El fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático.

Luis Carlos Vargas Zambrano

Jeisson Fabián García Chacón

Universidad La Gran Colombia

Facultad de Ciencias de la Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información

Bogotá D. C

2017

Dedicada:

A todas las familias víctima del fenómeno social de las balas perdidas en Colombia.

A quien me enseñó a leer, escribir y contar, de quien heredé la pasión por las matemáticas, de quien aprendo cada día a educar con amor… a Rosa Helena, mi madre, mi primera maestra.

Luis C. Vargas Z.

A Josefa, mi abuela, quien me dedicó con amor su vida; a Claudia, mi madre, quien me dio la vida; a Santiago, mi hijo, quien da razón a mi vida.

Jeisson F. García C.

Agradecimientos.

Al profesor Carlos Eduardo León Salinas por su acompañamiento, recomendaciones y confianza en la elaboración de este trabajo de investigación.

A los estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids por su disposición y entusiasmo en hacer parte de este proyecto.

A los docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información por su entrega en la formación disciplinar, didáctica y en valores.

RESUMEN.

El diseño de un laboratorio social en matemáticas como escenario para la construcción social de las representaciones de lo cuadrático, hace parte de un discurso renovado en la enseñanza de las matemáticas donde se pretende fortalecer la interacción entre: la matemática escolar y la experimentación, desde la modelación de un fenómeno físico; la matemática escolar y el entorno, desde la modelación de un fenómeno social; y la matemática escolar y el concepto, desde las representaciones.

La modelación matemática como práctica social es el proceso normativo, discursivo y práctico que permite la construcción de lo cuadrático desde las representaciones a partir de dos prácticas de referencia: la primera de ellas, el fenómeno de las balas perdidas en Colombia y la segunda el movimiento parabólico, una vinculada a la otra, las cuales orientan el laboratorio social para la construcción de lo cuadrático compuesto por cinco fases y mediado por la implementación del software aplicativo Libre Tracker.

Estudiantes de grado sexto y séptimo de Básica Secundaria pertenecientes al semillero de investigación Mathema Kids hacen un recorrido completo por el laboratorio, para culminar en la apropiación de las representaciones próximas al objeto matemático de estudio, y así reflexionar desde las matemáticas en un fenómeno social particular.

Palabras Clave: laboratorio social, socioepistemología, movimiento parabólico, función cuadrática, modelación, representación, software aplicativo libre Tracker, balas pérdidas.

ABSTRACT.

The design of a social laboratory in mathematics like scenario for the social construction of the quadratic's representations, this part of a renovated speech in the mathematics teaching when the intention is to strengthen the relation between: school mathematics and the experimentation, since a physical phenomenon; the school mathematics and the environment, since a social phenomenon; and the school mathematics and the concept, since the representations.

Mathematical modeling like a social practice is a normative process, discursive and practical to permit the construction of the quadratic's representations since two reference practices: first of them, the phenomenon of the lost bullets in Colombia and the second parabolic motion, one linked to another, which guide the social laboratory for the quadratic's construction made up for five phases and mediated by the free application software Tracker implementation.

Students of sixth and seventh grade of High School belong to the investigation group Mathema Kids do a complete route for the laboratory, ending in the representations appropriation near to mathematical object of study, and so to reflect since mathematics about a particular social phenomenon.

Key Words: social laboratory, socioepistemology, parabolic motion, quadratic function, modeling, representation, free application software Tracker, lost bullets.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS.

LISTA DE ILUSTRACIONES.

El fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático.

1. INTRODUCCIÓN.

La presente investigación "el fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático" según Cobb y Gravemeijer (2008) se entiende como una investigación de diseño porque establece una situación de enseñanza y aprendizaje, partiendo de un problema, objetivos instruccionales, variables de estudio como de entorno, presentes en el contexto de trece estudiantes de sexto y séptimo del Semillero de Investigación Mathema Kids, para el diseño experimental de un laboratorio social en física y matemáticas mediado por las tecnologías de la información.

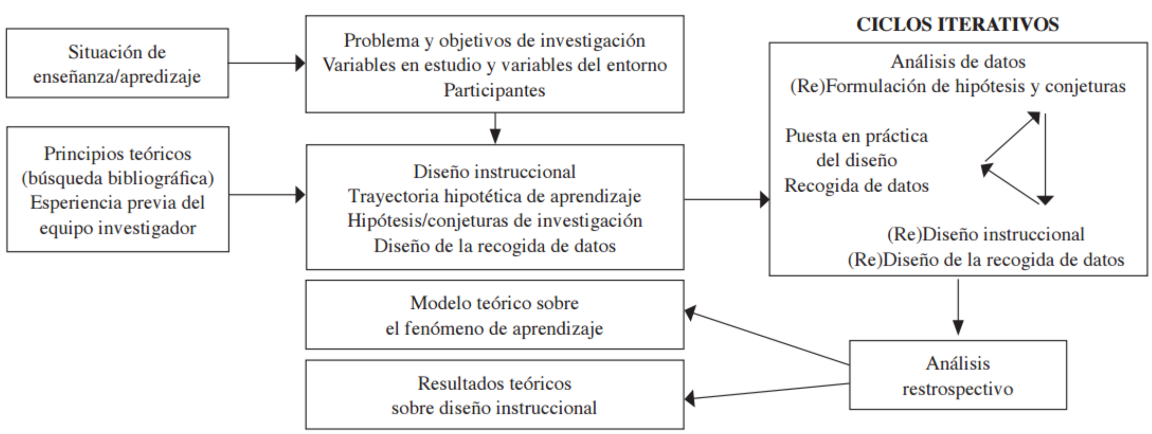


Ilustración 1: Estructura general de investigación de diseño Cobb y Gravemeijer (2008), ilustración tomada de "un acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los experimentos de enseñanza" (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011).

El problema de investigación se fundamenta a partir de la evidente separación entre las políticas públicas en Educación Matemática y la Teoría Didáctica de la Matemática Educativa, que hacen visibles los divorcios entre la matemática escolar con el concepto, el entorno y la experimentación, el primero de ellos se abordará desde la Teoría Conceptual de las Representaciones, el segundo desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y el tercero desde la modelación como practica social, direccionados en una pregunta de investigación y cuatro objetivos instruccionales justificados bajo la propuesta de un laboratorio social de matemáticas que modele el fenómeno social de las balas perdidas y el fenómeno físico del movimiento parabólico, acudiendo al concepto matemático de función cuadrática, combatiendo la separación entre matemática escolar-concepto, matemática escolar-entorno y matemática escolar-experimentación y así fortalecer en estudiantes las competencias de pensamiento, comunicación y convivencia desde las matemáticas, en el marco de una línea de investigación central de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad La Gran Colombia para la pedagogía y educación para la inclusión y la equidad social, y una línea de investigación primaria para la sociedad del conocimiento y tic, procesos educativos inclusivos.

El diseño de un laboratorio social como diseño de experimento enmarca la metodología en cinco fases, dos de ellas correlacionadas con la preparación de un experimento, las dos siguientes sustentadas en la experimentación y la última de ellas propuesta para el análisis retrospectivo del laboratorio social, un análisis planteado en tres categorías: lo cotidiano, la matematización y la familiaridad con el contexto, orientadas desde la Teoría de las Representaciones, cuyo análisis retrospectivo culmina en el diseño de un modelo que describe el fenómeno de aprendizaje, para finalmente concluir cada uno de los cuatro objetivos en los cuatro principios de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

2. ANTECEDENTES.

La Educación Matemática en Colombia tiene como finalidad desarrollar el pensamiento lógico matemático para la adquisición de competencias racionales, comunicativas, argumentativas, propositivas, críticas y de resolución de problemas; propias de la construcción y manipulación de modelos matemáticos eficaces aplicables en la solución de pruebas estandarizadas y en su contexto.

Biembengut y Hein (2004) afirman que el mecanismo para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de cualquier nivel educativo es tarea de cada uno de los profesores que imparten dicha disciplina, poder utilizar una práctica que involucre los fenómenos y situaciones del individuo con conceptos analíticos matemáticos. La modelación matemática vista como la representación de realidades con objetos metales abstractos vinculados con las matemáticas, busca facilitar la aprehensión de conocimiento matemático en estudiantes, a partir de la contextualización o adaptación a un concepto teórico para su demostración empírica, es decir, se construye, se experimenta y se analizan representaciones propias del estudiante, aterrizadas a generalidades de un concepto y un entorno particular.

Según Suárez y Cordero (2008) pretenden inferir en la evolución, la adquisición y la producción de conocimiento vinculado con la forma de organizar, justificar y jerarquizar las ideas e información a través de representaciones, reconociendo y relacionando en matemáticas dos términos particulares, la modelación y la graficación, presentes concretamente en la matemática escolar. Hay diversas formas de definir tanto la modelación como la graficación, teniendo en cuenta que una corresponde a un proceso generalizado y la otra a una habilidad necesaria para llevar a cabo dicho proceso. En la escuela se entiende la modelación como un proceso articulado entre la analítica matemática y la aplicabilidad en contexto y la graficación como una habilidad para representar, generalizar, comparar y leer modelos de forma sencilla.

¿Qué ganancia se tendría al introducir en el sistema escolar una categoría sustentada en un binomio modelación-graficación, que articule, precisamente, la modelación y la graficación, en otras palabras, proporcione una caracterización de actividades donde la modelación escolar esté anclada a la graficación?; interrogante que plantean y resuelven los autores; proponiendo una tarea a un grupo de estudiantes, en la que se pide graficar una situación de movimiento, en que una persona se aleja de un punto de partida y regresa en un tiempo determinado, y piden también describir la variación que se da en tal situación; tomando como referencia a estudiantes que han cursado álgebra, geometría analítica y cálculo; esto con el fin de que puedan hacer uso de sus conocimientos para responder de forma más efectiva a las actividades de modelación ancladas en la graficación. Dentro de este proceso con los estudiantes, dentro de la investigación se determinó que el conocimiento que un estudiante adquiere en su paso por la escuela se encuentra aislado y no existe una transferencia espontánea que permita que use el conocimiento matemático, que sea funcional; pero por otro lado, se afirma que hay cierta clase de actividades que están intrínsecamente relacionadas con el conocimiento mismo y sí permite que el conocimiento se haga funcional.

Después de realizada la actividad con los estudiantes, los investigadores realizaron un diagrama, donde se muestra cómo el eje de argumentación la resignificación del conocimiento matemático: en primer lugar, se resignifican los conocimientos del estudiante asociados a los ejes coordenados, a la velocidad y a las gráficas de ecuaciones y de funciones hacia el comportamiento que debe seguir una curva cuando está relacionada con una situación de variación; se resignifican los procedimientos cuando de una expresión algebraica se obtiene una curva, de ahí, la relación entre la variación de los parámetros de una situación de movimiento y las características de la gráfica, y se resignifica la centración en la función analítica hacia la situación de variación que rige las características de la gráfica.

La variación representada por medio de gráficas, sopesada por una situación en contexto, seguido de la implementación gráfica para la modelación, que trae como consecuencia un planteamiento de argumentos, mediados por unos elementos iniciales para la toma de decisiones y por último una funcionalidad de los resultados, ahora, para lograr una resignificación del componente variacional del cálculo es clave plantear una dinámica de trabajo que involucre un proceso de modelación o en su defecto de simulación para una discusión final verbal, ligado a teorías conceptuales matemáticas como las representaciones. Para la educación matemática es coherente incentivar que el sujeto plantee la misma información de diferentes formas condicionado al cuestionamiento de pares y docentes en el marco de la rigurosidad de la disciplina, entonces es el punto donde se hace visible la resignificación para la enseñanza de temáticas específicas, por ejemplo: partiendo del uso de las representaciones propias de un movimiento en donde es necesario el cálculo de velocidades en distancias determinadas, el cálculo de la velocidad promedio esta modelada por una gráfica con cualidades de una función cuadrática, entonces a partir de la variabilidad se puede determinar si corresponde a una gráfica cóncava hacia abajo, hacia arriba, decreciente o creciente, cuando un sujeto determina y representa, sea con una gráfica, una tabla o incluso verbalmente, entonces, se puede afirmar que se apropió del concepto y solo faltaría formalizar su lenguaje.

Con este trabajo, los investigadores concluyeron que se hacen explícitos procedimientos y relaciones referidos a un diseño de situación. Ellos establecen desde el análisis a priori y posteriori una configuración a través de las evidencias de los estudiantes. La identificación de esos elementos de funcionamiento y forma en la variación utilizando la graficación, son los principales aportes desde el punto de vista epistemológico. En lo científico ellos pudieron adaptar momentos para la situación como elementos de forma, construcción de argumentos y de funcionalidad, todos ellos agrupados en la justificación funcional, que constituyó una vía para la validación de las hipótesis de investigación. Lo segundo, se refiere al aporte a la socioepistemología de la modelación graficación, dado que se tienen evidencias desde el trabajo de los estudiantes congruentes con la hipótesis que se planteó, lo que contribuye a la validación del planteamiento teórico.

Enrique Huapaya Gómez (2012) de la Universidad Católica de Perú, en su tesis de maestría “modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de quinto de secundaria”, plantea una serie de experimentos de instrucción que promuevan prácticas de modelación mediadas por el software Microsoft Office Excel y el graficador Función Win32 para favorecer el aprendizaje de la función cuadrática. La teoría de las representaciones es el sustento metodológico y que establece el análisis de los modelos matemáticos de los estudiantes definidos en dos experimentos de enseñanza que permitieron evidenciar el paso a paso entre la representación verbal, la representación numérica, la representación gráfica, la representación algebraica y la representación verbal.

La principal apreciación final de la investigación es que la implementación de software aplicativo en "prácticas de modelación de situaciones problema, haciendo uso de diversas representaciones, incide favorablemente en el aprendizaje y comprensión del concepto de función cuadrática" (Huapaya, 2012, pág. 125) asociado a lo anterior la estrategia didáctica MEA del inglés "Model Eliciting Activity" – Actividades para la Producción de Modelos se convirtió en la herramienta adecuada para el diseño de los instrumentos, articulándose adecuadamente con la teoría de Duval y generando en el estudiante la capacidad de asociar al objeto función cuadrática, tomar dos o más representaciones y transitar entre ellas durante las prácticas de modelación.

Gómez (2016), en su trabajo de grado para optar el título de magister en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, implementa el programa de Tracker como herramienta de análisis y de ayuda en la adquisición o afianzamiento del conocimiento, en algunas situaciones de cinemática y dinámica en dos dimensiones, aplicando el método de aprendizaje activo. El autor afirma que: "la enseñanza de la física debe generar conocimientos y saberes propios que acerquen a los estudiantes en la construcción de conocimientos y la comprensión y explicación de los fenómenos físicos naturales, para su vida cotidiana, por medio de estrategias pedagógicas variadas"; y propone para este trabajo, analizar tres escenarios de tipo experimental "Rebotar y rebotar", "¿cómo en un columpio?", y "montando bici", entre cinemática y dinámica, donde el estudiante interactúe, observe, estudie y analice, tanto de forma individual como de forma grupal, un determinado evento físico por medio de la práctica de laboratorio.

La primera y segunda de estas prácticas de laboratorio, están relacionadas con el movimiento en dos dimensiones: el movimiento parabólico o también llamado movimiento de

> proyectil, llamando esta actividad como “Rebotar y rebotar” para la primera; y sobre cantidad de movimiento en la segunda, llamando esta actividad “¿Cómo en un columpio?”. Para la última práctica de laboratorio, relacionada en una dimensión: movimiento rectilíneo uniforme, llamando esta actividad montando bici (Gómez, 2016, pág. 43).

Para la implementación de este trabajo, el autor seleccionó 130 estudiantes de grado décimo, en edades de 15 a 17 años, de la Institución Educativa Distrital “Liceo Femenino Mercedes Nariño”, jornada mañana, de la ciudad de Bogotá, localidad Rafael Uribe Uribe. De igual forma seleccionó a veinte docentes del área de física, de los cuales, diez son estudiantes de la maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, de la Universidad Nacional de Colombia; de instituciones de carácter tanto público como privado, los cuales “expondrían las diferentes formas de abordar por parte de ellos, determinadas situaciones temáticas por medio de un cuestionario”. Para alcanzar el objetivo de esta investigación; Gómez (2016) afirma que analizó una serie de instrumentos de recolección de información, para un diagnóstico inicial, aplicado a estudiantes y docentes; y además para el desarrollo de la investigación, las prácticas del laboratorio con la implementación del programa Tracker, concluyendo que el escenario físico fortalece el proceso de modelación matemática desde la experimentación.

Identificar la modelación desde la matemática aplicada es legítimo, Sixto Ríos (1975) padre de la estadística española, en el capítulo modelos matemáticos de su libro de matemática aplicada, manifiesta que a partir de la ejemplificación de un modelo matemático se puede introducir el concepto justificado desde la experimentación para el cumplimiento de un objetivo de enseñanza. En su caso particular relaciona por medio de la estadística los fenómenos experimentales y empíricos con la matemática, y formaliza un proceso lógico deductivo en una disciplina inductiva como la matemática, para el tratamiento y presentación de datos de un modelo matemático se establece una fase estadística sustentada por la experimentación. La obtención de datos corresponde a la transición existente entre la experimentación y la graficación en un consolidado proceso de modelación matemática, en donde se pretende establecer relaciones entre las variables involucradas en el fenómeno.

Un fenómeno experimental reconocido desde la matemática aplicada es un modelo empírico que bajo la experimentación estadística busca conceptualizar una idea matemática, que establece relaciones por medio de un proceso lógico deductivo. Para obtener un modelo matemático es necesario pasar por etapas de modelado, desde un fenómeno, hasta una apropiación coherente del concepto: la estadística es una herramienta fundamental en el empalme entre la experimentación y la modelación de un fenómeno, la estadística es el ejemplo más claro de la conceptualización de un modelo matemático, para la consolidación de un proyecto de investigación la estadística es capaz de dar soporte cuantitativo en un discurso cualitativo, privilegiando el orden, la interpretación unificada y uniforme en la metodología de investigación.

Búa Ares y Fernández Blanco (2015), en su artículo llamado: dos ejemplos de modelización matemática en fenómenos físicos; basados en la XIV conferencia Interamericana de Educación Matemática; presentan dos ejemplos de modelación matemática basada en fenómenos físicos, en el primer ejemplo, el problema se plantea a partir del comportamiento de un muelle sometido a un peso y el segundo ejemplo se trata del comportamiento de aceite de uso doméstico vertido en agua, estas dos actividades según los autores fueron propuestas a alumnos de primero de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Bachillerato Científico-Tecnológico (16-17 años de edad) durante los cursos 2010-2011 y 2011-2012, como actividades extracurriculares y de carácter voluntario.

Las actividades propuestas fueron realizadas una seguida de la otra con un espacio de tiempo de dos semanas entre las dos, y para realizar estas actividades los investigadores optaron por escoger esta población, teniendo en cuenta que ya habían abarcado el plan de estudio matemático en lo que refiere a las operaciones con funciones, límites, continuidad, derivada, representación gráfica de funciones, etc. Para iniciar se hace una distribución de los estudiantes para crear grupos de trabajo y se les facilita un laboratorio, los recursos físicos y tecnológicos necesarios para un trabajo efectivo y eficaz; como primera medida se les realiza una introducción general sobre el uso y características de la herramienta tecnológica matemática, GeoGebra.

La primera sesión de trabajo corresponde a la obtención de datos en el laboratorio, en donde evidencian que la actividad del muelle no presentó ninguna dificultad, en lo que refiere a la actividad del comportamiento del aceite de uso doméstico vertido en el agua, presentó algunos inconvenientes respecto al vertimiento de cantidades fijas o concretas sobre el agua, la segunda es la sesión dedicada a la obtención de la función de ajuste, en donde se les suministra información a los estudiantes sobre las gráficas básicas de funciones fundamentales, para efectos de establecer la que mejor se ajusta a los datos obtenidos, inicialmente y en la tercera se proponen una serie de cuestiones o preguntas alrededor del modelo matemático obtenido; en el caso de la actividad del comportamiento del aceite de uso doméstico vertido en el agua se añade una sesión más de aplicación del modelo, utilizando una situación real de vertido contaminante de petróleo en la costa cercana al centro de estudios de los estudiantes, pero esta vez con unas características adicionales, que tiene que ver con las diferentes condiciones que rodean este incidente.

Dentro de los resultados obtenidos por los investigadores se dieron cuenta que se evidenciaba un trabajo relajado y eficiente, un participación constante y activa, que hacen una distribución equitativa de la asignación de roles dentro de su grupo de trabajo y asumen responsablemente la obtención de los datos; además evidencian en la mayor parte de la actividad un trabajo concienzudo y autónomo.

En este artículo se resalta la importancia de la modelización matemática como actividad necesaria para introducir en la enseñanza secundaria de forma obligatoria y como esta representa un reto tanto para el estudiante como para el profesor; además, se aclara que se hace imprescindible que el profesor sea consciente de que la modelización representa un proceso complejo en el que pueden no hacerse evidentes los errores, dificultades u obstáculos de los alumnos asociados a los conceptos, nociones y conocimientos.

Los logros deseados en esa investigación se refieren, por una parte, a proporcionar elementos para el desarrollo de la perspectiva teórica, la socioepistemología, y además mostrar evidencias que sustentaran sus afirmaciones en lo teórico, por otra parte pretendían aportar elementos para ser incorporados en el quehacer cotidiano de profesores en el aula.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

No hay verdad más perfecta que aquella que se demuestra en sí misma. Sin recurrir a nada sino únicamente a su propia teoría, la matemática se consolida como herramienta indispensable para todas las ciencias exactas que recurren a ella en su afán de descubrir, construir, predecir, explicar, justificar y refutar hechos, sin duda es contradictorio saber que la "lógica deductiva es la única disciplina que no precisa confirmación experimental… se justifica por sí misma" (Wagensberg, 2013) y se encuentra en función de la ciencia, sin desconocer que "el fin último de la ciencia es describir el universo sin invocar lo sobrenatural; el hecho de no conseguir explicar racionalmente la efectividad irracional de las matemáticas… es una enorme laguna en el saber de la humanidad" (Johnson, 2014). Si se han de concebir las matemáticas con esa perfección, muy seguramente la noción de gran porcentaje de niños, jóvenes y adultos ubicados en el sistema educativo actual colombiano comprendido en nivel Básico, Medio y Superior respecto a las matemáticas, no sería inconsistente con respecto a la perfección.

El Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes PISA generó indicadores de calidad educativa para Colombia con una muestra de estudiantes de quince años, independiente a su grado de escolaridad.

> El análisis de los resultados 2012 hace énfasis en matemáticas, área en la que siguen siendo preocupantes los resultados para Colombia y en la que el país muestra una gran brecha con relación al promedio de países de la OCDE Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico… En matemáticas se evalúa la capacidad para reconocer y formular problemas, así como para plantear, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. También se incluye el razonamiento y la utilización de conceptos, procesos e instrumentos para describir, explicar y predecir fenómenos (Ministerio de Educación Nacional, 2013).

En el mismo año, Colombia con un puntaje promedio de 376 al igual que los demás países latinoamericanos participantes, tiene desempeños inferiores al promedio de los países de la OCDE, esto quiere decir que el nivel es insuficiente para acceder a estudios superiores, de los seis niveles, siendo el número seis es el más alto, Colombia tiene un nivel uno, por lo tanto los estudiantes colombianos:

> Son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. Son capaces de identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios conforme a instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden llevar a cabo acciones que sean obvias y seguirlas inmediatamente a partir de un estímulo (OECD, 2006).

Entonces, un joven colombiano a puertas de ingresar a la Educación Superior tiene dificultades en la interpretación de las representaciones y extraer la mayor información de las mismas, en el implemento de estrategias para la solución de problemas usando algoritmos, y en el trabajo y desarrollo de modelos matemáticos; en este último aspecto se puede afirmar que Colombia no es competente en modelación matemática hasta que supere el nivel tres, alcanzando más de 544 puntos, cuando esto sea así, los estudiantes por lo menos interpretarán modelos explícitos.

Respecto a pruebas Saber 11° 2016 el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación antes conocido como Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES, reportó un incremento notable en los resultados de todas las áreas de la prueba, respecto a matemáticas hubo un incremento de 0,7 puntos en el puntaje medio a nivel Nacional respecto al año anterior; con un promedio de 50,8 matemáticas se posiciona como la cuarta área apenas superando a ciencias sociales-competencias ciudadanas de las cinco a evaluar, este avance significativo, en parte, es provocado por “los programas como Jornada Única, Día E, incentivos, Becas de Excelencia Docente, y Ser Pilo Paga, entre otros” (ICFES, 2016).

Las instituciones educativas oficiales que albergan el 75% de estudiantes de grado undécimo, influyeron positivamente en los resultados Nacionales Saber 11°, vislumbrando una mejora en la formación en matemáticas de los colombianos y acotando un poco la brecha entre educación Media: pública y privada, a su vez, los estudiantes son más competentes en interpretación y representación; formulación y ejecución, y argumentación.

Brevemente; el ICFES (2015) siendo fiel a los estándares básicos en educación matemática define para la prueba de Matemáticas tres competencias:

La interpretación y representación como la competencia para comprender y transformar información delimitada en gráficas, tablas, conjuntos y diagramas, en otras palabras, transitar por representaciones semióticas y extraer la mayor cantidad de información de las mismas.

La formulación y ejecución como la competencia para plantear y diseñar estrategias de carácter matemático para la solución de problemas en contexto, es decir, llevar a cabo procesos de modelación matemática.

La argumentación como la capacidad para validar y contradecir conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones justificándose en algoritmos y modelos propios de la matemática.

Observando e infiriendo las competencias desde la didáctica, un profesor de matemáticas en el correcto ejercicio de su profesión puede:

1. Entender y abordar las competencias como *un proceso dinámico jerarquizado*, generando prácticas y estrategias de enseñanza ordenadas en donde primero se comprenden las representaciones, segundo se modela y tercero se argumenta.
2. Entender y abordar las competencias como *un proceso dinámico conjunto*, generando estrategias y prácticas en donde cada competencia depende de la otra.

En efecto, estas dos son las apreciaciones generales de los docentes en cualquier nivel educativo respecto a la formación de estudiantes competentes en matemática, porque responden a los parámetros de evaluación actual para el área de matemáticas y son afines a las competencias del nivel Básico y Medio. Las competencias evaluadas en las Pruebas Saber 3°, 5°, 7° y 9° son más específicas y concuerdan con los tradicionales lineamientos y estándares emitidos por el Ministerio de Educación Nacional; entonces, el ICFES respalda la prueba de matemáticas para la educación Básica Primaria y Secundaria en competencias: razonamiento y argumentación; comunicación, representación y modelación; planteamiento y resolución de problemas; estructurada por componentes (pensamientos) numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio.

Las competencias en Educación Básica Matemática de colegios oficiales y no oficiales para el grado tercero, quinto y noveno es evaluada por el ICFES con una periodicidad anual desde el año 2012, y para grado séptimo desde el año 2015; la prueba además reúne según el grado áreas como lenguaje, ciencias naturales y competencias ciudadanas, articularse en alguna medida a sus similares Saber 11° y Saber Pro; el Ministerio de Educacional Nacional dice que la Prueba Saber 3°, 5°, 7° y 9°:

> Contribuyen al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana, mediante la realización de evaluaciones periódicas en las que se valoran las competencias básicas de los estudiantes y se analizan los factores que inciden en sus logros … Las pruebas valoran las competencias que han desarrollado los estudiantes… en términos de lo que saben y lo que saben hacer (ICFES, 2010).

Para la Pruebas Saber 3°, 5°, 7° y 9° se establecen cuatro niveles: insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado en donde los estudiantes de un institución educativa se posicionan según sus resultados; dichos resultados son discriminados por área y grado, y comparables respecto a: años anteriores, entidad territorial, tipo de establecimiento educativo y nivel socioeconómico. La siguiente tabla relaciona la distribución porcentual de estudiantes según el nivel de desempeño para el área de matemáticas a nivel Nacional del año 2015:

Nivel	Estudiantes 3°	Estudiantes 5°	Estudiantes 9°	Promedio de estudiantes
Avanzado	27%	13%	4%	15%
Satisfactorio	26%	21%	20%	22%
Mínimo	28%	30%	53%	37%
Insuficiente	19%	36%	23%	26%

Tabla 1: Distribución porcentual de estudiantes prueba Saber 3°, 5° y 9° área de matemáticas año 2015.

Nuevamente se evidencian los resultados negativos en matemáticas, el nivel insuficiente y mínimo alberga el 63% de estudiantes de los tres grados en promedio, aunque cabe destacar que el 53% de los estudiantes de tercer grado se encuentran en nivel satisfactorio y avanzado, este porcentaje disminuye en quinto grado un 19% y en noveno grado un 29% aumentando de forma considerable el nivel de desempeño mínimo e insuficiente en ambos grados respectivamente.

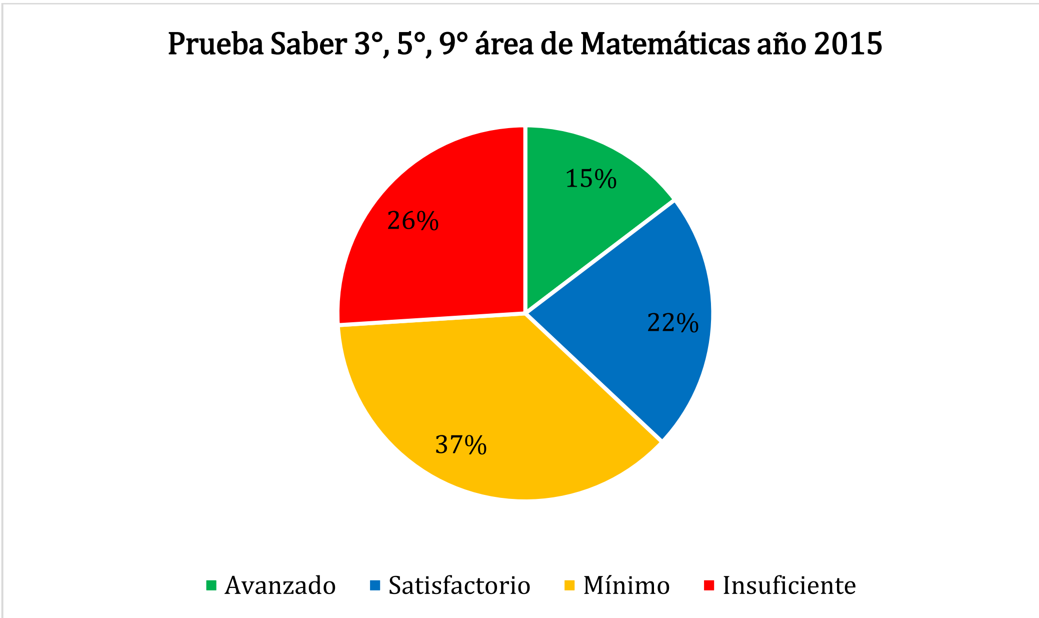


Ilustración 2: Distribución porcentual de estudiantes prueba Saber 3°, 5° y 9° área de matemáticas año 2015.

Los resultados en evaluación de la educación matemática en Colombia son parte del problema de la educación e introducen al problema de esta investigación, eso no se desconoce, paradójicamente la propia matemática sustenta y argumenta con estadística el deficiente estado de la educación, consecuencia de una sociedad moderna colombiana que en Educación Básica y Media ve como una obligación estudiar matemáticas, y para la Educación Superior es ventaja evadir el estudio de esta disciplina; una infografía del Observatorio Laboral para la Educación enviada al diario El Colombiano (2015) revela que matemáticas es uno de los cinco núcleos básicos de menor interés de los colombianos cuando han de escoger una carrera universitaria.

Esa es la realidad que recae sobre los resultados en educación matemática, la cual es auspiciada y analizada por el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes y el Instituto Colombiano para le Evaluación de la Educación, entidades que hoy dominan el paradigma de la evaluación Internacional y Nacional respectivamente, y se han posicionado por el hecho de utilizar los mecanismos indicados para medir las competencias de una persona que goza del derecho a la educación formal; omitiendo el argumento de gran parte del profesorado por el cuestionable, único y excluyente dispositivo censal para evaluar las capacidades de una población de estudiantes diversa en habilidades, intereses y contextos. “No solo pensar que los indicadores de las evaluaciones externas como PISA y las Pruebas Saber es un indicativo de lo que saben o no saben los chicos, sino que el día a día debe dar argumentos o elementos para analizar lo que está pasando, en el desempeño o en la apropiación de los objetos matemáticos”, afirma Teresa Tobón (2015) de la Universidad Nacional de Colombia para el “Foro Transición colegio-universidad. Problemática del rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas”, de la Universidad Javeriana. Seguramente habría argumentos en contra y a favor de los mecanismos actuales para medir los factores de calidad educativa y competencia estudiantil, pero “tal pareciera que bajo el empeño de elevar la calidad educativa, la única vía posible son las pruebas estandarizadas” (Ramos, 2016).

La articulación difusa entre los procesos llevados en la clase de matemáticas y las necesidades actuales en educación, influyen negativamente en los resultados expuestos y en los requerimientos de la Educación Superior en Colombia, sin exceptuar la contradicción y variabilidad entre: lineamientos curriculares, estándares de calidad, lineamientos generales para la presentación del examen de estado, derechos básicos de aprendizaje y la matriz de referencia propuestos por el Ministerio de Educación Nacional; los últimos, mecanismos de control carentes en rigurosidad y coherencia académica.

> "Estamos en un momento coyuntural de muchas debilidades en la propuesta que hay de política de Estado, frente a la formación de pensamiento matemático, a pesar de que investigadores y conocedores del área han participado en diferentes documentos, como los lineamientos curriculares y los estándares básicos de calidad, vemos también cómo salen públicamente documentos que tienen una fundamentación teórica muy débil" (Pantón, 2015).

El panorama respecto a la articulación de Política en Educación Matemática y la Teoría Didáctica no es tan distante cuando se observan tres elementos transversales y de constante uso entre el profesorado:

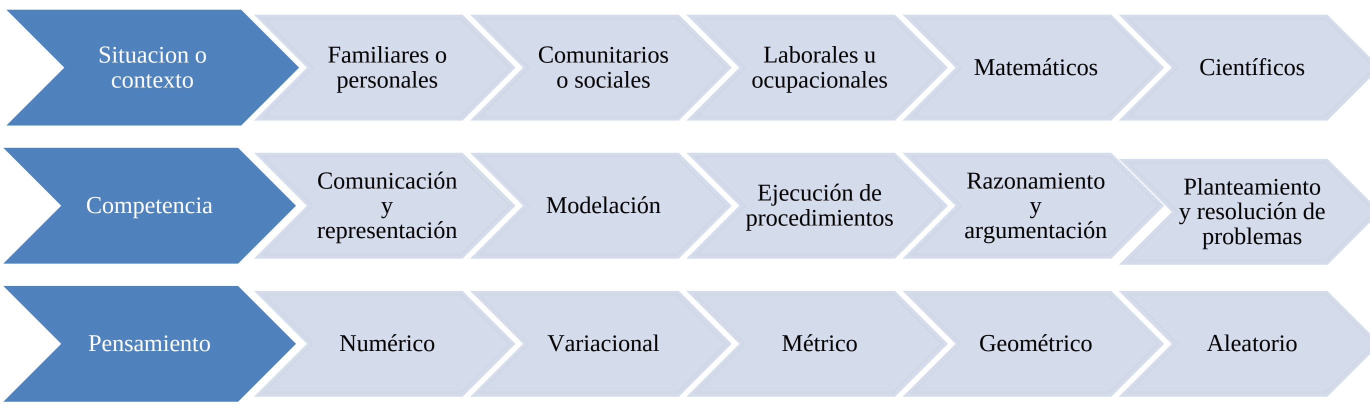


Ilustración 3: Elementos transversales entre Política en Educación Matemática y la Teoría Didáctica Matemática.

El pensamiento, elemento asociado a la teoría conceptual de la didáctica de las matemáticas y la situación o contexto, elemento asociado a la teoría sociocultural de la didáctica de las matemáticas convergen en la competencia, elemento enlace entre ambas teorías; en efecto son los tres únicos conceptos apreciables de la teoría didáctica en los documentos actuales propuestos por el gobierno referentes a educación matemática, y que hacen evidente el divorcio de la Política en Educación Matemática en Colombia actual y la Teoría Didáctica Matemática.

El pensamiento, la competencia y la situación o contexto, son tres elementos claves en la clase de matemáticas para que un Educador Matemático se apropie del *saber sabio,* comprensible para pocos; y lo transponga a un *saber enseñado,* comprensible y útil para muchos; Yves Chevallard (1997) así lo plantea en una muy completa teoría conceptual en didáctica de las matemáticas, que en resumen describe la principal función de un Educador Matemático, crear las estrategias más apropiadas para hacer entendible y sobre todo práctico, lo inentendible. Un profesor de matemáticas incrementa el problema en la enseñanza de las matemáticas, pasando por alto la transposición en su didáctica, o en su defecto no generando la apropiación del concepto matemático desde la manipulación adecuada y ordenada del objeto, haciendo visible el divorcio matemática escolar - concepto.

Cuando se perciben los escenarios históricos, sociales, físicos, culturales e institucionales presentes en las actividades cotidianas, se favorece la construcción social de conocimiento matemático, este siempre ha sido fruto de prácticas, consensos y experiencias sociales, que se difunden de forma institucional o global como investigación y en pro de la investigación; expone Ricardo Cantoral (2013) en una teoría sociocultural de la didáctica de las matemáticas, si se han de concebir las matemáticas omitiendo su constructo social priori y posteriori, conlleva a uno de los problemas más comunes en el aula de matemáticas: el divorcio matemática escolar - entorno.

Las separaciones: matemática escolar – concepto y matemática escolar - entorno, en parte son consecuencia del recurrente y tradicional problema en la educación en general que prioriza la transferencia severa e inútil de conocimiento, una educación bancaria, opresiva, intimidadora e inhibidora fueron y son los adjetivos más precisos a los que acudieron Paulo Freire y Estanislao Zuleta en los tratados más concretos a lo que en educación latinoamericana se refiere; decepcionante que aún, algunos de sus cuestionamientos y sus afirmaciones contundentes en contra del sistema educativo concuerden con la actualidad educativa. Paradójicamente en matemáticas:

> Nunca se nos enseñó -ni se nos creó la inquietud- qué significaba pensar las matemáticas. Las matemáticas nos enseñaban, hasta cierto punto, que sus contenidos eran algo que se debía aceptar, no porque alguien lo hubiera dicho, sino porque era susceptible de demostración. Ese aspecto era muy atractivo en ese mundo del imperio de la autoridad -tan generalizada pero que no siempre es visible- que constituye la realidad y cotidianidad de la escuela (Zuleta, 1985).

Más de treinta años después, la matemática escolar es en sí misma, no ha causado gran interés para la formación de gran porcentaje de colombianos en ciencias y disciplinas exactas, contrario, cuando el estudiante se involucra en el proceso construyendo y cuestionando el conocimiento matemático, aprende, lo hace útil y además adquiere autonomía; pero él no inicia en la construcción o en el descubrimiento, parte de lo que sabe, de su experiencia y de lo que cree conveniente combinar o variar, por eso el divorcio entre la matemática y la experimentación, será la última y no menos importante separación problema en la enseñanza de las matemáticas.

Experimentar es un recurso apropiado en el momento que un Educador Matemático pretende generar motivación e interés por su disciplina, pero nunca es suficiente cuando se trata de cautivar y generar autonomía en el estudiante. La falta de recursos ya no es una excusa valedera en el discurso del profesorado, el papel de la tecnología en educación siempre ha sido el puente más compacto en la relación triangular entre el profesor, el estudiante y el conocimiento.

Antiguas generaciones e incluso la nuestra, en clase de geometría aprendió a trazar líneas paralelas con regla y compás, hoy un software de geometría dinámica y dos clic también lo hace posible, ¿cuál es la diferencia? Ninguna, ambas son dos estrategias que emplean el uso de mecanismos o artefactos tecnológicos y ambas fueron del mismo interés, generaron el mismo asombro y la misma sonrisa cuando se hicieron por primera vez. Con esto, se reafirma que el Educador contemporáneo se encuentra en un océano de recursos tecnológicos materiales, informáticos y de comunicación de fácil acceso inaprovechados, por la falta de capacitación y actualización autónoma, consecuencia del desinterés por el mejoramiento progresivo de los procesos didácticos.

Dentro de los objetivos que tiene el Ministerio de Educación Nacional en el decreto 5012 de 2009 menciona que se debe: "propiciar el uso pedagógico de los diferentes medios de comunicación, como por ejemplo radio, televisión e impresos, nuevas tecnologías de la información y la comunicación, en las instituciones educativas, para mejorar la calidad del sistema educativo y la competitividad de estudiantes del país"; adicional a ello, existe una dependencia encargada de propiciar y fomentar el uso de las Tecnologías de la Información en la educación, "Oficina de Innovación Educativa con Uso de Nuevas Tecnologías"; esta dependencia, entre sus funciones contempla: direccionar a nivel nacional la investigación e innovación educativa que permitan fomentar el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación; y generar las políticas necesarias para el correcto uso y apropiación de estas en la educación. Parra, Gómez y Pintor (2014), afirman que:

> Las TIC son fundamentales para dinamizar las actividades de aprendizaje en las aulas escolares. En un contexto educativo, las TIC pueden ayudar a desarrollar en las personas las competencias necesarias para un buen desempeño en el campo personal, social y laboral (pág 198).

La responsabilidad de que los estudiantes en cualquier nivel educativo, tengan acceso a las nuevas tecnologías de la información dentro de su formación académica, o que los profesores empleen esta alternativa dentro de su proceso de enseñanza – aprendizaje; recae sobre el mayor ente regulador de la educación en Colombia, sin embargo los diferentes actores involucrados dentro de la educación, no pueden ser ajenos a este compromiso, por el contrario, deben trabajar conjuntamente en el aprovechamiento máximo de recursos activos para la educación.

En cumplimiento a estos desafíos y en aras de lograrlos a cabalidad; el Ministerio de Educación Nacional se propuso unas líneas estratégicas, para lograr a Colombia, la mejor educada en el 2025, donde plantea que: “las instituciones educativas contarán con instalaciones adecuadas que permitan el desarrollo óptimo de los procesos educativos, teniendo en cuenta las dinámicas pedagógicas y nuevas tecnologías, con el fin de cualificar los ambientes de aprendizaje” (Ministerio de Educación Nacional, 2013). Adicional a ello se planea la implementación de un utópico establecimiento educativo, colegio 10, que tendrá una serie de características específicas, haciéndolo el espacio educativo ideal; dentro de sus características alude a la implementación de laboratorios específicos para las ciencias naturales, la tecnología y el bilingüismo, mayor conectividad, entre otros.

Se puede ver con satisfacción que en acceso a tecnología el gobierno nacional viene trabajando; según un balance del año 2016 publicado en la página oficial de la presidencia de la república, Colombia, “logró el año anterior avances sustanciales en la conectividad de sus regiones, y en el acceso de las tecnologías de información y las comunicaciones a más ciudadanos, lo que se traduce en más oportunidades de progreso y bienestar”. Parte de estos alcances se destacan: el logro de la conexión de 47 municipios del país que no gozaban de ese servicio; la instalación de 130 zonas “Wifi para la Gente” y el hecho de que más de 230 entidades territoriales se sumaran al trabajo que pretende alcanzar la meta de 2 niños por computador, antes de finalizar el año 2018.

Si bien es cierto que el gobierno ha logrado un avance muy significativo en el uso de las tecnologías de la Información y comunicación en gran parte del país, también es cierto que lugares apartados dentro del territorio nacional u otras en condiciones de orden público complicadas, tienen muy pocas posibilidades de acceso a la tecnología. Según una publicación realizada por el periódico “Altablero” del Ministerio de Educación Nacional, en su edición No. 50:

> La Revolución Educativa asume el reto con la inclusión de los medios de comunicación y las nuevas tecnologías en todos los niveles -desde Preescolar hasta Superior-, definiéndolos y entendiéndolos como una herramienta que otorga equidad y promueve el desarrollo de las competencias básicas, ciudadanas y laborales para mejorar la competitividad de las personas.

“En medio de un mundo que cada vez nos exige más competencias y habilidades de formación, y donde la educación es pilar fundamental de desarrollo, la inmersión tecnológica se convierte en una herramienta esencial” (Colombia Aprende, s.f.) Los docentes no pueden ser extraños a los avances tecnológicos que en muchas ocasiones se presenta de forma gratuita. Es irrisorio ver como docentes se escudan en el hecho de no saber manejar herramientas tecnológicas y más aún argumentar que el Gobierno Nacional no brinda la capacitación necesaria para su aprendizaje. Mediante una consulta realizada en el portal Colombia Aprende, en el país se ha dado apertura a diferentes programas tanto de apropiación personal como de apropiación profesional, para el aprendizaje y fomentación del uso de las tecnologías de la información en Colombia en el ámbito educativo.

Según los resultados de un estudio realizado sobre el uso de las TIC en la práctica pedagógica de los docentes, a un grupo de profesores pertenecientes a instituciones educativas rurales de Cundinamarca, beneficiados en el 2012 con la Estrategia de formación y acceso para la apropiación pedagógica de las TIC - Programa Computadores para Educar; se podría evidenciar que los docentes en su gran mayoría hacen un uso básico de las TICS, es decir, que dentro de su ejercicio profesional, realizan diferentes tipos de actividades como:

> Recibir y enviar correos electrónicos, manejar listas de estudiantes, registrar calificaciones, diseñar programas académicos, preparar o diseñar pruebas y exámenes, diseñar talleres y guías, buscar referentes pedagógicos para diseñar sus actividades pedagógicas, realizar presentaciones para el apoyo de sus clases, buscar herramientas didácticas como videos, páginas web y software, así como buscar lecturas para apoyar los contenidos desarrollados (Gómez, Bernal, & Medrano).

Se podría hablar de varios motivos por los cuales un docente no hace un uso más profundo o no hace uso de las TICS; John Spencer (2012), docente universitario en Estados Unidos, en su artículo “Eleven reasons teachers aren’t using technology”, once razones por las que los maestros no están usando tecnología, plantea y analiza los principales motivos por los cuales los docentes llevan a la inutilidad las tecnologías de la información, el miedo, la baja auto – eficacia, las pruebas, el consumismo, falta de liderazgo, paradigmas contradictorios, experiencia personal, humildad, que el uso es opcional, falta de recursos y falta de investigación; adicional a lo expuesto por Spencer, la falta de tiempo, la falta de elementos tecnológicos para materializar las actividades; la falta de espacio.

Aunque un porcentaje alto de docentes, emplea las TICS en su labor diaria; solo algunos de ellos involucran recursos tecnológicos específicos propios del área que imparten, para el desarrollo y fortalecimiento de las capacidades intelectuales de los estudiantes; por ejemplo, el uso de un software aplicativo con el objetivo de ayudar a entender de una forma dinámica, interactiva y participativa un concepto específico.

Los indicadores de ineficiencia educativa en matemáticas y los cuatro divorcios problema en la enseñanza de esta disciplina en Colombia, únicamente servirán de punto de partida; los recursos materiales e informáticos activos accesibles para la educación, el contexto y las necesidades de quien aprende matemáticas serán concebidos como herramientas para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la imprescindible labor del profesorado, es atrevido afirmar que el problema no está en los Educadores Matemáticos, pero es sensato afirmar que la solución sí está en manos de ellos.

Abordar cada uno de los divorcios problemas es la área desde el diseño de un laboratorio social que articule la matemática escolar con el concepto, el entorno y la experimentación, siendo la modelación el proceso dinámico que adopta un fenómeno del entorno como las balas perdidas y lo lleva para ser interpretado desde las representaciones de la función cuadrática, bajo sustento teórico como lo describe el siguiente diagrama:

Ilustración 4: Enlace entre la matemática escolar - el entorno - la experimentación - el concepto.

3.1 Pregunta de Investigación.

¿Cómo construir las representaciones de la cuadrático a partir de un fenómeno social que involucra a estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids empleando el Software Aplicativo Libre Tracker?

3.2 Objetivo General.

Construir las representaciones de lo cuadrático a partir de un fenómeno social que involucra a estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids empleando el Software Aplicativo Libre Tracker.

3.3 Objetivos Específicos.

Diseñar un laboratorio social de representaciones de lo cuadrático que modele el movimiento parabólico mediado por el Software Aplicativo Libre Tracker, para ser implementado con estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids.

Establecer un modelo matemático que permita predecir y analizar el comportamiento anual de víctimas por balas perdidas en Colombia.

Generar una reflexión en estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids desde la disciplina matemática, respecto a un fenómeno social como las balas perdidas.

3.4 Justificación.

"El fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático", como trabajo de investigación se fundamenta bajo la premisa de concebir conceptos matemáticos particulares desde la construcción social y con la idea de contribuir a la articulación eficaz entre la teoría y la práctica en Educación Matemática, en concordancia con las problemáticas expuestas y con el ideal de equidad y calidad educativa en la formación matemática Básica, Media y Superior, reconociendo como factores vitales: el contexto social del estudiante, el papel indispensable del docente y la implementación de recursos accesibles.

Todo inicia con la búsqueda de una estrategia de aula que cumpla con las características de un proceso dinámico ya sea jerarquizado o conjunto, capaz de disolver los divorcios de la matemática escolar con el concepto, el entorno y la experimentación; utilizando a su favor la escasa propuesta en Políticas Públicas en Educación Matemática en Colombia y siendo fiel tanto a la Teoría Conceptual como Sociocultural de la Didáctica de las Matemáticas; esa búsqueda finaliza cuando la modelación matemática se entiende como un proceso dinámico desde la disciplina, como una competencia desde la evaluación de la educación y como una práctica social desde la socioepistemología.

La modelación matemática, como "un proceso dinámico que ayuda a entender cierto problema o alguna situación de utilidad" (Bassanezi & Biembengut, 1977, pág. 13), direcciona "el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad" (Vasco, 2010, pág. 10), reafirmando que "los conocimientos matemáticos son vistos como construcciones sociales surgidas de prácticas ejercidas por grupos sociales en contextos sociales específicos y reproducidos por comunidades" (Arrieta, 2003, pág. 2), el conocimiento matemático surgió, surge y surgirá de la interacción del individuo con el entorno que lo rodea.

Ahora bien, un "aspecto importante de la modelación en la escuela es la interacción con el fenómeno a modelar o la experimentación amplia" (Arrieta & Diaz, 2015, pág. 34), el fenómeno, presente en el entorno del estudiante o propuesto en un ejercicio hipotético de libro de texto, debe confrontar al objeto matemático y producir pseudo-modelos previos al modelo, siendo esta “la actividad fundamental de la experimentación… comparar las propiedades de los modelos con las propiedades correspondientes al mundo real” (Baird, 1996, pág. 68), apropiando al estudiante de “una porción del mundo que nos rodea, obtener información de ella e interpretarla” (Baird, 1996, pág. 1); en esa medida la experimentación como una actividad innata del ser humano ha de presidir y acompañar el proceso dinámico de la modelación matemática, en un conjunto “estructurado de actividades de modo que planeen la formulación de hipótesis y elaboración de tesis a través de la verificación experimental de la hipótesis formulada” (Galetto, 2014).

Posicionados en experimentación de la investigación científica, se instaura como escenario idóneo en la modelación matemática, el laboratorio social, no como un lugar sino como una mediación en la matemática escolar, en donde el estudiante es un sujeto investigador capaz de contextualizar una situación, observar, experimentar, modelar y construir conocimiento matemático, el laboratorio, cuna de la “experiencia científica en donde se provoca deliberadamente algún cambio y se observa o interpreta un resultado con alguna finalidad cognoscitiva” (Gutierrez, 2013, pág. 27), distingue a la observación como “una parte importante e imprescindible del experimento, porque en cierto sentido no es otra (la experimentación) que una observación provocada dentro de condiciones controladas por el investigador” (Gutierrez, 2013, pág. 28).

El laboratorio más que una mediación en la matemática escolar, se define como un recurso didáctico desde la didáctica matemática científica, cuyo objeto de estudio es "el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo" (D'Amore, 2008), que para este caso en particular, conlleve a una práctica social de promoción institucional y origine:

> La motivación mediante la estimulación del interés y la diversión; también para intensificar, facilitar y propiciar la conceptualización de los elementos que conforman la teoría objeto de estudio, para proporcionar una idea sobre el método científico y desarrollar habilidades en la planeación organización y desarrollo del trabajo investigativo en su utilización y por último, para desarrollar determinadas actitudes científicas como la consideración y valoración de las ideas y sugerencias de otras personas, la objetividad y la buena disposición para no emitir juicios apresurados (Hodson, 1994, pág. 299).

El conocimiento fruto de la metodología y del laboratorio como escenario, se vuelve incoherente cuando la experiencia matemática se obvia y "el conocimiento matemático… se presenta de forma abstracta, sin base empírica, lo que produce en los alumnos una serie de dificultades que inhiben en el aprendizaje" (Cantoral, 2013, pág. 83), privilegiar las representaciones y pseudo-modelos propios del estudiante producto de la experimentación es dinamizar el aprendizaje de un objeto matemático abstracto, Cantoral (2013) en el libro Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa afirma que:

> ...una manera de motivar la confianza de su propia capacidad para tratar con las matemáticas consiste en apoyar más los propios procesos mentales del estudiante. Respetar más sus conjeturas, sus procedimientos heurísticos, utilizar sus ensayos y exploraciones, dejando que su intuición pueda servir como punto de partida de la actividad en la clase (pág. 83).

En una relación más cercana entre el estudiante y la matemática escolar se integra al laboratorio el Software Aplicativo Libre Tracker, con la idea de potenciar el artefacto didáctico y asociar al estudio de la matemática, un escenario físico; Zabaleta (como se citó en García, 2011, pág. 31) plantea las funciones de la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el currículo: la función motivación, fomenta la participación de los estudiantes y acerca el aprendizaje con el mundo real; la función innovación, direccionada el diseño didáctico y renovado de estrategias de aprendizaje; la función relación alumno – conocimiento, expresa que “el tipo de medio condiciona el tipo de operación mental que la persona va a desarrollar en el manejo del medio y en el procesamiento de la información que el medio transmite” (García, 2011, pág. 31) y una función global ligada a la incentivación de trabajo en equipo y mayor esfuerzo en el desarrollo de actividades por parte del estudiante.

Con una metodología estructurada desde la disciplina Matemática, Educación Matemática, Didáctica de la Matemática como ciencias y las Tecnologías de la Información como recursos, la presente investigación vincula un fenómeno social, causa de irresponsabilidad social individual, sicariato, enfrentamientos entre grupos delincuenciales y miembros de la fuerza pública, conflictos entre pandillas, riñas, robos y disturbios: “el fenómeno de balas perdidas impone una carga de violencia tremendamente injusta: la distribución de las víctimas de balas perdidas afecta a mayores y menores de edad por igual, a hombres y a mujeres sin discriminación alguna (CERAC, 2013, pág. 3)” aunque “se evidenció que en los últimos cinco años el mayor número de víctimas fueron mujeres (43 por ciento) y menores de edad (55 por ciento), y que en las ciudades capitales se dio la mayor cantidad de hechos” (Justicia, 2016). “El fenómeno de balas perdidas se define como: aquella bala disparada intencionalmente, que ocasiona daños letales o no letales a una persona diferente a la que es el objetivo de quien acciona el arma de fuego” (CERAC, 2013, pág. 2).

En pro de la disminución y erradicación de estadísticas desfavorables en homicidios y lesionados por balas perdidas, la responsabilidad es dividida entre el Estado, la comunidad y la escuela, esta última, ente promotor de prevención y capacitación desde la academia y la pedagogía respecto a problemáticas sociales, además, nunca ha negado su influencia y responsabilidad implícita en la comunidad, a pesar que la gran cantidad de cátedras obligatorias transversales busquen hacerlo explícito, el docente debe tener la capacidad de vincular y hacer transversal el conocimiento partiendo de que "la educación básica debe estar concentrada en desarrollar tres esenciales competencias transversales: pensar, comunicarse y convivir" (De Zubiría, 2017).

La educación no es ajena a problemáticas sociales y de una u otra forma los docentes contribuyen día a día en la formación integral de nuevas generaciones, el profesorado cuenta con una posición privilegiada respecto a su influencia en la sociedad, pero eso no basta cuando la comunidad contradice desde el ejemplo lo medianamente aprendido en la escuela, aun así, los educadores en ciencias exactas y humanas deben apreciar como valores, el conocimiento, el saber y la cultura para aprender a convivir, ese es el interés y desde la matemática, es posible.

"Imagina una bala de cañón disparada hacia arriba… sin resistencia del aire, la rapidez que se pierde al subir es igual a la rapidez que se gana al bajar; el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada" (Hewitt, 2004, pág. 183), esta puede llegar a ser la generalidad de los argumentos dados por trece estudiantes del barrio Los Laches en la localidad de Santa Fe de la ciudad de Bogotá, quienes han sido afectados por situaciones de violencia social y han vivido la tragedia de las balas perdidas, ellos son la muestra poblacional de un laboratorio en física y matemática experimental del movimiento parabólico o movimiento balístico, que simula las condiciones del movimiento de un proyectil cuando es accionado por un arma de fuego, similar a “cuando se arroja un objeto al aire, pero a diferencia del caso de caída libre, la dirección de lanzamiento hace un ángulo θ_o con la horizontal, la trayectoria del objeto describirá un parábola en el plano” (Vargas, Ramirez, Perez, & Madrigal, 2008, pág. 92), modelado por las representaciones de la función cuadrática, “cuya gráfica es un tipo especial de curva en forma de U llamada parábola. Las parábolas se presentan en numerosas aplicaciones de la vida real…” (Larson & Falvo, 2012, pág. 126) “generalmente se presenta en problemas geométricos de áreas o como un modelo sencillo de una función creciente y decreciente; también en problemas de lanzamiento de objetos o saltos de animales. Permite además, resolver problemas de máximos y mínimos” (Murillo, Soto, & Araya, 2006, pág. 145)

Esta investigación hace visible la experimentación en el proceso dinámico de modelación matemática, permitiendo la construcción de lo cuadrático con la implementación del laboratorio, el cual direcciona una nueva estrategia constructora de conocimiento matemático desde una problemática o necesidad social particular mediada por las Tecnologías de la Información, para la investigación en pedagogía y educación para la inclusión y la equidad social, dando respuesta al fin último de la Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información que pretende “formar profesionales con un sólido conocimiento disciplinar, didáctico, ético y pedagógico para el ejercicio de su profesión en cualquiera de los niveles de educación, complementado su formación integral con el trabajo investigativo y comunitario” (Programa Licenciatura en Matemáticas, 2016).

Una investigación enfocada a las sociedades del conocimiento y las TIC, procesos educativos inclusivos, que beneficiará a los estudiantes del semillero de investigación

Mathema Kids, en su formación matemática, personal y social; a los Educadores Matemáticos, en su didáctica específica; y al programa, como “un constructo teórico para explicar la construcción del conocimiento” (Cantoral, 2013) porque se hace necesario el diseño de un laboratorio social que articule la matemática escolar con el entorno el concepto y la experimentación desde una misma práctica de referencia, para desarrollar en los estudiantes competencias de pensamiento, comunicación y convivencia desde las matemáticas.

4. MARCO CONCEPTUAL.

4.1 Movimiento Parabólico.

El movimiento parabólico es un caso particular de estudio de la física mecánica y se asocia con el lanzamiento de proyectiles representado en dos dimensiones, donde se presenta un movimiento vertical uniformemente acelerado y otro movimiento horizontal constante, "un proyectil lanzado por medio de una fuerza continúa en movimiento por inercia propia. Debido a la gravedad, el proyectil es acelerado verticalmente y su movimiento vertical es diferente cada instante" (Abdel, 2011, pág. 113).

"La propiedad más básica de un cuerpo en movimiento es la rapidez, en virtud de su movimiento, un cuerpo viaja cierta distancia en tiempo dado" (Hewitt, 2004, pág. 37) sin ser confundida con la velocidad v, en matemáticas la rapidez r se expresa como valor absoluto $|r|$ y la velocidad una cantidad vectorial con magnitud, orientación y sentido $\vec{v}$:

> Cuando un cuerpo viaja a una razón de 60 km/h se está especificando su rapidez. Pero si se dice que se mueve a 60 km/h hacia el norte, se está especificando su velocidad. Cuando se describe la rapidez y la dirección del movimiento, se habla de velocidad. (Hewitt, 2004, pág. 38)

Para ejemplificar: "el lanzamiento de una partícula con velocidad inicial v_o y formada por un ángulo θ_o respecto al eje horizontal. Sea (x_o, y_o) siendo positiva hacia la derecha como hacia arriba" (Tipler & Mosca, 2003, pág. 60) las componentes de la velocidad inicial corresponden a una representación geométrica vectorial que relaciona en la siguiente ilustración:

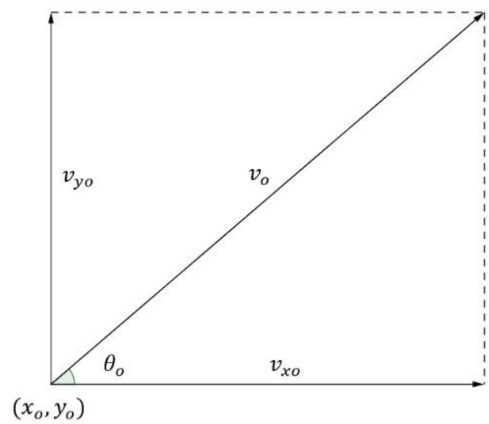


Ilustración 5: Componentes de la velocidad inicial en el movimiento parabólico.

Por trigonometría:

La componente de la velocidad v_{oy} corresponde a:

$$Sen\theta_o = \frac{v_{yo}}{v_o} \ (1)$$

$$v_{yo} = v_o \operatorname{sen} \theta_o \ \ (2)$$

La componente de la velocidad v_{ox} corresponde a:

$$Cos\theta_o = \frac{v_{xo}}{v_o} \ (3)$$

$$v_{xo} = v_o \cos \theta_o \ \ (4)$$

Sí se hace distinción de la velocidad inicial v_o se hace manifiesta la velocidad final v_f, entonces, el movimiento de la partícula presenta variación en su velocidad respecto al tiempo, “cuando la velocidad de una partícula cambia con el tiempo, se dice que la partícula está acelerando” (Serway & Jewett, 2005, pág. 31), causa de las componentes rectangulares (x, y) para el movimiento parabólico, la aceleración horizontal es cero $a_x =$

0 y la aceleración vertical es menos la gravedad $a_y = -g$ ya que "no hay una fuerza aplicada en esta dirección y por lo que la velocidad horizontal es constante en el tiempo Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso" (Abdel, 2011, pág. 113).

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_f - v_o}{t_f - t_o} \text{ (5)}$$

Por cálculo diferencial:

$$g - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt} \text{ (6)}$$

$$g - kv^2 = \frac{dv}{dt} \text{ (7)}$$

Entonces

$$a = \frac{d^2x}{dt} \text{ (8)}$$

"La posición de una partícula es el lugar de la partícula con respecto a punto de referencia escogido que podemos considerar como el origen de un sistema de coordenadas" (Serway & Jewett, 2005, pág. 24) su derivada es la velocidad y su segunda derivada la aceleración, por ende, la derivada de la velocidad es igual a la variación de esta respecto al tiempo.

Una parábola que representa gráficamente una ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a < 0$, hace visible desde la representación geométrica, la simetría antes y después de cruzar el vértice o punto máximo, para el movimiento parabólico de un proyectil tanto en subida como en bajada, su velocidad al inicio como al final del movimiento varía, y es igual a cero $v = 0$ en el vértice o punto máximo de la parábola, recordando que la componente de la velocidad horizontal v_x es constante y la aceleración o variación de la velocidad se presenta en el componente vertical v_y.

$$v_{xf} = v_{xo} = v_o \cos \theta_o \ (9)$$

$$v_{yf} = v_{yo} - gt = v_o sen\theta_o - gt \ (10)$$

$$v_f = v_o + at \ (11)$$

Por cálculo integral:

$$\int_{t_o}^{t_f} a \, dt = \int_{v_o}^{v_f} dv \ (12)$$

$$a\left(t_f - t_o\right) = v_f - v_o \ (13)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_o + at \ (14)$$

$$\int_{x_o}^{x_f} dx = \int_{t_o}^{t_f} (v_o + at) dt \ (15)$$

$$x_f - x_o = v_o\left(t_f - t_o\right) + \frac{a\left(t_f - t_o\right)^2}{2} \ (16)$$

$$x_f = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \ (17)$$

El alcance máximo o distancia final recorrida por el proyectil sobre el eje x, se establece en función del tiempo:

$$\int_{x_o}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt \;\; (18)$$

$$x - x_o = vt \; (19)$$

$$x = x_o + vt \; (20)$$

$$x(t) = x_o + v_{ox}t \; (21)$$

“El tiempo de subida se obtiene a partir del vector velocidad, donde la velocidad final en el eje vectorial es cero, $v_y = v_o sen\theta - gt_s = 0$" (Abdel, 2011, pág. 114)

$$t_s = \frac{v_o sen\theta}{g} \;\; (22)$$

Nuevamente la simetría del movimiento parabólico permite deducir que el tiempo de vuelo del proyectil es dos veces el tiempo de subida y la altura máxima recorrida por un proyectil respecto al eje y, se establece en función del tiempo.

$$y_f = y_o + v_{yo}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_o sen\theta_o) - \frac{1}{2}gt^2 \; (23)$$

$$y(t) = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \; (24)$$

Se denota R como el alcance máximo o distancia final del movimiento del proyectil respecto al origen, entonces $R = x_o + (v_o cos\theta)t$ siendo este el alcance máximo; cuando $\theta = 45°$ el proyectil alcanzaría la mayor distancia respecto al eje de las abscisas.

$$x_f = x_o + v_{xo}t = (v_o \cos\theta_o)t \quad (25)$$

"Despejando el tiempo en la ecuación posición horizontal y sustituyéndola en la ecuación posición vertical obtenemos la ecuación de la posición vertical en función de la posición horizontal" (Abdel, 2011).

$$y = (tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_o^2\, cos^2\theta}\right)x^2 \quad (26)$$

La responsabilidad del estudio actual del movimiento uniformemente acelerado, específicamente el movimiento parabólico se debe en gran medida al tiempo dedicado por Galileo y Newton para el análisis de fenómenos naturales como experimentos planteados por ellos interpretados y analizados en lenguaje matemático.

4.1.1 Galileo y el movimiento parabólico.

"Mide lo que se pueda medir; y lo que no, hazlo medible."

Galileo Galilei 1564 – 1642.

"Galileo es el primero de los pensadores que con plena conciencia introduce el método matemático en estrecha correlación con el experimento" (Sepúlveda, 2012, pág. 118), sin lugar a dudas, los conceptos matemáticos derivan de la experimentación y la demostración, la teoría matemática se demuestra en sí misma pero su aplicabilidad y uso en la vida cotidiana también la hacen demostrable, cuando es así, la matemática se define como un lenguaje apropiado y entendible capaz de hacer medibles, comparables y generalizables, sucesos, situaciones y fenómenos.

“Fue Galileo quien introdujo por primera vez la idea de aceleración. La desarrollo al descubrir el movimiento de los cuerpos que caen” (Sepúlveda, 2012), la variación de la velocidad fue detectable en sus experimentos con planos inclinados, “Galileo verificó su posición de que la velocidad de las esferas al descender por planos inclinados se incrementaba uniformemente con el tiempo. Encontró que las esferas requerían la misma rapidez en cada intervalo sucesivo de tiempo; esto es, las esferas rodaban con aceleración uniforme o constante” (Sepúlveda, 2012)

“Un proyectil es cualquier cuerpo que se lanza o proyecta por medio de alguna fuerza y continúa en movimiento por inercia propia en ausencia de gravedad el movimiento de un proyectil sería bastante sencillo; se movería con velocidad constante”. (Hewitt, 2004, pág. 49)

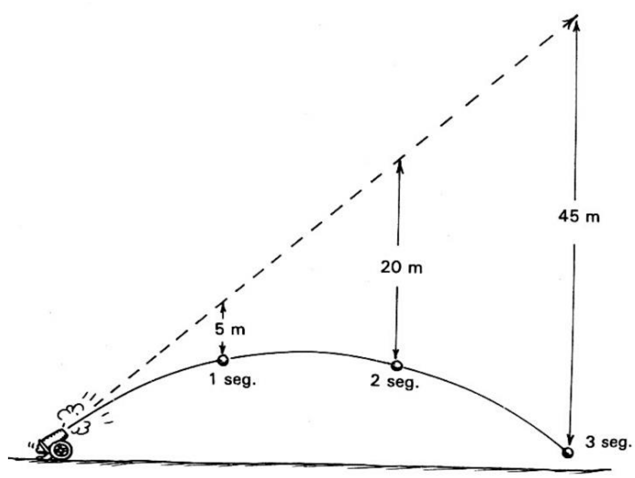


Ilustración 6: Movimiento de un proyectil con y sin ausencia de gravedad. Ilustración tomada del libro Conceptos de Física (2004, pág. 51)

En 1954 Galileo (como se citó en Sepúlveda, 2012) afirma:

> … Hemos discutido las propiedades del movimiento uniforme y del movimiento naturalmente acelerado… ahora me propongo a establecer aquellas propiedades que pertenecen a un cuerpo cuyo movimiento está compuesto de otros dos movimientos, a saber, uno uniforme y uno naturalmente

> acelerado… este es el tipo de movimiento que puede observarse en un proyectil en un movimiento; su origen lo concibo como sigue: imaginemos cualquier partícula proyectada a lo largo de un plano horizontal sin fricción… esta partícula se moverá a lo largo de este mismo plano con un movimiento que es uniforme y perpetuo siempre y cuando el plano no tenga límites.
>
> Pero si el plano está limitado y elevado, entonces la partícula en movimiento, la que imaginamos que es pesada, adquirirá, al pasar sobre el borde del plano, además de su movimiento uniforme y perpetuo previo, una tendencia hacia abajo debida a su propio peso; de manera que el movimiento resultante… está compuesto de uno que es uniforme y horizontal y de otro que es vertical y uniformemente acelerado.

4.1.2 Newton y el movimiento parabólico.

"Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes"

Isaac Newton 1943 – 1727.

"Isaac Newton dio un paso de gigante cuando estableció la relación entre el movimiento de las balas de cañón entre la fruta que caía de los arboles con el movimiento de los planetas" (Baker, 2014, pág. 20), los principales aportes en el estudio del movimiento uniformemente acelerado se observan en la relación entre la rapidez, la fuerza y la misma influencia gravitatoria en el lanzamiento de proyectiles, por ejemplo:

> Una piedra sometida a la acción de su gravedad, al ser lanzada se desvía de la trayectoria rectilínea y, describe una curva en el aire cae al fin al suelo; si se lanzase con mayor velocidad, llegará más lejos aumentando la velocidad podría lograrse que describiera un arco de una milla, dos, cinco, cien, mil; y por fin al ir más allá de los límites de la tierra que no cayese ya al suelo (Claro, 2009, pág. 39)

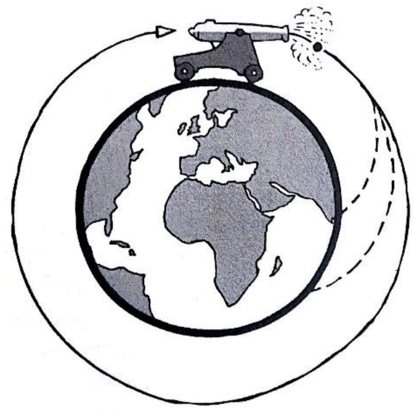


Ilustración 7: Incidencia de la fuerza en la rapidez del movimiento de un proyectil. Estudio de Newton del lanzamiento de proyectiles. Ilustración tomada del libro 50 cosas que hay que saber sobre física (2014, pág. 21)

El lanzamiento de proyectiles no fue el única práctica de referencia para construcción del concepto de movimiento parabólico desde la teoría Newtoniana, la astronomía como práctica de referencia también lo es, la órbita de la luna alrededor del planeta tierra se establece por el mismo concepto de estudio, el movimiento uniformemente acelerado, es decir la luna está cayendo a la tierra igual que la manzana, la atracción que ejerce el centro de la tierra sobre todos los cuerpos presentes en la superficie del planeta es la gravedad, lo cual explica la atractiva, entendible e hipotética historia de la caída de la manzana sobre la cabeza de Newton, entonces el satélite natural de la tierra fue un gran proyectil lanzado con la fuerza necesaria para permanecer en órbita contrarrestando la acción de la gravedad por su movimiento.

4.2 Función.

> "Gottfried Libniz fue el primero que utilizó la palabra función en 1694 para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente, cuarenta años más tarde Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él que introdujo la notación $y = f(x)$" (Larson & Edwards, 2011, pág. 19).

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera de una cantidad variable y de números o cantidades constantes" (Soler, Núñez, & Aranda, 2008, pág. 79), como se muestra en la ilustración 8 una función es una relación entre elementos de dos conjuntos, "una función *f* de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento *x* de A un único elemento *f(x)* de B" (Sobel & Lerner, 2006, pág. 86), "el conjunto A o conjunto de entrada es el dominio de la función *f* y el conjunto B (o conjunto de salida), contiene al rango de *f"* (Larson, Hostetler, & Robert, Precálculo, 2008, pág. 40).

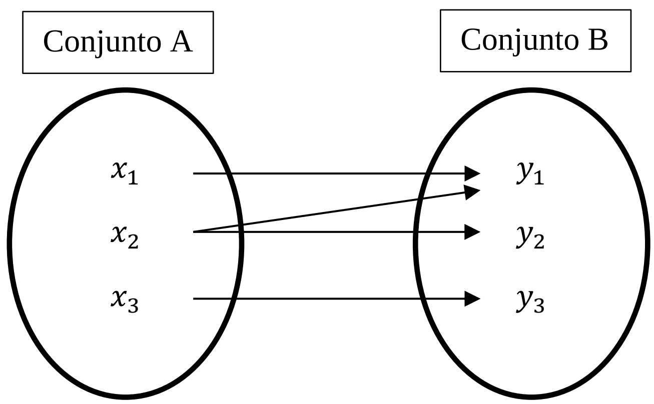


Ilustración 8: Representación gráfica de una función como relación entre elementos de dos conjuntos.

4.2.1 Función polinómica.

Según Larson y Hosteteler (2008) Sea n un entero no negativo y sea $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ números reales con $a_n \neq 0$. La función

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (28)$$

Se denomina función polinomial en *x*, de grado *n*.

Uno de los aspectos más importantes de las funciones polinómicas, es determinar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Explícitamente, $f(c) = 0$, se dice que *c* es una raíz de la función polinómica $f(x) = 0$, ó simplemente un 0 de *f*.

Dentro de las polinómicas tenemos:

La función constante definida como $y = f(x) = k$.

La función lineal definida como $y = f(x) = mx + b$; cuando $m \neq 0$.

La función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Función cuadrática.

Una función cuadrática es una función polinomial de segundo grado, se a, b, y c números reales con $a \neq 0$. La función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, se llama función cuadrática. Su recorrido depende de los parámetros $a, b\ y\ c$. Por ejemplo, si $a > 0$, el recorrido es el intervalo $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, \infty\right)$

"La gráfica de toda función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba o hacia abajo. Esto es porque la gráfica de cualquier función cuadrática puede obtenerse a partir de la función cuadrática $f(x) = x^2$ mediante una sucesión de translaciones, reflexiones, alargamientos y compresiones" (Demana, Waits, & Kennedy, 2007, pág. 176).

"Una función cuadrática puede ser escrita en cualquiera de las siguientes formas:

Vértice: $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Polinomial: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Intersección en x: $f(x) = a(x - s)(x - t)$

Donde a, b, c, h, k, s y t son números reales y $a \neq 0$. Si a es positiva, la gráfica abre hacia arriba, y si a es negativa, la gráfica abre hacia abajo" (Hungerford, Jovell, & Mayberry, 2007, pág. 164).

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurren en $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Si $a < 0$, entonces el valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

"La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k) y eje $x = h$, donde $h = {}^{-b}/_{2a}$ y $k = c - ah^2$. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo" (Demana, Waits, & Kennedy, 2007, pág. 178)

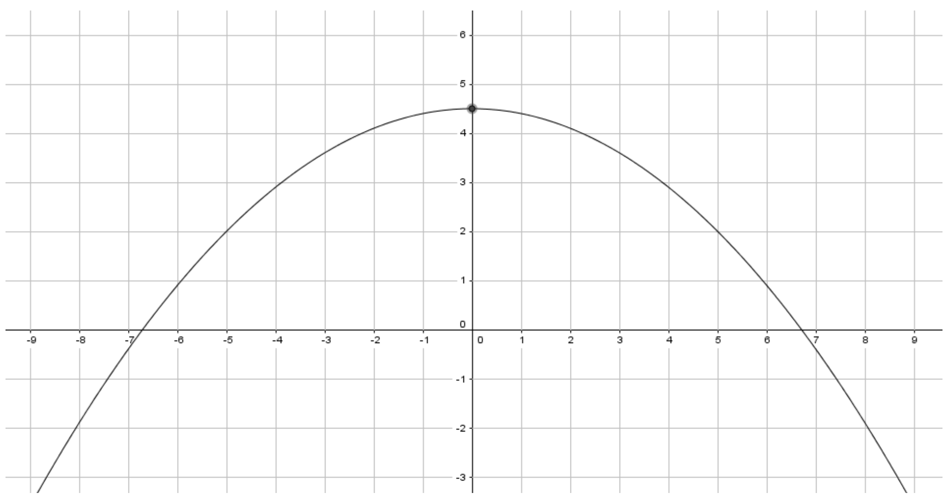


Ilustración 9: Parábola como representación gráfica de una ecuación cuadrática siendo $\boldsymbol{a < 0}$.

Demostración de la ecuación cuadrática.

Cuando $y = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (29)$$

Se divide por a en amos miembro de la ecuación.

$$\frac{ax^2 + bx + c = 0}{a} \quad (30)$$

Homogenizando.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (31)$$

Se adiciona $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ a ambos lados de la igualdad.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = 0 + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \quad (32)$$

Aplicando regla de extremos con extremos y medios con medios.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (33)$$

Completar el cuadrado del primer miembro de la ecuación.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (34)$$

Restar a ambos lados de la igualdad $-\frac{c}{a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (35)$$

Solucionar la potencia del segundo miembro.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\ (36)$$

Sustracción de fracciones heterogéneas en el segundo miembro.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{ab^2-4a^2c}{4a^3}\ (37)$$

Por factor común.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{a(b^2-4ac)}{4a^3}\ (38)$$

Raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\ (39)$$

Cociente de raíces con igual índice.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\ (40)$$

Solucionar raíz del denominador.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (41)$$

Sustraer $\frac{b}{2a}$ en ambos lados de la igualdad.

$$x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}\ (42)$$

Sustracción de fracciones homogéneas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (43)$$

■

4.3 Regresión.

Según (Vieira , Ortíz , & Ramírez, 2009), el término regresión fue introducido por Francis Galton en 1885. El concepto de regresión se refiere al “cuantum” “o cantidad de cambio” que experimenta un variable dependiente (Y), en relación al cambio de una unidad de una variable independiente (X). La regresión es un concepto estadístico estrechamente vinculado al concepto de correlación; mientras la regresión estudia la naturaleza de la relación entre dos variables dependientes, la correlación estudia la estrechez de la relación entre esas dos variables una dependiente de la otra. (Pedroza & Dicovskyi, 2007, pág. 90)

> El análisis de regresión es la aplicación de métodos matemáticos y estadísticos para el análisis de datos experimentales y el ajuste de modelos matemáticos a estos datos a través de la estimación de los parámetros desconocidos del modelo. Para el análisis de regresión los modelos matemáticos son clasificados como lineales o no lineales con respecto a los parámetros desconocidos (Espinosa & Vazquez, 2016, pág. 184).

4.3.1 Regresión lineal.

La regresión lineal es una técnica para determinar la mejor línea recta que pasa entre un conjunto de observaciones definidas por puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots(x_n, y_n)$. (Ortíz , Segura , & Cerdeña , pág. 79)

La ecuación del modelo de regresión lineal puede expresarse como:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + e_1 \ldots (44)$$

Donde:

Y: Es la variable dependiente

B_0: Es la ordenadad en el origen, o bien en el intercepto.

B_1: Es la pendiente de la recta de regresión.

e_1: Es el término del error, es decir la diferencia entre los valores predichos por la regresión y los valores reales.

Dicovskyi (2002), citado por (Pedroza & Dicovskyi, 2007, pág. 90), destaca que en la regresión lineal se desea realizar una inferencia estadística partiendo de los valores muestrales obtenidos; por tanto, se deben cumplir ciertos requisitos, que en el caso de la regresión lineal son los siguientes:

1. Normalidad y homogeneidad de varianzas en la variable dependiente (Y) del modelo para los valores fijos de la variable independiente (X).
2. Independencia de las observaciones de Y.
3. Linealidad en la relación entre las variables.

4.3.2 Regresión no lineal.

Para (Vieira , Ortíz , & Ramírez, 2009), los modelos no lineales son menos utilizados que los lineales. Dos motivos contribuyen para esto:

1. La solución no es encontrada a partir de una expresión matemática explícita, sino de un proceso interactivo que converge en límite para la solución;

2. Es necesario seleccionar el modelo antes de la selección de variables es difícil justificar esta selección, a no ser en relación a grandes categorías de modelos no lineales:

   a. Modelos sin puntos de máximo o mínimo, sino cóncavos o convexos;

   b. Modelos sigmoidales;

   c. Modelos con máximos y mínimos.

Las pruebas para regresión no lineal son mucho más complejas, siendo esta una de las razones para que estos métodos sean menos utilizados que los métodos lineales. (Vieira , Ortíz , & Ramírez, 2009)

Si la relación no es lineal, pueden transformarse los valores de una o ambas variables para intentar linealizarla. Si no es posible convertir la relación en lineal, puede comprobarse el grado de ajuste de una función polinomial más compleja. La función polinomial más sencilla es la cuadrática, que describe una parábola, pero puede usarse una función cúbica u otra de un orden aun mayor (orden k) capaz de conseguir un ajuste casi perfecto a los datos. (Pereira, 2010, pág. 18)

> La regresión no lineal es una extensión de los métodos de regresión lineal usados de manera iterativa para llegar a los valores de los parámetros de los modelos no lineales. El análisis estadístico de los resultados de la regresión no lineal también es una extensión del aplicado en regresión lineal, pero no posee las bases teóricas rigurosas del último (Espinosa & Vazquez, 2016, pág. 185).

Si bien es cierto que la regresión lineal es un muy buen ajuste para diferentes situaciones problema, existen otros tipos de regresiones no lineales, a fin de poder utilizar la que mejor se ajuste a la situación; estas son: la Regresión Cuadrática, la Regresión Cúbica, la Regresión Potencial, la Regresión Exponencial, y la Regresión Logarítmica.

Regresión cuadrática.

El modelo de regresión simple y el modelo de regresión múltiple, suponen que entre y y cada variable independiente, existe una relación lineal. Sin embargo, se presentan varios tipos distintos de relaciones no lineales entre variables. Una de las relaciones no lineales más comunes es una relación cuadrática entre dos variables en la que y aumenta (o disminuye) con una tasa de cambio de varios valores de x. Para analizar este tipo de relación entre x y y, se utiliza el modelo de regresión cuadrática. (Levine, Berenson, & Krehbiel, pág. 488)

El modelo de regresión cuadrática es parecido al modelo de regresión múltiple con dos variables independientes, varían en que la segunda variable independiente es el cuadrado de la primera variable independiente. (Levine, Berenson, & Krehbiel, pág. 489)

Según lo dicho por el ingeniero Luis Reyes, profesor titular de la facultad de Estadística de la Universidad San Carlos de Cuidad de Guatemala, el modelo de regresión cuadrática es una alternativa cuando el modelo lineal no logra un coeficiente de determinación apropiado, o cuando el fenómeno en estudio tiene un comportamiento que puede considerarse como parabólico. Este modelo también es conocido como parabólico, y es el caso más simple de modelos de regresión polinomiales, siendo su grado igual a dos. (Reyes, 2011)

La función que define el modelo es la siguiente:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (45)$$

Los estimadores para el ajuste del modelo se calculan de la siguiente manera:

$$a = \frac{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (46)$$

$$b = \frac{\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (47)$$

$$c = \frac{\sum y - (b)(\sum x) - (a)(\sum x^2)}{n} \quad (48)$$

El modelo es evaluado en porcentaje de asertividad, este porcentaje se establece con el cálculo de R^2 como una “cantidad que puede interpretarse como un factor (porcentaje), de reducción de la incertidumbre cuando son conocidas las variables independientes. Cuanto más se acerque a uno, más poder explicativo tendrá el modelo” (Barón, 2013), entonces la capacidad del modelo se evalúa entre 0 y 1. “Si R^2 es cercano a 0, baja capacidad explicativa de la parábola; si R^2es cercano a 1, es alta capacidad explicativa de la parábola” (Barón, 2013).

$$R^2 = \frac{b(\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}) + a(\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n})}{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}} \quad (49)$$

Una ciencia natural y dos disciplinas abordaron tres conceptos para el modelado de un fenómeno social y uno físico: la física con el concepto de movimiento parabólico, el cálculo con el concepto de función cuadrática y la estadística con el concepto de regresión, conceptos visibles durante la metodología y el análisis de los resultados.

5. MARCO TEÓRICO.

5.1 Didáctica de la Matemática, Educación Matemática o Matemática Educativa.

La incidencia de la matemática en la formación intelectual humana es tan antigua como su presencia en el Liceo de Aristóteles y en la misma Academia de Platón, lugares que protagonizaron el inicio de la discusión eterna entre la invención matemática aristotélica y el descubrimiento matemático platónico; después en la Edad Media hizo parte de la siete artes liberales del Trívium y el Quadrivium, de las cuales se destacan cuatro artes de esencia matemática, Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, artes que forjaron el currículum estricto de la Escuela Moderna para la enseñanza de las humanidades y las ciencias exactas o útiles.

El problema de la enseñanza de la matemática seguro es tan antiguo como ella misma, pero “hasta finales del siglo XVIII que se crean los primeros programas de formación de profesores, los cuales se ocupaban sobre todo en metodologías centradas más en la enseñanza que en el aprendizaje” (Nieto, Viramontes, & López, 2009, pág. 16); los cuestionamientos formales, la sistematización de estrategias y teoría didáctica para la instrucción en esta disciplina es relativamente reciente y resultado de un proceso sociocultural científico que “ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas en diseños mejor adaptados en prácticas escolares. Del estudio sistemático de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa” (Cantoral & Farfán, 2003, pág. 28).

En la Edad Contemporánea puede ser controvertida pero válida la idea de pensar los términos, Didáctica de las Matemáticas, Educación Matemática y Matemática Educativa desde la sinonimia:

> Si bien el término educación es más amplio que didáctica y, por tanto, se puede distinguir entre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática, sin embargo, en el mundo anglosajón se emplea la expresión "Mathematics Education" para referirse al área de conocimiento que en Francia, Alemania, España, etc. se denomina Didáctica de la Matemática (Godino, 1991, pág. 106)

Didactique, del francés como traducción literal al inglés de *Education* y del español *Educación*, *Enseñanza* o *Didáctica*, pionera en lo concerniente a teoría conceptual de la enseñanza de las matemáticas impulsó las “*Theoties of Mathematics Education*” (2010) de países anglosajones y las nacientes Teorías Socioculturales de Matemática Educativa en Latinoamérica que sin lugar a dudas enfrentan las mismas problemáticas y adoptan el mismo objeto de estudio.

La Matemática Educativa ha centrado su investigación “en la forma cómo el alumno aprehende, construye, reifica,…, tal cual concepto de la obra matemática, es decir hace investigación en matemática educativa mirando hacia el objeto de estudio: la matemática” (Arrieta, 2003, pág. 44); sin desvincular “los estudios científicos -de tipo experimental- en este campo necesitan de la explicitación de conceptos y de métodos que deben ser sometidos a exigencias de verificación de la coherencia y de adecuación a la específica contingencia” (D'Amore, 2008, pág. 4), es ahí donde la didáctica de las matemáticas, desde la experimentación y el diseño de artefactos, se convierte en el eslabón para que la Educación Matemática se considere Teoría Científica.

“Toda ciencia debe asumir, como primera condición, pretenderse ciencia de un objeto, de un objeto real” (Chevallard, 1997, pág. 11); ahora bien ¿Es el sujeto o la disciplina matemática el objeto de estudio? Para la clásica didáctica francesa, el recurso enlace entre el sujeto y la disciplina posee mayor valor como objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática “que para nosotros es un aspecto de la más general educación matemática” (D'Amore, 2008, pág. 4), Brousseau (como se citó en Artigue, 2008) afirma que “el objeto fundamental no es el sujeto que aprende, sino la situación en la que ese sujeto interactúa con otros y con la matemática” (pág. 8), siendo esta “una necesidad que la ciencia querrá descubrir” expresa Althusser (como se citó en Chevallard, 1997, pág. 11).

“La Educación Matemática está todavía en su infancia como un campo de investigación científica. Esto es evidenciado en el hecho que las primeras revistas dedicadas particularmente a esta investigación aparecen en los años sesenta” (Lech & Sriraman, 2010, pág. 123) para el antiguo continente; en América Latina sirve “como ejemplo el dato de fundación de la sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: 1975” (Cantoral & Farfán, 2003, pág. 28). Pueden ser escasos los años en la formalidad de la investigación científica, pero son notables los avances en teoría tanto conceptual como sociocultural, cuyo objeto de estudio encarna en las prácticas, las situaciones, la ingeniería, el diseño científico, la transposición, la ontosemiótica, las representaciones, la cultura… con el sentido de “preparar generaciones, sea adultos, pero en general educación de menores, para que ellos tengan un sentido de ciudadanía, de vivir en sociedad y al mismo tiempo desarrollen su creatividad” (D'Ambrosio, 2004) porque “si bien en nuestras sociedades parece ser cada vez más compartida la idea de que es necesaria una cultura matemática y científica sólida para que todos los individuos puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas" (Artigue, 2008, pág. 6).

5.1.1 Principios generales en educación colombiana.

Es necesario concebir el estudio de la disciplina matemática en el marco de la educación actual colombiana, reconociendo como punto de partida las necesidades, problemáticas y habilidades de los colombianos, para el diseño de estrategias metodológicas y artefactos didácticos que potencialicen una ensaña de la matemática: contextualizada, atractiva, formalizada y útil. El gobierno colombiano para la enseñanza de la matemática establece tres principios que promueven una educación democrática, de calidad y equidad para todos los colombianos.

> El primero de ellos obedece al ideal de ofrecer a toda la población del país una educación básica masiva con equidad y calidad, lo que implica buscar también la integración social y la equidad en y a través de la educación matemática, es decir, formar en matemáticas a todo tipo de alumnos y alumnas. La posibilidad de esta formación ya no está dada –como sucedía en la primera mitad del Siglo XX– por el filtro social que limitaba mucho el número de estudiantes que accedían a la educación secundaria, sino que tiene que atender a toda la población juvenil, independientemente de su preparación adecuada o deficiente en las matemáticas de la Educación Básica Primaria y de su motivación o desmotivación por las mismas. (Ministerio de Educación Nacional, pág. 47)

La efectividad de los procesos de enseñanza de las matemáticas se efectúa en la interacción entre la realidad del individuo que aprende y el concepto matemático del cual busca apropiarse; es por eso que las realidades de los colombianos al ser diversas, brindan escenarios para que el Educador Matemático se desenvuelva.

> El segundo factor incorpora nuevas finalidades sociales a los propósitos de la formación matemática, las cuales se argumentan con las siguientes razones. La primera alude al carácter utilitario ampliado del conocimiento matemático, en tanto que el mundo social y laboral fuertemente

> tecnologizado del Siglo XXI requiere cada vez más de herramientas proporcionadas por las matemáticas –sin olvidar ni menospreciar los aportes de otras disciplinas como las ciencias naturales y sociales– y por las nuevas tecnologías, para lograr con ellas desempeños eficientes y creativos en muchas labores en las que antes no se requería más que de la aritmética elemental. La segunda razón alude al conocimiento matemático imprescindible y necesario en todo ciudadano para desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones (Ministerio de Educación Nacional, pág. 47).

La realidad colombiana en la enseñanza de las matemáticas no es satisfactoria, las pruebas nacionales e internacionales hacen evidente la deficiencia competitiva en matemáticas de los colombianos, no sólo las pruebas estandarizadas son testigo fehaciente, la falta de pensamiento crítico en la toma de decisiones, en ocasiones la incapacidad de contextualizar el conocimiento con su utilidad y la vida, pueden llegar a ser las más graves e influyentes consecuencias indirectas, es por eso que la función de la enseñanza de las matemáticas como disciplina es fortalecer en los estudiantes competencias en la forma de pensar, comunicar y convivir en sociedad, pensar para toma de decisiones correctas, comunicar en la difusión e interpretación de conocimiento, y convivir desde la ciudadanía, la democracia, la justicia y la solidaridad.

> El tercer factor está relacionado con la segunda razón arriba mencionada, pero va más allá, pues busca contribuir desde la educación matemática a la formación en los valores democráticos. Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad. Este factor agrega a las demás funciones de la formación matemática una nueva función política: la preocupación por la formación en valores democráticos y por el ejercicio de la ciudadanía crítica (Ministerio de Educación Nacional, pág. 48)

Todo direccionado al hecho de formar ciudadanos útiles para la construcción de una sociedad equitativa, ciudadanos que cumplan con sus deberes en la familia, la academia y el trabajo, que forjen instituciones, que produzcan conocimiento en beneficio de la comunidad y que trabajen por el bien común.

5.1.2 Sobre la teoría socioepistemológica de la matemática educativa.

"La teoría no es del nido donde nace, sino del cielo donde vuela"

Ricardo Cantoral 1958. Adaptación.

En Educación Matemática o Matemática Educativa no es ajena "la influencia creciente de los enfoques socio-culturales. Este cambio teórico ha tomado diversas formas, y cada uno de acuerdo con sus experiencias y con sus intereses de investigador" (Artigue, 2011, pág. 47), en pro de la búsqueda constante de "mecanismos para que todo ciudadano tenga acceso y permanencia en una educación que le permita encarar los retos de un entorno personal, profesional y social" (Cantoral & Montiel, 2015, pág. 285). "El nombre socioepistemología plantea, en sí mismo, una relación social al saber que la ubica como una teoría que modela la construcción social del conocimiento matemático" (Cantoral, 2013, pág. 26).

La Teoría Socioepistemología en Educación Matemática "privilegia la relación entre saber, mente y cultura" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 91) y posiciona como objeto de estudio el modelado de conocimiento matemático desde la construcción social porque "las teorías son simple y llanamente modelos para el entendimiento" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 91), que en Matemática Educativa se encuentran precedidos y basados en prácticas o actividades que forjan la práctica social como construcción teórica. La práctica social " juega un papel preponderante en el intento por comprender al mundo en que vivimos y por entendernos plenamente en él” (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 92) y es la generalización teórica de “las prácticas diversas, aunque semejantes entre sí, en pueblos y culturas, épocas y regiones, escenarios y circunstancias, exige una explicación sustentada en las acciones de los sujetos y las actividades humanas mediadas por la cultura” (Cantoral, 2013, pág. 19). Según Gisela Montiel (2006) la práctica social se estructura bajo tres componentes:

> Componente epistemológica, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en contextos particulares. La componente cognitiva asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la componente didáctica, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina sus efectos e implicaciones didácticas. (pág. 818)

“La aproximación teórica que incorpora estas componentes en su estudio de los fenómenos didácticos ligados a un conocimiento matemático en particular recibe el nombre de Socioepistemología” (Montiel, 2006, pág. 818) obviando que “uno de los malentendidos más habituales consiste en interpretar como incompatibles los enfoques socioculturales y cognitivos, como si no fuera posible ni necesario integrar ambas miradas para fundamentar un conocimiento didáctico matemático” (Planas, 2010, pág. 166). El eclecticismo de la Teoría Socioepistemológica propone mecanismos cognitivos fruto del “sistema social como un sistema complejo, donde los humanos aprenden al ejercer prácticas. En el sistema escolar, que es el lugar que se atiende, confluyen dimensiones que sistémicamente relacionadas conforman un todo” (Arrieta, 2003), compuesto por la articulación entre la acción, la actividad y la práctica.

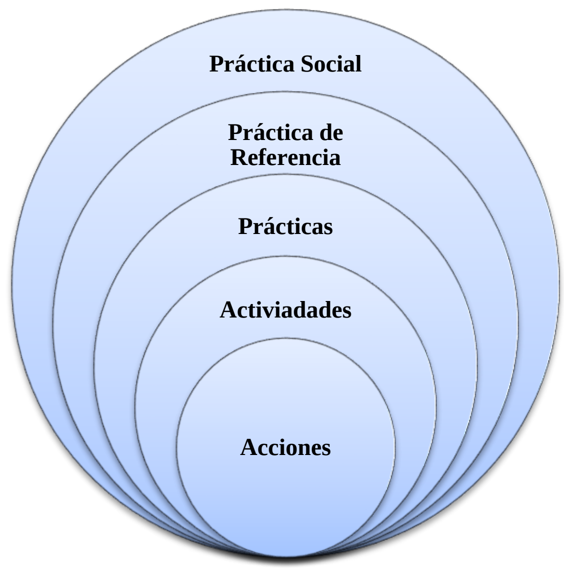


Ilustración 10: Modelo de anidación de las prácticas. Ilustración tomada del libro Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (2013)

La anidación de las prácticas, asume “el saber como construcción social del conocimiento matemático, en este sentido el saber o los saberes, son procesos deliberados para el uso compartito del conocimiento” (Cantoral, 2013, pág. 53) siendo “los conocimientos inseparables del individuo que conoce; es decir no existe un conocimiento a-personal; una persona que interioriza un saber tomado conciencia, transforma ese saber en conocimiento” (D'Amore, 2008, pág. 3), porque “el conocimiento es la información sin uso, el saber es la acción deliberada para hacer al conocimiento un objeto útil frente una situación problemática” afirma Bruno D’Amore (como se citó en Cantoral, 2013), entonces “la Socioepistemología considera a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático” (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 98), en donde:

> … se articulan los siguientes principios uno detrás de otro: se pasa de la acción, directa del sujeto (individual, colectivo o histórico) ante el medio en tres acepciones: material (entorno), organizacional (contexto), social (normativo), esto se organiza como una actividad humana situada

socioculturalmente, para perfilar una práctica (iteración deliberada del sujeto y regulada por el contexto); dicha práctica cae bajo la regulación de una práctica de referencia que es la expresión material e ideológica de un paradigma (ideológico, disciplinar y cultural), la que a la vez es normada mediante cuatro funciones por la práctica social (normativa, identitaria, pragmática y discursiva–reflexiva) (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 99).

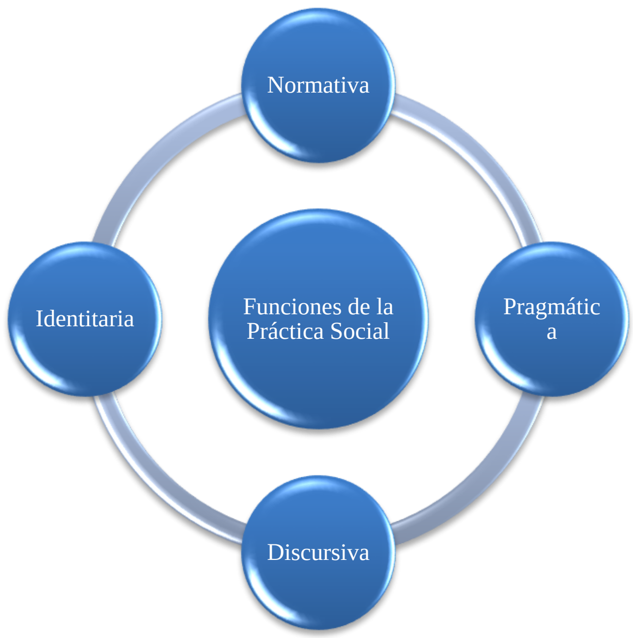


Ilustración 11: Funciones de la práctica social. Ilustración tomada del libro Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (2013)

En esa medida la Socioepistemología considera a la práctica social como el consolidado teórico de las prácticas, e invierte el paradigma teórico práctico, para ir de las prácticas a la teoría, siendo soporte de su investigación diez tesis propuestas por Cantoral (2013) para la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa:

1. El conocimiento matemático, así como el científico no fue diseñado para ser enseñado en el aula clásica.
2. El Saber Matemático debe su origen, razón de ser y su significación a otras prácticas de referencia.
3. Las prácticas sociales son la base y orientación del conocimiento humano.

4. La difusión institucional del conocimiento matemático está regido por ideologías: búsqueda de consensos, mecanismos de hegemonía y coerción. Normado por un discurso Matemático Escolar.
5. La enseñanza matemática ha sido usada para expulsar a estudiantes del sistema de enseñanza.
6. La Socioepistemología no trata de una epistemología social o socio-epistemología sino una episteme de lo social o Socioepistemología.
7. Si bien la socioepistemología ha usado términos construidos por otros enfoques o desde otras disciplinas del conocimiento, la socioepistemología ahora debe reconsiderar dichos constructos en virtud de la gran cantidad de evidencia empírica acumulada.
8. La actividad y la práctica son elementos de articulación teórica.
9. Redimensionar el saber, significación colectiva y resignificación teórica.
10. Respeto a la diversidad cultural, teórica y metodológica. (pág. 40)

En resumen, las teorías socioculturales de la didáctica de la matemática priorizan el nivel de intervención sobre la norma y en el caso particular de la socioepistemología todo lo relacionado con la producción de la misma, "la pregunta teórica fundamental que nos hemos planteado… ¿Qué produce la norma?" (Cantoral, 2013, pág. 20), vinculándose al cuarto nivel que corresponde a la "identificación de sistema de normas y metanormas" (Font, Planas, & Godino, 2009, pág. 2) "tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas" (Font, 2012, pág. 447) para el "…trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática. Por ejemplo, el nivel 4 se propone para integrar aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática" (Font, Planas, & Godino, 2009, pág. 2). "La norma que estructura el juego, caracteriza al género o tipo de juego y estructura a la vez las prácticas del jugador. Es decir… está estructurado y es estructurante" (Cantoral, 2013, pág. 20), así como el juego, "si logramos entender que las Matemáticas… forman parte de la cultura, aceptamos que también se guían por normativas específicas" (Cantoral, 2013, pág. 21) que trascienden épocas, generaciones, espacios y condiciones culturales, sociales en su enseñanza, su aprendizaje y su uso.

La socioepistemología es disciplina científica: cuando establece como objeto de estudio particular la construcción social del conocimiento matemático, cuando el conocimiento es comprobable bajo la observación de acciones y actividades, cuando las prácticas sociales son conocimiento útil y cuando sus principios son el "reflejo de las características esenciales de un sistema, que los investigadores asumen y sin el cual no es posible trabajar, comprender o usar dicho sistema, considerando como el punto de partida y el fundamento" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 98), en este caso para la Teoría Socioepistemológica "el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico, el principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada y el principio normativo de la práctica social" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 98) rigen y fidelizan al Educador Matemático que opta por la construcción del conocimiento matemático.

Muy seguramente la complejidad de la Matemática Educativa sin excluir lo cognitivo de lo sociocultural o viceversa, radica en el hecho de hacer ciencia para la construcción de conocimiento, de hacer ciencia para la ciencia, principios que "sin tener una secuencia lineal, sino formando una red nodal" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014, pág. 98) parten de un racionalismo contextualizado que no es más sino el conocimiento empírico adquirido por medio del entorno, derivado de un relativismo epistemológico que trasciende épocas, culturas y uso matemático, normado por estructuras rigurosas compactas que coinciden en forma y en objetivo pero no en tiempo ni lugar, adquiriendo día a día un nuevo uso, un nuevo significado adaptable a las necesidades, a los problemas, a las nuevas teorías, ese nuevo uso emerge de una resignificación progresiva del conocimiento y sus nuevas representaciones, clarificando "la representación como una imagen, una idea, una noción o más ampliamente, como un pensamiento expresado, simbólico y formado al nivel mental que se presenta de modo consiente, en este sentido la representación precisa de aquello que busca ser re-presentado" (Cantoral, 2013, pág. 58).

5.1.3 Sobre la teoría de las representaciones semióticas.

El valor del proceso, superior a la propia respuesta en matemáticas hace prevalecer como siempre la forma en la que se ha de llegar a la respuesta, empleando lo que se sabe y la forma de comunicarlo, porque en matemáticas todo es susceptible a la demostración; la teoría matemática crece cuando se encuentran diferentes formas de llegar al mismo lugar y se denota en el registro, porque "la semiótica y las matemáticas nacieron juntas, una al lado de la otra, ayudándose y sosteniéndose entre sí, a espaldas de todos, por mucho tiempo" (D'Amore, Fandiño, & Iori, 2013, pág. 21), forjadas por las representaciones que refieren a "todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento" (Tamayo, 2006, pág. 41).

La variedad de representaciones es proporcional a la infinidad de conceptos y aplicaciones matemáticas, la semiótica innata a la matemática hace posible "la adquisición conceptual de un objeto" (D'Amore, 2009, pág. 157) como proceso capaz de vincular el conocimiento matemático al objeto para ser adquirido por quien aprende, Tamayo (2006) dice:

> Desde la perspectiva de las ciencias cognitivas, las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o nuestro mundo interior. Podemos representar en nuestra mente algo que percibimos con nuestros sentidos algo que vemos olemos o sentimos, como también algo que nos imaginamos; por ejemplo, en este momento podemos construir una representación de un ángulo, de una recta, de un viaje, etc. Estás representaciones son construidas tanto por científicos como por cualquier otro sujeto. En el primer caso, obtendremos una teoría científica; en el segundo, una teoría intuitiva acerca del mundo (pág. 39).

La función de las representaciones en el aprendizaje de un sujeto es facilitar la aprehensión del objeto, Raymond Duval (como se citó en D'Amore, 2009) menciona que "el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible un actividad sobre los objetos matemáticos" (pág. 6), entonces por medio de las representaciones el sujeto se apropia del objeto, idéntico a la apropiación de un concepto; son las representaciones el mecanismo para llegar al aprendizaje conceptual del objeto, estas no remplazan al objeto.

"Mientras el matemático puede no interrogarse sobre el sentido de los objetos matemáticos que usa o sobre el sentido que tiene el conocimiento matemático, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones" (D'Amore, 2006), el estudio del objeto matemático y cómo se adquiere es función la Educación Matemática, que define un objeto matemático:

> Adoptando una epistemología pragmatista – antropológica… como respuesta, una función semiótica cuyo antecedente (significante) es el objeto matemático – o la expresión que lo designa –, y el consecuente (significado) un nuevo constructo que describimos como el sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones – problemas (Godino, Batanero, & Font, 2007, pág. 11).

En pocas palabras el objeto matemático corresponde a la función semiótica básica de este, que puede ser representada en una o varias construcciones delimitadas por un sistema de prácticas matemáticas. El objeto matemático no pierde su significante en sus representaciones, tampoco se transforma, se trata y se transita por sus representaciones.

5.2 Tecnologías de la Información en Matemática Educativa.

Según Schibeci, y otros, (2008); las computadoras se han utilizado para la educación y la formación desde la década de 1960, y cada vez más desde la década de 1990. A medida que transcurre el tiempo, cada vez se ha hecho más importante, útil y necesario el uso de las herramientas tecnológicas dentro del sistema educativo y aún más si se trata de las matemáticas; una ciencia tan compleja y confusa para la gran mayoría de los estudiantes, “la enseñanza de la matemática debe entonces remontar nuevos desafíos y hacer frente a nuevos problemas” Artigue (2004, pág. 7); porque tal y como lo afirma Leung (2006) “la incorporación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas constituye uno de los temas más importantes en la educación matemática actual”. Por otro lado, Lim (2007) menciona que:

> La principal motivación para la integración de las TIC en la educación es que promueve en los estudiantes su pensamiento constructivo y les permite al mismo tiempo trascender sus limitaciones cognitivas involucrándolos en ciertas operaciones (cognitivas) que por otros medios tal vez no hubieran podido lograr. Se favorece de esta manera el desarrollo de habilidades de orden superior tales como el diseño, la toma de decisiones y la resolución de problemas que requieren análisis, evaluación, relación entre las partes, imaginación y síntesis en un todo integrado (Córdoba F. , 2014).

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación matemática, ha venido realizando un aporte muy trascendental y significativo en las diferentes ramas de esta disciplina, con el objetivo de mejorar la comprensión de las temáticas propuestas en estos espacios académicos.

> A través de distintos programas informáticos, los conceptos matemáticos se materializan mediante representaciones visuales que facilitan el aprendizaje. Gracias a las TIC se genera una rica interacción del estudiante con el conocimiento mediante escenas matemáticas interactivas y dinámicas que potencian su creatividad. En definitiva, las TIC en matemáticas pueden verse como un potente laboratorio en el que los abstractos conceptos matemáticos cobran vida. (Arrieta J. E., 2013, pág. 6)

Es válido afirmar que no solo se hace necesario el uso de las TIC, por los beneficios que aporta a los estudiantes en el desarrollo de habilidades y destrezas dentro del proceso educativo en determinada área del conocimiento, para este caso las matemáticas; sino porque día tras día el uso de las herramientas tecnológicas se hace cada vez más necesario e indispensable para ellos; tal y como lo menciona Arrieta (2013):

> Actualmente, se observa un aumento considerable en el uso de ordenadores por parte del alumnado, lo cual nos obliga a plantearnos la necesidad de conceder mayor atención a los intereses del educando, integrando en el aula medios físicos como el ordenador, la pizarra digital o las tabletas,

> que nos permiten utilizar los medios virtuales adaptados a distintas necesidades educativas (software como Excel, GeoGebra, etc) (pág. 5).

Los educadores matemáticos deben propender cada día por estar a la vanguardia de los cambios que surgen entorno a la forma de enseñanza, como lo es la incorporación de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje, "al mismo tiempo, la institución escolar debe adaptarse a una evolución tecnológica cuyos tiempos son mucho más cortos que los suyos" (Artigue M. , 2004, pág. 6); es obligación de los mismos, velar por un buen uso y buenas prácticas de estas herramientas, a fin de que sean aprovechadas al máximo; esto teniendo en cuenta que aunque nos podrían ser de gran ayuda en los diferentes espacios académicos, jugando a favor de la comprensión de la teoría matemática.

> Las tecnologías en sí mismas y la capacitación de los docentes sin un acompañamiento permanente y un proceso de cambio en sus prácticas, no generan una mejora significativa en el aprendizaje de las matemáticas que se vea reflejada en el desempeño académico de los estudiantes. Adicional a ello, la incorporación de objetos de aprendizaje en las clases de matemáticas no genera por sí misma una mejora significativa en el rendimiento de los estudiantes. Si estos conocimientos no han sido adecuadamente internalizados, los nuevos (conocimientos) no serán comprendidos a cabalidad aunque se incorporen objetos de aprendizaje novedosos y llamativos para los estudiantes. Córdoba , Herrera , & Restrepo (2013, pág. 56)

Otra preocupación que surge entorno a la enseñanza de las matemáticas a través del uso de las tecnologías de la información, es si realmente las instituciones educativas, en primer lugar, tienen las condiciones necesarias en lo que refiera a la planta física, para proporcionar a los estudiantes los elementos necesarios para el desarrollo óptimo de sus habilidades tecnológicas; lo segundo es, si los profesores con los que cuentan, están debidamente capacitados para hacer un uso efectivo y eficaz de estas herramientas. Artigue

(2004, pág. 6) en su artículo: Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?; menciona que:

> Aun si es consciente de las nuevas posibilidades que la tecnología informática ofrece a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática, la escuela apenas si consigue sacar provecho de la integración de calculadoras y programas de geometría dinámica, aun cuando las tecnologías de la información y de la común icación ya se han generalizado, modificando profundamente el contexto tecnológico (Artigue M. , 2004).

5.3 Modelación o Modelización Matemática.

"Toda teoría es un modelo, una explicación de algo"

Ricardo Cantoral 2013.

Indudablemente esta investigación comprende la modelación o modelización matemática desde la sinonimia, abordada desde la disciplina matemática, la evaluación y la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la adaptabilidad de esta competencia, dinámica y práctica social es la respuesta a los recurrentes interrogantes sobre la utilidad de las matemáticas en la vida.

> La modelación es pues el arte de producir modelos. Por eso, la modelación matemática es el arte de producir modelos matemáticos que simulan la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se trata de un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas variables covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intenta modelar. (Vasco, 2010, pág. 10)… Para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la matemática en juego, como dos objetos separados pero al mismo tiempo interrelacionados (Blomhøj, s.f).

El resultado del proceso de modelización de un fenómeno , es el modelo, como ejemplo fehaciente de matematización, es decir, el modelo es formalización matemática sustentada en representaciones semióticas encausadas hacia la generalización; la esencia de un modelo radica en la capacidad del individuo de formalizar en lenguaje matemático un evento, por más complejo, sencillo, explícito o implícito que sea, este es “una construcción o artefacto material o mental, un sistema que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo” (Ministerio de Educación Nacional).

> Cabe entender que los artefactos mentales o modelos mentales son análogos estructurales del mundo. Son producidos por los individuos durante su funcionamiento cognitivo y tienen dentro de sus funciones principales, el mantenimiento de la estructura del objeto o del fenómeno que supuestamente representan, es decir su estructura corresponde a la estructura de la situación que lo origina. Son representaciones dinámicas y generativas que pueden ser manipuladas mentalmente para hacer explicaciones casuales y predicciones a cerca de los fenómenos físicos y de los estados de ánimo de las personas (Tamayo, 2006, pág. 40).

“La modelización es el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemática de una situación real” (Gómez I. , 2009) que es formalizada por la interacción social de los individuos y concluye en aprendizaje generado por la experiencia, bajo un proceso compacto transitivo entre la realidad y la teoría, comprendido por: “observación cuidadosa, reflexión acerca de la hipótesis, predicción de sus consecuencias, planeación del experimento para someter la hipótesis a prueba, diseño del experimento, ejecución del experimento planeado, obtención de resultados y confrontación de los resultados experimentales y las predicciones teóricas” (Hurtado, 2006)

Entonces, la modelación matemática es una relación armónica entre el arte (como el proceso de manipulación del objeto) y la ciencia (como la formalización y generalización del proceso), que parte de la necesidad de darle explicación entendible al objeto (el fenómeno) desde el modelo, para ser comparable con otros, ser optimizado, reflexionar sobre el mismo, concluir y tomar decisiones. Ingham y Gilbert (como se citó en Trigueros, 2006) afirman que "un modelo es una representación simplificada de un sistema que concentra la atención en un aspecto específico; cada uno permite que ciertos aspectos (objetos, eventos o ideas) estén en una escala diferente de la que son normalmente percibidos…" (pág. 1211)

> En este sentido una teoría tiene como base empírica firme y mantiene constancia con la evidencia disponible, aunque permanentemente confronta con teorías preexistentes. A su vez es sostenida por muchas líneas de evidencia, asegurando que, si no totalmente correcta, es una buena aproximación pues han sobrevivido pruebas críticas y es la explicación disponible mejor adaptada para los datos. Toda teoría es un modelo, una explicación de algo, por tanto se apoya en una epistemología y una ontología, en principios de los que se derivan resultados situados (Cantoral, 2013, pág. 68).

5.3.1 La modelación como práctica social.

"La práctica social no se filma, se infiere".

Ricardo Cantoral 2013.

Una práctica social es un constructo teórico normativo, discursivo y pragmático que hace tangible la construcción de conocimiento matemático, en el concepto de práctica social "…se plantea el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socio culturales particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales" (Cantoral, 2002, pág. 35), la practica social se compone de una práctica de referencia compuesta por actividades.

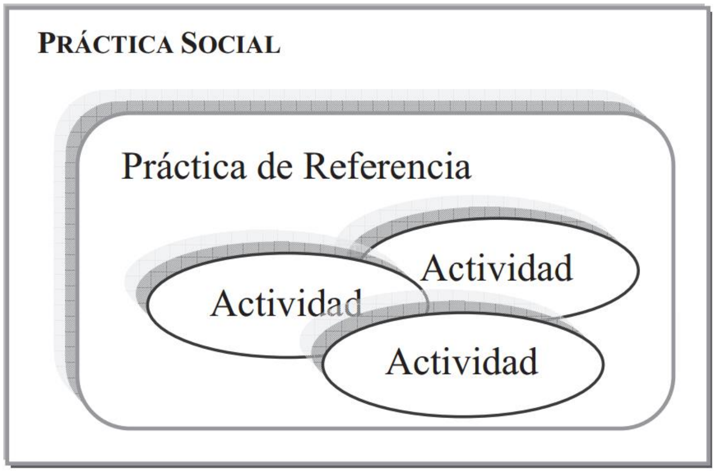


Ilustración 12: Un modelo para la construcción de conocimiento matemático. Diagrama tomado del artículo Construcción Social de la Función Cuadrática (Montiel, 2006).

Ahora bien, la modelación matemática puede ser catalogada una práctica social, Francisco Cordero (2012) , sin manifestar que este proceso dinámico sea o no sea una práctica social, se atreve a afirmar que:

> La acepción más común de modelación tal vez provenga del significado de modelo, que muchas veces es considerado como copia de algo para ser reproducido. En el campo de la matemática suele definirse a la modelación como una teoría que estudia las características cualitativas de las estructuras matemáticas. Ambas acepciones, exigen de un objeto predeterminado, ya sea para ser reproducido o para ser distinguido de otros objetos, de ahí lo cualitativo. Tal vez por ello, en el oficio de la modelación aparece en forma significativa el concepto de representación, y algunas veces la modelación es explicada como la representación del objeto en cuestión. En consecuencia, el tratamiento de la modelación en la enseñanza de las matemáticas es considerada como una herramienta didáctica que ayudará al estudiante a hacer representaciones adecuadas y eficientes del objeto matemático. Las investigaciones en el campo de la matemática educativa en este

tópico analizan la estructura de tales representaciones e identifican sus registros semánticos para establecer relaciones con los procesos cognitivos de los individuos (pág. 3).

Los modelos son el constructo matemático clave en sectores de la economía, la ingeniería, la medicina y la arquitectura o incluso ciencias básicas como la física, química y biología, todas sus generalidades, formalismos y teorías son rigurosas y comprobables gracias a la experimentación y las matemáticas; la modelización no es un proceso propio de la educación, pero el sector educativo no ha sido ajeno a la implementación de la modelación matemática como herramienta didáctica, encargando a esta práctica el poder justificar, la transición existente entre la realidad y un concepto matemático; la idea de procesar, comprender y simplificar fenómenos reales.

> Las prácticas de modelación que se han elegido y se enfocan en prácticas que se desarrollan en interacción con fenómenos (físicos, químicos o sociales), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. Estas prácticas no sólo se han ejercido históricamente, en el plano profesional y de los problemas cotidianos actuales esa práctica es ejercida (Arrieta J. , 2003, pág. 5).

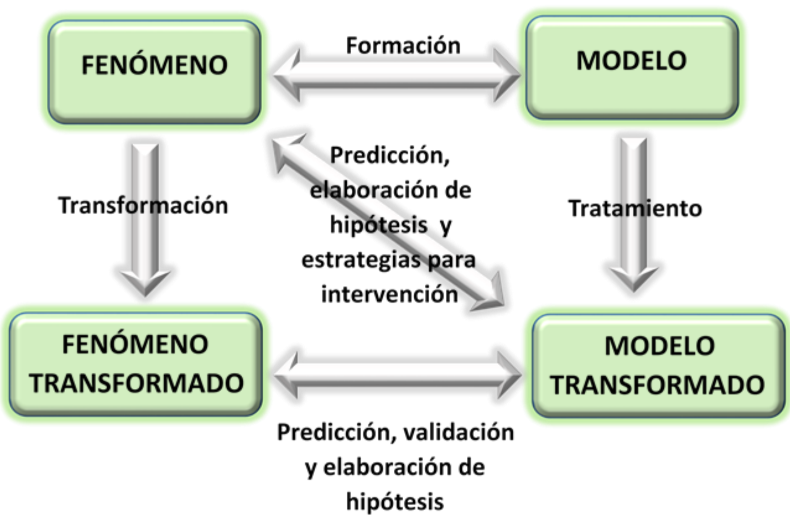


Ilustración 13: Las prácticas sociales de la modelación. Diagrama tomado de Las prácticas sociales de modelación como procesos de matematización en el aula (Arrieta J. , 2003)

El anterior diagrama describe el proceso de modelación como practica social y muestra tres fases conformes a la interacción del fenómeno y el modelo detalla Arrieta (2003): formación de modelos, tratamiento dentro de los modelos y elaboración de esquemas. En las tres frases se presenta “una suposición comprobable que se basa en conocimiento previo y se destina a dar solución a un problema” (Hurtado, 2006), la hipótesis se plantea, se trata y se comprueban en un práctica de modelado.

Teniendo claro que un modelo es una representación, que parte de pseudo-modelos y concluye en hipótesis confrontadas y confirmadas durante la práctica de modelado, definiendo esta práctica como un proceso claro de matematización en donde se privilegia todo tipo de representación tanto verbal como escrita fruto de la modelación y propia de una matematización horizontal que es formalizada en la apropiación del concepto en una matematización vertical.

5.3.2 La modelación y el pensamiento variacional.

La variación delimitada en el contexto se asocia a la transformación continua del mundo y de quien lo habita, la variación se hace visible en fenómenos naturales como el clima, las estaciones, la vida; también situaciones asociadas a la economía como oferta, demanda, tasas de interés, inflación, cambio monetario, entre otros, ejemplos aterrizados a las matemáticas hacen formal el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos abordados en la educación Básica Secundaria y Media en el sistema educativo colombiano.

Los documentos organizacionales de la Educación Matemática en Colombia sustentan teóricamente y ejemplifican el pensamiento variacional y sistemas algebraicos que deben ser desarrollados por el profesorado a partir de grado octavo de Básica; aunque en Primaria, grado sexto y séptimo los maestros fomentan el pensamiento variacional desde procesos diversos.

Colombia Aprende, red de procesos educativos, define el pensamiento variacional desde tres particularidades: el concepto de variable, el álgebra como sistema de representación y la descripción de fenómenos de variación y cambio. Las funciones modeladas por representaciones, son el concepto más cercano al desarrollo y actividad del pensamiento variacional, sin omitir la variación en conceptos geométricos, numéricos y de medición; Carlos Vasco (2010) afirma que:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

En concordancia con la filosofía actual de las matemáticas, “se hace necesario impulsar decididamente el cambio de las matemáticas estáticas a las dinámicas” (Vasco, 2010, pág. 1) es decir, acabar con una matemática inerte, apática y con carencia de sentido práctico a una matemática pensada desde el contexto y aplicada a las actividades habituales de la vida; una matemática que propenda por la construcción.

“Proponer que los alumnos y alumnas empiecen desde el preescolar y la primaria por vivenciar y ejercitar los procesos de matematización, por la modelación matemática y el pensamiento variacional, puede parecer utópico, hasta imposible” (Vasco, 2010, pág. 2); utópica o no, es la decisión más realista y factible que se puede tomar en la configuración de currículos, programas, unidades didácticas, textos, materiales y juegos matemáticos; porque en la actualidad es importante involucrar a los estudiantes desde el inicio de la vida escolar en el desarrollo de pensamiento matemático; ejemplo de ello es la enseñanza del álgebra, que se propone solo hasta el grado octavo, y que hace parte del componente implícito del currículo matemático en Básica Primaria.

Lo que en primaria es un tabú en secundaria es una novedad, el Educador Matemático no debe temer en introducir paulatinamente lenguaje, notación y conceptos, al fin y el acabo todo contribuirá a volver menos ardua la dinámica de comprender: que es posible restar de un número menor uno mayor, de que en álgebra no se suman peras con manzanas, que el cero no es el número más pequeño, que entre número y numero hay infinitos números, que un circulo es un polígono regular con infinitos lados, que el cuadrado es un rectángulo con todos sus lados iguales…, y así cientos de verdades que primero se cuentan a medias y después se cuentan completas. La idea no es enseñar contenido de grandes a los más pequeños, la idea es no subestimar sus habilidades y capacidad de comprender lo que a veces se cree complejo pero se vuelve simple, cuando el Educador Matemático recuerda que su función es hacer de lo complejo y difícil lo más sencillo y fácil.

Entonces convendría una unificación en la enseñanza de la aritmética, el álgebra, la trigonometría, el cálculo, la estadística y la geometría; bajo la premisa de hacer formalizar los cinco pensamientos sin privilegiar alguno en particular, ante esta iniciativa de pretender unificar las matemáticas, Vasco propuso realizar un acercamiento común a las distintas disciplinas de las matemáticas plurales; permitiéndole presentar los distintos contenidos de las matemáticas escolares utilizando un enfoque por sistemas, considerando en cada sistema matemático específico tres aspectos: sus componentes, sus relaciones y sus transformaciones u operaciones. Adicional a ello le permitió distinguir sistemas simbólicos, sistemas conceptuales y sistemas concretos o familiares para los estudiantes. La idea principal del enfoque por sistemas es que "en lugar de hablar de álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo, en la educación secundaria y media se privilegiara el estudio de los sistemas analíticos como colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones de orden superior" (Vasco, 2010, pág. 3).

En 1994 se expidió una Ley General de Educación que le quitó al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular directa, quedando reducida a la promulgación de lineamientos curriculares, indicadores de logros y estándares para la elaboración de pruebas y exámenes de Estado. Esta pérdida abrupta de la potestad del currículo, dio a las Instituciones Educativas el aval para formular libremente su proyecto educativo institucional, de replantear sus currículos, planes de estudio, claramente adecuados a ese proyecto planteado inicialmente, y según el documento el resultado previsible fue un gran caos curricular.

Bajo la ley general de educación después de dos años de trabajo, en 1998 se publicaron los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, en el cual se desarrollaron cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el métrico, el estocástico y el variacional, a través de cinco procesos matemáticos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. "La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue pues un paso adelante muy significativo, pues pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa" (Vasco, 2010).

Realizado este recuento sobre los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, se formulan interrogantes: ¿qué es?, ¿que no es?, y como se desarrolla el pensamiento variacional. Respecto a ¿Qué no es el pensamiento variacional?, menciona que pensar en forma variacional no es saberse una definición de función, o de igual forma aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes, o las de los modelos matemáticos de la física, puesto que estas son sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, y entorpecen el pensamiento variacional; tampoco se trata de dibujar y manejar las gráficas, ni de saberse las gráficas de la funciones. Todo este tipo de cosas en cambio se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras y así como los otros pensamientos, cada uno depende del otro, con el pensamiento numérico, captando patrones numéricos que se repiten; con el pensamiento espacial, acentuando los movimientos, las transformaciones y los cambios; con el pensamiento métrico, hallando la diferenciación entre magnitudes; con el pensamiento aleatorio, interpretando sucesos modelados por la estadística y la probabilidad; en el pensamiento geométrico, evocando relaciones dependientes entre lados, perímetros y áreas. Cuando un estudiante es consciente del conjunto de sucesos que dependen de otros, la cantidad de estrategias para el desarrollo del pensamiento variacional aumentan, más aún, cuando el escenario para ello es la modelación.

5.4 Lo Cotidiano y lo Académico en Matemáticas.

Teniendo en cuenta la estructura general de este trabajo y tomando como referente su objetivo principal, se hace necesario e importante un análisis de los resultados estructurado y direccionado a partir del uso de tres conceptos en particular, propuestos por

Abraham Arcavi (2006), han de tenerse en cuenta para crear un puente entre las prácticas cotidianas y las académicas.

5.4.1 Lo cotidiano

Con respecto a lo cotidiano, el autor explica que "las matemáticas cotidianas deberían incluir más de la vida de los estudiantes, debieran aprenderse directamente en aquellos contextos en los que se espera las usen los estudiante", las matemáticas deben involucrarse socialmente con el entorno más próximo de determinada comunidad académica, su cultura, sus costumbres, sus intereses y demás prácticas que puedan despertar en los estudiantes mayor interés, pero además de utilizar las herramientas e instrumentos que este le puede ofrecer o brindar, también pueda lograr una mejor interpretación y asimilación de los contenidos. Continuando con su explicación sobre lo que son las matemática cotidianas, Arcavi (2006) expresa: "Lo que incluimos en las matemáticas cotidianas depende mucho del contexto y de la práctica de donde emergen las matemáticas" (pág. 12), lo cual complementa lo sugerido en principio respecto al contexto e infiere sobre las prácticas matemáticas propias del estudiante, aquellas que son independientes, inherentes y propias de cada persona y que son utilizadas particularmente para la comprensión y asimilación de lo experimentado. Finalmente concluye que su propuesta respecto a lo cotidiano es:

> Lo cotidiano no es único y, por lo tanto, las matemáticas cotidianas deberían incluir (o referirse a) muchos contextos y prácticas, que necesitan ser más explorados.
>
> Las matemáticas cotidianas no han de restringirse necesariamente a las prácticas matemáticas de una determinada colectividad. Deberían consistir también en situaciones que se

> presenten en las vidas de los niños que posean un fuerte potencial para ser matematizadas (Arcavi, 2006, pág. 12).

Esto teniendo en cuenta que durante mucho tiempo las prácticas matemáticas han enfocado su aplicación y estudio a los fenómenos de las ciencias básicas; que es usado en muchos otros contextos, pero que en la mayoría de las ocasiones no puede ser comprendido por los estudiantes, por no pertenecer a su cotidianidad o por no involucrarlos directamente en su solución.

5.4.2 La matematización

Para el caso de la matematización, Treffers (como se citó en Arcavi, 2006), distingue dos tipos de matematización, una matematización horizontal y una matematización vertical. Para el caso de la matematización horizontal específica que consiste en "trasladar un problema de su contexto a algún tipo de matemáticas" (Arcavi, 2006), lo que significa que busca utilizar una problemática en concreto de su entorno, un problema que les atañe o les concierne de forma directa, por el cual se ven afectados y para el cual buscan una solución; mediante la utilización de objetos y representaciones matemáticas, para su posterior formalización o documentación, por medio del lenguaje propio de la disciplina. Con respecto a la matematización vertical el autor supone que busca formalizar las diferentes creaciones, construcciones y producciones de tipo netamente académico, producto de las mediaciones en su contexto escolar, hacia generalidades de contenido y método; es decir la formalización de la matemática cotidiana a una matemática académica.

5.4.3 La familiaridad con el contexto

El contexto “puede referirse al conocimiento de un tópico matemático al servicio de otro” (Arcavi, 2006, pág. 17), o que utiliza elementos propios de las matemáticas para ponerlo a su servicio. Este contexto es un objeto matemático formalizado e interiorizado que el sujeto utiliza incluso de forma involuntaria. El contexto también se ha de asociar con el entorno más cercano o próximo, con la idea de favorecer a los estudiantes a la hora de tratar un objeto, porque es necesario reducir la lejanía de la realidad y el concepto matemático porque de lo contrario este se hace inconcreto, indeterminado e indefinido a la hora de ponerlo en práctica.

6. METODOLOGÍA.

6.1 Experimentos de Diseño.

Briceño y Buendía (2015), en su artículo “los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática”, el cual se fundamenta en la aplicación de la metodología “experimentos de diseño”, en estudiantes que inician su etapa de bachillerato; en donde la modelación matemática “juega el papel de práctica, relacionada con la construcción de conocimiento matemático y la resignificación de aspectos variacionales de la función cuadrática” (Briceño & Buendía , 2015, pág. 66) ; pretenden, captar la forma como los estudiantes interactúan con un entorno predeterminado, las acciones que toman o establecen durante el trabajo de investigación, los gestos demostrados durante la relación con los diferentes elementos propuestos, las contribuciones y aportes realizados y el uso de la tecnología por parte de los estudiantes.

Los experimentos de diseño, son una metodología importante para la comprensión de cómo, cuándo y por qué las innovaciones educativas puedan funcionar en la práctica; adicional a ello, puede lograr que el estudiante razone y comprenda la relación existente entre la teoría aprendida dentro del aula de clase, el objeto o el artefacto diseñado para lograr comprender aún mejor la teoría; y la práctica, para la aplicación de lo construido durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cobb y Gravemeijer (como se citó en Briceño y Buendía, 2015, pág. 71) consideran tres fases para la realización de un experimento de diseño:

Fase 1: preparación del experimento. En esta fase se tienen en cuenta elementos como el diseño de los experimentos, los cuales deben ir fundamentados en los objetivos de la investigación. También se incluyen los cuestionarios diagnósticos si se creen necesarios de realizar. Cuando se tengan los diseños experimentales se prosigue con la planeación de la instrucción enmarcada en el contexto a desarrollar.

Fase 2: experimentación para apoyar el aprendizaje. En esta fase es importante la recolección de datos, es decir, que los datos permitan abordar cuestiones teóricas más amplias de las que me brinda el entorno de aprendizaje. Los investigadores realizan interpretaciones de los datos recolectados sobre la marcha de la actividad, de los participantes y el entorno de aprendizaje.

Fase 3: análisis retrospectivo. Esta fase permite a través de la toma y recolección de datos analizar cada una de las actividades propuestas. La expresión "retrospectivo" permite regresar a cada una de las secuencias y reconocer y analizar cuidadosamente el quehacer del estudiante, como también el entorno y contexto en el que se desarrolló la actividad.

Los investigadores, dentro de su trabajo, fundamentados en los experimentos de diseño, desarrollaron estas tres fases mencionadas con anterioridad, con el objetivo de mostrar los procesos y el tratamiento dado a una de las secuencias de las actividades expuestas; sin embargo y según lo evidenciado, la primera fase "preparación del experimento", es concerniente a la preparación y planeación de la experimentación; la segunda fase "experimentación para apoyar el aprendizaje" es relativa a la toma de datos; y una tercera fase "análisis retrospectivo" establecida como el análisis de las secuencias.

Los autores en la primera fase, basados en la idea de Cobb y Gravemeijer, para iniciar su trabajo, realizan un cuestionario diagnóstico de cinco preguntas a estudiantes de grado séptimo entre los 11 y los 12 años de edad de una misma institución educativa, con este cuestionario, buscaban o pretendían indagar y analizar sobre los diferentes conocimientos que poseían los estudiantes con relación a: trayectorias, gráficas, relación tiempo distancia y el tratamiento de situaciones que reflejen la modelación como práctica. A continuación se realiza un diseño de la secuencias, donde se buscaba desarrollar intencionalmente la modelación en el espacio académico a través de una serie de secuencias que se propusieron; y finalmente una planeación de las secuencias (tomadas como secuencia 1 y secuencia 2 con siete pasos cada una) en catorce pasos, en donde se observa, se analiza, y se desarrollan los diferentes fenómenos que se evidencian en la realidad, pero que son cercanos o próximos a los estudiantes o en los cuales se ven inmersos a diario, mediante el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra y Tracker para la simulación y posterior registro del fenómeno.

Para la fase 2, se muestra algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, durante el desarrollo de las actividades o tareas que se propusieron en las secuencias; se da cuenta mediante material fotográfico de la participación activa de los estudiantes en la solución de las preguntas propuestas, mediante gestos y expresiones; las gráficas elaboradas, las diferentes pruebas realizadas para obtener diferentes datos; y el uso de implementos matemáticos para la toma de medidas.

La fase 3, se fundamentó en el análisis de las secuencias (análisis retrospectivo) y que al igual según los autores, ofrece elementos hacia la resignificación de la función cuadrática. En esta fase, se analizó cada una de las actividades propuestas con anterioridad, en primer lugar el cuestionario diagnóstico, en el cual se pudo evidenciar que los estudiantes tenían conocimiento sobre lo que es una gráfica y mostraron algunas características de la misma y además algunas falencias de tipo conceptual; a continuación realizaron un análisis de las secuencias a través de tres aspectos variacionales relativos a la función cuadrática (el tiempo como variable independiente, el uso de la gráfica: intervalos y puntos clave, y el uso de tablas), con el fin de determinar y evidenciar como los estudiantes se desenvolvieron durante toda la actividad, que problemas tuvieron y que estrategias o métodos utilizaron para replantear y responder finalmente a lo propuesto.

6.2 Pilotaje del Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático.

A continuación se presenta informe detallado del único pilotaje llevado a cabo antes de la implementación del “Laboratorio Tecnológico para la Construcción de lo Cuadrático a partir de la implementación del Software Aplicativo Libre Tracker”, dicho laboratorio piloto fue desarrollado como taller en la Trigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa con asistencia de Educadores Matemáticos y sirvió para confirmar, reformar, y complementar cada una de las fases del laboratorio a implementar con los estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids. Este recuento comprende únicamente tres fases del “Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático”: fase de ensamble, fase de medición y registro y fase de rastreo.

6.2.1 Taller laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático a partir de la implementación del software aplicativo libre Tracker.

El presente extenso de investigación recopila los resultados y conclusiones del taller “Laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático con la implementación del software aplicativo libre Tracker” consecuencia de la ponencia: “modelación de funciones a partir del software aplicativo Tracker en prácticas experimentales” esta última expone un laboratorio de movimiento parabólico en donde los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información modelaban el tránsito de un proyectil lanzado por una catapulta de torsión para llegar al concepto de función cuadrática. La primera técnica de modelación consistía en una serie de lanzamientos repetitivos del proyectil contra una pared en periodos de tiempo cronometrados; para posterior toma y organización de datos, relación entre variables distancia, altura y tiempo en representaciones semióticas y obtención de la función mediante regresión cuadrática, la segunda consistía en grabar un video del movimiento del proyectil y rastrearlo con el software Tracker para ser analizado y conseguir el modelo; la experiencia trae como resultado que ambas técnicas de modelado son significativas en la concepción de función cuadrática debido a que se llegó a generalizar, entender y relacionar el modelo. Es justo aquí donde el registro de datos es fundamental y se entiende como la transición entre la experimentación y la modelación, teniendo en cuenta que "la medición es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior" (Baird, 1996, pág. 8) para la comparación; sin embargo los valores numéricos en una tabla no facilitan el análisis:

> Mediante una gráfica es más fácil conseguir la atención, pues al igual que un dibujo vale más que mil palabras, una gráfica vale más que mil números. Es más fácil comparar una gráfica con otra que comparar una tabla con otra. Las gráficas revelan, en forma más rápida, ciertos rasgos que mediante una inspección de la tabla no se podría obtener fácilmente, como son: valor máximo, valor mínimo, periodicidad, variables de la pendiente. (Gutierrez, 2013, pág. 84)

Al haber dificultades en la medición manual del tiempo en lapsos tan cortos, se concluye que la técnica de modelado con la aplicación es más eficaz en procesos de medición, es decir, facilita la obtención de datos reales del movimiento con un margen de error mínimo, acercándose más al modelo cuadrático.

La investigación en curso orientó y se enriqueció de teoría conceptual en el desarrollo del taller. La parte inicial de la primera sesión se enfocó a la presentación de la metodología de trabajo del semillero de investigación en el diseño de laboratorios para la modelación de fenómenos físicos. Después de esto, los participantes en grupos de tres personas, construyeron cada uno una catapulta muy sencilla con materiales provistos por los expositores para poder realizar el lanzamiento de un proyectil. En un tercer momento, cada uno de los grupos realizó la grabación con sus celulares de un video en el que se describía la trayectoria del proyectil.

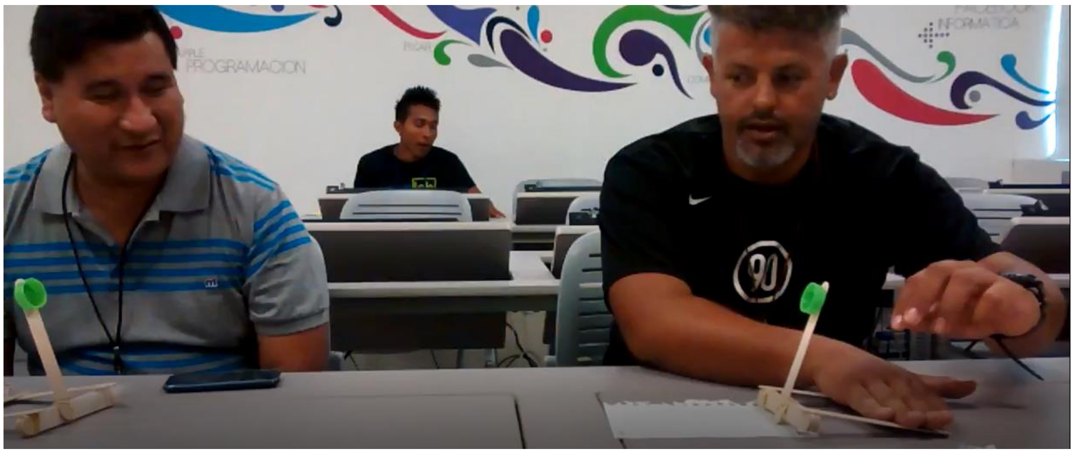


Ilustración 14: Participantes en la primera sesión del taller en la fase de medición y registro.

La segunda sesión puntualizó en el uso del software aplicativo Tracker dando a conocer datos particulares del aplicativo, años de difusión, desarrolladores, versiones, compatibilidad con sistemas operativos y descarga, continuando con la familiarización entre el usuario y el programa.

Los asistentes tuvieron la posibilidad de importar el video grabado la sesión anterior, determinar el periodo de tiempo, escoger la cantidad de cuadros por analizar según la calidad del video, establecer ejes coordenados y parámetro de longitud para el rastreo manual o automático del punto de masa y así poder llegar a representaciones que relacionasen las variables de distancia, altura y tiempo, adicionando otras como ángulo, velocidad y aceleración que pueden llegar hacer parte de la discusión y análisis del modelo, el programa entregó la función específica que modela el movimiento en cada una de sus representaciones como es su tabla, gráfica y ecuación algebraica.

Un participante del taller, “Laboratorio tecnológico para la construcción de lo cuadrático con la implementación del software aplicativo libre Tracker” presentado en el marco de la Trígesima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 30, realizó con ayuda del instructor una catapúlta sencilla para el lanzamiento de proyectiles de papel, para el posterior registro de un video parametrizado, permitiendo llevar a cabo una medición real en el software. Al importar el video al software libre Tracker y relizar una rastreo manual de la masa puntual (proyectíl) los datos obtenidos se relacionan a continuación:

Masa puntual	Tiempo (s) ± 0.4s	Distancia (cm) ± 0.001cm	Altura (cm) ± 0.001cm
0	0,07	-0,12	0,24
1	0,10	6,90	3,21
2	0,13	14,88	5,12
3	0,17	26,07	8,33
4	0,20	34,40	8,93
5	0,23	43,09	9,29
6	0,27	50,71	8,57
7	0,30	59,16	7,86
8	0,33	67,86	4,64
9	0,37	75,72	1,31

Tabla 2: Relación tiempo, distancia y altura del lanzamiento de un proyectil rastreado por un participante del Laboratorio Tecnológico para la construcción de lo cuadrático con el Software Aplicativo Libre Tracker.

Con la anterior representación el participante identificó características propias de una parábola sin aún llegar a la gráfíca: altura máxima 9,29 cm altúra mínima del proyectíl 0,24 cm, distancia final alcanzada por el proyectíl 75,72 cm, tiempo del proyectil en describir el moviemiento parabólico 0,37s, entre otras apreciaciones hechas por el observador a partir de la ralación tiempo – distancia – altura desde el primer registro hasta el décimo. Cada vez que se hace un registro cuadro a cuadro del video, el entorno multimedia de Tracker organiza una tabla de datos y proporciona la primera gráfica en coordenadas cartesianas de la distancia en función del tiempo obteniendo una gráfica con aspecto lineal que es analizada desde una linealización con el fin de hallar la generalización algebráica como la ecuación.

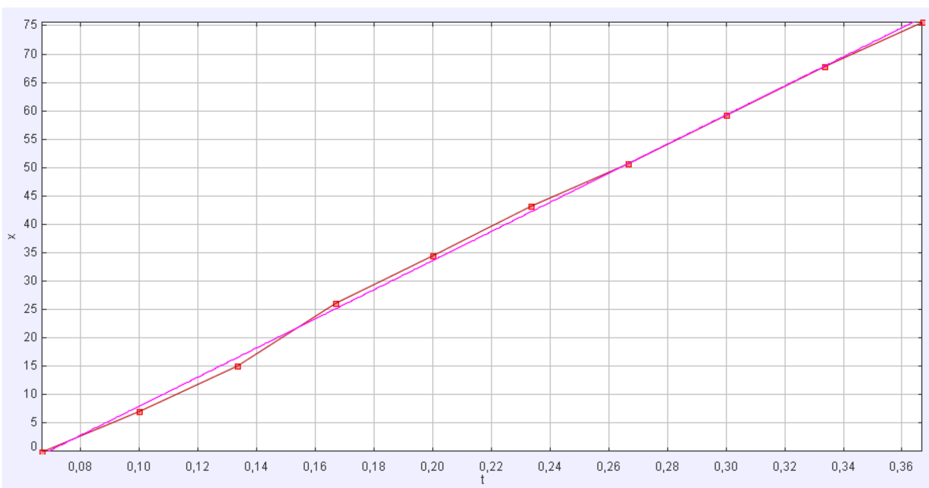


Ilustración 15: Relación tiempo versus distancia del proyectil lanzado por una catapulta analizado con el Software Aplicativo Tracker.

La representación algebraica de la distancia en función del tiempo es modelada por la función:

$$x = 256{,}9t + 17{,}85 \quad (50)$$

La representación geométrica de la función cuadrática que modela el movimiento parabólico del experimento es definida por el participante cuando percibe simetría, vértice, puntos de corte con los ejes; la parábola es generada por Tracker por medio de una regresión cuadrática que abarca la mayor cantidad de coordenadas cartesianas asociadas al rastreo inicial de la partícula, y así adquirir el valor numérico de las constantes a, b y c presentes en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

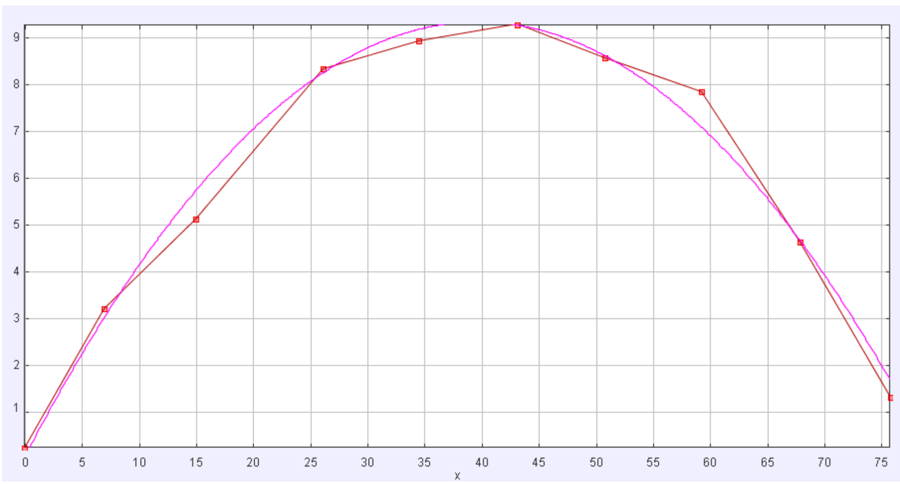


Ilustración 16: Relación distancia versus altura del proyectil lanzado por una catapulta analizado con el Software Aplicativo Tracker.

El análisis concluye con el modelo del movimiento parabólico después de un proceso de modelización que parte de la construcción de una catapulta y finaliza con la representación algebraica que corresponde al modelo cuadrático del movimiento del proyectil lanzado:

$$-38{,}1x^2 + 273{,}5x - 19{,}29 = 0$$

La aplicación del taller permitió definir las cinco fases con las cuales se abordaría la implementación, que corresponden a: fase de contextualización, fase de ensamble, fase de medición y registro, fase de rastreo y fase de representaciones, las cuales describirán de la mejor forma la modelación de lo cuadrático, a su vez se integrarán nuevas variables para el análisis y justificaran desde un argumento físico matemático una situación de violencia social en contexto.

6.3 Semillero de Investigación Mathema Kids.

Desde hace dos años el semillero de investigación Mathema Kids conformado por un grupo de trece estudiantes de grado sexto y séptimo de Básica Secundaria de la Institución Educativa Distrital Los Pinos de la ciudad de Bogotá, se encuentra adscrito a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad la Gran Colombia y al igual que el semillero de investigación de la Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información tiene como principal objetivo promover los procesos de investigación en educación matemática en el marco de la socioepistemología para la construcción social del conocimiento matemático a partir de la experimentación física, siendo claro ejemplo de la articulación armónica entre el componente matemático, el componente didáctico y el componente social para la enseñanza de las matemáticas.

6.4 Implementación del Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático.

El “Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático” fue aplicado con los estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids, quienes recorrieron por completo las cinco fases que comprenden el laboratorio social, reconociendo este como un experimento de diseño, el cual permite la verificación de una conjetura de los estudiantes, a partir de su contexto y su cotidianidad; el cual es confrontado a resultados experimentales para la construcción social del conocimiento matemático; desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa cumple con las características de una actividad que se compone de acciones (fases) y adquiere como práctica de referencia la un fenómeno social, para ser modelado por concepto de función cuadrática desde las representaciones y hacer evidente el proceso de modelación como práctica social. Las cinco fases son secuenciadas, aplicables y adaptables para la construcción de un concepto matemático abordado desde la física como práctica de referencia experimental en matemáticas:

Las dos primeras se articulan para la preparación de un experimento:

1. Fase de contextualización: el fenómeno de las balas perdidas en Colombia.
2. Fase de ensamble: la catapulta de torsión.

Las fases tres y cuatro conjuntas para dar el carácter experimental al diseño del laboratorio.

3. Fase de medición y registro: lanzamiento de proyectiles.
4. Fase rastreo: el software aplicativo libre Tracker.

La última fase hará visible el análisis y posterior análisis retrospectivo del laboratorio social.

5. Fase de representaciones: lo cuadrático.

6.4.1 Fase de contextualización: el fenómeno de las balas perdidas en Colombia.

Vinculado al contexto social de los estudiantes de la muestra de investigación y al concepto matemático y físico de estudio, “el fenómeno de balas perdidas se define como: aquella bala disparada intencionalmente, que ocasiona daños letales o no letales a una persona diferente a la que es el objetivo de quien acciona el arma de fuego" (CERAC, 2013). El fenómeno de las balas perdidas parte de las problemáticas sociales de violencia armada que afectan a Latinoamérica y son fruto del sicariato, riñas, guerras civiles, narcotráfico.

> "Un equipo de investigadores de UNLIREC documentó 741 casos de violencia armada a causa de balas perdidas – con 826 víctimas como resultado – reportados en medios de comunicación de 25 países de América Latina y el Caribe durante un período de dos años (1 de enero de 2014 - 31 de diciembre de 2015)" (UNLIREC, 2016) .

Según cifras aportadas por la Dirección de Investigación Criminal e Interpol a través de su Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO), durante este periodo de tiempo, solo en Colombia, se reportaron 452 casos de personas lesionadas por balas perdidas y 80 casos de personas muertas por este mismo hecho, para un total de 532 víctimas, lo que significaría que Colombia tiene el mayor número de víctimas por este fenómeno, con un 64% aproximadamente dentro de un total de 25 países, "Colombia es justamente uno de los países más afectados por balas perdidas y disparos alegres en la región de América Latina y el Caribe" (UNLIREC, 2016); siendo esta una cifra alarmante con respecto al promedio global; porque:

> "América Latina y el Caribe no es una región ajena a la violencia con armas de fuego. En la región se concentra el 27% de todos los homicidios a nivel global, teniendo únicamente el 9% de la población mundial. A nivel global, el 46.3% de los homicidios son cometidos con armas de fuego y este porcentaje es incluso mayor en América Latina y el Caribe" (UNLIREC, 2016).

Ante este fenómeno que ha venido afectando de forma constante el país (con un total aproximado de 2.995 casos de víctimas en los últimos nueve años); tanto el gobierno local como el nacional, han tomado en los últimos años, una serie de medidas, acciones y campañas, en busca de mitigar y reducir esta problemática. Dentro de estas medidas se encuentra:

La Tipificación de este acto como un delito, consagrado en el artículo 18, de la ley 1453 de 2011(ley de seguridad ciudadana), adicionado a la ley 599 de 2000(Código Penal), en su artículo 356 A; el cual dice:

> "Quien teniendo permiso para el porte o tenencia de armas de fuego la dispare sin que obre la necesidad de defender un derecho propio o ajeno contra injusta agresión actual o inminente e inevitable de otra manera, incurrirá en prisión de uno (1) a cinco (5) años, cancelación del permiso de porte y tenencia de dicha arma, y la imposibilidad por 20 años de obtener dicha autorización; siempre que la conducta aquí descrita no constituya delito sancionado con pena mayor" (Ley 599, 2000, Artículo 356 A)

"Campaña por una Navidad sin disparos al aire ni quemados" (Castro, 2011), realizada en la ciudad de Cartagena, en diciembre del año 2011; con el fin de evitar más muertos o heridos por balas perdidas, en donde intervinieron la Gobernación de Bolívar, la Policía Nacional, la Secretaría de Salud y la Armada Nacional

Campaña "NO a las balas perdidas, un canto por el respeto a la vida" (El Colombiano, 2013) llevada a cabo en la ciudad de Medellín en diciembre de 2014, la cual se lanzó con motivo de la Semana de los Derechos Humanos en Medellín en la que se hizo un llamado para que la ciudadanía entienda el peligro que representan el uso de armas de manera indiscriminada en estas épocas de fin de año; a través de la Red Ciudadana para la

Prevención de la Violencia Armada con la producción de un video en contra de las balas perdidas.

El decreto presidencial 2515 de 2015, por el cual se suspende el porte de armas de fuego para la temporada de navidad y año nuevo en todo el país, esta medida se efectúo desde el 24 de diciembre del año 2015, hasta el 31 de enero del año 2016.

El decreto presidencial 155 del 01 de febrero de 2016, el cual menciona que “las autoridades militares, adoptarán las medidas necesarias para la suspensión general de los permisos para el porte de armas en todo el territorio nacional, desde el 1 de febrero hasta el 31 de diciembre de 2016”, con algunas excepciones; siendo renovada y extendida un año más esta medida, a través del decreto 2208 del 30 de diciembre de 2016.

Con estas medidas tomadas por el gobierno, se ha reducido esta problemática pasando de 267 casos en el año 2015 a 215 casos para el año 2016, pero aun así, continúan siendo muy altos los casos que se siguen presentando en el país; el Centro Regional de las Naciones Unidas para la Paz, el Desarme y el Desarrollo en América Latina y el Caribe UNLIREC, en su estudio realizado sobre balas perdidas del primero de enero del 2014 al 31 de diciembre de 2015 muestra que en muchos de los casos reportados (32%) se desconoce el motivo y el actor involucrado en el hecho; seguido de los casos relacionados con violencia de pandillas (15%), el crimen organizado (14%), el crimen común (12%), la violencia social, comunal, interpersonal (10%), el conflicto armado, terrorismo (menos del 1%); otro porcentaje estuvo asociado a intervenciones legales realizadas por la fuerza pública en enfrentamiento con grupos armados al margen de la ley, desconociendo exactamente el autor de la bala. Finalmente y con un porcentaje aproximado del 9% de los casos documentados, se deben a los llamados dentro de esta investigación disparos alegres

o disparos al aire; los cuales son generados por irresponsabilidad social, comúnmente en las festividades anuales.

DEPARTAMENTO POLÍTICO	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
AMAZONAS	0	0	0	0	0	0	1	0	0
ANTIOQUIA	8	14	24	18	15	15	4	6	7
ATLÁNTICO	4	2	7	0	0	0	3	3	2
BOLÍVAR	3	5	7	6	3	4	3	2	5
BOYACÁ	0	0	0	2	0	1	0	0	0
CALDAS	0	2	0	3	1	2	2	1	0
CAQUETÁ	1	0	0	0	1	1	1	1	0
CASANARE	0	0	0	0	0	2	0	0	0
CAUCA	0	1	2	0	5	2	1	2	0
CESAR	0	1	2	0	0	1	1	0	2
CHOCÓ	0	0	1	0	0	0	0	1	2
CÓRDOBA	0	0	0	0	1	0	0	0	0
CUNDINAMARCA	0	3	1	4	5	0	4	3	1
GUAJIRA	0	0	0	0	0	0	1	1	0
HUILA	2	3	2	1	0	0	1	2	0
MAGDALENA	0	2	0	2	0	2	1	1	0
META	0	3	1	0	2	1	1	1	2
NARIÑO	2	2	3	2	3	9	0	2	4
NORTE DE SANTANDER	1	0	1	1	1	0	2	1	4
PUTUMAYO	0	0	0	0	0	1	0	0	1
QUINDÍO	0	1	0	1	0	0	0	1	0
RISARALDA	2	0	1	1	2	1	0	1	1
SAN ANDRÉS	0	0	0	0	0	0	0	1	0
SANTANDER	3	2	8	0	1	2	3	0	1
TOLIMA	1	0	2	0	4	1	1	3	0
VALLE	26	24	24	21	17	4	9	8	2
TOTAL	53	65	86	62	61	49	39	41	34

Tabla 3: Homicidios anuales por balas perdidas en Colombia de 2008 a 2016 por departamento. Datos suministrados por el Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO).

Si se realiza una comparación de la distribución de los porcentajes de los motivos por los cuales se presenta este fenómeno, se puede evidenciar que dentro de los casos reportados por la violencia de pandillas (15%) y las balas alegres (9%), solo existe una diferencia del 6%; y que además sería casi que igual al porcentaje de casos por violencia social, comunal, interpersonal (10%). Parte de este trabajo está encaminado a generar en la población estudiantil; y más aún en aquellas que de una u otra forma están inmersas en situaciones de violencia; conciencia social, corresponsabilidad desde las matemáticas.

Las víctimas en Colombia por el fenómeno de balas perdidas en el periodo 2008 2016 fueron 2995 como reporta el Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO) dichas estadísticas se relacionan a continuación:

DEPARTAMENTO POLÍTICO	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
AMAZONAS	0	0	0	0	0	0	2	0	0
ANTIOQUIA	20	86	103	107	92	56	45	75	53
ARAUCA	4	2	0	0	0	0	0	0	1
ATLÁNTICO	39	22	45	29	17	5	6	3	10
BOLÍVAR	12	5	5	2	9	5	6	5	1
BOYACÁ	0	0	1	2	2	0	0	0	0
CALDAS	3	5	6	5	13	8	7	2	2
CAQUETÁ	0	4	0	2	2	0	3	4	1
CASANARE	0	0	0	1	2	6	0	1	2
CAUCA	10	8	3	2	7	8	3	7	7
CESAR	1	4	2	2	1	5	4	1	2
CHOCÓ	1	3	1	0	0	0	2	4	2
CÓRDOBA	5	0	0	0	0	1	1	2	1
CUNDINAMARCA	28	16	18	14	14	11	14	9	1
GUAJIRA	1	0	1	3	9	2	1	0	3
GUAVIARE	0	1	0	0	0	0	1	2	0
HUILA	6	6	15	18	19	6	4	3	1
MAGDALENA	7	15	4	11	11	14	6	10	14
META	12	12	6	8	17	16	11	4	2
NARIÑO	7	2	8	13	19	9	5	4	4
NORTE DE SANTANDER	1	3	1	2	4	11	10	12	6
PUTUMAYO	0	0	0	1	1	3	5	1	4
QUINDÍO	2	5	1	1	2	3	1	4	9
RISARALDA	2	3	2	2	3	1	2	2	2
SAN ANDRÉS	3	2	0	0	0	0	0	0	0
SANTANDER	35	16	8	22	21	14	20	18	7
SUCRE	0	7	2	1	1	4	2	10	4
TOLIMA	5	7	2	6	6	2	4	3	1
VALLE	73	69	73	99	96	74	61	40	41
TOTAL	277	303	307	353	368	264	226	226	181

Tabla 4: Lesionados anuales por balas perdidas en Colombia de 2008 a 2016 por departamento. Datos suministrados por el Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO).

Año	Lesionados	Homicidios
2008	277	53
2009	303	65
2010	307	86
2011	353	62
2012	368	61
2013	264	49
2014	226	39
2015	226	41
2016	181	34
Total	2505	490

Tabla 5: Consolidado de lesionados y homicidios por balas perdidas en el periodo 2008 – 2016 a nivel Nacional.

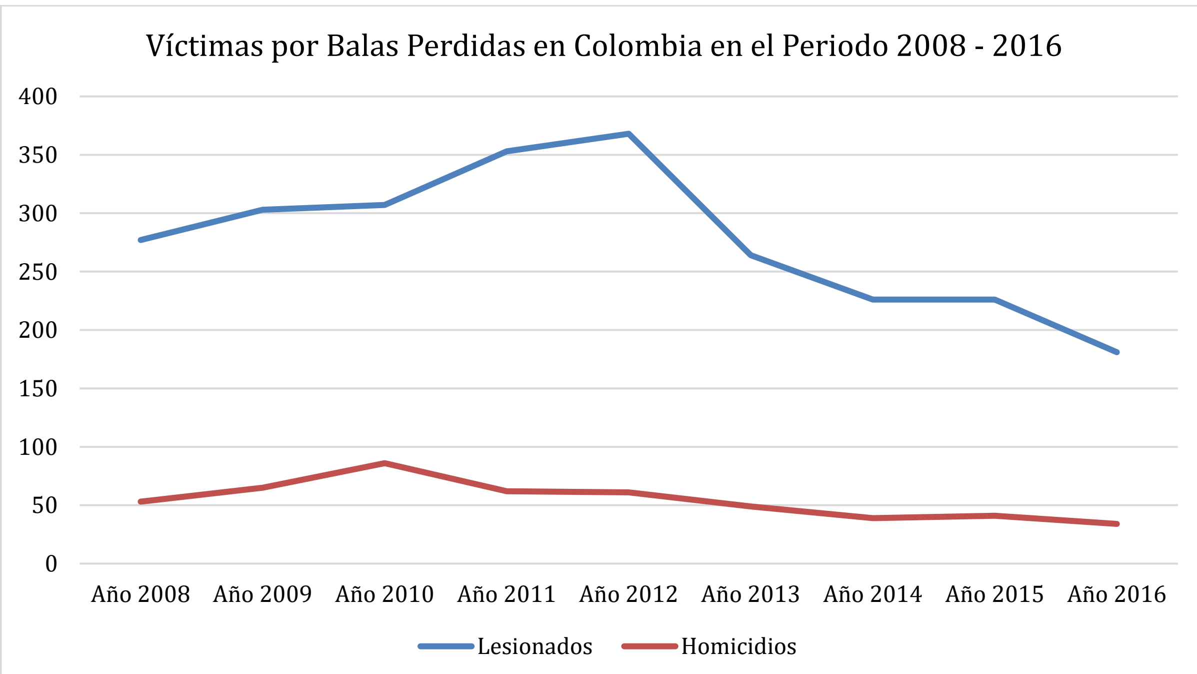


Ilustración 17: Diagrama lineal de víctimas por balas perdidas en los últimos nueve años en Colombia.

Las variables cuantitativas discretas que corresponden a lesionados y homicidios del fenómeno de balas perdidas en Colombia, analizadas desde los datos suministradas por el Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO) para los últimos nueve años, introducen a los investigadores en este fenómeno social, permitiendo la elaboración y diseño de una entrevista para ser aplicada a la muestra poblacional.

Entrevista al Semillero de Investigación Mathema Kids.

La presente entrevista tiene como propósito contextualizar a los investigadores sobre el conocimiento y contacto directo e indirecto, de los estudiantes del semillero de investigación "Mathema Kids", con armas de fuego y hechos relacionados con el mismo. Es necesario aclarar que la presente entrevista fue resuelta por los estudiantes sin ningún tipo de influencia de los investigadores en sus respuestas. Es por esto que pedimos la colaboración de ellos respondiendo algunas preguntas, las respuestas consignadas por ellos en video se mantendrán anónimas y además no encontrarán preguntas que invadan su intimidad, los estudiantes que fueron escogidos para hacer parte de la investigación, no se seleccionaron por alguna característica o rasgo en específico, fueron seleccionados como muestra de investigación.

Las opiniones de los estudiantes encuestados fueron analizadas y estudiadas de forma general para ser incluidas en la investigación, y tenga en cuenta que en ningún momento se tomarán sus respuestas individuales para ser publicadas. Solicitando amablemente que responda en lo posible a las preguntas, abierta y honestamente.

1. ¿Sabe usted qué es una bala perdida?, si lo sabe por favor explíquelo.

A partir de las ideas previas de los estudiantes respecto a una bala perdida, se quiere determinar si el estudiante es capaz de definir o ejemplificar dicho fenómeno.

2. Comente si ha sido testigo de algún hecho asociado a un disparo con arma de fuego.

Desde el contexto del estudiante, se requiere verificar si él o ella ha sido testigo o ha hecho parte de un evento asociado a este fenómeno social; con el fin de poder establecer su cercanía a este tipo de hecho.

3. ¿Qué cree usted que le ocurre a una persona, al ser alcanzada por un proyectil?

Teniendo en cuenta el entorno social en el que se encuentra inmerso, se pretende establecer si el estudiante conoce sobre las consecuencias, daños y secuelas que podría ocasionar un proyectil al impactar a una persona, al ser lanzado de forma irresponsable por otra.

4. ¿Qué cree usted que sucede con el proyectil de un arma de fuego al realizar un disparo al aire?

En el marco del fenómeno físico de estudio, se busca que el estudiante mediante una descripción explique el movimiento realizado por un proyectil lanzado por un arma de fuego, y que además pueda asociarlo a otro fenómeno o situación de su cotidianidad.

5. ¿Cómo cree que varía la velocidad de un proyectil lanzado por un arma de fuego?

A raíz de su pensamiento matemático-variacional, se quiere observar si el estudiante es capaz de indicar cómo varía la rapidez del proyectil en una dirección específica, una vez es lanzado por el arma de fuego; lo que significa, que se verifica si conoce o no, en qué momento aumenta, disminuye o se mantiene la velocidad, y el porqué de esta situación.

6.4.2 Fase de ensamble: la catapulta de torsión.

La palabra catapulta proviene del griego Kata que significa: sobre o contra, y Pallo**,** que significa: yo arrojo; el uso de este artefacto con fines guerreristas se le atribuye a los sirios; “la catapulta se llamaba también Onagre (onager), porque dicen que el asno salvaje que lleva este nombre tira piedras con sus pies traseros” (René, 1856, pág. 221), similar a “la catapulta de un solo brazo, a modo de honda gigante, se empleó a partir del siglo IV d.C. Era capaz de lanzar un proyectil de 80 kilos a 800 metros de distancia, y necesitaba una dotación de 8 hombres" (Escarpa, 2000, pág. 56) ; sin embargo y según datos históricos:

> "Dionisio I de Siracusa fue el primer Griego en usar la catapulta de torsión para la toma de la ciudad Siciliana de Motya en el 397 a.C., pero el arma parece haber sido tan ignorada en el continente, que Eneas el táctico, que escribe en los años 350 a.C., no la menciona como amenaza para una ciudad asediada" (De Souza, 2008, pág. 127).

La catapulta de torsión lanza sus proyectiles por la fuerza creada mediante el retorcimiento de cuerdas u otros materiales, el principio de este tipo de catapulta se adapta a un diseño sencillo elaborado con materiales cotidianos para el laboratorio tecnológico de la construcción de lo cuadrático, sujeto a la idea de simular el lanzamientos de proyectiles asemejándose al tipo de movimiento de una bala accionada por un arma de fuego.

Una catapulta de torsión con materiales cotidianos.

Materiales.

6 Palos de paleta.

4 Bandas elásticas.

1 Tapa de gaseosa.

Procedimiento.

1. Unir 4 palos de paleta, uno encima de otro, sujetar a los extremos con bandas de elásticas.
2. Unir 2 palos de paleta a un extremo usando una banda elástica.
3. Introducir los 4 palos de paleta del primer paso entre los dos palos de paleta por el extremo sin sujetar, introducir hasta el límite.
4. Añadir al extremo del palo de paleta inclinado la tapa de gaseosa.

5. Introducir el proyectil en la tapa de gaseosa.

6. Realizar diferentes lanzamientos de proyectiles con variación del ángulo del palo de paleta.

6.4.3 Fase de medición y registro: lanzamiento de proyectiles.

Después de la construcción de la catapulta, los trece estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids, realizaron lanzamientos repetitivos de proyectiles, cada estudiante grabó un video en formato Mp4 de un lanzamiento, el cual registraba el movimiento parabólico del proyectil; este debía describir claramente el movimiento del objeto lanzado, para este caso en particular: canicas.

El video con buena resolución y clara descripción del movimiento debía contener un parámetro, que permite trabajar con medidas reales en la fase de rastreo, en este punto se debe dar libertad al estudiante en la escogencia del parámetro, un objeto en el video o un trazo con un marcador sobre la pared pueden llegar a ser los más apropiados, los estudiantes de grado sexto y séptimo recurrirán a medidas de longitud (centímetros), pero el cardinal puede variar de un estudiante a otro. Medir es un acto matemático innato y propio del ser y es el ejemplo más claro de experimentación en matemáticas, medir:

> “Es el proceso por el cual se asigna un número a una propiedad física de algún objeto o fenómeno con propósito de comparación, siendo ese proceso una operación física en la que intervienen necesariamente cuatro sistemas: el sistema objeto que se desea medir, el sistema de mediación o instrumento, el sistema de comparación que se define como unidad y que suele venir unido o estar incluido en el instrumento, y el operador que realiza la medición” (Hurtado, 2006)

El registro del movimiento de proyectiles.

Materiales.

Una Catapulta de torsión.

Canica.

Cámara de video o teléfono móvil con aplicación de video.

Regla.

Plumón.

Procedimiento.

1. Ubicar la catapulta junto a una pared de fondo claro o preferiblemente un tablero acrílico.
2. Ubicar el proyectil en la catapulta (canica).
3. Usar la regla y el plumón para generar un parámetro de 10cm sobre la pared o tablero acrílico, el cual debe ser visible en la grabación del video.
4. Grabar el video desde la posición inicial hasta la posición final del proyectil lanzado por la catapulta, que describa completamente el movimiento de la canica o proyectil.
5. Enviar o guardar e video en el computador.

6.4.4 Fase de rastreo: software aplicativo libre Tracker.

Un modelo matemático es una representación obtenida a partir de herramientas matemáticas, operaciones, mediciones, registros, relaciones… que permiten generalizar o solucionar un problema de aplicabilidad. La perspectiva de la modelación matemática se amplía en gran medida gracias a la evolución de los ordenadores, los cuales permiten la utilización de software aplicativos para facilitar la ejecución de determinadas tareas, por ejemplo: en matemáticas, las hojas de cálculo minimizan y optimizan el tiempo en el desarrollo de cálculos; la matemática dinámica, permite la obtención de representaciones geométricas, ligadas a ecuaciones y funciones algebraicas. Jacovkis (2005) afirma que:

> En la era precomputacional la modelización matemática había dado resultados fabulosos en física, y si se considera a la estadística como ciencia experimental separada de la matemática. Se usaba poco en otras disciplinas… la computadora abriría un camino para la formalización de disciplinas con características distintas de la física, descritas a través de sistemas complejos y no lineales, en muchos casos no diferenciables (pág. 20).

Software Aplicativo Libre Tracker.

Las tecnologías de la información en educación son herramientas para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, la función del software es hacer visible la transición entre el fenómeno físico y concepto matemático modelado. Open Source Physics (2008) en su página oficial de internet define al software Tracker como:

> …una herramienta de imagen y paquete de análisis de vídeo y de modelado que se basa en la biblioteca de código "Open Source Physics Java". Las características incluyen seguimiento de objetos con la posición, velocidad y aceleración superposiciones y gráficos, filtros de efectos especiales, múltiples marcos de referencia, puntos de calibración y perfiles de línea para el análisis de los patrones de espectros y de interferencia. Está diseñado para ser utilizado en los laboratorios de física de la universidad y conferencias introductorias.

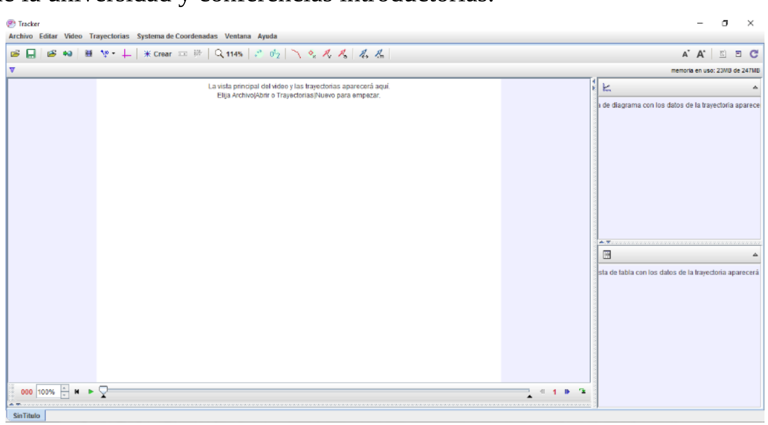


Ilustración 18: Entorno inicial del Software Aplicativo Libre Tracker.

Se destaca que Tracker es un software aplicativo gratuito, de fácil acceso para los docentes, el instalador es descargable por la página oficial, es instalable y ejecutable sin requerir señal de internet, su última versión Tracker 4.94 de agosto de 2016 es compatible con el sistema operativo Windows, iOS y Linux, es producido por Open Source Physics y Cabrillo College con el apoyo de ComPadre. Tracker como recurso informático para profesores es un Software aplicativo en física que hace posible el rastreo de partículas en movimiento presentes en videos o secuencias fotografías, este aplicativo se adapta al estudio y análisis del movimiento parabólico y las representaciones del concepto de función cuadrática y sus representaciones; después de la fase de registro cada estudiante realizó el rastreo y análisis del proyectil en movimiento registrado en cada uno de los videos, siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

Materiales.

Computador.

Video del lanzamiento del proyectil.

Software Aplicativo Libre Tracker.

Procedimiento.

1. Importar el video a Tracker. Archivo, abrir, ubicar el video y abrir.
2. Utilizando la barra inferior delimitar el fragmento del video que describa la trayectoria del proyectil lanzado por la catapulta.
3. Ubicar ejes coordenados en el primer cuadro del video u origen de la trayectoria del proyectil.

4. Crear vara de calibración y ubicarla en el parámetro establecido dentro del video.

5. Establecer cuadrícula.

6. Crear masa puntual, la masa puntual va a corresponder al proyectil lanzado por la catapulta.

7. Rastrear manualmente el proyectil, con ayuda de la tecla “shift” haga clic sobre la masa puntual (proyectil) cuadro a cuadro.

8. Obtener y analizar las representaciones.

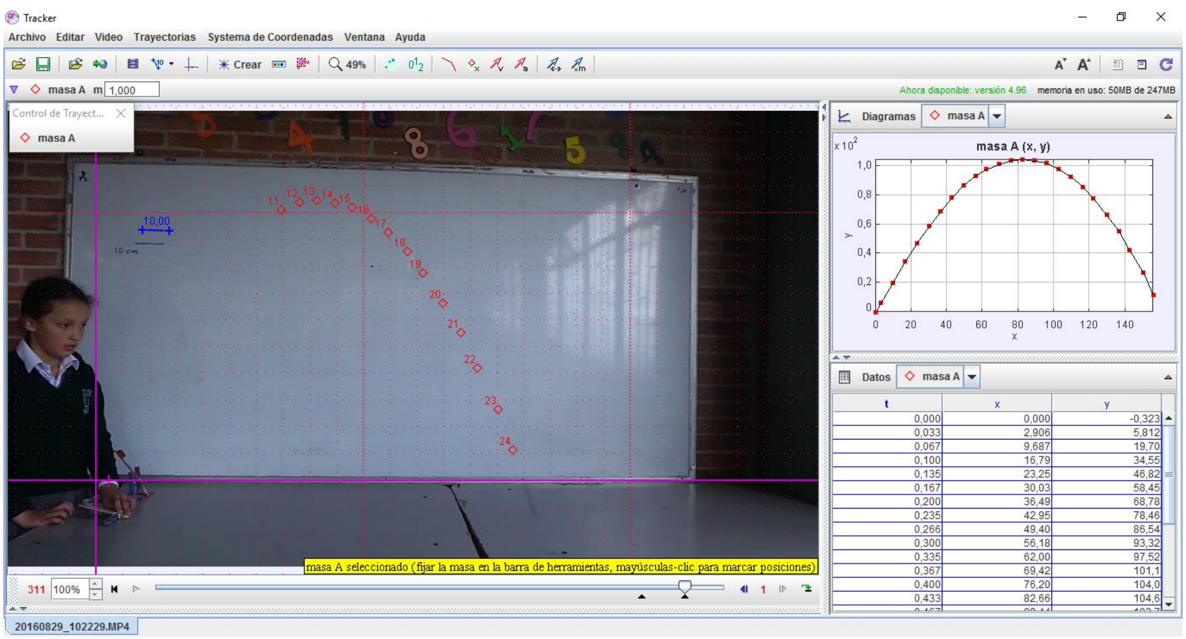


Ilustración 19: Entorno de Tracker desde el rastreo del movimiento parabólico.

6.4.5 Fase de representaciones: lo cuadrático.

“La representación de una función es la notación que permite analizar sus características y propiedades más importantes. Las notaciones pueden ser de tipo gráfico o simbólico” (León & Sáchica). Tres son las representaciones de la función cuadrática obtenidas después del análisis del movimiento parabólico con el Software Aplicativo Libre

Tracker: la tabla de datos, la gráfica y la ecuación, en pro del análisis del comportamiento cuadrático.

La tabla.

La "representación (auxiliar) tabular, utilizada en el pasaje del registro de la escritura algebraica al registro gráfico" (D'Amore, Fandiño, & Iori, 2013, pág. 112), es igual en representación pero no en función, en este caso la tabla cumplirá con capturar y relacionar los datos reales del movimiento parabólico.

Posición masa puntual. Masa puntual: _____________	**x** x: ________________ Unidad de medida:_____ Margen de error: ______	**y** y: __________________ Unidad de medida:_______ Margen de error: ________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tabla 6: Tabla de datos como representación semiótica de la función cuadrática.

La anterior ilustración hace parte de un total de cuatro tablas pertenecientes a la guía desarrollada por los estudiantes en la fase de representaciones, a partir del análisis con el Software Aplicativo Libre Tracker. Para un correcto diligenciamiento de cada una de ellas los estudiantes distinguen la semiótica desde la simbología de las unidades y el significado de las variables, unidad de medida de cada una de ellas, margen de error de la medición con el Software en variables de longitud y tiempo (dato suministrado y explicado por los investigadores) y la masa puntual (proyectil) analizada.

Cada tabla relaciona diez parejas ordenadas obtenidas en el rastreo del proyectil con el Software Tracker, y relacionan las variables de la siguiente manera:

Tabla 1: distancia vs altura.

Tabla 2: tiempo vs distancia.

Tabla 3: tiempo vs altura.

Tabla 4: distancia vs velocidad.

Las cuatro tablas representan funciones cuadráticas, exceptuando la relación tiempo y distancia que es modelada por una función lineal. Para el análisis de las tablas que representan la función cuadrática, los estudiantes deben identificar coordenada a coordenada los cambios que se presentan en ambas variables, para ser comparados y analizados junto a la representación gráfica.

La gráfica.

La representación gráfica de una función cuadrática corresponde a una parábola cuyas parejas ordenadas (x, y) satisfacen la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, esta representación hace:

> …más fácil conseguir la atención, pues al igual que un dibujo vale más que mil palabras, una gráfica vale más que mil números. Es más fácil comparar una gráfica con otra que comparar una tabla con otra. Las gráficas revelan, en forma más rápida, ciertos rasgos que mediante una inspección

de la tabla no se podría obtener fácilmente, como son: valor máximo, valor mínimo… (Gutiérrez, 2013, p. 84)

Para la construcción de la representación gráfica de la función cuadrática, se hace necesario que sobre una cuadrícula con ausencia de parámetros numéricos y ejes coordenados, los estudiantes bosquejen con ayuda de sus tablas y el análisis en Tracker cada una de las relaciones entre las variables propuestas: distancia vs altura, tiempo vs distancia, tiempo vs altura y distancia vs velocidad.

En esta representación de la función cuadrática es necesario que los estudiantes identifiquen el punto máximo o mínimo (vértice), cortes con el eje x y la simetría de la parábola para una posterior relación con el fenómeno real modelado.

La expresión verbal.

La expresión verbal vista como representación es abordada al finalizar el laboratorio desde un cuestionario con tres tipos de pregunta. El primer tipo de pregunta capta datos específicos obtenidos por las representaciones, con el fin de corroborar que el estudiante entienda e interprete correctamente la tabla y la gráfica, ejemplo:

¿Cuál es la distancia final recorrida por el proyectil?

¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el proyectil?

El segundo tipo de pregunta relaciona el comportamiento de las variables del fenómeno físico con las características de la función cuadrática, para relacionar conceptos matemáticos expresados en lenguaje cotidiano, con los conceptos matemáticos expuestos en lenguaje académico:

En lenguaje cotidiano presentado a los estudiantes: ¿Cómo varía la velocidad durante el movimiento del proyectil (Aumenta, disminuye, se mantiene igual)?

En lenguaje académico: ¿Cómo varía la velocidad en función del tiempo en el movimiento parabólico?

El tercer tipo de pregunta relaciona el fenómeno físico (movimiento parabólico) con el concepto matemático (función cuadrática) para dar respuesta a una pregunta sobre un fenómeno social.

¿Qué concluyes acerca del movimiento de un proyectil que es accionado por un arma de fuego?

La ecuación.

"La representación paramétrica es el registro de la escritura algebraica" (D'Amore, Fandiño, & Iori, 2013, pág. 112) y es la representación simplificada y formal de un modelo matemático, tal vez una tabla y una gráfica no adquieren esa rigurosidad, pero una ecuación tampoco adquiere la practicidad de una tabla y la atención de una gráfica. La ecuación no hizo parte de las representaciones analizadas con los estudiantes de grado sexto y séptimo del semillero de investigación Mathema Kids, por lo tanto, la representación paramétrica será desarrollada en el análisis de un fenómeno social modelado por la función cuadrática como un resultado adicional de la presente investigación.

7. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

A continuación se presentan los resultados del trabajo de investigación “el fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático”, con un cuidadoso análisis soportado por cada uno de los anteriores apartados, y que espera ser de utilidad para la disciplina matemática y la teoría científica de la Matemática Educativa.

7.1 Del Fenómeno Social de Balas Perdidas en Colombia al Modelo Cuadrático.

“Un modelo será una simplificación, una idealización, en este sentido una falsificación”

Alan Turing 1952.

Para Inés María Gómez (2009), la modelación o modelización es el proceso por el cual se describe un fenómeno real en lenguaje matemático, obteniendo resultados matemáticos, los cuales son evaluados para interpretar el mundo real; en su artículo Modelización Matemática en Contextos Tecnológicos, propone una forma sencilla de generar un modelo desde la identificación de un problema para ser abordado desde las matemáticas y concluir en la inferencia sobre el mundo real desde la disciplina.

1. Identificar un problema del mundo real.
2. Identificar factores importantes y representar estos en términos matemáticos.
3. Usar análisis matemáticos para obtener resultados matemáticos.
4. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos y ver cómo afectan al mundo real.

Los cuatro pasos son adaptados a la construcción de un modelo matemático que permita analizar, predecir y más que eso, inferir sobre un fenómeno social; ahora bien ¿Los fenómenos sociales son modelables desde las matemáticas? Acostumbrados a procesos de modelación de fenómenos que analizan y predicen situaciones dentro de las ciencias exactas como la biología, la física y la química o sectores económicos y de ingeniería, en donde las variables cuantitativas superan en medida a las cualitativas, hacen irrisoria e incluso utópica la posibilidad de establecer modelos de carácter matemático que establezcan hipótesis dentro de las ciencias sociales.

"Un modelo puede ser adecuado para explicar, entender y predecir ciertos procesos en algún sistema, sea biológico, físico o, por supuesto social" (Ruíz & Padilla, 2012, pág. 123), un modelo matemático no busca ser una fiel e irrefutable representación de un fenómeno, es una simplificación, una idea limitada y condiciona, verificable, rigurosa que permite establecer hipótesis de comportamientos futuros. Daniel Peña (2010) define tres razones por las cuales las matemáticas deben considerarse como herramienta para adquirir y consolidar conocimiento social:

> (i) En primer lugar, las matemáticas obligan a definir claramente las variables de interés en cada problema, a establecer las hipótesis sobre su comportamiento y a definir las relaciones entre ellas.
>
> (ii) En segundo lugar, el lenguaje matemático permite importar a las Ciencias Sociales modelos de relación entre variables que han tenido éxito en otras ciencias, ofreciendo nuevas posibilidades de explicación de los fenómenos sociales y enriqueciendo el conjunto de modelos disponibles para investigar la realidad social.
>
> (iii) En tercer lugar, la creciente disponibilidad de datos, debido a la difusión de los ordenadores y la automatización en todas las actividades humanas, permite contrastar con mayor

rigor los modelos sociales en la práctica mediante los métodos estadísticos y generar predicciones y reglas de comportamiento verificables con los datos (pág. 1).

Sin lugar a dudas puede llegar a ser satisfactorio el uso de modelos matemáticos en las ciencias sociales cuando “una de las mayores aportaciones que pensamos pueden hacer… es el brindar la posibilidad de crear escenarios virtuales que permitan poner a prueba algunas hipótesis” (Ruíz & Padilla, 2012, pág. 123) por ejemplo “pensemos en un problema típicamente de dinámica social, podría ser el de estudiar los mecanismos de segregación en una comunidad multicultural o multiétnica” (Ruíz & Padilla, 2012, pág. 123), un fenómeno social repleto de datos y variables cuantitativas que vale la pena estudiar porque se evidencian patrones en comportamientos históricos o geográficos modelables.

Si trasladamos los modelos matemáticos de fenómenos sociales a procesos de matematización, la modelación de estos fenómenos se convierten en recurso didáctico para la construcción de un concepto matemático, incluso el uso de un fenómeno social puede llegar a ser más práctico que el uso de un fenómeno físico, químico o biológico en clase de matemáticas, es más fácil adaptar una problemática social que atañe a uno o varios estudiantes desde datos numéricos que imaginar cómo crecen exponencialmente bacterias en un frasco, no quiere decir que los fenómenos sociales busquen remplazar la incidencia de los fenómenos físicos, químicos o biológicos, sino que empiecen a tomar un lugar en libros de texto o prácticas de modelación matemática.

7.1.1 Un problema del mundo real.

El fenómeno de las balas perdidas es un fenómeno social modelable desde las matemáticas, y será adoptado como una problemática social del mundo real para ejemplificar un proceso de modelación abordado mediante:

> …relaciones lineales y no lineales, en un proceso de matematización en el aula, y cómo coadyuvan a desarrollar nociones matemáticas ligadas a procesos de cambio y de variación, donde busquemos predecir estados futuros de un proceso de cambio con base en datos que provienen de la empírica y de la matematización del fenómeno en sí. (Arrieta J. , 2003).

El consolidado de lesionados y homicidios por balas perdidas se recopila en la siguiente tabla, relacionando año con número de víctimas por balas perdidas en Colombia en el periodo 2008 – 2016, los datos fueron suministrados por el Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO).

Año	Víctimas
2008	330
2009	368
2010	393
2011	415
2012	429
2013	313
2014	265
2015	267
2016	215
Total	2.995

Tabla 7: Consolidado de víctimas por balas perdidas en Colombia en el periodo 2008 – 2016.

7.1.2 Representación y análisis en términos matemáticos.

Los datos mencionados fueron ingresados a la hoja de cálculo del Software de geometría dinámica GeoGebra, con el fin de visualizar la ubicación de cada una de las parejas ordenadas sobre el plano e identificar el ajuste no lineal de los datos más cercano; las parejas (x, y) corresponden a la variable independiente x como el año y la variable dependiente y como número de víctimas, con el fin de reducir el número de cifras en el desarrollo de los algoritmos, cada uno de los años fue reducido a los dos últimos dígitos como se muestra en la siguiente ilustración.

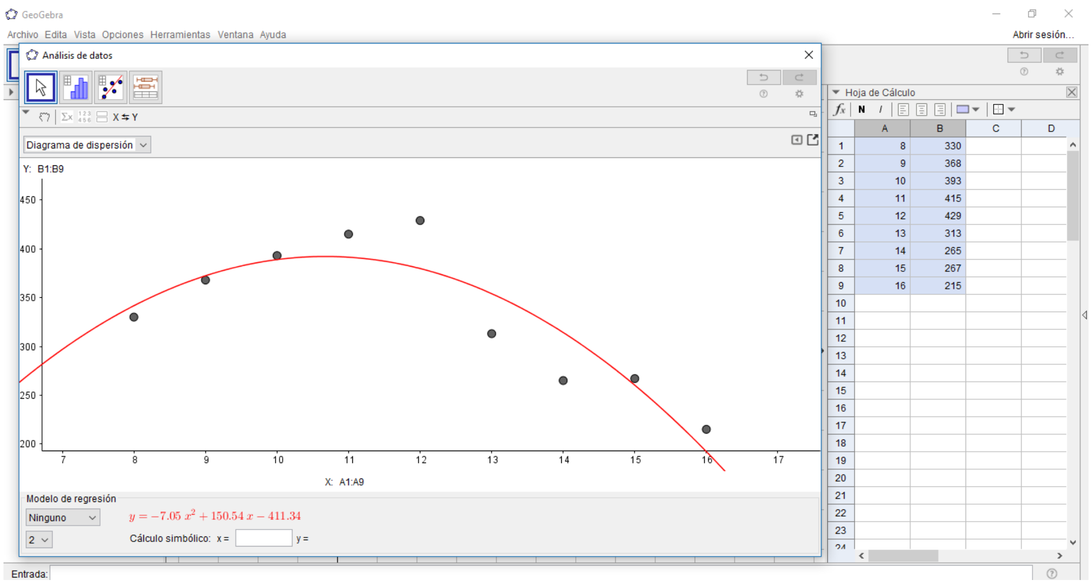


Ilustración 20: Ajuste de los datos de víctimas por balas perdidas en Colombia al modelo cuadrático con el Software GeoGebra.

Los datos se ajustan a la representación gráfica del polinomio de grado dos, por lo cual la obtanción de la representación prametrica del fenómeno se desarrolló utilizando el concepto de regresión no lineal, para ello se establece una tabla de sumatorias para el ajuste al modelo cuadrático.

n	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	y^2
1	8	330	64	512	4.096	2.640	21.120	108.900
2	9	368	81	729	6.561	3.312	29.808	135.424
3	10	393	100	1.000	10.000	3.930	39.300	154.449
4	11	415	121	1.331	14.641	4.565	50.215	172.225
5	12	429	144	1.728	20.736	5.148	61.776	184.041
6	13	313	169	2.197	28.561	4.069	52.897	97.969
7	14	265	196	2.744	38.416	3.710	51.940	70.225
8	15	267	225	3.375	50.625	4.005	60.075	71.289
9	16	215	256	4.096	65.536	3.440	55.040	46.225
$\sum$	108	2.995	1.356	17.712	239.172	34.819	422.171	1.040.747

Tabla 8: Tabla de datos para el ajuste al modelo cuadrático de regresión.

La representación paramétrica se establece por una ecuación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (51)$$

Los siguientes tres cocientes permiten hallar los valores de los coeficientes a, b y c, utilizando la tabla de sumatorias ya relacionada.

$$a = \frac{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (52)$$

$$b = \frac{\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (53)$$

$$c = \frac{\sum y - (b)(\sum x) - (a)(\sum x^2)}{n} \quad (54)$$

7.1.3 Comprobación del modelo matemático.

Solución del cociente de sumatorias para la obtención del valor del coeficiente b.

$$b = \frac{\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right]\left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (55)$$

Sustitución de las sumatorias:

$$b = \frac{\left[34.819 - \frac{(108)(2.995)}{9}\right]\left[239.172 - \frac{(1.356)^2}{9}\right] - \left[422.171 - \frac{(1.356)(2.995)}{9}\right]\left[17.712 - \frac{(1.356)(108)}{9}\right]}{\left[1.356 - \frac{(108)^2}{9}\right]\left[239.172 - \frac{(1.356)^2}{9}\right] - \left[17.712 - \frac{(1,356)(108)}{9}\right]^2} \quad (56)$$

Solución de potencias y productos:

$$b = \frac{[34.819 - 35.940][239.172 - 204.304] - [422.171 - 451.247][17.712 - 16.272]}{[1.356 - 1.296][239.172 - 204.304] - [17.712 - 16.272]^2} \quad (57)$$

Solución de sustracciones:

$$b = \frac{[-1.121][34.868] - [-29.076][1.440]}{[60][34.868] - 2.073.600} \quad (58)$$

$$b = \frac{-39.087.028 - [-41.868.960]}{2.092.080 - 2.073.600} \quad (59)$$

Solución del cociente:

$$b = \frac{2.781.932}{18.480} \quad (60)$$

Obtención del valor del coeficiente que acompaña a x en la ecuación:

$$\boldsymbol{b = 150.54}$$

Solución del cociente de sumatorias para la obtención del valor del coeficiente a.

$$a = \frac{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]\left[\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}\right]}{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right]\left[\sum x^4 - \frac{(\sum x^2)^2}{n}\right] - \left[\sum x^3 - \frac{(\sum x^2)(\sum x)}{n}\right]^2} \quad (61)$$

Sustitución de las sumatorias:

$$a = \frac{\left[1.356 - \frac{(108)^2}{9}\right]\left[422.171 - \frac{(422.171)(2.995)}{9}\right] - \left[17.712 - \frac{(1.356)(108)}{9}\right]\left[34.819 - \frac{(108)(2.995)}{9}\right]}{\left[1.356 - \frac{(108)^2}{9}\right]\left[239.172 - \frac{(1.356)^2}{9}\right] - \left[17.712 - \frac{(1.356)(108)}{9}\right]^2} \quad (62)$$

Solución de potencias y productos:

$$a = \frac{[1.356 - 1.296][422.171 - 451.247] - [17.712 - 16.272][34.819 - 35.940]}{[1.356 - 1.296][239.172 - 204.304] - [17.712 - 16.272]^2} \quad (63)$$

$$a = \frac{[60][-29.076] - [1.440][-1.121]}{[60][34.868] - 2.073.600} \quad (64)$$

Solución de sustracciones:

$$a = \frac{-1.744.540 - [-1.614.240]}{[2.092.080] - 2.073.600} \ (65)$$

Solución del cociente:

$$a = \frac{-130.300}{18.480} \ (66)$$

Obtención del valor del coeficiente que acompaña a x^2 en la ecuación:

$$\boldsymbol{a = -7.05}$$

Solución del cociente de sumatorias para la obtención del valor del coeficiente c a partir de a y b.

$$c = \frac{\sum y - (b)(\sum x) - (c)(\sum x^2)}{n} \ (67)$$

Sustitución de las sumatorias:

$$c = \frac{2.995 - (150{,}54)(108) - (-7{,}05)(1.356)}{9} \ (68)$$

Solución de productos:

$$c = \frac{2.995 - 16.258 - (-9.561)}{9} \ (69)$$

Solución del cociente:

$$c = \frac{-3.702}{9} \ (70)$$

Obtención del valor de c en la ecuación:

$$\boldsymbol{c = -411{,}34}$$

El fenómeno social de balas perdidas en Colombia está modelada por una ecuación de segundo grado:

$$y = -7{,}05x^2 + 150{,}54x - 411{,}34 \ (71)$$

El grado de ajuste del modelo o error

$$R^2 = \frac{b(\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}) + a(\sum x^2 y - \frac{(\sum x^2)(\sum y)}{n})}{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}} \quad (72)$$

Sustitución de sumatorias y coeficientes a, b y c:

$$R^2 = \frac{150{,}54\left(34.819 - \frac{(108)(2.995}{9}\right) + (-7{,}05)\left(422.171 - \frac{(1.356)(2.995}{9}\right)}{1.040.747 - \frac{2.995^2}{9}} \quad (73)$$

Solución de operaciones entre paréntesis y productos:

$$R^2 = \frac{150{,}54(-1.121) + (-7{,}05)(-29.075{,}6)}{44.077{,}5} \quad (74)$$

Solución de adiciones:

$$R^2 = \frac{-168.752{,}48 + 205.008{,}624}{44.077{,}5} \quad (75)$$

Solución de cociente:

$$R^2 = \frac{36.256{,}15}{44.077{,}5} \quad (76)$$

Obtención del ajuste de los datos al modelo cuadrático:

$$\boldsymbol{R^2 = 0{,}822}$$

El ajuste del modelo es apropiado cuando $R^2 = 0{,}822$ es cercano a 1, en concreto, su ajuste es del 82,2%, se concluye que el modelo cuadrático es el adecuado para modelar este fenómeno social.

7.1.4 Interpretación y evaluación del modelo matemático y su influencia en la realidad.

Evaluar la función cuadrática en los años 2017, 2018 y 2019, tomando los dos últimos dígitos de cada año.

Función evaluada $x = 17$.

$$f(x) = -7{,}05x^2 + 150{,}54x - 411{,}34 \quad (77)$$

$$f(17) = -7{,}05(17)^2 + 150{,}54(17) - 411{,}34 (78)$$

$$f(17) = -7{,}05(289) + 150{,}54(17) - 411{,}34 \quad (79)$$

$$f(17) = -2.037.45 + 2.559{,}18 - 411{,}34 \quad (80)$$

$$f(17) = 521{,}73 - 411{,}34 \ (81)$$

$$f(17) = 110{,}39 \ (82)$$

$$f(17) \approx 110 \quad (83)$$

Para el año 2017 habría un total de 110 víctimas aproximadamente.

Función evaluada $x = 18$.

$$f(x) = -7{,}05x^2 + 150{,}54x - 411{,}34 \ (84)$$

$$f(18) = -7{,}05(18)^2 + 150{,}54(18) - 411{,}34 \ (85)$$

$$f(18) = -7{,}05(324) + 150{,}54(18) - 411{,}34 \quad (86)$$

$$f(18) = -2.284.2 + 2.709{,}72 - 411{,}34 \ (87)$$

$$f(18) = 425{,}52 - 411{,}34 \ (88)$$

$$f(18) = 14{,}18 \ \ (89)$$

$$f(18) \approx 14 \ \ (90)$$

Para el año 2018 habría un total de 14 víctimas aproximadamente.

Función evaluada $x = 19$.

$$f(x) = -7{,}05x^2 + 150{,}54x - 411{,}34 \ (91)$$

$$f(19) = -7{,}05(19)^2 + 150{,}54(19) - 411{,}34 \ \ (92)$$

$$f(19) = -7{,}05(361) + 150{,}54(19) - 411{,}34 \ (93)$$

$$f(19) = -2.545.05 + 2.860{,}26 - 411{,}34 \ \ (94)$$

$$f(19) = 315.21 - 411{,}34 \ (95)$$

$$f(19) = -96.13 \ (96)$$

$$f(19) \approx -96 \ (97)$$

Para el año 2019 se presume la erradicación del fenómeno por balas perdidas en Colombia, siendo así, la siguiente tabla relaciona el número de víctimas por balas perdidas en Colombia ajustadas al modelo cuadrático en el periodo 2004 - 2018.

Año	Víctimas según el modelo
2004	78
2005	165
2006	238
2007	297
2008	342

2009	372
2010	389
2011	392
2012	380
2013	354
2014	314
2015	261
2016	193
2017	110
2018	14
Total	3.899

Tabla 9: Consolidado de víctimas por balas perdidas en Colombia en el periodo 2004– 2018. Datos ajustados al modelo cuadrático.

Año	Víctimas según el modelo	Víctimas según cifras oficiales
2008	342	330
2009	372	368
2010	389	393
2011	392	415
2012	380	429
2013	354	313
2014	314	265
2015	261	267
2016	193	215
Total	2.996	2.995

Tabla 10: Comparativo de víctimas por balas perdidas en Colombia en el periodo 2008– 2016, del modelo cuadrático y las cifras oficiales.

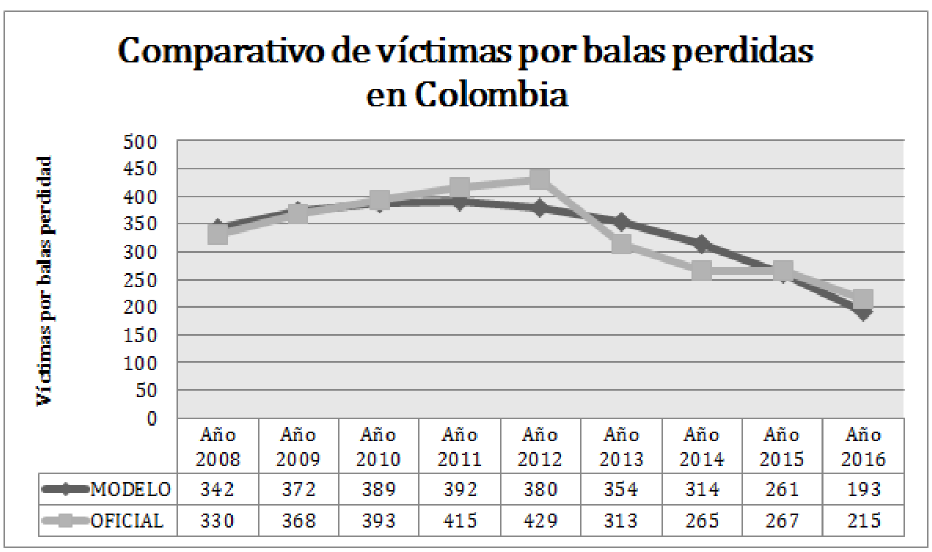


Ilustración 21: Comparativo de víctimas por balas perdidas en Colombia en el periodo 2008– 2016, del modelo cuadrático y las cifras oficiales.

Según lo evidenciado en las cifras oficiales de las víctimas por balas perdidas, desde el año 2008, en este fenómeno fue reflejando año tras año un aumento significativo, pasando de 330 víctimas a 429 en el año 2012, un aumento total de 99 víctimas para esos cinco años; para el año 2013, se percibió una disminución de 116 víctimas con respecto al año inmediatamente anterior, lo que significa hay una incidencia positiva de campañas y acciones tomadas tanto por el gobierno nacional como local a partir del año 2011, en pro a la mitigación de este fenómeno. Curiosamente para los años siguientes al 2013, las cifras siguen disminuyendo, siendo únicamente 215 las víctimas en el año 2016, una reducción de 214 víctimas en los últimos cuatro años, lo cual podría llevar a pensar que existe la posibilidad a futuro, de lograr que este fenómeno sea reducido o erradicado totalmente en nuestro país.

Similar a las cifras reales, el modelo cuadrático sustenta una posible reducción parcial y total de los lesionados y muertos por balas perdidas a largo plazo, las hipotéticas y alentadoras cifras que suministra este modelo incentivan la creación y continuidad de estrategias promovidas por entidades del estado comprometidas con este fenómeno, que año a año cobra la vida de cientos de colombianos.

7.2 Del Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático.

La confusión semiótica entre objeto matemático y su representación ha creado una barrera insuperable en un aprendizaje que todos consideramos esencial.

Bruno D'Amore. 2006

Teniendo en cuenta el propósito inicial de la entrevista, "contextualizar al investigador sobre el conocimiento y contacto directo e indirecto, de los estudiantes del semillero de investigación Mathema Kids, con armas de fuego y hechos relacionados con el mismo"; se pudo evidenciar lo siguiente:

Con respecto a la pregunta uno: ¿Sabe usted qué es una bala perdida?, solo dos de los niños entrevistados no tenían conocimiento respecto a este fenómeno; lo que permitiría deducir que aunque no se encuentren directamente relacionados o involucrados con este tipo de hechos de violencia, tienen claro lo que significa:

F: *cuando hay un enfrentamiento entre pandillas y alguien dispara un arma, y nadie sabe la trayectoria de esa bala.*

J: *Es cuando un hombre dispara con una pistola al aire y le pega a alguien o la bala le cae a alguien.*

Esto puede ser gracias al contexto social o el sector al que pertenecen, Los Laches, un barrio ubicado en el Centro de Bogotá, en la zona suroriental de la localidad de Santa Fe, que junto con otros de esa localidad han sido fuertemente azotados durante muchos años por la violencia, en especial por la guerra entre pandillas; tal y como lo asegura un artículo del periódico el Tiempo titulado "El barrio Egipto sueña con fin de una guerra de casi 40 años":

> "Nadie puede pasar de una calle a otra sin ser percibido. Un solo paso puede significar una agresión o la muerte; y en la mitad de esta frontera invisible, decenas de jóvenes han crecido con el odio infundado por sus propias familias, la materia prima para justificar el delito dentro y fuera de su territorio. Esta guerra cumple casi 40 años. Un muerto bajando de una colina, una balacera cayendo en la noche eran la distracción de los niños, acostados en sus terrazas. Eso ha pasado en este barrio hace años, también en El Parejo, El Turbay Ayala, El Guavio, Belén, Los Laches, Las Cruces, Santa Rosa, todos con historias de violencia casi que genética, heredada. (Malaver, 2015)

Con respecto al segundo cuestionamiento planteado: "comente si ha sido testigo de algún hecho asociado a un disparo con arma de fuego"; todos los estudiantes respondieron que “NO”. Lo que puede significar, tal vez, que dentro de su entorno más cercano de familiares, amigos, compañeros de curso… no hay personas involucradas en algún tipo de hecho con armas de fuego.

Con la pregunta tres: ¿Qué cree usted que sucede con el proyectil de un arma de fuego al realizar un disparo al aire?, se pudo evidenciar que todos los estudiantes tienen conocimiento acertado y congruente sobre esta acción, conocen exactamente el paso a paso de la trayectoria seguida y seis de ellos saben con exactitud sobre la peligrosidad del proyectil al bajar, asegurando que cae con mayor fuerza, o que es mucho más rápido al caer.

K: *sube y da como una curvita y vuelve a bajar.*

J: *que al subir, va perdiendo velocidad y al momento que tiene que caer va recuperando la velocidad.*

G: *es cuando puede matar a alguna persona, porque la bala va hacia arriba, pero coge mucha más fuerza cuando va hacia abajo.*

A la pregunta cuatro: ¿Cómo cree que varía la velocidad de un proyectil lanzado por un arma de fuego?, seis de los estudiantes respondieron únicamente que la velocidad va aumentando, refiriéndose a que no existen diferenciación en la rapidez del proyectil durante su trayectoria, que siempre va en aumento desde el inicio hasta el final.

C: *rápido, va aumentando.*

B: *Rápido y va aumentando.*

Dos estudiantes respondieron explícitamente que la velocidad del proyectil va disminuyendo, lo que indicaría que estos dos estudiantes tienen la concepción de que el proyectil al momento de ser disparado, empieza a perder su rapidez.

P: *La velocidad va disminuyendo*

Otros dos estudiantes aseguraron que la velocidad se mantiene durante toda la trayectoria, lo que hace pensar que tienen la idea de que el proyectil tiene una rapidez constante o simplemente mantiene una rapidez desde el inicio hasta el fin del recorrido.

C: *pues yo creo que se mantiene un poquito la velocidad, ósea se mantiene igual.*

Solo dos de los estudiantes describieron exactamente la variación de la velocidad, indicando que a medida que el proyectil empieza a subir va disminuyendo o perdiendo la velocidad y cuando cae, aumenta la velocidad respecto a la trayectoria de subida. Aunque los dos tienen claro la variación de la velocidad respecto a la trayectoria de subida y bajada del proyectil, desconocen los puntos donde la velocidad es cero o nula.

J: *primero a lo que va subiendo va disminuyendo la velocidad y cuando va bajando va cogiendo más velocidad.*

Curiosamente, solo uno de los estudiantes respondió a esta pregunta teniendo en cuenta las variables que pudieran afectar la velocidad de un proyectil, el estudiante habla del tipo de arma que se emplea al realizar el disparo, de la posición o ángulo de la misma e inclusive habla sobre la afectación que pudiera tener el peso del proyectil sobre la velocidad del mismo durante su recorrido.

A: *depende de cómo sea el arma y de cómo la hayan hecho y eso, también depende del peso del proyectil, porque si tiene más peso cae más rápido y si es más ligera va más al aire.*

Con relación a la pregunta cinco: ¿Qué cree usted que le ocurre a una persona, al ser alcanzada por un proyectil?, se pudo determinar que todos los estudiantes conocen exactamente las consecuencias letales y no letales que conlleva el impacto del proyectil sobre una persona.

G: *la puede matar o puede quedar herida.*

P: *Lo puede matar o dejarlo mal, porque puede caerle en la cabeza o algún órgano y matarlo.*

Para Abraham Arcavi (2006), la educación matemática debe velar por una idea de matematización capaz de generar un puente entre las matemáticas cotidianas con las matemáticas académicas que se aprenden en la escuela, es decir, formalizar los conceptos y métodos cotidianos de los estudiantes, para concluir en generalizaciones formales propias de las matemáticas académicas, para ello es necesario partir de tres categorías para el análisis del laboratorio, lo cotidiano, la matematización y la familiaridad con el contexto, estas tres nociones buscan clarificar el método de análisis de la "fase de representaciones: lo cuadrático" salvaguardando que esta fase es el resultado conjunto para evaluar y analizar el "Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático".

7.2.1 Lo cotidiano.

Lo cotidiano en matemáticas se sustenta en prácticas y conocimientos matemáticos propios de cada estudiante que le permiten dar solución a un problema o una situación habitual, la matemática cotidiana puede carecer de formalismo y simplicidad pero es válida, comprable y útil para quien se apropia de ella.

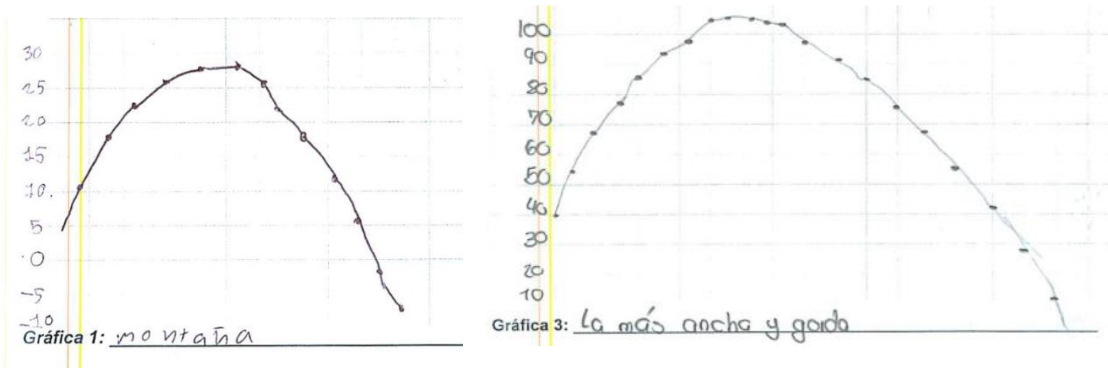


Ilustración 22: Ejemplo de lo cotidiano en matemáticas.

Bishop (citado por Arcavi, 2006, pág. 5) define seis actividades básicas universales que trascienden culturas: contar, localizar, medir, designar, jugar y explicar. Las anteriores ilustraciones muestran dos representaciones gráficas de la función cuadrática sobre el plano cartesiano. Contar y medir como dos actividades matemáticas universales son propias de cada sujeto, moldeadas por su cultura y su cotidianidad, la imagen de la izquierda realiza una medición por medio de conteo de 5 en 5, mientras que la imagen de la derecha lo hace de 10 en 10, respetando a simple vista el parámetro, el estudiante **A** determina un parámetro de $5u$ mientras que el estudiante **B** establece uno de $10u$, fieles a su cotidianidad o a las valores obtenidos de la variable representada.

Arcavi (2006) propone considerar otra idea que pudiera ser importante al momento de conectar lo académico con lo cotidiano, esta idea es la noción de contextualización también definida desde lo cotidiano:

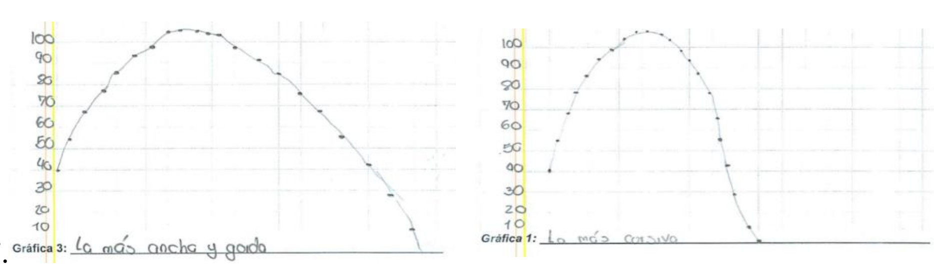
> La contextualización va en sentido opuesto de la matematización, pero la complementa. Así para dar significado a un problema presentado con vestido académico, se puede recordar, imaginar o, incluso construir un contexto, de manera tal que las particulares características contextuales sirvan de andamio y ampliación de las matemáticas relativas a dicho problema (Arcavi, 2006).

Dentro de las respuestas dadas por los estudiantes durante el laboratorio social para la construcción de lo cuadrático mediante el software educativo libre Tracker, se pudo evidenciar que muchos de ellos utilizaron el nombre de algún objeto o forma en específico que perciben u observan dentro del entorno físico inmediato, para referirse o para llamar a un objeto matemático en particular; esto por carecer del lenguaje matemático académico pertinente, lo que no quiere decir que estas interpretaciones o representaciones sean equivocas, es tarea del educador hallar su validez.

> El niño acude al mundo con los conocimientos construidos hasta ese momento, los utiliza para atribuir significado, para comprender los objetos, las parcelas de la realidad a la que se enfrenta. En este sentido, cada comportamiento supone asimilar el objeto de la actividad a las estructuras previas del conocimiento (los esquemas, en la terminología de Piaget) utilizadas para darle sentido. (Universidad de Barcelona, pág. 269)

Ejemplo de lo anterior es la respuesta observada en el análisis de las representaciones, donde varios estudiantes nombran de acuerdo a la forma que presenta la trayectoria realizada por el proyectil desde el lenguaje cotidiano, cuando se les solicita nombrar una gráfica de una parábola con concavidad hacia abajo aluden a términos como “montaña”, forma de la letra “n”, forma de “una curva que no ha terminado” y hasta “la más ancha y gorda”.

Ilustración 23: Ejemplo de lo cotidiano de la función cuadrática desde la contextualización.



Para la representación gráfica de la distancia en función del tiempo modelada por una función lineal, dos de los estudiantes la asociaron a la forma de un “palo”, de la letra “l” y de una “jabalina”.

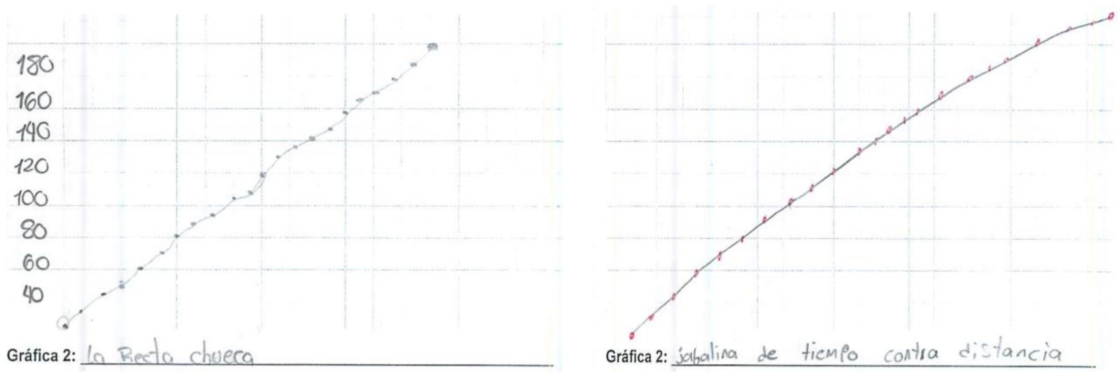


Ilustración 24: Ejemplo de lo cotidiano en matemáticas de la función lineal desde la contextualización.

Respecto a la forma que presenta la gráfica de la velocidad en función de la distancia, aludieron a su forma como “una montaña invertida”, una rampa, la letra “U”, entre otras.

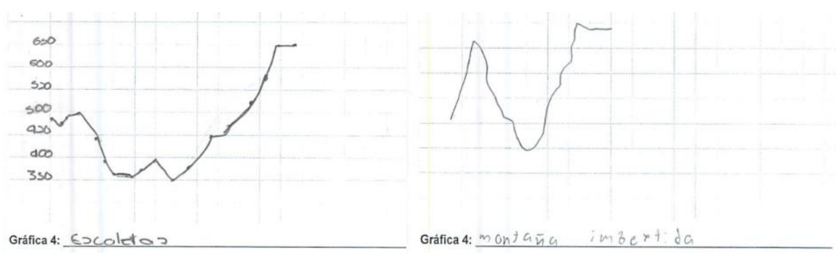
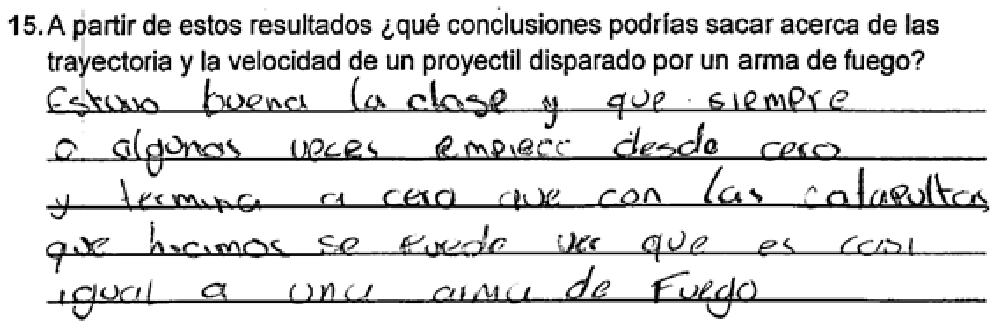


Ilustración 25: Ejemplo de lo cotidiano de la función cuadrática desde la contextualización.

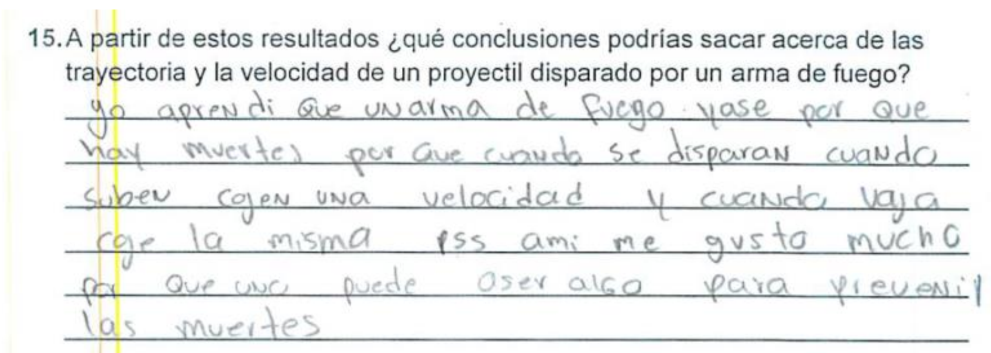
Al solicitar las conclusiones finales acerca de la trayectoria y velocidad de un proyectil disparado por un arma de fuego, los estudiantes percibieron relación directa existente entre el ejercicio del lanzamiento de una canica con la catapulta y los disparos con un arma de fuego.


15. A partir de estos resultados ¿qué conclusiones podrías sacar acerca de las trayectoria y la velocidad de un proyectil disparado por un arma de fuego?

Estuvo buena la clase y que siempre o algunas veces empiecc desdo cero y termina a cero que con las catapultas que hicimos se puede ver que es casi igual a una arma de Fuego

Estuvo buena la clase y que siempre o algunas veces empieza desde cero y termina en cero que con las catapultas que hicimos se puede ver que es casi igual a un arma de fuego.

Ilustración 26: Representación verbal de la transición entre la simulación y el evento real.


15. A partir de estos resultados ¿qué conclusiones podrías sacar acerca de las trayectoria y la velocidad de un proyectil disparado por un arma de fuego?

yo aprendi Qe un arma de Fuego yase por Que hay muertes por Que cuando se disparan cuando suben cojen una velocidad y cuando vaja coje la misma pss ami me gusto mucho por Que uno puede oser algo para prevenir las muertes

Yo aprendí que un arma de fuego ya sé porque hay muertes porque cuando se disparan cuando suben cogen una velocidad y cuando baja coge la misma pues a mí me gustó mucho porque puedo hacer algo para prevenir las muertes.

Ilustración 27: Representación verbal de la transición entre el fenómeno físico al fenómeno social.

Después de deducir la relación entre la simulación y el evento real, el estudiante comprende las consecuencias letales o irreversibles que pueden llegar a suceder en caso de que una persona sea alcanzada por una bala perdida; pero aún más importante que los estudiantes al final de todo el proceso generen conciencia social sobre este fenómeno en su familia y la comunidad infiriendo desde argumentos matemáticos y contribuyendo a prevenir que más familias sean víctima de este flagelo.

7.2.2 La matematización.

La matematización es la transición entre las matemáticas cotidianas y las matemáticas académicas secuenciada en una matematización horizontal y otra vertical, la primera entendida como: llevar un evento o un hecho del contexto que nos rodea a lo matemático; y la segunda entendida como la generalización de la teoría matemática desde las construcciones propias de los estudiantes, en pocas palabras la matematización vertical es fruto de la horizontal. La educación matemática debe velar por una idea de matematización vertical que formalice los conceptos y métodos de los estudiantes para concluir en generalizaciones de las matemáticas, partiendo del escenario experimental que brinda la matematización horizontal.

La fase de contextualización se compone de una entrevista a los estudiantes del semillero de investigación Mathema Kids, en donde el fenómeno físico y el social se diferencian; en este ejercicio "se traslada un problema de su contexto a algún tipo de matemática" (Arcavi, 2006, pág. 13) mediante "métodos informales y pre-formales a diferentes niveles de abstracción" dice Reeuwijk (como se citó en Arcavi, 2006, pág. 13).

A la pregunta: ¿Cómo cree que varía la velocidad de un proyectil lanzado por un arma de fuego?

> ***K:*** *iría muy rápido, pues porque está lanzado por algo que..., como un arma, pues el arma, el arma puede llevar la bala a mucha velocidad. La velocidad va aumentando porque la bala va yendo más rápido y pues si sube va también rápido y <u>al dar la curvita y baja, baja aún más rápido.</u>*

J: primero a lo que va subiendo va disminuyendo la velocidad y cuando va bajando va cogiendo más velocidad.

En ambas respuestas los estudiantes hacen una descripción del fenómeno y lo llevan a lenguaje matemático cotidiano, cuantifican la variación de la velocidad en cada instante del movimiento del proyectil, y dan explicación a un evento desde la informalidad con una representación verbal, “por un lado, el punto de partida contextual se conecta con los enfoques informales del alumnado, por otro lado, se trata de llegar a la generalización basándose en el contexto” (Arcavi, 2006, pág. 14).

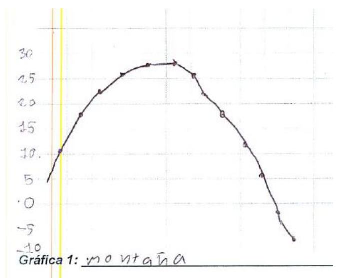


Ilustración 28: Representación gráfica de la altura en función de la distancia.

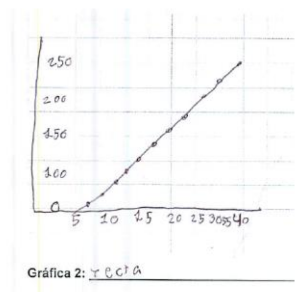


Ilustración 29: Representación gráfica de la distancia en función del tiempo.

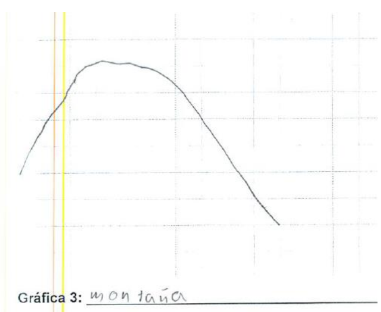


Ilustración 30: Representación como lugar geométrico de la altura en función del tiempo

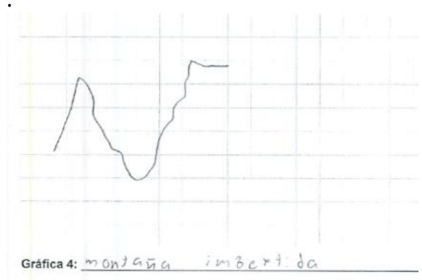
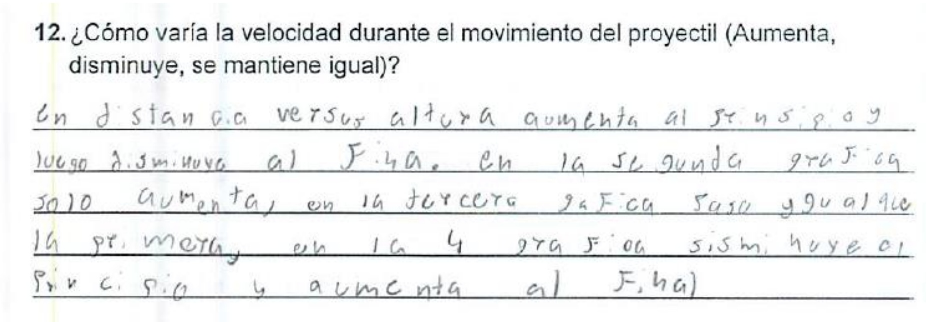


Ilustración 31: Representación como lugar geométrico de la velocidad respecto a la distancia.

Las cuatro anteriores ilustraciones corresponden a representaciones de funciones, dos de ellas cumplen características de “representación gráfica en el plano cartesiano” (D'Amore, Fandiño, & Iori, 2013, pág. 113) y las otras dos son representaciones como lugar geométrico. Después de su representación gráfica, **J** recurre a la representación verbal para explicar la variabilidad de la velocidad del proyectil, sin pedírselo, desde su lenguaje da explicación a las cuatro funciones.



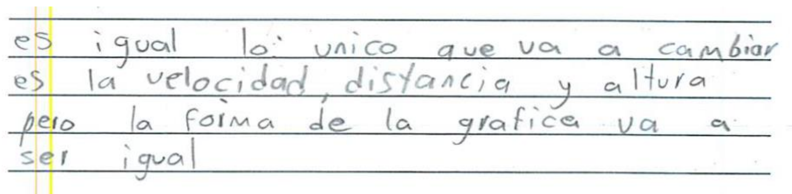
12. ¿Cómo varía la velocidad durante el movimiento del proyectil (Aumenta, disminuye, se mantiene igual)?

en distancia versus altura aumenta al prinsipio y luego disminuye al Fina. en la segunda grafica solo aumenta, en la tercera grafica pasa ygual que la primera, en la 4 grafica disminuye al principio y aumenta al Final

En distancia versus altura aumenta al principio y luego disminuye al final, en la segunda gráfica sólo aumenta, en la tercera gráfica pasa igual en la primera, en la 4 gráfica disminuye.

Ilustración 32: Comparación de representaciones gráficas de funciones mediante la representación verbal.

Halla una generalidad entre las representaciones cuadráticas y excluye a la función lineal porque percibe una congruencia entre la representación gráfica de la altura en función del tiempo y la altura en una función de la distancia, también encuentra relación entre estas y la velocidad en función de la distancia al nombrar las dos primeras como montañas y a la última como montaña invertida. Esta misma apreciación la hacen sus compañeros, aproximándose a una matematización vertical porque da razón de variación a partir de una representación gráfica, aunque aún carece de formalidad.


es igual lo: unico que va a cambiar
es la velocidad, distancia y altura
pero la forma de la grafica va a
ser igual

Es igual lo único que va a cambiar es la velocidad, distancia y altura pero la forma de la gráfica va a ser igual.

Ilustración 33: Representación verbal de la generalización de la representación gráfica de una función cuadrática.

En matemáticas académicas:

Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo si para cualquier par de números x_1 x_2 pertenecientes al intervalo se cumple que:

$$x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (98).}$$

Una función $f(x)$ es decreciente en un intervalo si para cualquier par de números x_1 x_2 pertenecientes al intervalo se cumple que:

$$x_1 > x_2 \ \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (99).}$$

Ahora ese mismo concepto matemático es abordado desde las representaciones y en lenguaje cotidiano:

Desde la representación verbal y contextualizada a un fenómeno físico el estudiante manifiesta que la distancia en función del tiempo “aumenta”, es creciente, que la altura en función de la distancia y la altura en función del tiempo “primero aumenta y después disminuye”, siendo creciente en el intervalo antes del vértice y decreciente después del vértice, a su vez para la velocidad en función de la distancia “disminuye al principio y aumenta al final" describiendo que es decreciente antes de cruzar el vértice y es creciente después de ese punto.

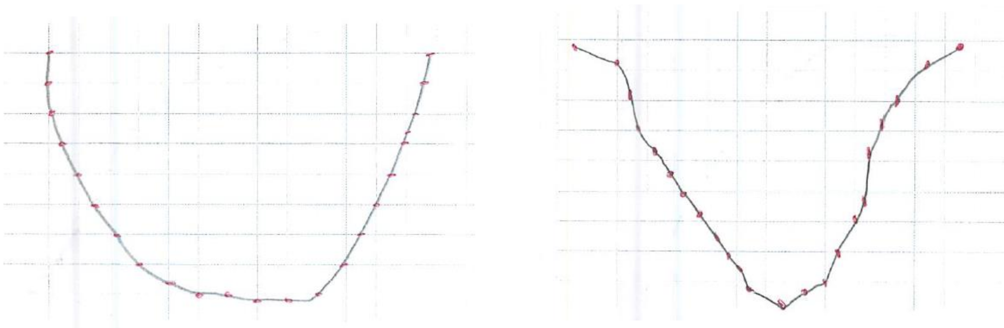
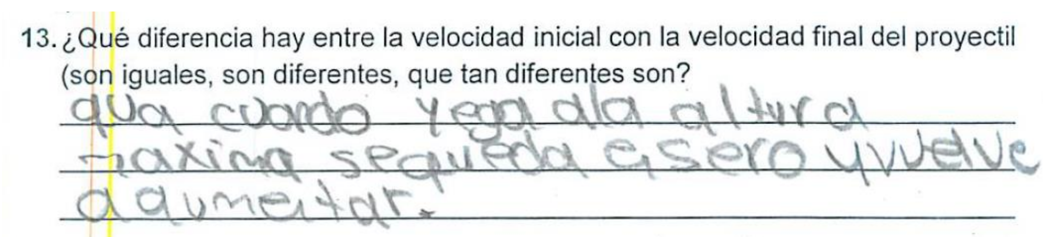


Ilustración 34: Representaciones como lugares geométricos de la velocidad en función de la distancia.

Valorando la anterior interpretación sobre funciones crecientes y decrecientes los estudiantes analizan sus propias representaciones gráficas y afirman:


13. ¿Qué diferencia hay entre la velocidad inicial con la velocidad final del proyectil (son iguales, son diferentes, que tan diferentes son?

qua cuando yega ala altura maxima sequeda esero yvuelve aaumentar.

Que cuando llega a la altura máxima se queda en cero y vuelve a aumentar.

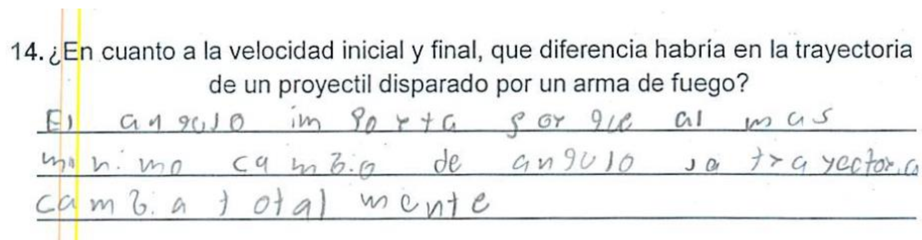
Ilustración 35: Representación verbal de la velocidad en función de la distancia.

Esta es la generalidad de las repuestas de diez estudiantes respecto al análisis de la velocidad del proyectil lanzado por la catapulta, en esa sencilla y cotidiana definición se infieren dos objetos, el primero de índole matemático y el segundo de índole físico:

1. Covariación, porque el estudiante establece una relación de variación entre dos variables.

2. Aceleración, porque confirma que durante el movimiento parabólico hay variación de la velocidad.

En el movimiento uniformemente acelerado intervienen un sin número de variables, el ángulo de inclinación con el cual es lanzado un proyectil influye en variables de altura y distancia como se describe en la siguiente imagen:

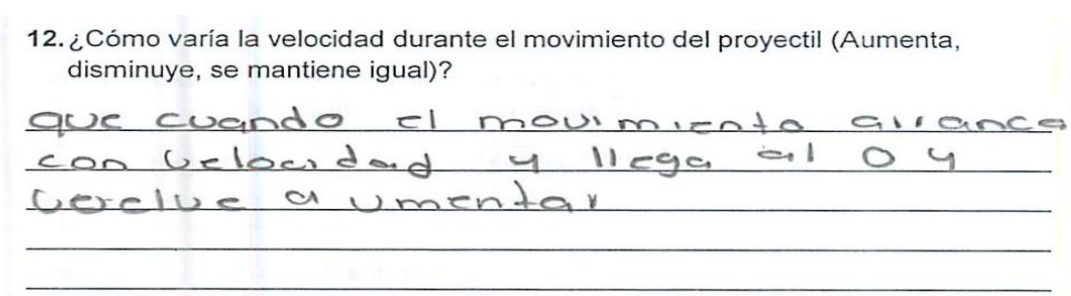

14. ¿En cuanto a la velocidad inicial y final, que diferencia habría en la trayectoria de un proyectil disparado por un arma de fuego?

El angulo importa por que al mas minimo cambio de angulo la trayectoria cambia totalmente

Que cuando el movimiento arranca con velocidad y llega al 0 y vuelve aumentar.

Ilustración 36: Representación verbal de la trayectoria respecto al ángulo del movimiento parabólico.

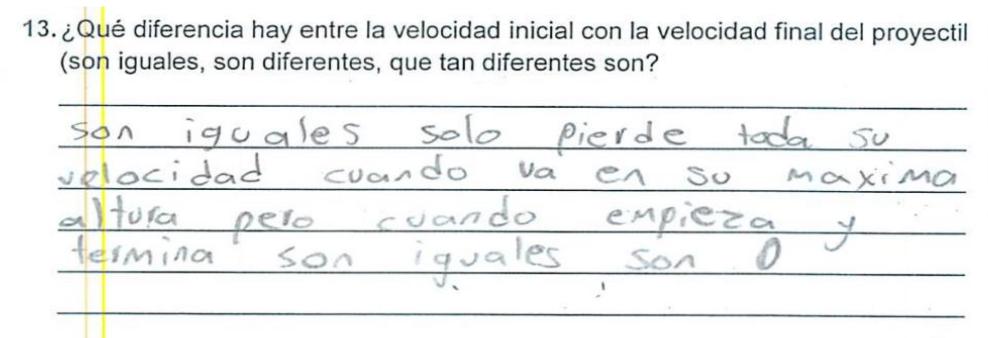
La representación gráfica es la más significativa para los estudiantes, una parábola corresponde a la representación gráfica de una función cuadrática, dos objetos específicos de la parábola son representados por los estudiantes desde su lenguaje cotidiano, uno de ellos es la simetría y el otro el vértice:


12. ¿Cómo varía la velocidad durante el movimiento del proyectil (Aumenta, disminuye, se mantiene igual)?

que cuando el movimiento arranca con belocidad y llega al 0 y buelve aumentar

Que cuando el movimiento arranca con velocidad y llega al 0 y vuelve aumentar.

Ilustración 37: Representación verbal en lenguaje cotidiano del vértice de una parábola.


13. ¿Qué diferencia hay entre la velocidad inicial con la velocidad final del proyectil (son iguales, son diferentes, que tan diferentes son?

son iguales solo pierde toda su velocidad cuando va en su maxima altura pero cuando empieza y termina son iguales son 0

Son iguales sólo pierde toda su velocidad cuando va en su máxima altura pero cuando empieza y termina son iguales son 0.

Ilustración 38: Representación verbal en lenguaje cotidiano de la simetría de una parábola.

Cada explicación, cada forma de representar la función cuadrática desde un fenómeno físico hace visible la apropiación de la representación del objeto desde el tratamiento del objeto y el tránsito por las representaciones, en un proceso de matematización horizontal previa a la formalización del concepto.

7.2.3 La familiaridad con el contexto.

El contexto en matemáticas es en principio, la capacidad con la cual un estudiante utiliza un concepto matemático previamente adquirido para ponerlo al servicio de otro concepto también matemático, para poder representarlo.

C representa en un gráfico la relación existente entre la distancia recorrida por un proyectil y la altura de este cuando es lanzado por una catapulta, ella pone al servicio de la representación gráfica de una función cuadrática el concepto de plano cartesiano, claramente los valores que adquieren las ordenadas en el eje y cuantifican la altura del proyectil cada vez que se incrementa la distancia.

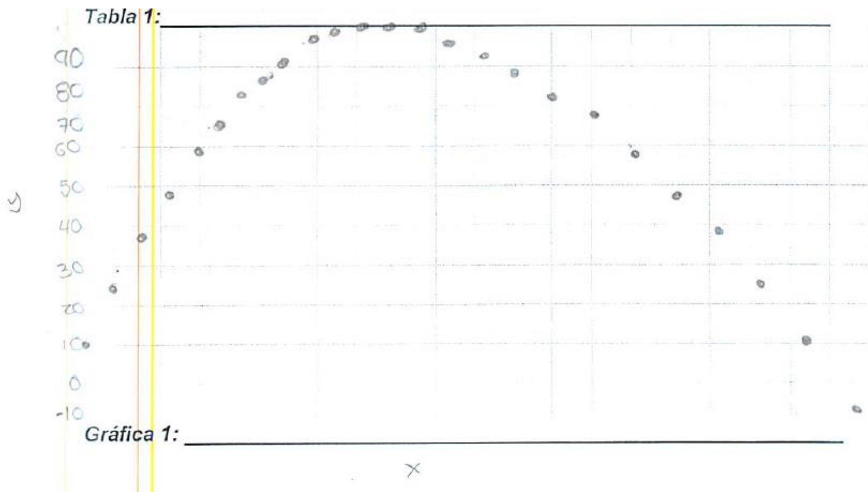


Ilustración 39: Ejemplo de familiaridad con el contexto en una representación gráfica de la función cuadrática.

Bruno D'Amore, Martha Fandiño y Maura Iori (2013) definen "la representación como lugar geométrico" como el conjunto de puntos presentes en el plano. La representación gráfica de una función que modela la distancia respecto al tiempo en el movimiento parabólico es representada por **H** con una línea recta, al revisar en detalle la imagen se puede ver que realiza el trazo de la recta a partir de dos puntos, entonces, adopta el postulado euclidiano, "dos puntos definen una única recta", para representar la función lineal como lugar geométrico.

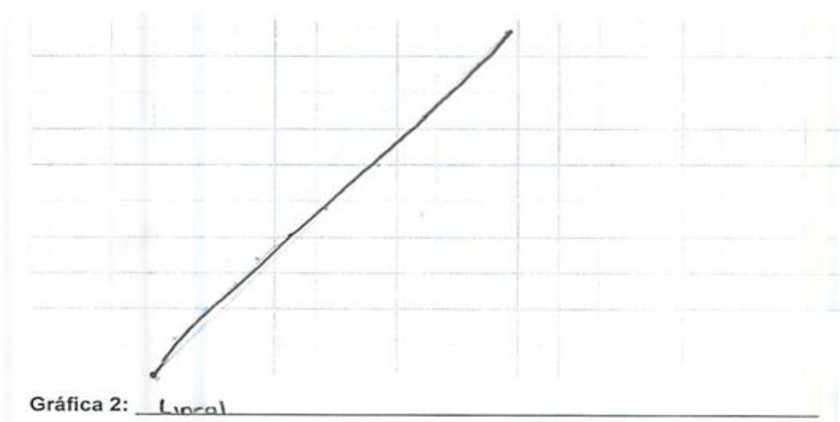
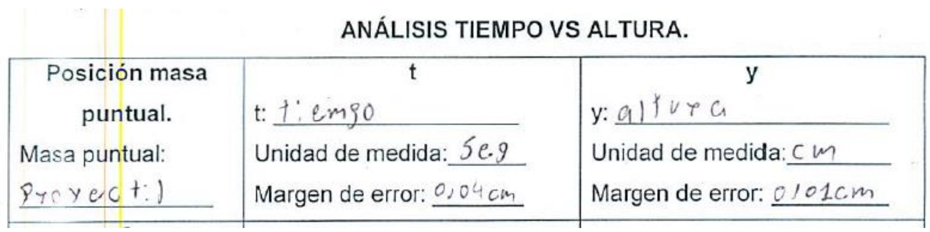


Ilustración 40: Ejemplo de familiaridad con el contexto en una representación de la función lineal como lugar geométrico.

J completa correctamente la tabla identificando que la variable de tiempo es representada con la letra t y la variable de altura con la letra y, relaciona como unidad de medida del tiempo el segundo seg y unidad de medida de la atura el centímetro cm, conceptos familiares contextualizados para él que son relacionados en una tabla, aunque no se percata que el margen de error respecto al tiempo está dado en unidades de tiempo y no de longitud.

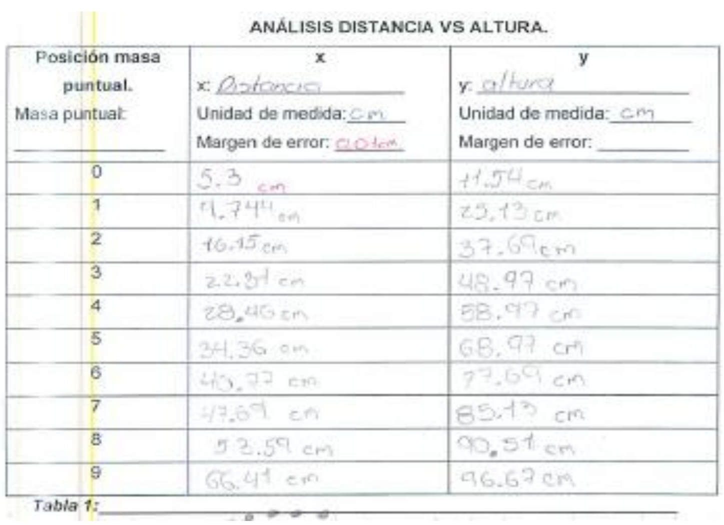


ANÁLISIS TIEMPO VS ALTURA.

Posición masa puntual.	t	y
Masa puntual: proyectil	t: tiempo Unidad de medida: seg Margen de error: 0,04cm	y: altura Unidad de medida: cm Margen de error: 0,01cm

Ilustración 41: Ejemplo de familiaridad con el contexto entre una variable y su unidad de medida.

C relaciona las variables de distancia y altura en una tabla como representación de la función cuadrática, los valores que adquiere tanto x como y se miden en unidades de longitud, incluso específica que cada uno de los valores obtenidos son medidas en centímetros.



ANÁLISIS DISTANCIA VS ALTURA.

Posición masa puntual. Masa puntual:	x x: Distancia Unidad de medida: cm Margen de error: 0,01cm	y y: altura Unidad de medida: cm Margen de error:
0	5.3 cm	11.54 cm
1	9.744 cm	25.13 cm
2	16.15 cm	37.69 cm
3	22.31 cm	48.97 cm
4	28.46 cm	58.97 cm
5	34.36 cm	68.97 cm
6	40.77 cm	77.69 cm
7	47.69 cm	85.17 cm
8	53.59 cm	90.51 cm
9	66.41 cm	96.67 cm

Tabla 1:

Ilustración 42: Ejemplo de familiaridad con el contexto desde la representación como tabla de la función cuadrática.

Los datos suministrados por Tracker son centímetros, el software nunca lo específica, este sólo calibra y cuantifica, no determina unidad de medida de longitud, entonces los estudiantes comprenden que la unidad de medida de longitud es el centímetro porque en la fase de medición y registro tuvieron que establecer un patrón que le permite generar una escala en la fase de rastreo con Tracker, como se muestra en la siguiente ilustración.

Ilustración 43: Evidencia del parámetro en la fase de medición y registro.

El objeto matemático "unidad de medida" representado por símbolos es utilizado para comprender la relación entre distancia y altura modelada por la "función cuadrática" (objeto matemático) desde una tabla como representación, reconociendo que "la familiaridad con el contexto puede referirse también a la familiaridad con un determinado contexto matemático (académico) al servicio de otro" (Arcavi, 2006, pág. 19).

Una investigación de diseño culmina en el deber que tiene el investigador de establecer el modelo del fenómeno de aprendizaje, a partir del experimento de diseño, que para la presente investigación corresponde a un laboratorio social, el cual confirma el fenómeno de las balas perdidas como practica de referencia porque se adquiere del entorno de los estudiantes, y a su vez trae consigo otra práctica de referencia como el movimiento parabólico, ambas abordadas desde la modelación como práctica social para la obtención de un modelo matemático representado por el objeto, función cuadrática y así generar reflexión sobre el fenómeno social de las balas perdidas.

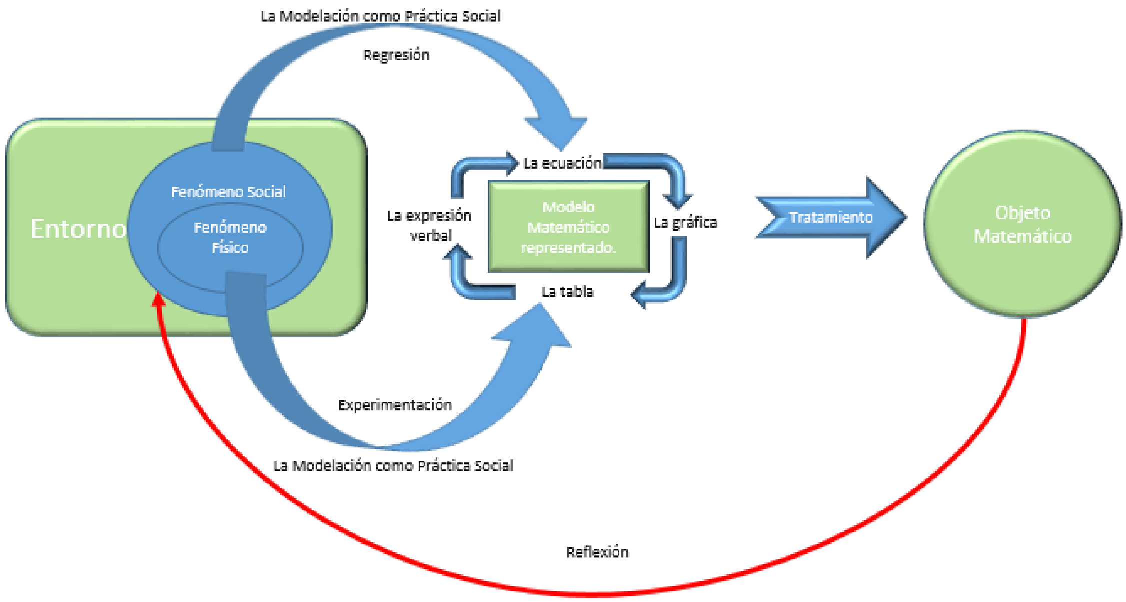


Ilustración 44: El modelo del fenómeno de aprendizaje a partir del laboratorio social.

8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Los retos actuales en Matemática Educativa en Colombia deben ser enfrentados así, como retos, la responsabilidad del Educador Matemático no radica simplemente en la comprensión de la disciplina, sino en su didáctica y su compromiso social, para la formación de ciudadanos capaces de decidir, comunicar y convivir, esto amerita la renovación del discurso de la matemática escolar incluyente, esencial y útil. “El fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático” es ejemplo de una articulación eficaz entre la disciplina matemática, su didáctica y la sociedad, porque debe prevalecer la idea de una enseñanza de las matemáticas sustentada en “… situaciones procedentes del mundo real a fin de permitirle a los alumnos y adultos el aplicar más fácilmente las matemáticas en su vida social y profesional” (Cantoral, 2013, pág. 343).

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa el Laboratorio Social para la Construcción de lo Cuadrático se concibe como un conjunto de acciones con “intervención activa del sujeto frente al objeto” (Cantoral, 2013, pág. 336), compactas en una actividad como instrumento práctico mediado socialmente, direccionada a una práctica “intencional, continuada y normada culturalmente” (Cantoral, 2013, pág. 336) referenciada por el fenómeno de las balas perdidas y el movimiento parabólico, fenómenos abordados desde la modelación como práctica social para la construcción de las representaciones de un objeto matemático: función cuadrática.

8.1 El principio normativo de la práctica social.

Sin lugar a dudas el término "practica social" responde al ¿por qué? y al ¿para qué? del sustento socioepistemológico de este proyecto, la prácticas sociales son "la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, como las generadoras del conocimiento" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014), este es el significado más idóneo para concluir un trabajo de investigación que asume a la modelación matemática como una práctica social que hace posible la construcción social de las representaciones del concepto de función cuadrática.

La fase de medición y registro, la fase de rastreo y la fase de representaciones son el proceso dinámico por el cual los estudiantes obtienen modelos en lenguaje matemático sobre un fenómeno físico, este fenómeno incorporado en un montaje de laboratorio descrito en dos fases previas confirma la idea que las matemáticas son demostrables desde un entorno físico, adicionando como recurso mediador al software aplicativo libre Tracker que hizo visible esa transición implícita entre un evento real y las matemáticas.

Desde el principio normativo de la práctica social: La construcción de las representaciones de lo cuadrático es posible, gracias a la modelación (práctica social) de un fenómeno físico y un fenómeno social (prácticas de referencia) enmarcado en un laboratorio social como experimento de diseño.

8.2 El principio de la racionalidad contextualizada.

"La fase de contextualización: el fenómeno de las balas perdidas en Colombia" es el resultado de la capacidad de evaluar e inferir sobre el escenario más apropiado para abordar el concepto de función cuadrática con los estudiantes; tomando como referencia el contexto social en el cual los estudiantes del semillero Mathema Kids se encuentran inmersos, una localidad que se ha visto afectada durante muchos años por situaciones de violencia en general y la guerra entre pandillas, hace factible la idea de adoptar como practica de referencia el fenómeno de las balas perdidas, porque la racionalidad contextualizada "… alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014). El valor didáctico que tiene el poder adaptar un objeto matemático al contexto de los estudiantes, hace incluyente y útil la construcción de las representaciones para comprender, interpretar e inferir sobre un fenómeno social que cobra cientos de víctimas anuales. También desde el principio de racionalidad contextualizada: el contexto de los estudiantes fue el componente inicial para el diseño de un laboratorio social que modela el movimiento parabólico desde lo cuadrático.

8.3 El principio del relativismo epistemológico.

Una perspectiva relativista epistemológica aplicada a la Educación Matemática, no hace todo válido, crea un sentido de humanización en el estudio de una disciplina excluyente; el laboratorio social para la construcción de lo cuadrático es diseñado con la idea de incluir y hacer útil al sujeto en prácticas para la construcción del conocimiento, y hacer inclusivas y también útiles las dinámicas para la comprensión de un objeto, entonces se han de privilegiar: las representaciones , hipótesis, conjeturas, argumentos, procesos y errores del sujeto, proporcionados por su cotidianidad, familiaridad y academia, favoreciendo y dando significado a la apropiación de otras representaciones de un objeto, que también resulten cotidianas y se formalicen en lo académico.

El modelo matemático de las balas perdidas en Colombia es ejemplo de la aplicación de las matemáticas a los fenómenos sociales; no hay que desconocer que los fenómenos sociales son difíciles de predecir, lo que no significa que sea imposible o inútil hacerlo, este modelo matemático no se asume como una verdad absoluta, es una muestra que en Educación Matemática se debe privilegiar el saber popular, saber técnico y saber culto como afirma Ricardo Cantoral (2013) para “analizar las prácticas de comunidades distintas y buscar en todas ellas sus valores epistémicos de verdad” (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014), hoy, se da valor a la divulgación del modelo matemático como representación de un fenómeno social, que indirectamente puede que motive a investigadores e incremente el interés por el estudio particular de fenómenos sociales desde las matemáticas, o más aún enriquezca las prácticas de Educadores Matemáticos que aprecian la modelación matemática como un proceso dinámico para la aprehensión de objetos matemáticos. La influencia de un resultado como este puede involucrar sectores sociales en promoción, capacitación y toma de decisiones, aportando herramientas para el análisis, predicción y mitigación de un fenómeno en particular.

Desde el principio de relativismo epistemológico: los datos suministrados de víctimas por balas perdidas, permitieron establecer un modelo cuadrático, para la predicción, análisis y toma de decisiones, sobre un fenómeno social; a su vez, el proceso por el cual se obtiene, se considera como un recurso didáctico.

8.4 El principio de resignificación progresiva.

Cada vez que se habla de resignificación, se debe partir del hecho de la asimilación y acomodación que Piaget (1933) expone en su libro “las representación del mundo en el niño”, no hay mejor interpretación del concepto de resignificación cuando se acepta que el aprendizaje es algo innato al ser, y que la asimilación de cada nuevo objeto matemático se debe a que este es capaz de acomodarse a un sin número de objetos, no solo matemáticos, ya aprendidos.

A lo largo de la vida el sujeto asimila y acomoda el conocimiento, mientras se apropia de nuevos objetos, resignifica otros, esa resignificación es progresiva y asimilada desde las representaciones, "…en este sentido la representación precisa de aquello que busca ser re-presentado" (Cantoral, 2013, pág. 58). Los objetos matemáticos al igual que todo tipo de conocimiento son resultado de la experiencia gracias a "los entornos socioculturales que permitirán la emergencia del saber, un saber que por su naturaleza es compartido, es un emergente de un proceso social" (Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014).

Cada una de las fases propuestas en la metodología "no aísla al individuo del medio, sino que le da una forma de establecer lazos de interacción"(Cantoral, Reyes, & Montiel, 2014) los cuales inciden en sus argumentos, sus representaciones, experimentos e implementación de recursos, para construir socialmente representaciones de lo cuadrático y transitar por ellas; ningún estudiante desconocía completamente el fenómeno social, el fenómeno físico y las variables involucradas en este; por lo tanto, durante el taller hubo un proceso de asimilar representaciones y acomodarlas a las previas, un asunto ligado a la resignificación, siendo esta progresiva durante el tratamiento del objeto, cuando se obtiene una representación gracias a otra, esa progresividad será involuntaria cuando en su matemática académica se apropie del objeto, y no sólo de sus representaciones, o cuando encuentre en su cotidianidad aplicaciones y usos de la función cuadrática. "El laboratorio social para la construcción de lo cuadrático" como recurso didáctico valora todo conocimiento previo, resignifica las representaciones y la forma en que se obtienen, trabaja para la progresividad a corto, mediano y largo plazo en la apropiación de un objeto matemático. Desde el principio de resignificación progresiva: los estudiantes reflexionaron sobre un fenómeno social, a partir de las representaciones de un objeto matemático, consecuencia del laboratorio social, evidente desde la expresión verbal como representación.

“El fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de lo cuadrático” es producto de la normatividad de la modelación matemática, de una racionalidad contextualizada de los estudiantes del semillero de investigación Mathema Kids y se encuentra a la disposición del relativismo epistemológico; con esto espera ser una investigación en constante resignificación, que interese, aporte y sea merecedora de divulgación institucional desde la disciplina matemática y su didáctica.

9. REFERENCIAS.

Abdel, G. (2011). *Conceptos básicos de física mecánica* (Primera ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Arcavi, A. (Febrero de 2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. *Números, LXIII*, 3-23.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas sociales de modelación como procesos de matemátización en el aula.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Matemáticas. Ciudad de México: CINVESTAV.

Arrieta, J. E. (24 de Junio de 2013). *Repositorio universidad de Cantabria.* Recuperado el 13 de Diciembre de 2016, de Las TIC y las matemáticas, avanzando hacia el futuro: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/3012/EliasArrietaJose.pdf?sequence=1

Arrieta, J., & Diaz, L. (Marzo de 2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 18*, 34.

Artigue, M. (Diciembre de 2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, XVI*(3), 5 - 28.

Artigue, M. (Diciembre de 2008). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal, 16*(3), 5-28.

Artigue, M. (2011). *La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica : Resultados, Desafíos.* Recife: XIII CIAEM Comite Interamericano de Educación Matemática.

Baird, D. (1996). *Experimentación: Una introduccion a la teoria de las mediciones y al diseño de experimentos.* México: Prentice Hall.

Baker, J. (2014). *50 cosas que hay que saber sobre física.* Distrito Federal de México, México: Ariel.

Barón, F. (2013). *Bioestadística.* Obtenido de Capítulo VI: Regresión múltiple.: https://www.bioestadistica.uma.es/baron/apuntes/ficheros/cap06.pdf

Bassanezi, R., & Biembengut, S. (1977). Modelación matemática: una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Revista de didáctica de las matemáticas* , 13.

Beyer, W. (Agosto de 2001). Algunos aspectos epistemológicos de la matemática ¿Es la matemática un lenguaje? *Educer Trasvase*.

Biembengut, S., & Hein, M. (Agosto de 2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 1-22.

Blomhøj, M. (s.f). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *IMFUFA*. Obtenido de file:///D:/Downloads/Modelizacion%20Blomhoj.pdf

Briceño, O. A., & Buendía , G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*(45), 65-83.

Búa, J., & Fernández, T. (2015). Dos ejemplos de modelización matemática basadas en fenómenos físicos. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM*, 1-13.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo, números negativos y el origen de la variable compleja. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 35-42.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (Primera ed.). Mexico: Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (Marzo de 2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, VI*(1), 27-40.

Cantoral, R., & Montiel, G. (11 de Julio de 2015). Nota Editoral para la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. (G. Montiel, Ed.) *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, XVIII*(3), Nota Editorial.

Cantoral, R., Reyes, D., & Montiel, G. (Octubre de 2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, VII*(3), 91-116.

Cárdenas, S. (3 de Agosto de 2015). Estas son las carreras que menos estudian los colombianos. *El Colombiano*. Obtenido de http://www.elcolombiano.com/documents/10157/0/853x601/0c0/0d0/none/11101/FVKR/image_content_23968989_20150803153406.jpg

Castro, J. (24 de Diciembre de 2011). Campaña por una Navidad sin disparos al aire ni quemados. *El Universal*. Obtenido de http://www.eluniversal.com.co/cartagena/bolivar/campana-por-una-navidad-sin-disparos-al-aire-ni-quemados-58526

CERAC. (2013). *La violencia más injusta: la tragedia de las balas perdidas en Colombia.* Centro de Recursos para el Análisis de Conflictos. Colombia: Centro de Recursos para el Análisis de Conflictos.

Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica del Saber Sabio al Saber Enseñado.* Buenos Aires, Argentina: AIQUE.

Claro, F. (2009). *De Newton a Einstein y algo más* (Tercera ed.). Santiago de Chile, Chile: Ediciones UG.

Colombia Aprende. (s.f.). *Colombia Aprende Red del Conocimiento*. Recuperado el 25 de Noviembre de 2016, de Enseñar con Tecnología: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/docentes/1596/article-88443.html

Congreso de la República Colombia. (24 de Julio de 2000). Código Penal. *Ley 599, Artículo 356 A*. Bogotá, Cundinamarca, Colombia.

Cordero, F. (Septiembre de 2012). Modelación y enseñanza de las matemáticas. *Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN*.

Córdoba , F. J., Herrera , H. J., & Restrepo, C. M. (2013). Impacto del uso de objetos de aprendizaje en el desempeño en matemáticas de estudiantes de grado noveno. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*(39), 47 - 58.

Córdoba, F. (2014). Las TIC en el aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué creen los estudiantes? *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.

D'Ambrosio, U. (20 de Marzo de 2004). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio. *VI Congreso de Historia de las Ciencias y la Tecnología*. (H. Blanco, Entrevistador) Buenos Aires , Argentina: Revista Latinoamericana de Etnomatemática.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. (CINVESTAV, Ed.) *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 177-196.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Asociación Venezolana de Matemática Educativa*, 4.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que iniben la devolución. *Revista en científica*, 150-164.

D'Amore, B., Fandiño, M., & Iori, M. (2013). *La Semiotica en la Didáctica de la Matemática.* Bogotá, Cundinamarca, Colombia: MAGISTERIO.

De Souza, P. (2008). *La Guerra en el Mundo Antiguo.* Londres, Inglaterra: AKAL.

De Zubiría, J. (3 de Enero de 2017). ¿A qué deberían ir los niños a la escuela? *Semana*.

Demana, F., Waits, B., & Kennedy, D. (2007). *Precálculo gráfico, numerico, algebráico* (Séptima ed.). (V. Ibarra, Trad.) Ciudad de México, México: PEARSON.

El Colombiano. (14 de Diciembre de 2013). NO a las balas perdidas, un canto por el respeto a la vida. *El Colombiano*. Obtenido de http://www.elcolombiano.com/historico/no_a_las_balas_perdidas_un_canto_por_el_respeto_a_la_vida-EAEC_274101

Escarpa, A. (2000). *Tecnología Romana Historia de la Ciencia y de la Técnica* (Vol. V). Madrid, España: AKAL.

Espinosa, G., & Vazquez, A. (2016). *Aplicaciones de programación no lineal.* Ciudad de México, México: Omniascience.

Font, V. (2012). Análisis Didáctico de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje basado en un Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y de la Instrucción Matemática. *IX CAREM Congreso Argentino de Educación Matemática*, 446-449.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (29 de Junio de 2009). Modelo para el Análisis Didáctico En Educación Matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 1-18.

Galetto, M. y. (2014). *Saber Experimentar.* Bogotá: Magisterio.

García, M. d. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula.* Almería: Universidad de Almería.

Godino, J. (1991). Hacia una Teoría de la Didáctica de la Matemática. *Didáctica de las Matemáticas*, 105-148.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Universidad de Granada y Universidad de Barcelona, Facultad de Ciencias de la Educación. Barcelona: Universidad de Granada y Universidad de Barcelona.

Gómez, H. (2016). *Implementación Del Programa Tracker Como Herramienta De Análisis En Algunas Situaciones De Cinemática Y Dinámica En Dos Dimensiones, Aplicandoel Método De Aprendizaje Activo.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Gómez, I. (2009). Modelización matemática en contextos tecnológicos. *Universidad Complutense de Madrid*.

Gómez, I. (2009). Modelización matemática en contextos tecnológicos. *Universidad Complutense de Madrid*.

Gómez, P., Bernal, G., & Medrano, E. (s.f.). *Uso de las TIC'S en la práctica pedagógica de los docentes.* Obtenido de Computadores para Educar: http://www.computadoresparaeducar.gov.co/PaginaWeb/images/biblioteca/InvestigaTIC/region%207/investigacion%203/articulo.pdf

Gutierrez, C. (2013). *Introducción a la metodología experimental* (Segunda edición ed.). México D.F, México: LIMUSA.

Hewitt, P. (2004). *Conceptos de física* (Duodécima ed.). (J. Salas, Trad.) Ciudad de México, México: LIMUSA.

Hewitt, P. (2004). *Física Conceptual* (Novena ed.). (E. Quintanar, Ed., & V. Gonzalez, Trad.) Ciudad de México, México: PEARSON.

Hodson, D. (1994). Hacia un enfoque más critico del trabajo de laboratorio. *Enseñanza de las ciencias*, 299-313.

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria.* Pontificia Universidad Católica de Perú . Lima: Pontificia Universidad Católica de Perú .

Hungerford, T., Jovell, I., & Mayberry, B. (2007). *Precalculus a graphing approach.* (T. Henry, Ed., & L. C. Vargas, Trad.) New York, United States of America: Holt, Rinehard and Winston.

Hurtado, A. (2006). *Experimentación y simulación.* Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Fracisco Jose de Caldas.

ICFES. (30 de Mayo de 2010). *Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación*. Recuperado el 21 de Diciembre de 2016, de Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación: http://www.icfes.gov.co/estudiantes-y-padres/pruebas-saber-3-5-y-9-estudiantes

ICFES. (Febrero de 2015). *Instituto Colombiano par la Evaluación de la Educación.* Obtenido de Instituto Colombiano par la Evaluación de la Educación: Lineamientos Generales para la Presentación de la Prueba de Estado

ICFES. (24 de Octubre de 2016). *Instituto Colombiano para le Evaluación de la Educación*. Recuperado el 21 de Diciembre de 2016, de Instituto Colombiano para le Evaluación de la Educación: http://www.icfes.gov.co/noticias/novedades-historicas/item/2117-estudiantes-de-colegios-oficiales-mueven-positivamente-el-examen-saber-11

Jacovkis, P. (Mayo de 2005). Computadoras, modelización matemática y ciencia experimental. *Revista iberoamericana de ciencia tecnología y sociedad, II*(5).

Johnson, G. (12 de Octubre de 2014). ¿Son las matemáticas una invención? *EL PAÍS*.

Justicia. (19 de Diciembre de 2016). Van 203 personas heridas por balas perdidas este año. *El Tiempo*. Obtenido de http://www.eltiempo.com/politica/justicia/victimas-de-balas-perdidas-en-2016/16776062

Larson, R., & Edwards, B. (2011). *Cálculo* (Novena ed.). Ciudada de México, México: Mc Graw Hill.

Larson, R., & Falvo, D. (2012). *Precálculo.* (S. Cervantes, Ed.) Ciudad de Máxico: CENGAGE Learning.

Larson, R., Hostetler, & Robert. (2008). *Precálculo.* (REVERTÉ, Ed., & J. León, Trad.) Bogotá, Colombia.

Lech, R., & Sriraman, B. (2010). *Theories of Mathematics Education.* (B. Sriraman, E. Lyn, Edits., & L. C. Vargas, Trad.) London, United Kingdom: Springer.

Leung, F. (Marzo de 2006). The Impact of Information and Communication Technology on Our Understanding of the Nature of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, XXVI*(1), 29-35.

Levine, D., Berenson, M., & Krehbiel, T. (s.f.). *Estadística para Administración* (Cuarta ed.). Monterrey, México: PEARSON.

Lim, C. (2007). Effective Integration of ICT in Singapore Schools: Pedagogical and Policy Implications. *Education Tech Research Dev, LV*, 83–116.

Malaver, C. (5 de Septiembre de 2015). El barrio Egipto sueña con fin de una guerra de casi 40 años. *El Tiempo*.

Ministerio de Educación Nacional. (4 de Diciembre de 2013). *Ministerio de Educación Nacional*. Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de Ministerio de Educación Nacional: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-336001.html

Ministerio de Educación Nacional. (s.f.). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar! *Ministerio de Educación Nacional*, 47-90. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a travéz de los experimentos de enseñanza. (U. d. University, Ed.) *Investigación Didáctica*, 75-87.

Montiel, G. (2006). Construcción Social de la Función Trigonométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, XIX*, 818-823.

Murillo, M., Soto, A., & Araya, J. A. (2006). *Matemática Básica con Aplicaciones* (Tercera ed.). San José: Universidad Estatal a Distancia.

Nieto, N., Viramontes, J., & López, F. (2009). ¿Qué es la Matemática Educativa? *Cultura Científica y Tecnología - Educación Matemática, VI*(35), 16-29.

OECD. (2006). *OECD*. Recuperado el 16 de Agosto de 2016, de OECD: https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Open Source Physics. (s.f.). *Open Source Physics*. Recuperado el 9 de Octubre de 2015, de Open Source Physics: http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365

Ortíz , S., Segura , J., & Cerdeña , R. (s.f.). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. *Ciencia y Desarrollo*(9), 79-82. Obtenido de http://www.unjbg.edu.pe/coin2/pdf/c&d_9_art_16.pdf

Pantón, T. (3 de Diciembre de 2015). *La educación de las matemáticas en Colombia es un punto debil*. Recuperado el 21 de Diciembre de 2016, de Pontificia Universidad

Javeriana: http://www.javerianacali.edu.co/noticias/la-educacion-de-las-matematicas-en-colombia-es-un-punto-debil

Parker, G. (2010). *Historia de la Guerra.* (J. Gil, Trad.) Cambridge, Inglaterra: AKAL.

Pedroza, H., & Dicovskyi, L. (2007). *Sistema de Analisis Estadistico con SPSS.* Managua, Nicaragua: LITONIC.

Peña, D. (2010). *Matemátias en las Ciencias Sociales.* Obtenido de Universidad de Carlos III de Madrid: http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%C2%BA23/Daniel%20Pe%C3%B1a%20S%C3%A1nchez%20de%20Rivera.pdf

Pereira, A. (2010). Análisis predictivo de datos mediante técnicas de regresión estadística. Madrid, España.

Piaget, J. (1933). *La representación del mundo en el niño.* Madrid, España: Ediciones Morata.

Planas, N. (2010). Teorías Socioculturales en la Investigación de la Educación Matemática: Reflexiones y datos Bibliométricos. *Investigación en Educación Matemática, XIV*.

Programa Licenciatura en Matemáticas. (9 de Diciembre de 2016). *Universidad La Gran Colombia*. Obtenido de Universidad La Gran Colombia: http://www.ugc.edu.co/index.php/component/content/article?id=139:extensioncomunidad

Ramos, M. (11 de Diciembre de 2016). La prueba PISA como herremienta de control. *El Universal*. Recuperado el 21 de Diciembre de 2016, de http://www.eluniversal.com.mx/entrada-de-opinion/colaboracion/maria-ramos-casiano/nacion/2016/12/11/la-prueba-pisa-como

René, J. (1856). *Semanario Pintoresco* (Vol. III). Madrid, España.

Reyes, L. (2011). Análisis de Regresión Cuadrática. Ciudad de Guatemala, Guatemala. Obtenido de http://reyesestadistica.blogspot.com.co/2011/07/analisis-de-regresion-cuadratica.html

Ríos, S. (1975). *Matemática aplicada* (Segunda ed.). Madrid, España: Paraninfo.

Ruíz, A., & Padilla, P. (2012). Los modelos matemáticos en las ciancias sociales. *Pensar. Epistemología y Ciencias Sociales*(7), 117-126.

Schibeci, R., Lake, D., Phillips, R., Lowe, K., Cummings, R., & Miller, E. (2008). Evaluating the use of learning objects in Australian and New Zealand schools. *Computers & Education, L*, 271–283.

Sepúlveda, A. (2012). *Los conceptos de la física: evolución histórica.* (Tercera ed.). Medellín, Antioquia, Colombia: Universidad de Antioquia.

Serway, R., & Jewett, J. (2005). *Física para Ciencias e Ingeniería* (Sexta ed., Vol. I). (J. Romo, Trad.) Ciudad de México, México: THOMSON.

Sobel, M., & Lerner, N. (2006). *Precálculo* (Sexta ed.). Distritto Federal, México: PEARSON.

Soler, F., Núñez, R., & Aranda, M. (2008). *Cálculo con aplicaciones* (Primera ed.). Bogotá, Colombia: PEARSON.

Spencer, J. (2012). *Spencer Author*. Obtenido de 11 Reasons Teachers Aren't Using Technology: http://www.spencerauthor.com/2012/07/11-reasons-teachers-arent-using.html/

Suarez, L., & Cordero, F. (2008). Modelación-Graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. *11th International Congress on Mathematical Education ICME 11*, 1-28.

Tamayo Alzate, Ó. E. (2006). Representaciones semioticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Educación y Pedagogía, XVIII*, 37-49.

Tamayo, Ó. (Abril de 2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista de Educación y Pedagogía, XVIII*(45), 37-49.

Tipler, P., & Mosca, G. (2003). *Física para la Ciencia y la Tecnología* (Quinta ed., Vol. I Mecánica). Barcelona, España: REVERTÉ.

Trigueros, M. (21 de Junio de 2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1207-1240.

Universidad de Barcelona. (s.f.). El enfoque constructivista de Piaget. En U. d. Barcelona, *Perspectiva constructivista de Piaget* (págs. 262-305). Barcelona.

UNLIREC. (Mayo de 2016). *unlirec.* Recuperado el 11 de Marzo de 2017, de unlirec: http://www.unlirec.org/Documents/Balas_Perdidas.pdf

Vargas, J., Ramirez, I., Perez, S., & Madrigal, J. (2008). *Física Mecánica Conceptos básicos y problemas.* Medellin, Colombia: Instituto Técnico Metropolitano.

Vasco, C. (2010). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Universidad del Valle y Universidad de Manizales*, 10.

Vieira , L., Ortíz , L., & Ramírez, S. (2009). *Introducción a la Minería de Datos.* Rio de Janeiro, Brasil: e-papers.

Wagensberg, J. (1 de Junio de 2013). La matemática no es ciencia. *El Periodico Opinión*. Recuperado el 30 de Diciembre de 2016, de http://www.elperiodico.com/es/noticias/opinion/matematica-ciencia-2405757

Zuleta, E. (Junio de 1985). La educación, un campo de combate. (H. Suarez, Entrevistador) Colombia: Omegalfa Bibliorteca Libre. Recuperado el 2016 de Diciembre de 21, de https://rednelhuila.files.wordpress.com/2014/09/la-educacion-un-campo-de-combate-1.pdf

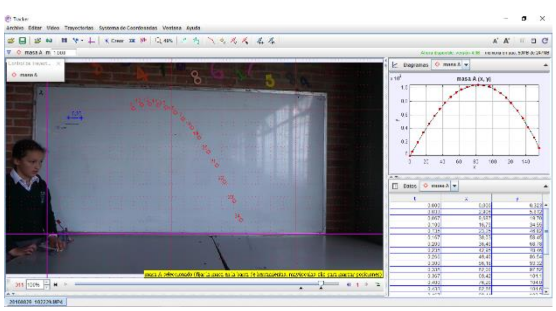
10. ANEXOS.

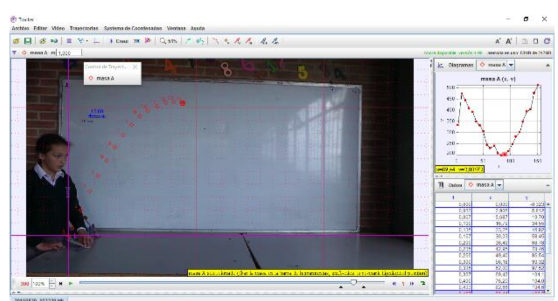
Anexo 1: Evidencias Fase de Contextualización

Anexo 2: Evidencias Fase de Ensamble.

Anexo 3: Evidencias Fase de Medición y Registro.

Anexo 4: Evidencias Fase de Rastreo:





Anexo 5: Instrumento Fase de Representaciones.

LABORATORIO TECNOLÓGICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LO CUADRÁTICO MEDIANTE EL SOFTWARE APLICATIVO LIBRE TRACKER.

OBJETIVO GENERAL: Diseñar un laboratorio de tiro parabólico para caracterizar lo cuadrático con estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids.

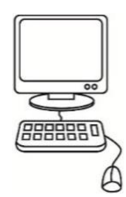
OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Realizar la grabación de un video que describa la trayectoria de un proyectil lanzado por la catapulta.

Utilizar el software aplicativo Tracker para el registro y la medición de variables como altura, distancia, tiempo y velocidad, de la trayectoria del proyectil.

FASE NÚMERO 3: RASTREO CON EL SOFTWARE APLICATIVO TRACKER

IMPLEMENTOS:

Computador.



Software aplicativo libre Tracker.

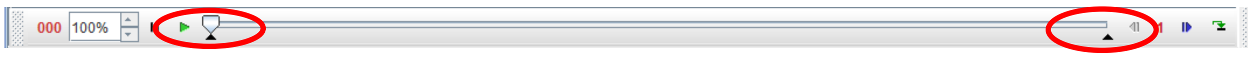
Video del registro de la trayectoria del proyectil.

Software aplicativo libre GeoGebra.

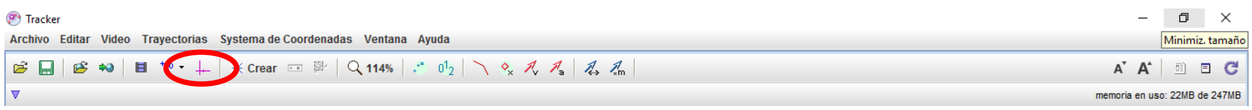
PROCEDIMIENTO RASTREO MANUAL EN TRACKER.

1. Importar el video a Tracker. Archivo, abrir, ubicar el video y abrir.

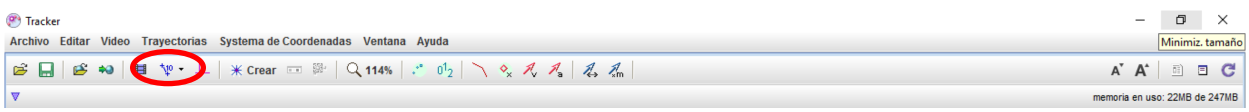
2. Utilizando la barra inferior para delimitar el fragmento del video que describa la trayectoria del proyectil lanzado por la catapulta.



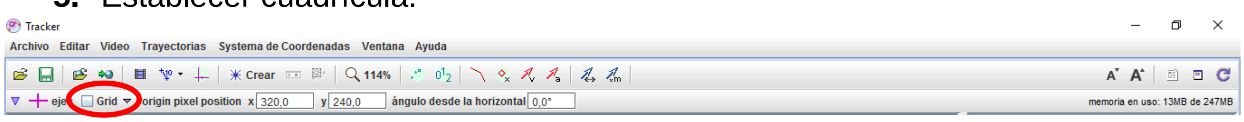
3. Ubique ejes coordenados en el primer cuadro del video u origen de la trayectoria del proyectil.



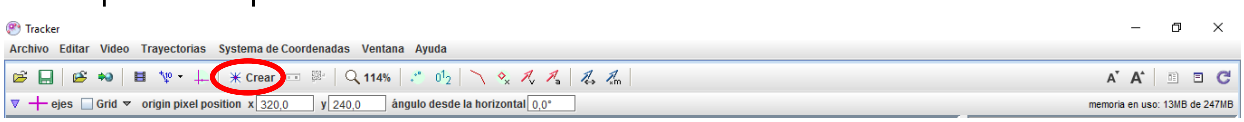
4. Crear vara de calibración y ubicarla en el parámetro establecido dentro del video.



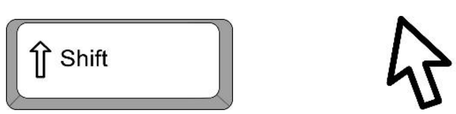
5. Establecer cuadrícula.



6. Crear masa puntual, la masa puntual va a corresponder al proyectil lanzado por la catapulta.



7. Rastreo manual del proyectil, utilizando la tecla “shift” y haciendo clic sobre la masa puntual (proyectil) cuadro a cuadro.



8. Obtención y análisis de las representaciones.
9. Exportar datos de Tracker a GeoGebra en función de facilitar el análisis.

ANÁLISIS DISTANCIA VS ALTURA.

Posición **masa puntual.** Masa puntual: ________________	**x** x: ____________________ Unidad de medida:______ Margen de error: ________	**y** y: ______________________ Unidad de medida:________ Margen de error: __________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tabla ____

Gráfica: ____

ANALISIS TIEMPO VS DISTANCIA.

Posición masa puntual. Masa puntual: ________________	**t** t: ____________________ Unidad de medida:_______ Margen de error: ________	**x** x: ____________________ Unidad de medida:_______ Margen de error: ________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tabla 2:____

Gráfica 2: ____

ANÁLISIS TIEMPO VS ALTURA.

Posición masa puntual. Masa puntual: _________________	**t** t: ______________________ Unidad de medida:_______ Margen de error: ________	**y** y: ________________________ Unidad de medida:_________ Margen de error: __________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tabla 3: ____

Gráfica 3: ____

ANÁLISIS DISTANCIA VS VELOCIDAD.

Posición masa puntual. Masa puntual: ________________	**x** x: ____________________ Unidad de medida:_______ Margen de error: ________	**y** y: ______________________ Unidad de medida:_________ Margen de error: __________
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tabla 4: ____

Gráfica 4: ____

ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES.

1. ¿Qué forma presenta la gráfica del movimiento del proyectil, que relaciona la distancia y la altura?

2. ¿Qué forma presenta la gráfica que relaciona el tiempo con la distancia?

3. ¿Qué forma presenta la gráfica que relaciona el tiempo con la altura?

4. ¿Qué forma presenta la gráfica que relaciona la distancia y la velocidad?

5. ¿Qué forma presenta la gráfica que relaciona el tiempo y la velocidad?

6. ¿Cuál es el ángulo con el cual fue lanzado el proyectil?

7. ¿Cuál es la distancia final recorrida por el proyectil?

8. ¿Cuál es la altura máxima recorrida por el proyectil?

9. ¿Cómo varía la velocidad durante el movimiento del proyectil (Aumenta, disminuye, se mantiene igual)?

10. ¿Qué diferencia hay entre la velocidad inicial con la velocidad final del proyectil (son iguales, son diferentes, que tan diferentes son?

11. ¿En cuanto a la velocidad inicial y final, que diferencia habría en la trayectoria de un proyectil disparado por un arma de fuego?

12. A partir de estos resultados ¿qué conclusiones podrías sacar acerca de las trayectoria y la velocidad de un proyectil disparado por un arma de fuego?

Anexo 6: Resumen del Taller Evaluado y Aprobado por el RELME 30.

LABORATORIO TECNOLÓGICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LO CUADRÁTICO CON LA IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE APLICATIVO LIBRE TRACKER.

Luis Carlos Vargas Zambrano

Universidad La Gran Colombia.

Colombia.

Julio de 2016 – Monterrey México.

luiscarlos.vargas@ulagrancolombia.edu.co

Categoría medio-básico; Nivel educativo superior; metodología de trabajo mixta.

Taller: 2 sesiones de noventa minutos cada una.

Los lineamientos actuales en educación matemática en Colombia conciben a la modelación como una competencia indispensable en las mediaciones de la disciplina, encargando a dicha representación la consolidación de fenómenos y situaciones reales en modelos matemáticos, es decir, el estudiante correlaciona su entorno y la analítica matemática; para ejemplificar y fortalecer el componente didáctico de esta competencia, se implementa una experiencia fruto de una ponencia y un trabajo de investigación en curso en donde el software aplicativo Tracker es la clave para el proceso de modelado del movimiento rectilíneo y parabólico para conceptualizar los términos de función lineal y cuadrática.

LABORATORIO TECNOLÓGICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LO CUADRÁTICO CON LA IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE APLICATIVO LIBRE TRACKER.

En Colombia la creación de modelos matemáticos es una competencia primordial en los lineamientos actuales de educación matemática, reconociendo que el proceso de modelado matemático parte de escenarios experimentales escasos o en su gran mayoría de ejercicios de texto hipotéticos, ocasionando que la transición efectiva entre un fenómeno o situación real y las matemáticas no sea del todo evidenciado por el estudiante. El reto actual del programa de licenciatura en matemáticas y tecnologías de la información de la Universidad La Gran Colombia a través del semillero de investigación Mathema es diseñar escenarios de experimentación para construir conocimiento matemático en distintos escenarios. La actividad fundamental de la experimentación consiste en comparar las propiedades de los modelos con las propiedades correspondientes al mundo real (Baird, 1996, pág. 68)

Gracias a la experimentación se pueden proponer problemas de los cuales los estudiantes tengan explicaciones propias y que por medio del uso del conocimiento matemático puedan justificar desde un punto de vista matemático la veracidad de sus apreciaciones. Una metodología basada en esta apreciación hace necesario el diseño de laboratorios que establezcan secuencias para la comprobación de hipótesis. El laboratorio se puede interpretar como un escenario para la explicación científica y la argumentación crítica de problemas. El laboratorio es una suma estructurada de actividades de modo que planeen la formulación de hipótesis y elaboración de tesis a través de la verificación experimental de la hipótesis formulada (Galetto, 2014).El trabajo de laboratorio tiene diferentes usos pero principalmente se pueden enmarcar en la motivación mediante la estimulación del interés y la diversión; también para intensificar, facilitar y propiciar la conceptualización de los elementos que conforman la teoría objeto de estudio, para proporcionar una idea sobre el método científico y desarrollar habilidades en la planeación organización y desarrollo del trabajo investigativo en su utilización y por último, para desarrollar determinadas actitudes científicas como la consideración y valoración de las ideas y sugerencias de otras personas, la objetividad y la buena disposición para no emitir juicios apresurados. (Hodson, 1994, págs. 299-313).

Partiendo las definiciones anteriores se plantea el presente taller para dar una respuesta coherente y efectiva a las necesidades actuales de una competencia esencial de la educación matemática, la modelación; reconociéndola como una representación que fundamenta y explica la transición entre un fenómeno físico o una situación habitual y su representación matemática; en el marco de dicha representación, se traza como principal objetivo incluir el proceso de experimentación en la creación de modelos matemáticos en las mediaciones académicas de la disciplina implementando el Software Aplicativo Tracker, privilegiando la interacción del estudiante con su entorno y la relación existente entre la experiencia y el concepto analítico de estudio.

La presente propuesta es consecuencia de la ponencia: “modelación de funciones a partir del software aplicativo Tracker en prácticas experimentales” enmarcado de un laboratorio de movimiento parabólico en donde los estudiantes de licenciatura en matemáticas modelaban el tránsito de un proyectil lanzado por una catapulta de torsión para llegar al concepto de función cuadrática. La primera técnica de modelización consistía en una serie de lanzamientos repetitivos del proyectil contra una pared en periodos de tiempo cronometrados; para posterior toma y organización de datos, relación entre variables distancia, altura y tiempo en representaciones semióticas y obtención de la función mediante regresión cuadrática, la segunda consistía en grabar un video del movimiento del proyectil y rastrearlo con el software Tracker para ser analizado y obtener el modelo; la experiencia trae como resultado que ambas técnicas de modelado son significativas en la concepción de función cuadrática debido a que se llegó a generalizar, entender y relacionar el modelo obtenido con el fenómeno.

Al haber dificultades en la medición manual del tiempo en lapsos tan cortos, se concluye que la técnica de modelado con la aplicación es más eficaz en procesos de medición, es decir, facilita la obtención de datos reales del movimiento con un margen de error mínimo, acercándose más al modelo cuadrático que se busca obtener. La investigación en curso que lleva por nombre “resignificación de la medición en prácticas experimentales de la modelación matemática a partir del software aplicativo tracker” orientará y se enriquecerá de teoría conceptual en el desarrollo del taller. La parte inicial (20 minutos) de la primera sesión se enfocará a la presentación de la metodología de trabajo del semillero de investigación en el diseño de laboratorios para la modelación de fenómenos físicos. Después de esto, en un segundo momento (30 minutos) los participantes en grupos de tres personas, construirán cada uno una catapulta muy sencilla con materiales provistos por los expositores para poder realizar el lanzamiento de un proyectil. En un tercer momento (30 minutos), cada uno de los grupos realizará la grabación con sus celulares de un video en el que se describa la trayectoria del proyectil, es aconsejable realizar varias grabaciones para la sesión del día siguiente.

La segunda sesión puntualizará en el uso del software aplicativo tracker dando a conocer datos particulares de software, años de difusión, desarrolladores, versiones, compatibilidad con sistemas operativos y descarga, continuando con la familiarización entre el usuario y el programa, los asistentes tendrán la posibilidad de importar el video grabado la sesión anterior, determinar el periodo de tiempo, escoger la cantidad de cuadros por analizar según la calidad del video, establecer ejes coordenados y parámetro o unidad de medida de longitud para el rastreo manual o automático del punto de masa y así poder llegar a una tabla y gráfica que relacione las variables de distancia, altura y tiempo, adicionando otras como ángulo, velocidad y aceleración que pueden llegar hacer parte de la discusión y análisis del modelo obtenido o los resultados, el programa entregará la función específica que modela el movimiento. La técnica de modelación matemática Tracker en educación se fundamenta bajo el ideal de la equidad y calidad educativa para la formación matemática Básica, Media y Superior de estudiantes, recociendo como principales factores: el contexto socioeconómico del educando, el papel indispensable del docente y la implementación de recursos informáticos accesibles; todo encaminado hacia los procesos de investigación en educación matemática.

Referencias Bibliográficas.

Baird, D. (1996). *Experimentación: Una introduccion a la teoria de las mediciones y al diseño de experimentos.* México: Prentice Hall.

Galetto, M. y. (2014). *Saber Experimentar.* Bogotá: Magisterio.

Hodson, D. (1994). Hacia un enfoque más critico del trabajo de laboratorio. *Enseñanza de las ciencias*, 299-313.

Anexo 7: Oficios Cifras Estadísticas de Homicidios y Lesionados por Balas Perdidas.

Bogotá D.C., 05 de diciembre de 2016

Señor Patrullero
MAURICIO SARMIENTO HUERTAS
Investigador Criminológico, Seccional de Investigación Criminal – POLFA
Avenida Carrera 68 No. 19-81 Edificio DIAN Piso 2
Bogotá D.C

Asunto: Solicitud cifras estadísticas

Actualmente nos encontramos adelantando estudios de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información en la Universidad la Gran Colombia, sede Bogotá, ubicada en la carrera 6 No. 12B – 40, dentro de nuestro trabajo de investigación, enfocado al fenómeno de las balas perdidas como práctica de referencia para la construcción social de las representaciones de la función cuadrática, como requisito de grado para optar el título profesional; requerimos su valiosa colaboración en el sentido de proporcionarnos las cifras oficiales de muertos y lesionados por balas desde el año 2008 y hasta la fecha, en lo posible discriminado por cada departamento. Es de aclarar que esta información será utilizada única y exclusivamente con fines de tipo académico en nuestro trabajo de grado.

De ante mano, gradecemos su atención y amable colaboración a la presente solicitud, y quedamos atentos a una pronta respuesta.

Atentamente,

Rdo
PT. Sarmiento Mauricio
05/12/2016
Hr: 09:00

JEISSON FABIAN GARCÍA CHACÓN
Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información
Código: 1091311339

Luis Carlos Vargas

LUIS CARLOS VARGAS ZAMBRANO
Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información
Código: 1091310093

MINISTERIO DE DEFENSA NACIONAL
POLICÍA NACIONAL
DIRECCIÓN DE GESTIÓN DE POLICÍA FISCAL Y ADUANERA

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Bogotá D.C., 20 de diciembre de 2016

Señores
JEISSON FABIÁN GARCÍA CHACÓN
LUIS CARLOS VARGAS ZAMBRANO
Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas – Universidad la Gran Colombia
Bogotá D.C

Asunto: Respuesta solicitud cifras estadísticas

En atención al requerimiento generado por ustedes, de manera atenta me permito enviar las cifras oficiales de muertos y lesionados por balas perdidas en todo el país, discriminado por departamentos, del 01 de enero al 31 de diciembre de los años 2008 al 2015 y del 01 de enero al 20 de diciembre del año 2016, así:

Cifras estadísticas de homicidios por balas perdidas

DEPARTAMENTO POLÍTICO	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
AMAZONAS	0	0	0	0	0	0	1	0	0
ANTIOQUIA	8	14	24	18	15	15	4	6	7
ATLÁNTICO	4	2	7	0	0	0	3	3	2
BOLÍVAR	3	5	7	6	3	4	3	2	5
BOYACÁ	0	0	0	2	0	1	0	0	0
CALDAS	0	2	0	3	1	2	2	1	0
CAQUETÁ	1	0	0	0	1	1	1	1	0
CASANARE	0	0	0	0	0	2	0	0	0
CAUCA	0	1	2	0	5	2	1	2	0
CESAR	0	1	2	0	0	1	1	0	2
CHOCÓ	0	0	1	0	0	0	0	1	2
CÓRDOBA	0	0	0	0	1	0	0	0	0
CUNDINAMARCA	0	3	1	4	5	0	4	3	1
GUAJIRA	0	0	0	0	0	0	1	1	0
HUILA	2	3	2	1	0	0	1	2	0
MAGDALENA	0	2	0	2	0	2	1	1	0
META	0	3	1	0	2	1	1	1	2
NARIÑO	2	2	3	2	3	9	0	2	4
NORTE DE SANTANDER	1	0	1	1	1	0	2	1	4
PUTUMAYO	0	0	0	0	0	1	0	0	1
QUINDÍO	0	1	0	1	0	0	0	1	0
RISARALDA	2	0	1	1	2	1	0	1	1
SAN ANDRÉS	0	0	0	0	0	0	0	1	0
SANTANDER	3	2	8	0	1	2	3	0	1
TOLIMA	1	0	2	0	4	1	1	3	0
VALLE	26	24	24	21	17	4	9	8	2
TOTAL	**53**	**65**	**86**	**62**	**61**	**49**	**39**	**41**	**34**

Fuente: Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO), fecha de consulta 20/10/2016.

Cifras estadísticas de lesionados por balas perdidas

DEPARTAMENTO POLÍTICO	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
AMAZONAS	0	0	0	0	0	0	2	0	0
ANTIOQUIA	20	86	103	107	92	56	45	75	53
ARAUCA	4	2	0	0	0	0	0	0	1
ATLÁNTICO	39	22	45	29	17	5	6	3	10
BOLÍVAR	12	5	5	2	9	5	6	5	1
BOYACÁ	0	0	1	2	2	0	0	0	0
CALDAS	3	5	6	5	13	8	7	2	2
CAQUETÁ	0	4	0	2	2	0	3	4	1
CASANARE	0	0	0	1	2	6	0	1	2
CAUCA	10	8	3	2	7	8	3	7	7
CESAR	1	4	2	2	1	5	4	1	2
CHOCÓ	1	3	1	0	0	0	2	4	2
CÓRDOBA	5	0	0	0	0	1	1	2	1
CUNDINAMARCA	28	16	18	14	14	11	14	9	1
GUAJIRA	1	0	1	3	9	2	1	0	3
GUAVIARE	0	1	0	0	0	0	1	2	0
HUILA	6	6	15	18	19	6	4	3	1
MAGDALENA	7	15	4	11	11	14	6	10	14
META	12	12	6	8	17	16	11	4	2
NARIÑO	7	2	8	13	19	9	5	4	4
NORTE DE SANTANDER	1	3	1	2	4	11	10	12	6
PUTUMAYO	0	0	0	1	1	3	5	1	4
QUINDÍO	2	5	1	1	2	3	1	4	9
RISARALDA	2	3	2	2	3	1	2	2	2
SAN ANDRÉS	3	2	0	0	0	0	0	0	0
SANTANDER	35	16	8	22	21	14	20	18	7
SUCRE	0	7	2	1	1	4	2	10	4
TOLIMA	5	7	2	6	6	2	4	3	1
VALLE	73	69	73	99	96	74	61	40	41
TOTAL	**277**	**303**	**307**	**353**	**368**	**264**	**226**	**226**	**181**

Fuente: Sistema de Información Estadística, Delincuencial, Contravencional y Operativa de la Policía Nacional (SIEDCO), fecha de consulta 20/10/2016.

Lo anterior para su conocimiento y demás fines que estimen pertinentes.

Atentamente,

Rdo: Jeisson García 20/12/2016 17:00

Patrullero **MAURICIO SARMIENTO HUERTAS**
Investigador Criminológico, Seccional de Investigación Criminal – POLFA

Elaborado por: PT. Mauricio Sarmiento Huertas
Revisado por: PT. Mauricio Sarmiento Huertas
Fecha Elaboración: 20/12/2016
Ubicación: C:\Mis documentos\oficios salidos

Avenida Carrera 68 19-81 Edificio DIAN Piso 2, Bogotá
Teléfonos 2904139
polfa.cic@policia.gov.co
www.policia.gov.co

Anexo 8: Autorización de Padres de Familia de Estudiantes del Semillero de Investigación Mathema Kids.

Nota Aclaratoria: La carta de autorización de los padres de familia de los estudiantes de Semillero de Investigación Mathema Kids, que permite la implementación de trabajos de investigación y registro fotográfico con este grupo de estudiantes reposa en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad la Gran Colombia en la oficina del Director del Programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información.