994.

reconocen un desarrollo evolutivo de la idea de medida que comprende: (1) Consideración y percepción de una magnitud, como propiedad de una colección de objetos, (2) Conservación de una magnitud, reconocimiento que frente a determinados cambios de los objetos la magnitud puede conservarse, (3) Ordenación respecto a una magnitud dada, incluyendo inicialmente relaciones de orden para llegar posteriormente a la equivalencia y (4) Relación entre la magnitud y el número, que incluye la construcción de una unidad de medida, así como procesos de iteración y aproximación.

Los estándares propuestos en relación con el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, al parecer, están orientados más por las prácticas usuales de enseñanza que por resultados de investigación. En tal sentido, por ejemplo, no se hace explícita la necesidad de que los niños: perciban y discriminen atributos medibles, desarrollen operaciones de conservación y transitividad, hagan uso de patrones y unidades informales, desarrollen una amplia experiencia que les facilite la constitución de unidades de medida específicas para cada una de las diferentes magnitudes y avancen gradualmente hacia la comprensión de magnitudes de mayor complejidad. A continuación se presentan elementos que ilustran estas aseveraciones.

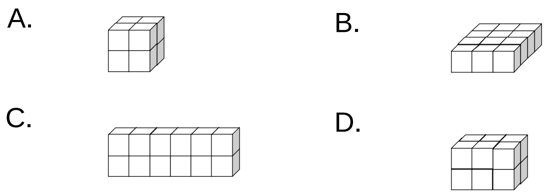
En los estándares formulados para los primeros grados de escolaridad no se reconoce la necesidad de construir el concepto de magnitud como abstracción de magnitudes concretas distintas a la medida de conteo, por ejemplo, medidas de caracter continuo como las usadas para expresar relaciones con: longitud, superficie, volumen, capacidad o masa. Los problemas generados por esta ausencia se manifiestan en confusiones reflejadas en respuestas erróneas, obtenidas en el trabajo con actividades que requieren discriminar longitud y área[3], tiempo y velocidad[4] o longitud y volumen, entre otras. Por ejemplo, en el estudio TIMSS (p. 113), se presenta la siguiente tabla comparativa de respuestas a la pregunta formulada en el área temática Medición, en la cual se observa dificultades para percibir la magnitud volumen, más aún, la decisión sobre cuál de los cuerpos tiene diferente volumen se toma considerando la magnitud longitud, como se deduce de la preferencia mayoritaria por el distractor (c):

Adicionalmente, en los estándares formulados para los primeros grados de escolaridad no se considera la importancia de desarrollar las operaciones relacionadas con la conservación, como las compensaciones y las operaciones relacionadas con la transitividad, como las comparaciones con objetos intermedios para lograr una ordenación lineal de varios objetos según cierta magnitud. De igual manera, no se tiene en cuenta que resulta

[3] Esta dificultad se manifiesta, por ejemplo, cuando al presentar a los niños un cuadrado y un rectángulo (no cuadrado) de igual área, señalan a este último como el de mayor área por el hecho de percibir uno de sus lados de mayor longitud que los lados del cuadrado.

[4] Esta dificultad de discriminación entre magnitudes se evidencia incluso en estudiantes de grados superiores (9° y 10°), cuando se enfrentan con situaciones como la siguiente: Dos móviles parten simultáneamente de puntos opuestos, con velocidades distintas, cada uno en dirección al otro. En el instante en que se encuentran, ¿qué distancia ha recorrido cada uno de ellos?, respecto a la cual, en el proceso de buscar un modelo matemático para representarla, existe la tendencia a considerar que en el momento del encuentro el móvil que se desplaza a mayor velocidad emplea menor tiempo.

C1. Todos los bloques pequeños son de igual tamaño. ¿Cuál grupo



% Respuestas	**A**	B	C	D
Colombia 7°	**25.4**	19.8	37.7	6.2
Colombia 8°	**28.0**	22.0	36.5	5.8
Internacional 7°	**54.0**	17.3	17.9	6.3
Internacional 8°	**59.1**	15.5	16.4	5.7

ineludible el uso de unidades informales, propias del contexto, a partir de experiencias de medición directa con objetos concretos, ni que las unidades estandarizadas, tanto en el aula como en la historia de la humanidad, surgen como requerimiento para posibilitar la comunicación sobre situaciones que involucran la medida. Así, debe preguntarse acerca de la pertinencia de exigir a un niño de segundo grado (7 u 8 años) que reconozca unidades tan pequeñas como el gramo, más aún cuando su experiencia no está relacionada con mediciones en el laboratorio, sino con las libras o con los kilogramos o "kilos" y con sus mitades o cuartas partes, que en su contexto familiar son las medidas utilizadas para referirse al peso de los alimentos.

Por otra parte, en la propuesta de estándares no se hace referencia a la necesidad de desarrollar una amplia gama de experiencias que posibilite a los niños la constitución de unidades de medida específicas, para cada una de las magnitudes y su medición directa a partir de tales unidades, como condición indispensable para reconocer patrones generales en las relaciones entre las dimensiones lineales y la medida del área o el volumen. Por tanto, existe cierta incoherencia al plantear para grado cuarto estándares como:

> *"Deduce, comprende y utiliza fórmulas para encontrar el área de rectángulos y de triángulos rectángulos" y "Comprende el concepto de área de superficie y desarrolla estrategias para hallar áreas de superficies de sólidos rectangulares[5]",*

mientras que para el grado siguiente (quinto) se proponen estándares que deberían ser previos, por referirse a procesos de medición sin cuyo dominio carecería de sentido involucrar al estudiante en generalizaciones acerca del área y el volumen:

> *"Maneja con fluidez las unidades métricas cuadradas…" y "Comprende el concepto de volumen y maneja las unidades métricas cúbicas …".*

[5] Esta expresión no es utilizada en nuestro medio y quizás corresponde a una traducción poco apropiada de la expresión inglesa "rectangular solids", que posiblemente hace referencia a prismas rectangulares.

De manera similar, en la formulación de los estándares no se reconoce la necesidad de un avance gradual, desde el trabajo con magnitudes que pueden ser comprendidas hacia el inicio de la escolaridad (longitud, capacidad y masa), a otras de mayor complejidad (volumen y amplitud angular) cuya comprensión solo podría alcanzarse en secundaria[6]. La aceptación de este hecho exige discriminar qué aspectos, en relación con una determinada magnitud, deberían ser abordados en el trabajo con niños de un cierto grado y no señalar los mismos aspectos para magnitudes disímiles, como se establece en el siguiente estándar para grado tercero[7]:

> *"Comprende atributos como longitud, área, peso, temperatura, ángulo, y utiliza la unidad apropiada para medir cada uno de ellos".*

Además, dado que los procesos de medida tienen una impor-tancia capital en la construcción de los conjuntos numéricos (particularmente, de los racionales e irracionales), resulta extraño que, en grado sexto, respecto del componente pensamiento numérico, se exija al estudiante distinguir y dar ejemplos de números racionales e irracionales, mientras que en la componente pensamiento métrico no se haga referencia a procesos de medición que hacen necesario el surgimiento y uso de dominios numéricos diferentes al de los naturales.

Coherencia con propuestas nacionales e internacionales

Si bien en la propuesta de Estándares Curriculares para el área de matemáticas se retoma la estructura curricular planteada en los Lineamientos Curriculares[8], es considerable el distanciamiento respecto de las orientaciones específicas sobre los conocimientos básicos –particularmente el Pensamiento Métrico y los Sistemas de Medidas–, así como los procesos generales allí desarrolladas –Razonamiento, Resolución y planteamiento de problemas, Comunicación, Modelación y Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos–.

En el documento de Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas, la sección Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas comienza con un cuestionamiento a las prácticas tradicionales en la enseñanza de la medición en nuestro país, al plantear que:

---

[6] Según se concluye de algunas investigaciones (ver, por ejemplo, Chamorro, 1991), la comprensión de las magnitudes longitud, capacidad y masa se ubicaría entre los seis y los ocho años, mientras que superficie y tiempo hacia los siete u ocho y volumen y amplitud angular hasta los diez o doce años

[7] Por ejemplo, en tanto en los primeros años de escolaridad (grado 1° ó 2°) el estudiante puede reconocer la longitud y capacidad como atributos de un cuerpo y posteriormente, en relación con éstos, utilizar unidades de medida apropiadas (hacia grado 3°), en ese periodo es posible que no conciba unidades de medida para el volumen o la amplitud angular, si aún no los reconoce como atributos.

[8] Propuestos en 1998 por el MEN, como producto de un proceso de reflexión y análisis, que contó con la participación de diversas instituciones educativas e investigadores de la comunidad de educadores matemáticos del país.

> *"El descuido de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuidan por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reducen el proceso de medir a la mera asignación numérica" (1998, p. 62).*

Ese documento, además de presentar una amplia fundamentación teórica, en aspectos como los mencionados al comienzo de este escrito, desarrolla un análisis detallado sobre los procesos y acciones que desde el trabajo de aula contribuirían al aprendizaje de conceptos y procedimientos asociados con la medida. El desconocimiento de estos aspectos en la propuesta de Estándares Curriculares se pone de manifiesto, por ejemplo, al no plantear exigencias diferenciadas para cada uno de los grados de escolaridad, asociadas tanto con los niveles de complejidad en la comprensión de las distintas magnitudes, como con la complejidad en el proceso de construcción de cada una de ellas.

En la siguiente tabla se presenta un contraste entre procesos y conceptos, que en los Lineamientos Curriculares son considerados fundamentales para el aprendizaje de la medida, y la referencia que desde la propuesta de Estándares Curriculares se hace de cada uno de ellos, en los diferentes grados, acerca de las magnitudes longitud, área, peso (¿masa?), volumen, temperatura, ángulo (¿amplitud angular?), capacidad y tiempo:

Procesos y conceptos	Propuesta para cada grado desde los Estándares											
	P	*1º*	*2º*	*3º*	*4º*	*5º*	*6º*	*7º*	*8º*	*9º*	*10º*	*11º*
Construcción de los conceptos de cada magnitud	Tamaño P, t	L,A V,P,T		L.,A V,P T,a			C					
Comprensión de los procesos de conservación de magnitudes												
Estimación de magnitudes y proceso de capturar lo continuo con lo discreto			L	L,A V,P T,t,a								
Apreciación del rango de las magnitudes												
Selección de unidades de medida, patrones e instrumentos		t	P	L,A V,P T,a		A V P	C					
Diferencia entre unidad y patrón de medición												
Asignación numérica				L,A V,T,a	A	A		A V	A L	A V		
Papel del trasfondo social de la medición												

Convenciones: A: área, P: peso, V: volumen, L: longitud, T: temperatura, a: amplitud angular, C: capacidad, t: tiempo
Tabla 1. Procesos y conceptos en el aprendizaje de la medida: Contraste entre Lineamientos y Estándares

Como puede observarse, algunos de los aspectos que en los Lineamientos son tomados como prioritarios, en la propuesta de Estándares no son considerados, o no se hacen explícitos. Por ejemplo, para los diferentes grados de escolaridad no se plantean estándares referidos a los procesos de conservación ni de apreciación del rango de magnitudes; tampoco a la diferenciación entre unidad y patrón de medida; además, no se reconoce el papel del trasfondo social de la medición[9]. También se observa que en los grados de básica secundaria, los estándares se centran casi exclusivamente en la deducción y aplicación de fórmulas, y para la educación media ni siquiera se formulan estándares relativos a la medida.

Por otra parte, la propuesta colombiana de Estándares Curriculares retoma del documento del NCTM[10], de los Estados Unidos, prioritariamente formulaciones relacionadas con la asignación numérica a las magnitudes –aunque algunas de ellas parecen ser traducciones inapropiadas–, sin embargo omite las relacionadas con aspectos como: constitución de la unidad de medida, reconocimiento de unidades y sistemas informales, procesos de aproximación y estimación, y uso de instrumentos de medida.

Incidencia en la comunidad de profesores de matemáticas

En Colombia, las prácticas usuales de enseñanza enfatizan en la memorización de unidades, sus equivalencias y la conversión interna dentro un sistema de medidas; así como en la aplicación de fórmulas y la realización de cálculos numéricos[11]. Existe una escasa consideración de los aspectos cualitativos requeridos para la construcción de diferentes magnitudes: Identificación de atributos medibles, comparación de objetos atendiendo a una cierta magnitud y construcción del concepto de unidad de medida. Además, desde lo cuantitativo, no se adjudica la suficiente importancia a actividades de medición directa y a uso de instrumentos de medida.

Es conveniente analizar la vinculación que puedan tener estos énfasis en la enseñanza con el desempeño de los estudiantes colombianos en los procesos de medición. Por ejemplo, estudios como el TIMSS (1997), ponen de manifiesto su bajo rendimiento en relación con estos procesos de medición y los conceptos asociados. Si bien en este estudio se reconoce que la medición es de las temáticas que presenta mayor dificultad a nivel internacional, en el caso colombiano dicha dificultad es significativamente mayor, como se evidencia, por ejemplo, en la dificultad para la escogencia de unidades de medida adecuadas o para la realización de estimaciones y aproximaciones; así como también, para diferenciar entre área y perímetro.

[9] La escogencia de las unidades, el tipo de instrumentos y la importancia de la precisión en la medición están supeditadas a las situaciones frente a las cuales debe actuar el sujeto; por ejemplo, mientras que determinar los metros requeridos para embaldosar un salón no requiere un alto grado de precisión en la medición, dicha precisión resulta vital cuando se trata de la preparación de medicamentos.

[10] El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), ha desarrollado en las últimas décadas dos propuestas de Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, las cuales han sido tomadas como referente en varios países, la primera de ellas publicada en 1989 y la segunda sólo hasta el 2000.

La propuesta colombiana de Estándares, en lugar de poner en conflicto y desestabilizar las ineficaces prácticas tradicionales de enseñanza, las reafirma, pues al no hacer explícitos referentes teóricos en relación con enseñanza y aprendizaje acerca de la medida, podría interpretarse como un listado de contenidos en los cuales se mantiene el privilegio de los aspectos numéricos sobre los cualitativos y se acentúa la tendencia a presentar aisladamente cada uno de los distintos dominios conceptuales en las matemáticas que se trabajan en la escuela.

Algunas observaciones finales

En tanto se espera que la propuesta de estándares contribuya a orientar el trabajo de los docentes, en relación con los cambios propuestos desde los Lineamientos Curriculares, es necesario que a aquellos se les aporte elementos adicionales para interpretar dichos cambios; incluso, no es suficiente con la presentación de formulaciones acordes con resultados de investigación sobre el aprendizaje por parte de los estudiantes de los conceptos y procedimientos asociados con los conocimientos básicos, se requiere además de explicaciones anexas sobre el sentido de cada grupo de estándares acompañadas de actividades para el trabajo de aula, pues debe reconocerse que el conocimiento sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos no ha sido tematizado, con la profundidad necesaria, en los programas de formación de docentes de matemáticas.

De igual manera, es pertinente que los estándares propuestos para cada grado correspondan a categorías coherentes a lo largo de los grados en cuanto a los aspectos seleccionados para cada grado; por ejemplo, para el grado primero uno de los estándares involucra cinco magnitudes, mientras que cada uno de los tres restantes abarca sólo un aspecto específico acerca del tiempo. Más aún, existen formulaciones que corresponderían más a una tarea puntual que a un estándar, como el planteado para grado primero[12]:

> *"Conoce y nombra los días de la semana y los meses del año".*

Resulta prioritario que, desde el Ministerio de Educación Nacional, se explicite los referentes teóricos que fundamentaron la propuesta de estándares, lo cual posibilitaría una mejor comprensión de su sentido y de su relación con las orientaciones derivadas de la Ley General de Educación; particularmente, con los Lineamientos Curriculares. En particular es conveniente discutir la pertinencia de formular estándares grado por grado,

---

[11] Esta afirmación es producto de evaluaciones realizadas al interior de programas de formación continuada de docentes (PFPD y posgrados), desarrollados por diversas instituciones universitarias, y ha sido discutida y aceptada en varios encuentros de carácter regional y nacional.

[12] Los días de la semana y los meses del año no son unidades de ninguna magnitud; aunque el día y el mes sí son unidades de duración.

en lugar de plantearlos por grupos de grados[13], pues se estaría desconociendo que es imposible homogenizar los tiempos requeridos por los escolares para el desarrollo de procesos, y además se limitaría la autonomía de las instituciones para la construcción e implementación de su proyecto educativo (PEI).

Referencias bibliográficas

CHAMORRO, C. y BELMONTE, J. (1991). *El problema de la medida. Colección Matemáticas*: Cultura y Aprendizaje, N° 11. Madrid: Síntesis.

DICKSON, L. y Otros (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Barcelona: Labor.

MEN (1997). *Análisis y resultado de las pruebas de matemáticas* –TIMSS-Colombia. Serie: Publicaciones para maestros. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

_____(1998). *MATEMÁTICAS: Lineamientos Curriculares*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

_____(2002). *Estándares para la excelencia en educación*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

VASCO, C. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*. Vol. II. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Agradecimientos

Los autores agradecen al
Dr. Carlos Eduardo Vasco
por los comentarios y sugerencias ofrecidas.

[13]Como se hizo en los Indicadores de Logro (Resolución 2343 de 1996) y en los Lineamientos Curriculares (1998) del MEN.

COMPONENTE

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

Análisis de la propuesta de estándares

CAPÍTULO cuatro

Silvia Bonilla
Universidad Externado de Colombia
Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional
Ana Celia Castiblanco Paiba
Ministerio de Educación Nacional
Yuly Marcela Vanegas
Universidad Distrital

Aspectos generales

La construcción de estándares para el desarrollo del conocimiento de los sistemas geométricos y del pensamiento espacial en la matemática escolar tendría que partir de una descripción por lo menos en forma sucinta de dicho conocimiento, tanto en su caracterización como una herramienta necesaria para describir, comprender e interactuar con el espacio circundante, como en su identificación como disciplina científica, que descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad. Mammana y Villani (1998)[1] han identificado las siguientes dimensiones propias del conocimiento geométrico. La geometría puede verse como:

- una ciencia del espacio y la forma. Desde sus raíces como herramienta para describir y medir figuras, se han ido constituyendo teorías, ideas y métodos mediante los cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados del mundo físico o de fenómenos que acontecen el el mundo real.
- un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra o el cálculo, o de otras ciencias naturales y sociales.
- un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación.
- una vía para desarrollar pensamiento y comprensión, y, en un nivel avanzado, como una teoría formal.
- un ejemplo paradigmático para enseñar razonamiento deductivo.
- una herramienta en aplicaciones, tanto en forma tradicional, como de manera innovativa.

Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, la geometría cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas, tal como se asume en la propuesta de "estándares" del Ministerio de Educación. En dicho documento el conocimiento geométrico parece estar referido a la adquisición de un cúmulo de información desordenada, aislada y caprichosa tanto en contenido como en secuencia y por lo tanto poco productiva en términos de la construcción de un conocimiento geométrico sistemático y profundo que lleve al desarrollo de la competencia geométrica que se enuncia en la introducción del documento.

[1] Mammana C; VILLANI V. *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Kluwer Academic Publishers. p. 340 (1998).

Para los autores del documento propuesto, el desarrollo del pensamiento espacial y el conocimiento de los sistemas geométricos consiste en una acumulación de acciones de reconocimiento de formas geométricas y su descripción en términos de sus "partes" y sus "propiedades". Por eso el mayor porcentaje de "estándares" está referido a reconocer y describir formas bi y tri dimensionales. El privilegiar la acción cognitiva de reconocimiento, pone en evidencia un desconocimiento de los avances teóricos en el campo del razonamiento espacial, investigaciones que han identificado el reconocimiento como un primer nivel de razonamiento geométrico necesario para comenzar el proceso de matematización pero insuficiente para lograr su pleno desarrollo. Por ejemplo, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele identifica una evolución en el razonamiento en geometría a través de los niveles de reconocimiento, análisis, clasificación, deducción y rigor y describe las características de dichos procesos de pensamiento frente a tareas de construcción de definiciones, producción de argumentos o demostraciones.[2]

Además del término reconocer, los "estándares" mencionan en forma insistente la acción de clasificar formas geométricas en término de ubicar las figuras geométricas en clases según sus "partes", con el objeto de diferenciar unas de otras. Se asimila el proceso de clasificación con una actividad de organización de figuras prototípicas y no como una actividad matemática. De esta manera se trivializa el proceso de clasificación y se ignora que éste implica una discriminación de características relevantes e irrelevantes de un objeto geométrico, clasificación que permite obtener información nueva sobre las figuras y sobre la que descansa la inferencia geométrica. Solo mediante un auténtico proceso matemático de clasificación es posible dar sentido a las definiciones de conceptos y relaciones geométricas pues se toma conciencia de la información que subyace a cada uno de los términos que se usan en ellas.[3]

De la misma manera que sucede con los verbos reconocer y clasificar no hay un planteamiento explícito de lo que se está entendiendo por comprender o entender. Por tal razón, estándares como "entiende los conceptos de congruencia y semejanza" (grado 4º) no aclaran qué es lo que

---

[2] Además de caracterizar el razonamiento, describiendo los procesos de pensamiento señalados, el modelo de Van Hiele afirma que el progreso a través de los diversos niveles depende de la instrucción recibida, más que de la edad o la madurez de una persona. Por lo tanto, el método, la organización de la enseñanza, las temáticas que se escogen y los materiales que se emplean deben ser aspectos de preocupación permanente por parte de los educadores. Además del modelo de razonamiento los esposos Van Hiele sugieren una secuencia de enseñanza en 5 fases secuenciadas: información, orientación dirigida, explicitación del lenguaje, orientación libre e integración. Para mayor información, consúltese:
- *GONZALEZ S.* Una introducción al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. *Memorias del VII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. UPN, junio 19 – 21, pp. 97 – 119. 1996*
- *CAMARGO L; SAMPER C.* Desarrollo del Razonamiento a través de la Geometría Euclidiana. *Revista TEA de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional. No. 5, pp 59 – 71. Bogotá, 1995.*
- *GUTIERREZ A; JAIME A.* Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática. *Una Empresa Docente. Universidad de los andes. Bogotá, 1998.*
- *CROLEY M.* Thee Van Hiele Model of the Development of Geometry Thought. *En Learning and Teaching Geometry, K – 12. Yearbook 1987. NCTN, Reston, Virginia.*

realmente se espera de los alumnos sobre estas relaciones, máxime cuando no se espera de las figuras geométricas sino un reconocimiento de las formas típicas de representación, el reconocimiento de las clases de figuras y su notación. Es de suponer que dichos verbos se usen como sinónimos de reconocer, pues en cuarto de primaria no podría esperarse de los alumnos más que una aproximación intuitiva a las nociones de semejanza y congruencia. El verbo entender en matemáticas es mucho más que eso. Implica por un lado, un acercamiento a un nivel deductivo de razonamiento cuando los objetos geométricos se integran a sistemas axiomáticos y su conceptualización se basa en el papel que ocupan en cadenas deductivas, y, por otro lado, el uso de dichos conceptos como herramientas en la solución de problemas, o en la modelación de fenómenos de diversos campos.[4]

La falta de claridad sobre el conocimiento geométrico y los procesos de pensamiento sobre los que este descansa, conduce a los autores a ignorar que el aprendizaje de la geometría resulta de una compleja red de interacciones entre procesos de visualización y procesos de elaboración de enunciados acerca de las propiedades de las relaciones geométricas de los objetos y sus elementos constitutivos y que los acercamientos espontáneos, producto de hacer uso de dichas funciones cognitivas tal y como se usan en el conocimiento informal (no matemático), produce un acercamiento trivial al conocimiento geométrico, inútil e improductivo tanto para la resolución de problemas y la modelación, como para el desarrollo del razonamiento deductivo. En ninguno de los estándares se evidencia, se lee o se infiere, la importancia de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento geométrico y cómo dicho conocimiento posibilita generar herramientas para solucionar diversas situaciones, es decir, representar situaciones problema con modelos geométricos, lo cual posibilitaría construir una visión de la matemática como una actividad humana, que nos permite configurar el mundo.

Estas afirmaciones no son gratuitas. A lo largo de los "estándares propuestos" se observan tal cantidad de errores conceptuales, incoherencias,

---

[3] Sobre la construcción de definiciones conviene estudiar la teoría de Vinner y Tall, sobre las imágenes conceptuales de los objetos geométricos. Consúltese por ejemplo:
- *GUTIERREZ A; JAIME A.* Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática. *Una Empresa Docente. Universidad de los Andes. Bogotá, 1998.*
- *HERSHKOWITZ R; VINNER S; BRUCKHEIMER M.* Activities with Teachers Based on Cognitive Research. *En Learning and Teaching Geometry, K – 12. Yearbook 1987. NCTN, Reston, Virginia.*
- ALSINA C; FORTUNY J; PEREZ R. **¿Por qué Geometría?. Propuestas Didácticas para la ESO.** ***Editorial Síntesis. Colección Educación Matemática en Secundaria, 1997.***
- *ACUÑA S Claudia (1996).*Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza de la geometría en el nivel medio superior. *En ESPINOSA F (ed), Investigaciones en Matemática Educativa; Grupo Editorial Iberoamérica; I México, p 23 - 111.*
- *VINNER, S (1989),* The avoidance of visual considerations in calculus students. *En HITT, F (1998).* Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista Educación Matemática. Vol. 10, no. 1, abril.*
- *FARRELL Margaret (1987).* Geometry for Seciondary School Teachers. *En NCTM, Yearbook; Learning and teaching geometry, k -12; Reston Virginia, p 236- 250.*

[4] Bibliografía sugerida:
- *MORRIS R.* Estudios en Educación Matemática. Enseñanza de la Geometría. *Volumen 5. UNESCO, 1986.*
- *BOLT B.* ¿Qué es la Geometría?. *Revista SUMA 29, noviembre de 1998. pp. 5 – 16.*

inconsistencias, falta de secuenciación e imprecisiones del lenguaje que no queda más que preguntarse ¿cómo se presenta esta propuesta en ese estado de elaboración? Veamos algunos aspectos que sustentan estas afirmaciones.

Análisis específico

Acerca de los procesos cognitivos que subyacen a la actividad geométrica

Visualización

Los procesos de visualización han cobrado importancia en el ámbito de la matemática escolar, no solo como consecuencia del advenimiento de programas informáticos que posibilitan la representación gráfica de muchos aspectos de la matemática, sino con los estudios acerca del funcionamiento cognitivo de la mente. El aceptar que muchas de las ideas centrales de la matemática se construyen con base en percepciones visuales y que muchos estudiantes se apoyan más en este tipo de representaciones que en los acercamientos puramente simbólicos, ha llevado a retomar en el currículo objetivos tendientes a visualizar propiedades matemáticas como un inicio fundamental al estudio de estas[5].

El potencial de los procesos de visualización estriba en la integración de procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones mentales de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. Está en estrecha relación con lo que Duval llama el proceso de visualización respecto a la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja. Durante la visualización se liga la percepción visual con características, propiedades o relaciones matemáticas. Luria reconoce que el razonamiento visual surge como resultado de una compleja actividad mental analítico –sintética que destaca rasgos esenciales de lo que se está viendo y mantiene inhibidos otros que no lo son. Esto implica combinar dos procesos: de análisis, en donde se desmembra al objeto en sus características, y de síntesis, mediante el cual se construye una nueva estructura que se compara con la percepción anterior, para clasificarla dentro de ella o asignarle otra categoría[6].

Desafortunadamente en la propuesta de estándares del MEN no se observa un trabajo secuencial en términos de la producción de diversas

[5] Bibliografía sugerida:
- *CAMARGO L; SAMPER C; LEGUIZAMON C.* Visualización y Razonamiento visual. *XVIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá, 2001.*
- *PLACENCIA I et al (1998).* Visualización y creatividad. *En Revista Educación Matemática. Vol. 10, No. 1, p. 102 – 120.*
- *HITT F (1998).* Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista Educación Matemática. Vol. 10, no. 1, abril.*

representaciones de las figuras y el estudio de las propiedades geométricas que una o otra representación explicitan. Solo hay dos estándares referidos a la visualización: en primer grado: "describe, argumenta matemáticamente acerca de figuras, formas y patrones que pueden ser vistos o visualizados" y en grado 10°:"visualizar objetos geométricos en tres dimensiones desde diferentes perspectivas..." Desde grado 2º hasta 9º no se propone ningún trabajo al respecto.

Representación

El interés en lograr que los estudiantes construyan de forma significativa el conocimiento matemático conduce a pensar, entre otras cosas, en el problema de la comprensión en matemáticas y en los elementos que la posibilitan. En este sentido algunas de las actividades del trabajo matemático escolar deben estar encaminadas a reconocer y conocer características de los diversos objetos matemáticos, a través del estudio de los diferentes sistemas de representación asociados a cada uno de éstos.

Al respecto, de la importancia del conocimiento y uso de los sistemas de representación autores como Duval (1999) y Rico (1997) plantean respectivamente:

> *"no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación".*
>
> *"Hacer matemáticas implica más que la simple manipulación de símbolos matemáticos; implica interpretar situaciones matemáticamente; implica matematizar (o sea, cuantificar, visualizar o coordinar) sistemas estructuralmente interesantes; implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas gráficos, modelos concretos u otros sistemas de representación para desarrollar descripciones matemáticas o explicaciones, o construcciones que permitan plantear predicciones útiles de tales sistemas"*

El representar un mismo objeto de maneras distintas, posibilita establecer relaciones posibles entre elementos pertenecientes a cada uno de los sistemas de representación, ya que cada uno de éstos, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta de los conceptos. El estudio de los diferentes sistemas de representación asociados a un concepto lleva a los estudiantes a construir y comunicar su conocimiento matemático escolar, y a los docentes a observar evidencias de la comprensión lograda por ellos.

---

[6] Bibliografía sugerida:
- *HERSHKOWITZ, R (1998).* About Reasoning in Geometry. *En MAMMANA C; VILLANI V (eds).* Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- *DUVAL, R (1998).* Geometry from a cognitive point of view. *En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.*
- *CLEMENS, DOUGLAS; BATTISTA, MICHAEL (1992).* Geometry and Spatial Reasoning. *En GROUWS, DOUGLAS (ed.). Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics. NCTM, New York.*
- *GRAVEMEIJER, K (1998). En* About Reasoning in Geometry. *En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.*

Infortunadamente en la propuesta de los estándares del MEN no se evidencia la posibilidad de mostrar y caracterizar los objetos geométricos de diversas formas, y la importancia de la contrastación de los mismos, en el sentido de la información y relaciones que se posibilita establecer desde cada uno de estos sistemas. La caracterización de los objetos matemáticos se limita al reconocimiento de partes de los objetos, y a la enunciación (verbalización) de las mismas. Por ejemplo, en sexto grado se plantea el siguiente estándar: identifica los poliedros, sus componentes y sus características, lo cual propone una mirada reduccionista sobre dichos objetos geométricos. No se plantea la utilización de representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales, adecuadas obviamente a las diferentes edades de los estudiantes que les posibilite mejorar su comprensión acerca de esta clase de objetos, y desarrollar destrezas para dibujarlos o construirlos, atendiendo a sus atributos y realizar proyecciones de los mismos.

Razonamiento

Los procesos de razonamiento son considerados como todas las acciones que las personas realizan, para comunicar y explicar a otros y a ellos mismos lo que ven, lo que piensan y lo que concluyen. Al reconocer a la matemática como construcción humana, en permanente cambio y evolución, se evidencia que en el proceso de su desarrollo tienen lugar diferentes tipos de razonamiento, los cuales se asemejan, de algún modo con la comunicación informal en la interacción cotidiana. Por tanto, se reconocen como funciones del razonamiento explicar, comprender y convencer, además de demostrar.[7]

Esta nueva forma de ver el razonamiento permite identificar lo que se considera razonar en geometría: poder establecer relaciones entre conceptos geométricos o información geométrica conocida, argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica, comprender los distintos elementos que conforman una teoría geométrica, dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos y comunicar, en forma convincente, los resultados de indagaciones en geometría.[8]

En la propuesta de estándares no se construyen redes conceptuales basadas en el establecimiento de asociaciones entre relaciones u operaciones geométricas parecidas. Por eso se proponen temáticas de manera aislada que se segmentan caprichosamente de grado a grado. Por ejemplo, el trabajo con transformaciones geométricas solo aparece en 1° (reconoce y aplica traslaciones a objetos y figuras y los representa mediante objetos), 2° (reconoce y crea figuras simétricas; entiende y aplica rotaciones a objetos y

[1] Bibliografía sugerida:
- *DUVAL R (1998).* Geometry from a cognitive point of view. ?. *En En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.*
- *RICO, L (1995).* Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA, vol 1, No. 1, p. 4 – 24*
- *BISHOP A (1986).* ¿Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de geometría. *En MORRIS R (ed). Estudios en Educación Matemática: Enseñanza de la geometría. UNESCO.*

[8] - SAMPER C; LEGUIZAMON C; CAMARGO L. *Razonamiento en geometría* . Revista EMA, vol. 6, no. 2, marzo de 2001.

figuras), 3°(reconoce y ejecuta transformaciones de estiramiento (homotecia), traslación, simetría, reflexión y rotación) y 8°(reconoce la simetría rotacional, sus componentes y propiedades), sin seguir un proceso metodológico que permita diferenciarlos y comprenderlos apropiadamente.

Igualmente la conceptualización propuesta sobre los objetos geométricos y sus relaciones es tan trivial, que sólo se basa en el reconocimiento y no a la identificación de las propiedades geométricas relevantes (necesarias y suficientes) como producto de la exploración sobre las figuras y las relaciones entre sus elementos constitutivos, tarea que se traduce en la construcción de definiciones (que sintetizan relaciones de inferencia entre propiedades geométricas), y no en su reconocimiento.

Con relación al papel que juega la geometría en la formación del razonamiento deductivo, este potencial no se explota pues no se avanza en la construcción de un sistema axiomático. Se introduce la demostración sin una contextualización de para qué ni por qué, violando el contrato didáctico existente hasta grado 7º, en el que las proposiciones matemáticas se enseñan sin demostración. Por lo tanto no se construye el sentido de la demostración, a partir de una propuesta sistemática de búsqueda de validez sobre conjeturas que lleve de la explicación en primera instancia, a la prueba en segundo lugar y posteriormente a la demostración propiamente dicha. Cuando se pide demostrar, no se sabe con base en qué afirmaciones o postulados elaborar una prueba o qué se asume como verdadero. Ejemplo de ello es el conjunto de "estándares" que introducen la demostración en una organización completamente caprichosa y que desconoce la diferencia entre pensamiento espacial y geométrico:

- Conoce el Teorema de Pitágoras y algunas de sus demostraciones (7º)
- Conoce y demuestra las propiedades de un triángulo isósceles (8º)
- Conoce los teoremas acerca de líneas paralelas y líneas transversales a estas (8º)
- Conoce, demuestra y aplica las condiciones para que dos triángulos sean congruentes o similares (8º)
- Conoce y demuestra informalmente el Teorema de Euler para determinar si un grafo es atravesable o no (8º)
- Presenta demostraciones directas o indirectas de proposiciones matemáticas (8º)

Igualmente las relaciones geométricas como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza se introducen sin relación alguna en un sentido constructivo de sistema geométrico.

Construcciones geométricas

Las construcciones geométricas ocupan un importante papel en la matemática escolar pues se constituyen en un medio para articular las representaciones gráficas con las representaciones verbales de enunciados geométricos, al hacer explícitas relaciones geométricas en el uso de los instrumentos de construcción. La congruencia, el paralelismo, la perpendicularidad, la equidistancia, la curvatura entre otras propiedades se hacen evidentes al usar un compás, una regla, un transportador. Igualmente los programas de geometría dinámica favorecen el establecimiento de propiedades geométricas de los objetos construidos al reconocer los invariantes que se mantienen al poner en movimiento los objetos construidos.

En la propuesta de estándares las construcciones con elementos de trazo aparecen en sitios caprichosos sin nexo alguno con la necesidad de explicitar propiedades geométricas en juego. Se busca sólo una destreza, escogiendo para ello, dos o tres construcciones, no necesariamente las más relevantes, sino propuestas caprichosamente. Tampoco se propone un trabajo con software de geometría dinámica desconociendo su riqueza didáctica y las experiencias que a nivel nacional e internacional están ampliamente difundidas[9].

Sobre la propuesta metodológica

En la propuesta de estándares no se tiene en cuenta el enfoque de geometría activa propuesto en los lineamientos curriculares en donde se sugiere introducir los conceptos en una forma dinámica a partir de la exploración de los invariantes de los objetos geométricos y con base a relaciones topológicas exploradas corporalmente. Por ello, se introducen en grado 1º los conceptos de punto, recta y plano desconociendo que los niños acceden primero a nociones topológicas, luego proyectivas y finalmente euclideas.

Los conceptos y relaciones se introducen "*per se*" sin mediar un contexto, sin establecer un nexo con alguna necesidad, o sugerir aspectos hacia el proceso de enseñanza. Solo de vez en cuando, y de manera caprichosa, se sugiere aplicar algún concepto o relación en la resolución de problemas, pero como la propuesta no está bien estructurada, aplicaciones fundamentales para comprender un concepto se sugieren en cursos posteriores a donde este se introduce. Por ejemplo, la semejanza se introduce

[9] Bibliografía sugerida:
- *MEN*. Proyecto de Incorporación de nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educacuón Media de Colombia. Fase Piloto, 2001.
- *GARCIA A; MARTINEZ A; MIÑANO R*. Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas. *Editorial Síntesis. Colección Educación Matemática en Secundaria.1995.*
- *SMART J*. Implications of Computer Graphics Applications for Teaching Geometry. *En Learning and Teaching Geometry, K – 12. Yearbook 1987. NCTN, Reston, Virginia.*

desde los primeros grados y en grado 8º se propone la resolución de problemas de aplicación, pero el concepto de escala se propone en grado 10º, siendo fundamental para comprender qué es la semejanza.

Así como no se observa una construcción sistemática de la geometría euclidiana tampoco se aprecia ninguna construcción secuencial de la geometría proyectiva, la geometría descriptiva, la geometría analítica o la teoría de redes. Solo aparece un estandar por cada dominio, sin una preparación previa ni ningún nexo posterior con otros estándares. Por ejemplo sobre geometría proyectiva se propone realizar proyecciones planas de algunos sólidos o para geometría descriptiva se sugiere visualizar objetos en tres dimensiones desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones transversales en grado décimo sin tocar el tema en ninguno de los cursos anteriores o posteriores. Adicionalmente se propone un solo estandar para geometría analítica en grado 10º, define circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, identifica los elementos de cada una deduce sus ecuaciones en el plano cartesiano, que privilegia un acercamiento algebraico a las cónicas y no su caracterización desde el punto de vista geométrico.

La trigonometría tampoco sale bien librada a pesar de que se proponen tres estándares y no solo uno: deduce y aplica las propiedades especiales de un triángulo con ángulos de 30º, 60º y 90º (9º). conoce y calcula las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y las utiliza para resolver triángulos, (9º) y utiliza relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas de ángulos (10º). Estos estándares que parecen más bien objetivos específicos para alguna de las clases no reflejan la amplitud de tema ni la potencia de la trigonometría como recurso para la medición indirecta. Además de haber sido escogidos de manera caprichosa, el último de ellos tiene severos problemas de redacción.

Un recorrido por otras temáticas nos permite afirmar que la propuesta adolece de graves fallas de organización que reflejan no solo desconocimiento de la estructura de la disciplina sino del desarrollo cognitivo de los estudiantes. Veamos algunos ejemplos:

- Sobre sistemas de Coordenadas se proponen dos estándares: en grado 3º se propone utilizar un sistema de coordenadas para ubicar puntos en el plan pero solo hasta 5º grado se plantea la identificación del plano cartesiano y sus componentes y lo utilización para examinar propiedades de las figuras geométricas. Obviamente la identificación debería preceder a la utilización.
- Sobre el estudio de los sólidos se proponen varios estándares el primero de ellos en grado 1º, en donde se pide describir y argumentar sobre ...... mientras que en los grados superiores, hasta grado 8º se propone apenas la actividad de reconocimiento (ver tabla 1)

P	DESCRIBE Y ARGUMENTA.... ESFERAS Y CUBOS
1°	Reconoce algunas figuras geométricas tales como....esferas y algunas de sus partes.
2°	Reconoce y clasifica figuras y objetos de dos y tres dimensiones
4°	Clasifica, dibuja y construye objetos de dos y tres dimensiones
6°	Reconoce los poliedros, sus componentes y sus características
7°	Reconoce un cilindro y sus partes
8°	Identifica los cinco poliedros regulares y sus propiedades.
8°	Reconoce e identifica las propiedades de conos, prismas y pirámides.

Tabla 1

- Sobre Polígonos se proponen tres estándares: clasifica y reconoce polígonos y sus componentes y propiedades (5º) distingue entre polígonos cóncavos y convexos (6º) e identifica y clasifica los polígonos y sus partes, y deduce sus propiedades fundamentales (8º). Se propone primero la actividad de clasificación y luego las de distinción e identificación, actividades necesarias para poder hacer una clasificación.
- Sobre las relaciones de congruencia y semejanza, se pide en 4º de primaria entender los conceptos de congruencia y semejanza, pero luego en grado 8º reconocer triángulos similares y sus propiedades (8º) y comprender el concepto de congruencia de dos o más figuras geométricas, así como las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la congruencia (8º). Este último estándar sugiere que se va a trabajar la congruencia como una relación de equivalencia pero ni antes ni después se hace un trabajo alrededor de esta propuesta.

Se peca por exceso en la demanda que se le hace al alumno y también por defecto dejando traslucir un desconocimiento total del desarrollo del pensamiento en el niño y en el adolescente. Se desconoce qué significa tener pensamiento geométrico y como se desarrolla en el alumno (ver tabla 2).

Excesos:

- Se ubica en el espacio y da direcciones de manera precisa. (1°)
- Utiliza un sistema de coordenadas para ubicar puntos en el plano.(3°).
- Entiende los conceptos de congruencia y semejanza.(3°).
- Utiliza modelos geométricos para resolver problemas en otras áreas de las matemáticas e incluso en otras disciplinas. (4°).

Defectos:

- Reconoce un cilindro y sus partes. (6°), aspecto que el niño puede entender desde grado primero.
- Comprende el concepto de escala (9°), solo hasta ese grado, cuando ya se les ha pedido que demuestren y apliquen la semejanza en situaciones prácticas.
- Interpreta y construye dibujos a escala.(9°) (idem)

Tabla 2

Sobre el lenguaje que se utiliza

A lo largo de la propuesta se observa un total descuido en el lenguaje empleado, lo que conduce a:

- Formular enunciados que generan errores conceptuales como:

  - Reconoce algunas figuras geométricas tales como puntos.....(1°).

  - Clasifica triángulos de acuerdo con su tamaño y forma. (3°).

  - Construye rectas y ángulos con medidas dadas (5°).

  - Construye la bisectriz de una recta y un ángulo dados.(6°).

  - Utiliza relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas de ángulos. (10°)

- Redactar enunciados sugieren tratamientos didácticos absurdos como identificar el ángulo y sus componentes (2°). ¿Por qué se introduce de esta manera el ángulo?, ¿es este un acercamiento significativo que obedece a un contexto?
- Mezclar caprichosamente algunos temas, reflejando una preocupación por identificar nombres que por comprender relaciones geométricas. Por ejemplo identifica y construye las alturas, bisectrices, mediatrices y medianas de un triángulo dado e identifica los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (7º).
- Escribir enunciados vagos e imprecisos que impiden comprender que se espera o que se sugiere hacia la enseñanza. Los siguientes son ejemplos de ellos:

  - Describe y argumenta matemáticamente acerca de figuras, formas y patrones que pueden ser vistos o visualizados (1°). ¿Qué significa argumentar matemáticamente en grado 1º?

  - Clasifica figuras y formas de acuerdo con criterios matemáticos (1°). ¿De qué criterios matemáticos se habla?

  - Reconoce y aplica traslaciones a objetos y figuras, y los representan mediante objetos (1°). ¿Cómo representar una transformación con un objeto?

  - Reconoce y crea figuras geométricas (2°). ¿Qué significa crear figuras geométricas?

- Reconoce el círculo, la circunferencia y sus partes (4°). ¿Cuáles son las partes de la circunferencia?

- Reconoce un cilindro y sus partes (6°). ¿Cuáles son las partes del cilindro?

- Reconoce y clasifica figuras y objetos de dos y tres dimensiones. (2°). (Una cosa es ser y otra es tener)!.

- Identifica el plano cartesiano y sus componentes y lo utiliza para examinar propiedades de las figuras geométricas (5°). ¿Cuáles son las partes de plano cartesiano?

- Clasifica y reconoce los paralelogramos, sus componentes (diagonales, vértices, lados) y sus propiedades (5°). ¿Son las diagonales componentes de los paralelogramos?

En síntesis, se desconoce en su totalidad la propuesta de geometría activa que se ha venido elaborando desde la renovación curricular y que se retomó en los lineamientos curriculares. Se hace una tergiversación de la propuesta del NCTM, tomando frases sueltas sacadas del documento, mal traducidas y mal organizadas. No se tienen en cuenta otras propuestas como la de los españoles que enfatiza en la geometría lúdica ni la de los franceses que se enfoca axiomáticamente.

Bibliografía

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas. una empresa docente*. Universidad de los Andes. Bogotá.

BELL, A. *Algunas notas acerca de la representación mediante puntos de números, series y funciones*. En: Enseñanza de las ciencias, 1997, 15 (3), 373 - 376

BARTOLINI, M; BOERO P (1998). *Teaching and Learning Geometry in Context*. En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

BARTOLINI, M; BOERO, P (1998). *Teaching and Learning Geometry in Context*. En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

CALDERON D; LEON O (1996). *La argumentación en matemáticas en el aula: una oportunidad para la diversidad*. Facultad de Educación Universidad externado de Colombia. Convenio COLCIENCIAS BID.

DUVAL R (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Peter Lang S.A./ Universidad del Valle.

FARRELL, M. (1987). *Geometry for Secondary School Teachers*. En LINDQUIST, M; SHULTE, A. (eds). Learning and Teaching Geometry, K-12. 1987 Yearbook, NCTM, Virginia.

FILLOY E (1998). *Didáctica e historia de la Geometría Euclidiana*. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberiamérica.

HERSHKOWITZ, R (1998). *About Reasoning in Geometry*. En MAMMANA C; VILLANI V (eds). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

HITT, F (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo*. Revista Educación Matemática. Vol. 10, no. 1, abril.

HOFFER A (1990). *La Geometría, más que demostración*. Revista Notas de Matemática, No. 29, abril, pp. 10 – 24.

JAIME A; GUTIERRES A (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Editorial Síntesis. Colección Educación Matemática en Secundaria.

GUTIÉRREZ A (1998).*Las representaciones planas de cuerpos 3-dimesnsionales en la enseñanza de la geometría espacial* En: EMA, 1998, 3(3), 193 – 220.

KAPUT J (1992). *Technology and Mathematics Education*. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Grows, D. A. (ed) Nueva York: MacMillan Publishing Company.

KIERAN C; FILLOY E (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. En: Enseñanza de las ciencias, 7(3)

MALARA N (1999). *Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales*. En: Educación Matemática, 11(3) 54 – 68

MARTINEZ C; RICO L; ROMERO I (1997).*Sistemas de Representación y aprendizaje de estructuras numéricas*. En: Enseñanza de las Ciencias. 1997, 15 (3), 361 - 371

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Serie Lineamientos.

MORENO L (sin fecha). *Una perspectiva sobre la demostración*. CINVESTAV, México.

NCTM (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

NCTM (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*.

SANTOS LM; SANCHEZ E (1996). *Perspectivas en Educación Matemática*. Colección Didáctica, Lecturas. Grupo Editorial Iberoamérica.

VEBLEN O (1934). *The moderrn approach to elementary geometry*. En LINDQUIST, M; SHULTE, A. (eds). *Learning and Teaching Geometry*, K-12. 1987 Yearbook, NCTM, Virginia.

VILLELLA J (1983). *Sugerencias para la clase de matemática*. Aique.

COMPONENTE

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRÁICOS Y ANALÍTICOS:

Reflexión sobre los estándares curriculares del área de Matemáticas

5

CAPÍTULO quinto

Gloria García - *gloriag@uni.pedagogica.edu.co*
Universidad Pedagógica Nacional
Edgar A. Guacaneme - *guacane@uniandes.edu.co*
Universidad de los Andes - una empresa docente
Wilson J. Pinzón - *wipin52@hotmail.com*
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"

Introducción

La comunidad colombiana de investigadores en Educación Matemática ha mostrado su interés en discutir en ámbitos académicos el documento Estándares para la excelencia en la educación (MEN, 2002), particularmente el contenido de los Estándares curriculares para matemáticas para la educación preescolar, básica y media (pp. 11-42) —que en adelante llamaremos Estándares. Con este fin, hasta la fecha, en Bogotá se desarrollaron dos reuniones en las que participaron algunos integrantes de la comunidad local. Como resultado de este par de reuniones se determinó configurar grupos que inicien reflexiones en torno al desarrollo en los Estándares de cada una de las componentes del currículo de matemáticas expresados en los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998)—que en adelante llamaremos Lineamientos.

En este breve documento presentamos algunas de las reflexiones iniciales surgidas de cotejar el contenido del componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en los Estándares, con la propuesta hecha en los Lineamientos acerca de este mismo componente. Considera-mos que las reflexiones aquí presentadas constituyen solo una aproximación inicial al análisis de los Estándares y que es necesario continuar el proceso de estudio de éstos de tal suerte que luego podamos tener un nuevo documento que exprese con mayor amplitud y profundidad nuestra postura frente a los Estándares en el componente citado. Presentamos tales reflexiones organizadas en tres títulos, a saber: acerca de la aproximación a la variación y al álgebra, acerca de los contenidos propuestos y acerca de la contribución tecnológica.

Acerca de la aproximación a la variación y al álgebra

El documento que presenta los Estándares (MEN, 2002) señala que el marco de referencia para establecer los contenidos y los procesos matemáticos son los Lineamientos (MEN, 1998). En la breve descripción que realiza del componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos señala que:

> *... esta componente del currículo tiene en cuenta las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, por ello, el currículo debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones. (MEN, 2002, p. 16)*

Esta descripción hace pensar que las tres temáticas mencionadas (patrones, relaciones y funciones) ocuparán un lugar central en los estándares de los diferentes grados y que los temas referidos a los sistemas algebraicos y analíticos presentarán un bajo perfil en éstos. Esta idea tiene sus fuentes también en el desarrollo que se hace, del componente del currículo que nos ocupa, en los Lineamientos. Allí, se presenta a la variación como idea matemática que cohesiona una gran variedad de temas y problemas de las matemáticas escolares que usualmente se han abordado de manera aislada, y como idea matemática ligada y determinante del pensamiento variacional.

Al examinar los estándares curriculares que describen el componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en los diferentes grados, identificamos que si bien éstos recogen algunos planteamientos hechos en los Lineamientos con respecto a la variación, parecen dar prioridad a aspectos relacionados con el álgebra.

Aproximación a la variación

Observamos que en los dos primeros grados de la Básica se plantean estándares curriculares relacionados con la variación conjunta de variables; por ejemplo, para los grados primero y segundo se plantean, respectivamente los estándares "Observa y predice el cambio de ciertos atributos medibles de los objetos a través del tiempo" (MEN, 2002, p. 19) y "Reconoce, describe y extiende patrones geométricos y numéricos" (p. 21). Para el tercer grado no se plantea ningún estándar referido a la variación, en tanto que para los grados cuarto y quinto se presentan sendos estándares, a saber: "Investiga casos en los que el cambio de una cantidad variable se relaciona con el cambio en otra (ejemplo: el cambio de velocidad afecta la distancia recorrida)" (p. 25) y "Representa y analiza las relaciones entre dos cantidades variables (por ejemplo, la edad y la altura de una persona), mediante tablas, gráficas en el plano cartesiano, palabras o ecuaciones" (p. 27).

Al examinar los estándares para los grados sexto a once reconocimos que no existen estándares que se refieran a la variación conjunta para los grados pares, en tanto que para los grados impares sí. Específicamente se plantean los estándares "Distingue entre magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, y resuelve problemas relacionados con éstas" (MEN, 2002, p. 31) y "Representa en el plano cartesiano la relación entre dos variables" (p.31) para el grado séptimo. Para el grado noveno se presentan los estándares "Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones cuadráticas" (p. 36) e "Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones exponenciales o logarítmicas" (p. 37). Para el grado undécimo, el estándar "Comprende la derivada como la razón de cambio o como la pendiente de la recta tangente a una función continua en un punto dado" (p. 41).

Bajo la óptica ofrecida por tales estándares reconocemos que el estudio de la variación se inicia desde muy temprano en la escolaridad, pero que parece ser retomado de manera no continua con el transcurrir de los años escolares; de hecho, sorprende que en solo tres de los seis años de la Básica Secundaria y Media haya referencia a la variación conjunta y que éstos no sean consecutivos. También vale la pena resaltar el hecho de que solo en un grado aparece un señalamiento explícito al trabajo con patrones de variación.

De otra parte, queremos señalar que si bien en el grado undécimo reconocemos las funciones de variable real como temática central, en los Estándares no es explícito el tratamiento del carácter variacional de éstas en relación con su carácter de correspondencia, es decir, no se describe cuál de los dos será enfatizado o si debiese existir algún tipo de equilibrio entre éstos. Esta inquietud se acrecienta cuando advertimos que para el grado noveno se presenta un estándar[1] que indica que la función se trata como una clase especial de relación y que los estándares presentados para el grado sexto bajo el título del componente que nos ocupa, introducen contenidos de la Teoría de Conjuntos que en el grado noveno se constituyen como prerrequisitos para identificar la función como una relación y ésta como un producto cartesiano. Consideramos que un tratamiento de la función como clase especial de relación impone un carácter estático a la idea de función que le asocia la unicidad de la correspondencia como única invariante del concepto. Este tratamiento se contrapone al de la función vista como variación conjunta de variables relacionadas, en el cual la función modela fenómenos de cambio de variables dependientes e involucra no solo el reconocimiento de la función con su expresión algebraica correspondiente, sino con sus distintas representaciones asociadas (tabular, gráfica, algebraica y verbal), poniéndose así de relieve diferentes invariantes del concepto.

Aproximación al álgebra

Observamos que para los primeros grados de la escolaridad se plantean estándares que propenden por una aproximación al álgebra como generalización de la aritmética; por ejemplo, para el primer año se plantea el estándar "Examina algunas propiedades de los números y hace generalizaciones a partir de sus observaciones." (MEN, 2002, p. 19) y para el segundo año se propone el estándar "Reconoce y da ejemplos de algunas propiedades generales de los números tales como la conmutatividad de la adición y la multiplicación." (p. 21). Igualmente, observamos que para los últimos grados de la Educación Básica Primaria, se propone una aproximación al álgebra centrada en los métodos para resolver ecuaciones aritméticas; los estándares "Encuentra el número que falta en una ecuación sencilla" (p. 23), "Resuelve ecuaciones sencillas mediante métodos tales como operaciones inversas,

[1] "Reconoce cuando una relación entre conjuntos es una función" (MEN, 2002, p. 36)

cálculo mental o ensayo y error." (p. 25) y "Encuentra soluciones de una cantidad desconocida en una ecuación lineal sencilla" (p. 27)–planteados respectivamente para los grados tercero, cuarto y quinto– ilustran la anterior afirmación.

En el grado octavo de la Educación Básica secundaria –y no antes– se retoman temáticas del álgebra bajo dos aproximaciones. La primera –y al parecer la fundamental– identifica al álgebra con el estudio de las estructuras; en ésta específicamente se propone abordar el álgebra de las expresiones algebraicas y particularmente el álgebra de los polinomios y el álgebra de las fracciones algebraicas. La segunda, retoma el énfasis en los métodos de solución de ecuaciones, particularmente para las ecuaciones lineales con una y dos incógnitas, ecuaciones cuadráticas y ecuaciones trigonométricas, en los grados octavo a décimo, respectivamente.

Por otra parte, hemos podido identificar que algunos de los estándares propuestos para los grados de primaria, son los mismos que proponen los estándares curriculares norteamericanos (NCTM, 1989) para los mismos grados. La propuesta de la NCTM tiene como marco de referencia la amplia y profunda investigación que se ha desarrollado en torno a las diferentes perspectivas del álgebra escolar. Una de tales perspectivas propone construir el álgebra escolar como aritmética generalizada, sobre la base de la formulación, manipulación y generalización de relaciones y propiedades numéricas. La propuesta del NCTM se refiere al álgebra de números, es decir todas las variables se consideran numéricas y el cálculo algebraico nace como generalización del modelo numérico; las variables –particularmente las letras– indican números arbitrarios, por lo que el cálculo algebraico se entiende como cálculo con variables; la variabilidad se desarrolla ligada a lo que representa la letra (variación del número en un conjunto de valores). Por lo anterior el concepto de número generalizado es un concepto esencial para la noción de variable. Es de esta forma como el concepto de variable surge en contextos no funcionales. De igual manera se puede afirmar que esta aproximación al álgebra se interesa tanto por el conocimiento de reglas y métodos generales de solución de ecuaciones e inecuaciones, como por el estudio de las estructuras que formalizan explícitamente al álgebra.

Sin embargo, la aproximación al álgebra que se propone en los Lineamientos no se corresponde con la citada inmediatamente antes. En éstos se propone que el estudio de las relaciones funcionales se dé en contextos de variación entre magnitudes y la modelación matemática se realice por la extracción de relaciones funcionales que se expresan en dichos contextos. En los Lineamientos la representación de estas relaciones si bien incluye la algebraica, tabular, gráfica cartesiana, y verbal, también, inicialmente incluye otras que permitan establecer los aspectos cualitativos de tales relaciones funcionales. Por tal razón, en los Lineamientos se sugiere privilegiar la traducción entre representaciones, antes de precisar el lenguaje del álgebra como el lenguaje esencial en la comunicación del concepto de función y sus modelos; allí, las representaciones aritméticas se convierten en uno de los hilos conductores para el proceso de generalización de la variable, al mismo tiempo que permiten establecer regularidades de variación en relaciones de dependencia.

Conviene señalar, que desde estos planteamientos se debe tener claro el paso hacía el aprendizaje de los aspectos propiamente del álgebra, como los descritos en el párrafo precedente, pues muchas de estas actividades son en realidad complementarias; pues si bien, el estudio inicial de las relaciones funcionales prioriza representaciones visuales o tabulares, distintas a la simbología verbal algebraica, el desarrollo histórico del álgebra ha mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental en la formulación de muchos argumentos y fórmulas algebraicas.

Acerca de los contenidos propuestos

Si bien los estándares curriculares propuestos para el área de matemáticas no son un listado de contenidos o temas de matemáticas —como si lo fueron en su momento los programas curriculares de la década del 70 y parte de la del 80— su lectura permite reconocer con relativa facilidad temáticas específicas para cada uno de los grados. Particularmente los estándares para los grados de la educación básica secundaria y media, exhiben la distribución temática recapitulada en la siguiente tabla.

GRADO	TEMAS DE MATEMÁTICAS
Sexto	Conjuntos, relación de contenencia y operaciones entre conjuntos (unión intersección y producto cartesiano).
Séptimo	Razones, proporciones, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, y regla de tres simple y compuesta.
Octavo	Expresiones algebraicas, monomios, operaciones entre monomios (suma, diferencia, producto, cociente y potencia), polinomios, operaciones entre polinomios (suma, diferencia, producto, cociente), factorización de polinomios, fracciones algebraicas, operaciones entre fracciones algebráicas (suma, diferencia, multiplicación, división y simplificación), ecuación e identidad algebraica, solución de ecuaciones de primer grado en una variable, inecuaciones de primer grado en una variable, solución de inecuaciones de primer grado en una variable, ecuación de ecuaciones de primer grado en dos variables e inecuaciones lineales en dos variables.
Noveno	Relación como subconjunto del producto cartesiano, dominio y rango de una relación, función como tipo especial de relación, funciones reales, función lineal, recta en el plano cartesiano, función cuadrática, ecuación cuadrática, números complejos, función exponencial, función logarítmica y ecuaciones logarítmicas.

GRADO	TEMAS DE MATEMÁTICAS
Décimo	Función, función circular, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, expresiones trigonométricas, fórmulas trigonométricas y ecuaciones trigonométricas.
Once	Función real, dominio y rango de una función, operaciones entre funciones (suma, diferencia, producto, cociente, composición, inversión), límite de una sucesión y de una función, propiedades del límite de una función, sucesiones divergentes y convergentes, función continua, derivada como razón de cambio o como pendiente, antiderivada e integral indefinida, integral definida.

Esta distribución temática tiene una amplia coincidencia con el currículo de matemáticas de hace aproximadamente tres décadas. Recordemos que en aquel (MEN, 1975) se proponía:

- Iniciar el Curso I de matemáticas (para el actual grado sexto) con es estudio de las nociones sobre conjuntos.
- En el Curso II de matemáticas (para el actual grado séptimo) estudiar a través de una unidad temática, titulada La proporcionalidad y sus Aplicaciones, cada uno de los temas presentados para el grado séptimo en la anterior tabla.
- En el Curso III de matemáticas (para el actual grado octavo) dos unidades temáticas, tituladas Polinomios y Ecuaciones e inecuaciones de primer grado, a través de las cuales se estudiaba el álgebra de los polinomios enfatizando en los productos notables y la factorización y se solucionaban ecuaciones e inecuaciones de tal tipo.
- Una unidad temática, titulada Ecuaciones Cuadráticas, y una unidad temática, titulada Números complejos, como desarrollo del Curso IV de matemáticas (para el actual grado noveno).
- Una unidad temática que bajo el título Funciones trigonométricas, presentaba para el Curso V de matemáticas, un panorama de contenidos casi idéntico al recapitulado en la tabla para el denominado en la actualidad grado décimo.
- En el Curso VI de matemáticas (para el actual grado once) se desarrollaba en la unidad Relaciones y funciones, el estudio del álgebra de funciones y de la composición de funciones; también a través de la unidad titulada Sucesiones infinitas se estudiaban temas como el de sucesión, límite de una sucesión y de una función, propiedades de los límites, convergencia y divergencia, álgebra de límites y continuidad. En las unidades tituladas Cálculo diferencial y Cálculo integral se presentaban temas relativos a los conceptos de derivada e integral de funciones de variable real.

Esta vasta coincidencia temática contrasta con la exigua diferencia que se propone con la ubicación en los grados para el estudio de las funciones de variable real. En los Estándares, como se puede ver en la tabla, las funciones se estudian en los últimos tres grados de la escolaridad (noveno, décimo y once), en tanto que en los programas de la década del 70 su estudio se centraba en los dos últimos cursos (V y VI) y fundamentalmente en el último.

Una comparación temática similar se puede establecer con la presentación temática exhibida en los cuadros de Contenidos Básicos para la Educación Básica Secundaria de la Propuesta de Programa Curricular de finales de la década del 80 y principios del 90 (MEN, 1988, 1989, 1990, 1991). En estos cuadros basta considerar los contenidos propuestos para las columnas tituladas Análisis real, Conjuntos y Relaciones y operaciones para reconocer las coincidencias y diferencias con la propuesta temática de los Estándares. Así, específicamente se reconoce que:

- Para el grado sexto las propuestas (MEN, 1988, 2002) coinciden en lo referente a los conjuntos.
- Para el grado séptimo las propuestas (MEN, 1989, 2002) coinciden en lo referente a las razones y las proporciones, y parcialmente a la proporcionalidad, aunque en la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1989) a través de la proporcionalidad se inicia el trabajo en torno a la linealidad y a las funciones lineales, temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para ser estudiados en noveno.
- Para el grado octavo la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1990), en la columna titulada Análisis real, propone algunos de los temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para el grado noveno.
- Para el grado noveno la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1990), en la columna titulada Análisis real, propone algunos de los temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para el grado octavo; en tanto que en la columna titulada Relaciones y operaciones reporta los títulos de un par de temas que en los Estándares (MEN, 2002) incluye para el grado once.

El estilo y contenido de los Lineamientos (MEN, 1998) no permite establecer una minuciosa comparación temática con los Estándares (MEN, 2002). El contenido de los Lineamientos (MEN, 1998) solo permite reconocer que temas como los patrones y las funciones deberán ser considerados como parte integral del componente denominado pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. De estos temas, en los Estándares (MEN, 2002) las funciones de variable real son temáticas matemáticas centrales para los grados noveno, décimo y once.

En suma, a través de estas comparaciones –en cuanto al contenido matemático sugerido como objeto de estudio en la escolaridad– con las propuestas curriculares colombianas de las últimas tres décadas, podemos establecer que los Estándares (MEN, 2002), particularmente en lo referente al componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, parecen retomar buena parte de su estructura temática de la propuesta de la década del 70 (MEN, 1975), no consideran suficientemente las modificaciones temáticas sugeridas en las Propuestas de Programa Curricular (MEN, 1988, 1989, 1990, 1991) y consideran las funciones de variable real propuestas en los Lineamientos (MEN, 1998) como parte de su estructura temática.

Acerca de la contribución tecnológica

Al examinar los Estándares reconocemos que muy pocos de ellos vinculan directamente a la tecnología como herramienta de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De hecho solo los estándares "Utiliza una calculadora científica, de manera creativa, para evaluar expresiones algebraicas y fórmulas, resolver ecuaciones e inecuaciones y, en general, para facilitar el trabajo computacional" (p. 34) y "Utiliza con propiedad una calculadora graficadora para trazar y analizar gráficas de funciones y sus diversas transformaciones" —presentados para los grados octavo y undécimo, respectivamente— hacen referencia al uso de las calculadoras en el desarrollo de los temas que se incluyen en este componente.

En este par de estándares reconocemos que la implantación de la calculadora en la actividad matemática escolar en el componente que nos ocupa, parece limitarse a considerar que la calculadora es tan solo una herramienta que facilita cálculos y la elaboración de gráficas cartesianas. Al parecer, para este componente, sus grandes potenciales como simuladores, procesadores matemáticos, procesadores geométricos y generadores de información, no han sido explorados.

En los documentos que al respecto del uso de la tecnología en las matemáticas escolares se establece que uno de los objetivos que se debe lograr con la utilización de estos recursos es desarrollar en el estudiante el pensamiento variacional, indispensable para atacar con posibilidades de éxito aquellos problemas que involucran el cambio. También se propone que la interacción con estos recursos tecnológicos "permite que de una manera rápida un alumno pueda realizar variaciones en el modelo sobre el cual trabaja, y de manera inmediata pueda constatar los resultados causados por dicha variación, al obtener la respuesta de la máquina" (MEN, 1999, p. 31). De esta manera se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad tanto de observación y así trascender la simple contemplación de los fenómenos, como para detectar parámetros característicos de un fenómeno, para establecer relaciones, para hacer conjeturas y para hacer inferencias inductivas y deductivas.

Referencias

Ministerio de Educación Nacional, 1975. *Programas de Matemáticas*. Resolución 277 (Feb. 4). Bogotá, D.C.

_________, 1988. *Propuesta Programa Curricular. Sexto Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.

_________, 1989. *Propuesta Programa Curricular. Séptimo Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.

_________, 1990. *Propuesta Programa Curricular. Octavo Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.

_________, 1991. *Propuesta Programa Curricular. Noveno Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.

_________, 1998. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C.

_________, 1999. *Nuevas Tecnologías y currículo de matemáticas*. Bogotá, D.C.

_________, 2002. *Estándares para la excelencia en la educación*. Bogotá, D.C.

National Council of Teachers of Mathematics, 1989. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston (V.A): NCTM.

COMPONENTE

PENSAMIENTO ALEATORIO Y ESTADÍSTICAS

Reflexiones sobre los estándares en la componente

6

CAPÍTULO sexto

Celly Serrano
Universidad Pedagógica Nacional
Martha Bonilla E.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Pedro G. Rocha
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Hebert Sarmiento
Estudiante de Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional

En los últimos años y particularmente desde la aparición de los lineamientos curriculares (1998) el estudio de la educación estadística ha recobrado gran importancia para la formación de nuestros estudiantes, tanto de la educación básica como de la media y la superior.

Este interés por formar una cultura estadística en los alumnos, se sustenta, desde nuestro punto de vista en tres cuestiones, igualmente importantes:

1. La necesidad social de formar ciudadanos capaces de comprender información codificada en lenguaje matemático.
2. El uso extendido de las nociones de probabilidad, azar, etc, presentes tanto en el conocimiento científico como en el conocimiento humano en general.
3. La responsabilidad de la escuela, en general, de ser un agente de formación para los nuevos ciudadanos.

Desde estas posturas, encontramos importante señalar que la educación estadística tiene que abordar por lo menos los siguientes campos de formación: el análisis de datos, el tratamiento del azar y la probabilidad, como se desprende de la afirmación realizada en los Lineamientos Curriculares (1998, pág. 70)

> *"la introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas. Este carácter no determinista de la probabilidad hace necesario que se enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permitan exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones".*

Derivado de ello, se propone como logros cognitivos aquellos asociados con el manejo de los datos, las descripciones, el análisis desde diferentes representaciones gráficas, el uso y comprensión de conceptos tales como frecuencias, arreglos, muestras, combinaciones, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, etc.; a su vez con la construcción de los conceptos referidos a la probabilidad: azar, incertidumbre, aleatoriedad, inferencia, etc. y a procedimientos tales como recolección de datos, construcción de tablas y gráficos, cálculos de ciertas medidas, etc.

Ahora bien, tal como se afirma en párrafos anteriores y como se desprende de la naturaleza misma del trabajo con la probabilidad y la estadística, los ámbitos privilegiados para su enseñanza (aprendizaje) corresponden a la resolución de situaciones problema que incorporen datos en presencia de incertidumbre. Abordar un tipo de problemas que propicie en los alumnos una toma de decisiones que estén fundamentadas en el análisis, en el uso de los gráficos, en las frecuencias, etc. es uno de los principios que para algunos investigadores en educación estadística, se ha de tener en cuenta, a la hora de tomar decisiones sobre lo curricular.

Los estudios sobre la comprensión de algunos conceptos estadísticos.

Tal como lo afirman Batanero, Godino y Estepa (1998) el significado de los conceptos matemáticos y específicamente el de los conceptos asociados a la estadística tiene un carácter complejo ya que interrelacionan diferentes tipos de elementos:

> *"El significado de los objetos matemáticos se concibe como el sistema de prácticas vinculado a campos específicos de problemas, considerándose en este sistema tres tipos de elementos diferentes:*
> *(1) Elementos extensionales del significado: Los diferentes problemas y situaciones prototípicas donde se usa el objeto, es decir, el campo de problemas del que el objeto matemático emerge.*
> *(2) Elementos instrumentales/representacionales del significado: Las diferentes herramientas semióticas disponibles para estudiar, resolver y/o representar los problemas y objetos matemáticos involucrados.*
> *(3) Elementos intensionales del significado: Las diferentes propiedades características y relaciones de los objetos matemáticos con otras entidades (definiciones, proposiciones, procedimentos, etc.)*

Según este modelo, la comprensión de un concepto matemático implicará la apropiación de los diferentes elementos que componen el significado institucional del concepto y, en consecuencia, tiene una naturaleza sistémica." (pág. 2)

Ahora bien, y asociados a la noción de comprensión expuesta, se han caracterizado algunas de las dificultades que los alumnos pueden tener a la hora de enfrentarse con actividades que intenten desarrollar este campo conceptual. Particularmente, Batanero (pág. 80) comenta los resultados de investigaciones cuyo objeto de estudio son las dificultades asociadas al concepto de media. La práctica escolar, reflejada tanto en las clases como en los textos escolares, de identificar la media con el procedimiento de cálculo "la media es la suma de los datos dividida por el número total de datos", la cual deja por fuera del aprendizaje escolar aspectos que dan significado a la media como son por ejemplo, el campo de problemas en que ella aparece con significaciones diferentes y la comprensión y uso en situación de las propiedades de la media.

Relativos al análisis de los gráficos, errores frecuentes encontrados se refieren al uso de las escalas, a la escogencia del tipo de gráfico adecuado, al uso indiscriminado de los polígonos de frecuencias, a la imposibilidad de traducir una información de un registro gráfico a un registro verbal o

viceversa, a la dificultad de traducir de un gráfico a otro, o de una tabla al gráfico, etc. es decir a las dificultades que se les presentan a los alumnos, al cambiar de representaciones y de registros.
Realizando un análisis general de los estándares curriculares, en lo relativo a este aspecto, podemos deducir que promueve las prácticas de enseñanza usuales en estadística, las cuales privilegian el uso de algunas técnicas de estadística descriptiva, en una secuencia que va desde los datos, la construcción de tablas y gráficos (la mayoría de las veces histogramas y pasteles) , pasando al cálculo de las medidas de tendencia central y de la medidas de dispersión. Este secuencia propuesta privilegia los aspectos intencionales, vistos como prácticas de cálculo, que se relacionan más con la aritmética que con la comprensión de conceptos estadísticos.
La propuesta realizada en los estándares curriculares, deja de lado el campo de significado (los problemas, las situaciones) que dan sentido a los conceptos así como está ausente el estudio de las propiedades estructurales de dichos objetos. Un concepto matemático en especial estos objetos estadísticos, definen sus campos de aplicación por las propiedades que ellos comportan es decir las situaciones y las propiedades están íntimamente relacionadas, tal es el caso de la afectación de la media aritmética por los datos extremos lo que hace que ella pueda o no ser usada como representante del conjunto de datos.
En conclusión podemos afirmar que en los estándares curriculares no se promueve la comprensión de los conceptos estadísticos, y sí una visión procedimentalista de ellos.

Los estudios sobre el análisis de datos, la producción de datos y la inferencia.

Análisis de datos

La esencia del análisis de datos es “dejar que los datos hablen” mediante la búsqueda de patrones en los datos sin considerar en un principio si los datos son representativos de un universo mayor. Asumimos entonces que un análisis de datos cuidadoso precede a la inferencia formal en una práctica adecuada de la estadística.

Siguiendo a Batanero (2001) afirmamos que tanto el análisis de conjuntos de datos complejos como el orden de la enseñanza de datos por lo general pueden guiarse mediante tres principios simples:

1. Proceder de lo simple a lo complejo, del examen de una sola variable a las relaciones entre dos variables y las conexiones entre varias variables.
2. Al examinar datos, buscar primero un patrón global y luego las desviaciones significativas de dicho patrón.

3. Pasar de la presentación gráfica a las mediciones numéricas de aspectos específicos de los datos para consolidar los modelos matemáticos del patrón global.

Gran parte del análisis de datos, puede ser trabajado durante las primeras etapas y deberá estar enfocado a desarrollar el razonamiento cuantitativo. Los temas a tratar deben ser elegidos por su relevancia inmediata para los estudiantes y no por su importancia dentro de la ciencia estadística.

Producción de datos

Existen varias razones por las que la producción de datos es importante en la enseñanza del análisis de datos y azar. El análisis de datos se lleva a cabo de manera más eficaz en situaciones en las cuales los alumnos se encuentren íntimamente familiarizados, ya que tal familiaridad sugiere tanto características esperadas que es necesario buscar como la explicación de aquellas características que no se esperan. Los diseños estadísticos para producir datos que dan respuesta a preguntas especificas constituyen el puente conceptual que enlaza el análisis de datos con la inferencia estadística basada en la probabilidad.

Inferencia

La cuestión de la inferencia en la forma más simple se ocupa del proceso de como sacar conclusiones acerca del parámetro de una población (casi siempre desconocido) con base en los valores estadísticos calculados a partir de una muestra. La inferencia estadística se encuentra enraizada en el concepto de probabilidad como regularidad en el largo plazo y en la idea correspondiente de que las conclusiones de la inferencia se expresan en términos de lo que ocurriría en la producción repetida de datos.

El método bayesiano pide información previa acerca del valor del parámetro en juego. Esto se hace al considerar el parámetro como una cantidad aleatoria con una distribución de probabilidad conocida que expresa información imprecisa acerca de su valor. En la perspectiva bayesiana el concepto de probabilidad se amplia para incluir estas probabilidades de tipo subjetivo o personal. Lo que es nuevo aquí no es la probabilidad como medida de la incertidumbre sino la forma en que se propone su asignación.

Estos dos tipos de inferencia, los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis figuran en una instrucción introductoria de la inferencia estadística y que pueden permitir al estudiante el desarrollo del denominado pensamiento estadístico.

A este respecto podemos afirmar que el excesivo énfasis puesto por los estándares curriculares en la construcción de tablas y gráficas y en la poca caracterización de los procesos asociados a la inferencia muestran una vez más la pobreza con que el tratamiento de este tema puede ser asumido en las aulas de matemáticas si se aplican los estándares.

El trabajo por proyectos o por situaciones problemas, el trabajo de recolección de datos, de análisis de los datos con el fin de tomar decisiones, el uso de ciertos estadísticos como indicadores de comportamiento de los datos, etc no son temáticas que desde las propuestas de los estándares puedan llevarse a cabo ya que la organización lineal y repetitiva (indiferenciada) de los contenidos no lo posibilita.

Los estudios sobre la comprensión de la probabilidad y el azar

Otro aspecto señalado por dicho autor, es el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas tuvo hasta hace poco tiempo, la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de los fenómenos aleatorios. Las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno si queremos.

Tomado la idea de la profesora Carmen Batanero, si queremos que el estudiante valore el papel de la probabilidad, es importante que los ejemplos y aplicaciones que mostremos en la clase hagan ver, de la forma más amplia posible, esta fenomenología como lo muestran los cuatro grandes grupos de fenómenos que rodean al hombre: su mundo biológico, físico, social y político, pero en los diferentes niveles propuestos no se asocian a este tipo de aplicaciones, mas bien, se observa una fuerte tendencia a privilegiar el entrenamiento en formas de calcular, como actividad principal y no la conceptualización en un entorno específico dado (por ejemplo en el estándar grado 6).

Piaget e Inhelder (1951) estudiaron la influencia que tienen los esquemas combinatorios en la formación de los conceptos de azar y probabilidad, estableciendo que una escasa capacidad de razonamiento combinatorio reduce notablemente la aplicación del concepto de probabilidad; respecto a las operaciones combinatorias afirman que, es durante la etapa de las operaciones formales que el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos. Relacionan la comprensión del concepto de permutación junto con el de mezcla aleatoria (interferencia de causas independientes entre sí) como fundamentos de la idea de azar en el niño y de la obtención de predicciones correctas de los resultados posibles al realizar múltiples veces un experimento aleatorio. Es la síntesis entre la conceptualización del azar y lo operacional lo que conduce al adolescente al concepto de probabilidad.

Mientras que Inhelder y Piaget centran su mirada en el aspecto racional operacional, para la comprensión del azar y la probabilidad, Fischbein concede una gran importancia a la intuición como parte integrante de la conducta inteligente y muestra que la estructura operacional del pensamiento formal por sí sola no puede hacer inteligible el azar, aunque incluso llegue a proporcionar los esquemas que son necesarios para ello, o sea, capacidad combinatoria, proporcionalidad e implicación. Sostiene que las cosas son más complicadas que lo que sugiere esta explicación. La síntesis entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales.

Algunas explicaciones de tal fenómeno pueden encontrarse en que (1) la enseñanza en la escuela lleva implícita que la ambigüedad y la incertidumbre no son aceptables en el razonamiento científico, y que toda explicación consiste en identificar una causa. (2) esta idea aceptada por la enseñanza de la escuela no es más que la manifestación de las tradiciones culturales de la sociedad moderna que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas, según las cuales los sucesos aleatorios caen fuera de los límites de lo racional y científico. El resultado es que la intuición del azar se hace irreconciliable con la estructura del pensamiento lógico, y es relegada a una clase inferior, como un método inadecuado de interpretación que no cumple los requisitos científicos.

En el campo de la probabilidad Fischbein (1975) plantea que se puede hacer el estudio de las intuiciones de una manera apropiada, ya que la complejidad de las situaciones cotidianas nos induce a adoptar continuamente un comportamiento probabilístico y la necesidad de tomar decisiones nos obliga a hacer estimaciones intuitivas de posibilidades (en la mayoría de las veces de tipo subjetivo). Esto conduce a que el niño se enfrente desde muy pequeño con una realidad regida, en muchos casos, por las leyes del azar.

Las intuiciones son, según Fischbein: "adquisiciones cognitivas que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, en virtud de sus características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y autoevidencia. La inmediatez de una intuición, sin embargo, no implica improvisación, sino que es el resultado de la maduración de muchas experiencias anteriores. Esto le lleva a proponer la enseñanza de la probabilidad desde el nivel de las operaciones concretas, o durante el período de organización de las operaciones formales (11-12 años)"[1].

Aunque Fishbeibn establece varias clasificaciones de las intuiciones, aquí proponemos las que distinguen el lugar donde se forman en primer lugar:

Las intuiciones primarias: adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción

[1]AZCÁRATE. Azar y probabilidad. Editorial Síntesis, p. 37

sistemática. Ejemplo: el cálculo de distancia y localización de objetos, o la apreciación de que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

Por el contrario, las intuiciones secundarias consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela.

Y desde ellas ha estudiado:

- La intuición del azar;
- La intuición de la frecuencia relativa; la estimación de probabilidades;
- Operaciones combinatorias, y
- El efecto de la instrucción sobre cada una de estas facetas.

Asegura que los niños de 7 años pueden hacer juicios probabilísticos en situaciones sencillas como "pedir al niño que elija, entre dos urnas con cantidades diferentes de bolas blancas y negras aquella que obtenga más posibilidades de obtener una blanca". Demostró que los niños son capaces de asimilar procedimientos combinatorios con la ayuda de la instrucción, lo que es aplicable hasta en niños de 10 años y concluyó que aunque hay diferencias en la realización entre estos dos niveles de edad, estas diferencias son bastante pequeñas.

De las actividades experimentales realizadas por Fischbein y sus colaboradores con niños de 12-14 años encontró que había mayor interés y receptividad de los adolescentes por las ideas de probabilidad y estadística y que estos sujetos son capaces de comprender y aplicar correctamente los conceptos enseñados (suceso, espacio muestral, suceso elemental y compuesto, probabilidad como una medida del azar, frecuencia relativa y análisis combinatorio), que deben como mínimo implicar el comienzo de una reestructuración de la base intuitiva. Para este autor, los modelos generativos (por ejemplo, diagramas en árbol, en el caso de las operaciones combinatorias) son los mejores dispositivos de enseñanza para la construcción de intuiciones secundarias.

Teniendo como referencia lo anterior, nuevamente se considera que en los estándares, el aprendizaje de la probabilidad cae en el mismo error que el de la estadística, al no proponer de forma sistémica un desarrollo de las concepciones en los estudiantes por ejemplo a partir de la teoría de Fischbein, como se puede observa en el siguiente cuadro, donde se observa únicamente algunas actividades que parece conllevan solamente al cálculo de la probabilidad de un evento, teniendo como referente un algoritmo u su comparación con otras estimaciones, faltaría entonces algún contexto donde se enmarque cada uno de los estándares.

Partiendo de las ideas estocásticas fundamentales sería mejor iniciarse con la intuición que el niño tenga del azar para que de esa manera comience a comprender los fenómenos del mundo que le rodea en una forma no determinista de los mismos.

Estándar por grado	Aspecto cognitivo	Observaciones en lo educativo
UNO Cuenta y tabula datos sencillos acerca de personas u objetos Representa los datos recogidos mediante objetos concretos, dibujos o gráficas de distintos tipos. Recoge información acerca de sí mismo y de su entorno.	La tabulación requiere de la construcción de conceptos como orden categoría, así como también criterios de asociación y agrupación. Es posible que no sean suficientes los elementos que tiene los niños para realizar representaciones.	¿Qué significado adquiere en este contexto el término contar? ¿Hay alguna relación con la probabilidad o solo esta referido a cardinalidad de una variable discreta?. ¿Se asumen estas gráficas como representaciones semióticas? ¿Qué significa en este grado realizar encuestas?.
DOS Realiza encuestas y analiza datos obtenidos. Hace afirmaciones y extrae conclusiones sencillas a partir de ciertos datos. Lee e interpreta datos tomados de gráficas, tablas y diagramas.	¿Es posible que un niño de siete u ocho años, analice un conjunto de datos teniendo en cuenta que este proceso requiere construcciones de significado, relación, efectos, etc? ¿Quién diseña las encuestas, el profesor, el estudiante, el grupo? No se observa concordancia con el desarrollo propuesto en el estándar para el grado uno, no se puede desligar la representación de la interpretación.	Un niño que aún no aprende a escribir y a leer ¿qué puede interpretar de las graficas, los diagramas y las tablas? Sería preferible comenzar por iniciar con la intuición que el niño tenga del azar para que de esa manera comience a comprender los fenómenos del mundo que le rodea en una forma no determinista de los mismos.
TRES Describe un evento como seguro, probable, improbable o imposible. Predice la probabilidad de ocurrencia de los resultados de un experimento y pone a prueba sus predicciones Investiga por qué algunos eventos son más probables que otros. Encuentra combinaciones y arreglos de objetos dadas ciertas restricciones	En algunas situaciones solo podría el niño declarar si el evento puede ocurrir o no, pero no podría determinar que tan probable es. Por la misma razón no le será posible precedir la probabilidad de la ocurrencia de los resultados de un experimento y menos aun poder a prueba sus predicciones, salvo en la primera aproximación de ocurre o no. El proceso de investigar el por qué algunos eventos son más probables que otros implica la observación de la ocurrencia del evento dentro de un todo experimental y ello no es posible para un alumno de 8 a 9 años. Es posible que el niño obtenga arreglos y combinaciones manipulando objetos, aun no puede hallarlos en forma sistemática.	No se tratan las intuiciones de los niños acerca de la probabilidad Las combinaciones y arreglos solo son posibles de tratar cuando se tiene construido gran parte del pensamiento multiplicativo.
CUATRO. Resuelve problemas que implican la recolección, organización y el análisis de datos en forma sistemática. Encuentra todos los resultados de llevar a cabo un experimento sencillo y los representa mediante una lista o un diagrama de árbol.	La sistematicidad que se pide aquí no es posible en niños de este grado. Los estudiantes tiene problemas para encontrar todos los resultados de un experimento, debido a la fuerte presencia del pensamiento determinístico imperante y porque es necesario evaluar también aquellos eventos que podrían ocurrir.	Qué significa la organización y análisis de datos en forma sistemática Para estos procesos es necesario el desarrollo de razonamiento combinatorio.

CINCO. Encuentra la media, la mediana y la moda de un sistema de datos e interpreta su significado.	Se debería incluir mas bien el tratamiento de problemas en algún contexto que conlleven al estudiante a comprender las medidas para darle significado. Esto es posible siempre que se trate de una variable discreta y siempre que los datos no se presenten agrupados. Se espera la lectura de esta medidas y una interpretación elemental asociada al algoritmo aplicado para su cálculo.	La interpretación debe incluir a la situación como dadora de signifcado.
SEIS. Construye diagramas de barras, diagramas circulares y pictogramas a partir de una colección de datos. Interpreta diagramas de barras, diagramas circulares y pictogramas y calcula frecuencias, medianas, modas y medias a partir de ellas.	Solamente se desarrolla este estándar a partir del calculo de las medidas y no teniendo como referente conceptual el análisis exploratorio de datos que permite la posibilidad construir situaciones de aprendizaje en torno a la vida diaria del estudiante, la facilidad de utilizar representaciones, sin utilizar teoría matemática compleja.	Datos y diagramas deben ofrecer información sobre problemas importantes para el niño. En la ciencia estadística el uso de las medidas de tendencia central debe estar acompañado de su correspondiente medida de dispersión.
SIETE. Identifica el término "probabilidad" como un número entre cero y uno, que índica qué tan probable es que un evento ocurra. Calcula la probabilidad de algunos eventos sencillos. Hace inferencias significativas a partir de la moda, la mediana y la media de una colección de datos.	No se reconocen las diversas interpretaciones del concepto de probabilidad; como frecuencia relativa, clásica y subjetiva. Que tipo de inferencias se esperan si aun no conoce el significado completo de estas medidas.	No se explicita en los grados anteriores donde se construye el concepto de frecuencia relativa, noción importante en la comprensión del significado de probabilidad. La probabilidad de un evento esta asociada a la determinación previa del espacio muestral de un experimento aleatorio. ¿Cómo calcularla sin conocer este espacio muestral?
OCHO Encuentra el mínimo, máximo rango y rango intercuartil de una colección de datos y deduce inferencias significativas de esta información. Identifica el espacio muestral de un experimento sencillo y calcula la probabilidad de eventos sencillos.	¿Que diferencia hay entre las inferencias del grado siete y las propuestas para este grado? Mas bien lo recomendable sería el complejizar el entendimiento de tales medidas y su utilización en un contexto significativo. Que diferencia hay igualmente entre los eventos sencillos del grado siete y los eventos sencillos del grado ocho. En niño esta dando significado a la continuidad en los sistemas numéricos y aquí es necesario manejar esta propiedad.	El cálculo de probabilidad es sencillo para espacios muestrales sencillos, pero cuando se utiliza la regla de Laplace por ejemplo para espacios muestrales complejos es difícil de calcular en estas etapas de desarrollo de pensamiento, por ejemplo obtener tres números iguales al lanzar tres dados[2]. Determinar el rango intercualtil implica conocer el significado de cada uno de los cuartiles. Ver el comentario en el cálculo de probabilidad para el grado siete. Ahora podrá dar significado pleno a la probabilidad de un evento aleatorio.
NUEVE. Interpreta diagramas, encuestas, gráficas y tablas que recojan datos de asuntos cotidianos y hace inferencias y predicciones a partir de éstos. Comprende y aplica las medidas de tendencia central en el análisis de datos de diversa índole.	Debería de estimularse las conclusiones informales desde las etapas iniciales. Los temas a tratar deben ser elegidos por su relevancia inmediata para los estudiantes y no por su importancia dentro de la ciencia estadística.	Parece por el desarrollo de los estándares que se supone que los estudiantes primero deben aprender el cálculo de las diferentes medidas y luego si pueden realizar su interpretación.

[2]Tomado de DIDACTICA DE LA ESTADISTICA. Carmen Batanero. Universidad de Granada, 2001.

DIEZ. Comprende los conceptos de probabilidad condicional e independiente y desarrolla herramientas para calcular la probabilidad de un evento compuesto. Comprende y aplica las medidas de dispersión en el análisis de datos de diversa índole.	La presentación de tales estándares se refiere a los desarrollos de la estadística como disciplina pero no incluye una mirada desde la conceptualización de los estudiantes en ideas tan importantes como independencia y condicionalidad. La división más importante separa la inferencia bayesiana de la inferencia clásica.	Se debe incluir en le pensamiento el método bayesiano que pide información previa acerca del valor del parámetro en juego. Esto se hace al considerar el parámetro como una cantidad aleatoria con una distribución de probabilidad conocida que expresa información imprecisa acerca de su valor. En la perspectiva bayesiana el concepto de probabilidad se amplia para incluir estas probabilidades de tipo subjetivo o personal. Lo que es nuevo aquí no es la probabilidad como medida de la incertidumbre sino la forma en que se propone su asignación.
ONCE. Encuentra e interpreta algunas medidas de dispersión (rango, desviación de la media, desviación estándar, varianza, etc.) de una colección de datos. Comprende el concepto de variable aleatoria, discreta o continua. Conoce y aplica las reglas básicas de la probabilidad y las utiliza para resolver una variedad de problemas., Comprende lo que es una distribución de probabilidad y conoce las propiedades y aplicaciones fundamentales de las distribuciones binomial y normal. Aplica las medidas de tendencia central y de dispersión en el manejo, interpretación y comunicación de información.	¿Que medidas de dispersión se estudiaron en el grado anterior? Solamente se desarrolla este estándar a partir del calculo de las medidas y no teniendo como referente conceptual el análisis exploratorio de datos	El rango intercuartil es una medida de dispersión. ¿Por qué no se trata como tal previamente?. En la ciencia estadística el uso de las medidas de tendencia central debe estar acompañado de su correspondiente medida de dispersión.

Algunos comentarios puntuales

Presentamos un cuadro donde se muestra en resumen las principales reflexiones en torno a los estándares.

A manera de conclusión

Los estándares curriculares no expresan logros relativos a la propuesta de desarrollo de un tipo de pensamiento que se desligue del determinismo matemático para acercar al estudiante a tipos de razonamiento basados en la incertidumbre y la aleatoriedad.

No se encuentra allí una estructuración que dé cuenta de niveles de complejidad conceptuales y de los diferentes usos de las herramientas estadística como constructoras de ciudadanos con capacidad de tomar decisiones argumentadas desde y por los datos.

La secuencialidad propuesta no permite encontrar un entronque entre estadística y probabilidad, ya que es frecuente que de un grado a otro se salte de una tema al otro sin explicación y por supuesto sin conexión explícita. Analizada la secuencia en sus extremos: grado primero a grado once, encontramos que para primero se hace una propuesta (contar, clasificar y recoger información a través de dispositivos gráficos) que no tiene características claramente estadísticas y para once se hace una propuesta (distribuciones de probabilidad) que por su grado de complejidad incluye todo lo que es deseable que un estudiante de los primeros semestres universitarios comprenda, y todo esto sin que se haya recorrido un camino para tal propósito.

Bibliografía

AZCARATE Pilar, (1996). *Estudio de la concepciones disciplinares de los futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*, Colección Mathema. Granada.

BATANERO Y GODINO (1996). *Azar y Probabilidad. Editorial Síntesis* 37

BATANERO, C., GODINO, J. D. Y ESTEPA, A.(1998) *Construcción del significado de la asociación estadística mediante actividades de análisis de datos.* [Versión ampliada del trabajo: Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. En, A. Olivier y K. Newstead (eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for he Psychology of Mathematics Education (Research Forum), Vol 1: 221-236. University of Stellenbosch, South Africa.]

BATANERO, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Universidad de Granada

BATANERO, C. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Universidad de Granada.

DAVIDOV, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú:. Progreso. p 122-125

HOMES, P. (1980). *Teaching Statistics.* En: Slughm Foulshans Educational. p. 11-18.

FISCHBEIN (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos Curriculares,* Santa Fe de Bogotá, D.C., 1998

COMPONENTE

PROCESOS MATEMÁTICOS

Estándares curriculares de Matemáticas del MEN

CAPÍTULO séptimo

Myriam Acevedo
Universidad Nacional de Colombia
Virginia Cifuentes
Ministerio de Educación Nacional. Men
Cecilia Casasbuenas
Ministerio de Educación Nacional. Men
María Cristina Pérez
Secretaría de Educación Distrital. SED, D.C.
Patricia Pedraza Daza
ICFES

Presentación

Los Estándares Curriculares de Matemáticas, propuestos por el MEN, como documento de estudio, se organizaron por grados y de acuerdo con los denominados "componentes del currículo", siendo uno de ellos, los tipos de pensamiento matemático y el otro los procesos matemáticos. Estos últimos son para los autores de los Estándares: el planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático y la comunicación matemática. Esta forma de organizar los estándares constituye un primer elemento que los distancia del documento de Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, también propuestos por el MEN, donde no se proponen elementos aislados sino una estructura curricular organizada en torno a tres aspectos: unos procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, unos conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de la matemática, y un contexto relativo a los ambientes que rodean al estudiante, del que se generan situaciones problemáticas y que se debe aprovechar como recurso en el proceso de enseñanza. El documento de Lineamientos, también enfatiza la articulación de estos aspectos en todo momento del acto educativo.

Es de notar, además, que en la componente llamada, en los estándares, procesos matemáticos, no se menciona el proceso de modelación que tiene especial importancia en la construcción del pensamiento matemático y que está ligado íntimamente a la resolución de problemas para la construcción de modelos o matematización. Como se comenta en los Lineamientos, el punto de partida es una situación problemática real, que al ser simplificada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones conduce a la formulación de un problema matemático.

En el análisis que presentamos a continuación se describen algunos referentes que permiten caracterizar los procesos mencionados en el documento de Estándares Curriculares, desde el significado que se planteó en los Lineamientos Curriculares y su contrastación con la interpretación que se deduce desde una lectura crítica del documento de estudio.

Sobre el proceso de resolución y planteamiento de problemas

Desde investigaciones nacionales e internacionales en el campo de la Educación Matemática, retomadas en el documento de Lineamientos Curriculares, se ha insistido, desde hace más de una década, en considerar como aspecto central del currículo de matemáticas el planteamiento y la resolución de problemas. Este deberá constituirse en parte integral de la actividad en el aula, sin que se le considere como un tópico para ser tratado de forma independiente del currículo, “deberá permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos”[1].

Las investigaciones y propuestas que reconocen la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas (en particular el documento de Estándares del NCTM 1989-2001) consideran que en todo momento de la actividad en el aula de matemáticas, en cualquiera de los grados o niveles es fundamental crear ambientes donde se propicie, entre otros, la formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas; el desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolverlos; la interpretación y verificación de resultados; la generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas. Todo lo anterior permitirá que los estudiantes vayan ganando confianza en el uso significativo de las matemáticas. Al respecto Alan Schoenfeld recomienda propiciar ambientes de clase “donde los valores de las matemáticas, como una disciplina con sentido, sean reflejados en la práctica cotidiana”.

Para entender, cómo los estudiantes abordan la resolución de un problema y proponer actividades que puedan potenciar este proceso, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y tener claridad acerca de los factores que influyen en la resolución de problemas: recursos matemáticos con que cuenta el estudiante (conceptos, procedimientos, conocimiento informal, relaciones,...etc); estrategias cognoscitivas (descomposición en casos simples, ensayo y error, uso de tablas o diagramas, búsqueda de patrones...etc); concepción de un plan, ejecución, verificación.

En este sentido los Lineamientos consideran que la formulación y la resolución de problemas permite alcanzar metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, como las siguientes:

- Desarrolla habilidades para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje; describir relaciones y modelar situaciones.
- Provoca procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático: exploración de ejemplos, casos particulares; formulación sistemática de afirmaciones, probar, argumentar sobre validez; explicar el porqué, someter a prueba, ...etc.

¿Cómo se considera este proceso en el documento de estándares?

En primer lugar la organización misma del documento sugiere este proceso (al igual que los otros considerados) como una enunciación de temas a desarrollar grado por grado, sin ninguna relación con los tipos de pensamientos y desligado de los otros procesos.

[1]Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998, pág 75).

Dos enfoques claves respecto al planteamiento y resolución de problemas, son ignorados por completo en el documento de Estándares: la interacción con situaciones problemáticas como una estrategia didáctica con fines pedagógicos y la resolución de problemas como fin fundamental del área .

La intención de considerar la resolución y el planteamiento de problemas como un eje fundamental del currículo de matemáticas esta lejos de la consideración esquemática hecha por los autores de los Estándares de proponerlo como un "tópico" agregado, no transversal al currículo y, en consecuencia, no se podría constituir de manera alguna en contexto de aprendizaje, como lo plantean los Lineamientos. Para el análisis del tópico en cuestión, se propone hacerlo desde su organización en el documento de Estándares:

GRADO	ESTANDAR DE PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
PRIMERO	Hace preguntas respecto a su entorno y a objetos de uso diario. Plantea problemas sencillos acerca del espacio y de los objetos que lo rodean. Resuelve problemas sencillos para los cuales debe acudir a la adición y a la sustracción de números hasta 100, previo análisis de la información que recibe.
SEGUNDO	Reconoce los datos esenciales de un problema numérico sencillo e identifica la operación aritmética necesaria para resolverlo. Verifica la solución de un problema que ya haya resuelto.
TERCERO	Identifica y resuelve problemas que surgen de situaciones matemáticas y experiencias cotidianas. Reconoce que puede haber varias maneras de resolver un mismo problema..
CUARTO	Utiliza estrategias, habilidades y conocimientos adquiridos previamente para resolver un problema dado Hace conexiones entre diferentes conceptos con el fin de resolver un problema Identifica estrategias para resolver un problema que pueden aplicarse en las soluciones de otros problemas
QUINTO	Extrae del enunciado de un problema la información pertinente y descarta la que no lo es. Descompone un problema en componentes más sencillos. Utiliza relaciones aditivas y multiplicativas para resolver situaciones problemáticas dentro y fuera del contexto de las matemáticas
SEXTO	Resuelve problemas no rutinarios mediante la selección de conceptos y técnicas matemáticas apropiadas.
SEPTIMO	Formula problemas matemáticos en el contexto de otras disciplinas y los resuelve con los conocimientos y las herramientas adquiridas
OCTAVO	Traduce problemas del lenguaje común al algebraico y los resuelve satisfactoriamente Idea un plan para resolver un problema y lo lleva a cabo con éxito
NOVENO	Resuelve problemas cada vez más complejos, descomponiéndolos en partes más sencillas y aplicando una diversidad de estrategias Hace generalizaciones de las soluciones que obtiene

	Utiliza de manera creativa una calculadora científica para llevar a cabo experimentos, probar conjeturas y resolver problemas
DECIMO	Utiliza ideas geométricas y de la trigonometría para resolver problemas tanto de las matemáticas como de otras disciplinas
ONCE	Resuelve una amplia gama de problemas matemáticos y de otras disciplinas mediante el uso de herramientas de distinto tipo y el desarrollo de estrategias apropiadas. Verifica la validez de la solución a un problema identificando casos excepcionales

En esta propuesta se limitan a mencionar en cada grado aspectos que son desde luego importantes en el proceso de resolución de problemas, pero esta atomización por grados, como si se tratara de temáticas que el niño trabaja a medida que avanza el proceso escolar, de tal manera, que un niño de segundo grado, por ejemplo, no podría explorar caminos diversos, argumentar informalmente sobre la solución, verificar soluciones. Es claro, para nosotros, que se están malinterpretando propuestas presentadas por documentos de referencia, donde la resolución de problemas es reconocida como una actividad muy importante para aprender matemáticas, en multiplicidad de perspectivas, que son fundamentales grado a grado, desde el preescolar hasta el último grado y son además pertinentes y significativas en los distintos dominios del área. En contraste, en el documento la resolución de problemas aparece como una temática anexa referida al sistema numérico, con una única excepción para el grado 10º donde hace mención en la geometría.

En lo que concierne a las etapas o fases del proceso de resolución, estas aparecen desmembradas, en los diferentes grados, el niño comprende el problema en un grado, pero se debe esperar hasta el grado superior para concebir un plan, se aprecia así un completo desconocimiento respecto a la investigación en este campo; de nuevo se consideran las etapas como objetos de enseñanza, grado por grado. No sobra reiterar que en verdaderos ambientes de resolución de problemas abiertos, estas etapas se dan de manera natural sin importar que el problema sea sencillo o complejo.

Se maneja en el documento de Estándares una idea muy particular de problema complejo, la cual parece estar asociada por un lado al grado, y al respecto nos preguntamos: ¿no podrían los niños de los grados iniciales abordar problemas «complejos»?, y por otro pareciera que la complejidad está ligada, exclusivamente, al orden de magnitud de los números involucrados en la situación o al uso de una o más operaciones requeridas para su solución.

Sobre el proceso de razonamiento

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se afirma sobre el razonamiento en matemáticas que:

"Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Identificar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Usar argumentos propios para exponer ideas." (Pág 77)

Se plantea además un aspecto interesante que puede orientar un análisis crítico de los Estándares. Este proceso, se afirma, debe desde luego estar presente en todo el trabajo de los estudiantes como articulador de su actividad matemática; para involucrarlo significativamente, es necesario tener en cuenta su edad y nivel de desarrollo, esto implicaría partir de niveles informales de razonamiento, en los conjuntos de grados inferiores, para llegar a niveles más elaborados en conjuntos de grados superiores.

Respecto a la secuenciación de este proceso grado por grado en el documento de estándares del NCTM, se presenta una propuesta interesante que podría servir como un referente, que surge, seguramente, de una investigación sistemática.

En los grados iniciales, hasta 4°, se plantea propiciar situaciones en las que el estudiante requiera usar modelos, hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar ideas, justificar respuestas y estrategias, hacer uso de conceptos básicos y relaciones para analizar situaciones, se propone además hacer una introducción informal al razonamiento proporcional. En los grados 5° a 8°, se sugiere razonar en contextos espaciales, razonar con proporciones, razonar a partir de gráficas, y razonar inductiva y deductivamente. Se menciona la búsqueda de patrones como la esencia del razonamiento inductivo para trabajar en estos grados, así como el uso de contraejemplos o la verificación de casos particulares para llegar a una generalización sencilla, utilizando problemas apropiados para su edad y conocimiento. En los grados 9° a 12°, se deberían hacer explícitos razonamientos más elaborados, en términos de hacer y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos sencillos y válidos. Las demostraciones indirectas, usando el principio de inducción quedan, según esa propuesta, para la formación universitaria.

¿ Y qué plantea sobre el razonamiento el documento de Estándares propuesto por el MEN?

En primer lugar se describe el razonamiento como un proceso matemático, ligado a "ejercitarse en la formulación e investigación de conjeturas, aprender a evaluar argumentos y demostraciones matemáticas", está orientado a que "los estudiantes conozcan y sean capaces de identificar diversas formas de razonamiento y métodos de demostración" (Pág. 16, Estándares Curriculares Nacionales)

Desde esta perspectiva, el razonamiento a lo largo del documento además de presentarse como una temática mas del currículo, no muestra articulación con el desarrollo de los pensamientos en los diferentes grados, sino que se limita al aspecto de "identificar y ejercitar".

De lo anterior se puede deducir que el planteamiento de los Lineamientos, respecto a que el proceso de razonamiento debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y debe articular todas las actividades relacionadas con el área, en cada uno de los grados, se pierde completamente en la propuesta de estándares. Para su análisis veámoslos:

GRADO	ESTANDAR DE RAZONAMIENTO
PRIMERO	Observa patrones y hace conjeturas respecto de su comportamiento
SEGUNDO	Hace conjeturas acerca de los números y examina casos particulares en busca de contraejemplos o argumentos para demostrarlas
TERCERO	Encuentra ejemplos que cumplen o refutan una afirmación matemática
CUARTO	Obtiene conclusiones lógicas de situaciones matemáticas mediante el uso informal de razonamiento tanto deductivo como inductivo
QUINTO	Verifica la validez lógica de los procedimiento utilizados en la solución de un problema
SEXTO	Comprende los conceptos de proposición y valor de verdad; analiza correctamente el uso de los conectivos lógicos (y, o) y los utiliza para construir conjunciones y disyunciones
SEPTIMO	Reconoce una proposición condicional y sus componentes; da ejemplos de ellas e identifica condiciones necesarias y suficientes para que una proposición condicional sea verdadera o falsa; argumenta en forma convincente a favor o en contra de alguna proposición matemática
OCTAVO	Presenta demostraciones directas o indirectas de proposiciones matemáticas significativas
NOVENO	Establece la validez de conjeturas geométricas mediante la deducción; aplica leyes básicas de la lógica para determinar el valor de verdad de algunas proposiciones compuestas; explica o justifica cómo llego a una conclusión o a la solución de un problema
DECIMO	Identifica las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales la solución de un problema o la demostración de un teorema permanece válida
ONCE	Hace razonamientos matemáticos coherentes, explica y justifica sus deducciones e inferencias

En los enunciados anteriores no se menciona el uso de modelos, de hechos conocidos, de propiedades o relaciones de los objetos matemáticos involucrados en una situación; tampoco se considera que el razonamiento es fundamentalmente un proceso cognitivo que requiere y hace parte de la estructura conceptual de los estudiantes, esencial para el análisis de situaciones matemáticas. Respecto a procesos en los que se requiere la manipulación y exploración de ejemplos y de casos particulares, la elaboración sistemática de afirmaciones, conjeturar, probar, estructurar argumentos y generalizar, si bien, algunas de estas acciones se mencionan en los Estándares, aparecen dispersas, con el riesgo de ser interpretadas como temáticas a ejercitarse, esporádicamente, en el grado para el que están propuestas.

Si el razonamiento se concibe como un proceso ligado al desarrollo del pensamiento matemático, no se entiende cómo en los Estándares éste se liga a los pensamientos solo en dos de los grados, en segundo cuando se expresa que el niño hace conjeturas acerca de los números y en noveno cuando habla de enunciar conjeturas geométricas. Así, el razonamiento, como proceso transversal, no es de ninguna manera intención del documento de Estándares.

En lo relativo a la secuencialidad en las formas de razonamiento, a la que se hace mención en los Lineamientos y que se reitera en los estándares del NCTM, en el documento de Estándares colombianos se privilegia el razonamiento formal inductivo y deductivo, otras formas no se tienen en cuenta y otras se mencionan tangencialmente. En el NCTM las demostraciones indirectas y el uso del principio de inducción, como ya se dijo, se proponen para la formación universitaria. El documento de Estándares del MEN introduce desde el grado octavo estos aspectos e incluye desde sexto elementos formales de la lógica proposicional colocando de nuevo el énfasis, como se había hecho en propuestas anteriores muy cuestionadas, en el reconocimiento de términos, conectores, cuantificadores, reglas de inferencia y no en la riqueza del razonamiento y en el uso con sentido de la argumentación, la comunicación y la resolución de problemas en situaciones significativas para el nivel o grado.

Reiteramos nuestra crítica proponiendo la siguiente cita:

> *"La capacidad de establecer nuevas relaciones entre unidades de información que constituyen un concepto se expresa mediante una secuencia argumentativa a la que solemos llamar razonamiento. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar unos conceptos de otros o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas. En matemáticas, además del razonamiento deductivo, se emplean el razonamiento inductivo y el analógico, en cualquiera de los tipos de razonamiento se utilizan destrezas de diferentes clases. Cuando un determinado razonamiento se ejecuta con unas pautas de rigor, precisión, concisión y elegancia se estandariza con alguna denominación especial: prueba, teorema, etc. En el trabajo con alumnos...un razonamiento será todo argumento suficientemente fundado que dé razón o que justifique una propiedad o relación. Las capacidades de expresión y comunicación de los alumnos las consideramos como una parte importante de su capacidad de razonamiento."*[2]

Acerca de la comunicación

En los Lineamientos se plantea la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas.

[2]Rico, Luis: *Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas*. Revista Ema. Vol 1, 4-24. Bogotá. 1995

Expresan, además, que la comunicación ayuda, a los estudiantes, a construir vínculos entre sus nociones informales y el lenguaje de las matemáticas, cumple una función clave como apoyo para que tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y tabulares de las ideas matemáticas. Cuando los estudiantes se dan cuenta, que una representación es capaz de describir muchas situaciones distintas y aprecian que hay formas de representación mas útiles que otras comprenden realmente la flexibilidad y utilidad de las matemáticas.
En los lineamientos se anota, igualmente, que la comunicación se da en el aula de matemáticas cuando se trabaja en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un procedimiento, cuando propone un método para resolver un problema, cuando construye una representación gráfica y argumenta sobre ella, cuando propone una conjetura...etc.
Para que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente se deben crear ambientes en que la comunicación sea una práctica usual y natural, que permita a todos:

- Adquirir seguridad para preguntar, para explicar razonamientos, para argumentar, para resolver problemas.
- Leer, interpretar, discutir, escuchar y negociar ideas. Escribir sus ideas, hacer informes orales en los cuales comuniquen a través de gráficas, palabras, ecuaciones, tablas, representaciones físicas; pasar constantemente del lenguaje cotidiano al de las matemáticas.

Un ejemplo de secuenciación de este proceso, para el desarrollo curricular aparece en el NCTM, allí se propone: hasta 4° grado relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, relacionar el lenguaje diario con el lenguaje de los símbolos matemáticos, darse cuenta de que el representar, discutir, leer, escribir y escuchar en matemáticas es parte fundamental para el aprendizaje y uso de las matemáticas en la escuela. De 5° a 8° grado se asocia la comunicación con el uso de métodos escritos, orales, concretos, pictóricos, gráficos y algebraicos; se insiste en trabajar destrezas como leer, escuchar y visualizar como un recurso para interpretar y evaluar ideas matemáticas. Para los grados superiores 9° a 12° se propone enfatizar en argumentaciones orales y escritas sobre situaciones matemáticas y no matemáticas.

¿Y qué se plantea sobre la comunicación en el documento de Estándares propuestos por el MEN?

La comunicación matemática, en los estándares curriculares nacionales, se refiere a “incluir actividades en el currículo que les permitan (a los estudiantes) comunicar a los demás sus ideas matemáticas de forma coherente, clara y precisa” (pág 16)
Nuevamente, la comunicación, más un que proceso, se considera como una actividad anexa en el currículo, no como un elemento dinamizador y de significado en la construcción de conocimiento matemático escolar en los diferentes grados.

Los aspectos planteados desde los Lineamientos se diluyen a través de enunciados repetitivos y esquemáticos grado a grado, veamos:

GRADO	ESTANDAR DE COMUNICACION
PRIMERO	Utiliza el lenguaje de las matemáticas para describir algunas de sus actividades cotidianas
SEGUNDO	Utiliza con propiedad la terminología matemática estudiada hasta el momento
TERCERO	Representa y comunica ideas matemáticas mediante representaciones concretas o diagramas
CUARTO	Explica la solución de un problema de manera lógica y clara y apoya su solución con evidencia tanto escrita como oral
QUINTO	Presenta los procedimiento y resultados de un problema de manera clara, suscitan y correcta
SEXTO	Utiliza el lenguaje de las matemáticas para comprender y explicar situaciones complejas
SEPTIMO	Utiliza lenguaje, notación, símbolos matemáticos para presentar, modelar y analizar alguna situación problemática
OCTAVO	Expone ante una audiencia, de manera convincente y completa, argumentos matemáticos
NOVENO	Utiliza el lenguaje matemático de manera precisa y rigurosa en sus trabajos escritos y presentaciones orales
DECIMO	Se comunica matemáticamente mediante una variedad de herramientas y argumentos sólidos
ONCE	Lee, comprende y asume una posición frente a una variedad de textos que utilizan lenguaje matemático; se comunica por escrito y de manera oral en forma clara, concisa y precisa mediante el uso adecuado y riguroso del lenguaje matemático

Aunque en los anteriores enunciados aparecen aspectos mencionados en los lineamientos, con respecto a este proceso las propuestas curriculares deben incluir situaciones en las que se "de la oportunidad para que los estudiantes comuniquen sus ideas matemáticas y hablen sobre las matemáticas". En el documento no aparece la comunicación como un proceso ligado al aprendizaje significativo de las matemáticas, como sí se sugiere en los lineamientos. Con enunciados genéricos, que se repiten grado por grado, no se aprecia como se potencia un avance a medida que se supera un nivel , para el docente serán de nuevo aspectos aislados a trabajar ocasionalmente y sin contexto o relación alguna con los llamados, en los lineamientos, conocimientos básicos. Con respecto a los otros procesos no se con la resolución de problemas ni con el razonamiento, una reflexión en este sentido podría aclarar, por ejemplo, como el uso de uno u otro sistema de representación adecuado para un determinado grado permite a los estudiantes construir nuevos conceptos y usar matemáticas escolares con verdadera propiedad.

En términos generales la comunicación matemática como proceso que involucra expresar ideas, interpretar, evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, traducir de un tipo de representación a otra, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas, no se ve reflejada en el contenido de los estándares, puesto que sus enunciados se centran en mencionar formas de comunicación y representación, pero colocando el acento en “uso de lenguaje simbólico formal”, en la “corrección”, “precisión” y “rigor”.

Como ejemplo de lo anterior, en el grado quinto se lee: “Presenta los procedimientos o resultados de un problema de manera clara, sucinta y correcta»; en grado noveno: “Utiliza el lenguaje matemático de manera precisa y rigurosa en sus trabajos escritos y presentaciones orales» y en grado once: “se comunica por escrito y de manera oral en forma clara, concisa y precisa mediante el uso adecuado y riguroso del lenguaje matemático”

Para finalizar, es necesario mencionar sobre los procesos de modelación y de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos descritos en los Lineamientos de Matemáticas que, aunque no son mencionados en el documento de Estándares, los consideramos fundamentales durante la formación en la educación básica y media y que deberían estar incluidos en el documento de estándares que se proponga para estos niveles educativos.

Bibliografía

DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

ERNEST, P., (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Basingstoke: The Falmer Press. Pont-A-Mousson: Tópiques éditions.

LLINARES, S. y SANCHEZ, M.V. (Eds.) (1990). *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

MASON, J. y otros. (1992). *Pensar matemáticamente,* Barcelona: Labor.

MORENO, L. y WALDEGG, G.. (1992). *Constructivismo y Educación Matemática*. En: Educación Matemática, Vol.4, No 2. p. 7-15.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sevilla: Edición en castellano Sociedad Andaluza de Educación Matemática “THALES”.

__________ (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston (VA): NCTM.

__________ (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*.

RICO, L. (1995) *Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas*. En: EMA, Vol. 1, No. 1. p. 4-24.

SANTOS, L. M. (1992). *Resolución de Problemas; El trabajo de Alan Shoenfeld: Una propuesta a Considerar en el Aprendizaje de las Matemáticas*. En: Educación Matemática, Vol. 4, No. 2. p. 16-23.

_____________ (1993). *La naturaleza de las Matemáticas y sus implicaciones didácticas*. En: Mathesis, Vol. 9, No. 4.