DISEÑO DE TAREAS MEDIADAS POR LA HISTORIA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DIRIGIDAS A LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2017

DISEÑO DE TAREAS MEDIADAS POR LA HISTORIA DEL CONCEPTO DE LÍMITE DIRIGIDAS A LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

CÉSAR GUILLERMO RENDÓN MAYORGA

ASESOR
DOCTOR EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2017

A las abuelas: Anatilde (QEPD) y Lilia, piedras fundacionales de lo que sería mi vida.

A Sophia, cuya vida es evidencia de la máxima que "no todo el tiempo por pasado fue mejor, mañana es mejor".

Y muy especialmente a los estudiantes del grado 11C (2017) del Colegio Interamericano, con quienes construí una breve, pero profunda historia que llevaré siempre entre aquellos recuerdos que no voy a borrar.

César Guillermo Rendón Mayorga

Agradecimientos

Quiero dar en primer lugar mis agradecimientos a la Universidad Pedagógica Nacional, sitio que ha transformado mi visión de vida, mis perspectivas, mis metas propuestas y los paradigmas que orientan mi quehacer diario como profesional de la educación, primero permitiendo mi formación al nivel de pregrado y ahora posibilitando mi formación posgradual. Las palabras se quedan cortas para agradecer a la Universidad por dejar educarme en sus aulas para procurar ser un mejor docente y ciudadano.

Particulares gracias merecen los docentes del Departamento de Matemáticas de la Universidad quienes han sido realmente las personas que, con su ejemplo de vida y de trayectoria académica, me han servido de inspiración constante para ser cada día mejor. En especial a los profesores Margarita Rojas, Carlos Luque, Lyda Mora, Gloria García y Cecilia Agudelo Valderrama mis más sinceros agradecimientos porque haber tenido el lujo de que fueran mis maestros lo único que ha generado en mí ha sido un espíritu de superación por tratar de llegar más lejos cada día en el camino del aprendizaje.

Punto aparte merece el profesor Edgar Guacaneme, quien no solamente fue el director de este trabajo de grado, sino que se convirtió además en una guía a la que siempre pude acudir cuando tenía algún problema o inquietud. En ese sentido debo agradecer la infinita paciencia (potencial y actual) que tuvo conmigo, para tolerar todas mis ideas y aceptar todas las discusiones que iban apareciendo sobre la mesa. Haber compartido experiencias académicas a su lado por más de dos años me han convertido en un seguidor atento de su discurso y sus visiones, no solamente sobre la educación sino también sobre la vida misma. Creo firmemente que ese debe ser uno de los objetivos de todo maestro.

Gracias a la vida y al destino por permitir conocer a grandes personas durante el tiempo que duró el proceso de formación en la Maestría, sin la ayuda de buenos compañeros este tipo de caminos se hacen más difíciles de recorrer.

Finalmente, quiero agradecer de igual forma a mis familiares, amigos y estudiantes por haber sido durante estos dos años una fuente inagotable de ganas por continuar en esta empresa tan demandante de esfuerzos y sacrificios. En esa medida, debo agradecer también a mis padres y mis hermanos de quienes nunca he recibido algo distinto al apoyo incondicional y a la confianza plena; a mis amigos que me acompañan desde hace ya bastante tiempo y a los estudiantes del grado 11C, promoción 2017 del Colegio Interamericano, que soportaron con entereza todos mis cambios de ánimo, viviendo conmigo desde el principio el proceso arduo de dos años que duró la maestría. Ellos, sin saberlo, se fueron volviendo un motor para la consecución de mis objetivos profesionales y un ejemplo de que no hay un lugar demasiado alto para quien consigue aprender a volar.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de matemáticas***, presentado por los estudiantes:

César Guillermo Rendón Mayorga, Cód. 2016185016,
CC. 1.013.633.237

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 45 puntos.

Observaciones:
Los jurados recomiendan la distinción meritoria para el trabajo de grado.

En constancia se firma a los 27 días del mes de noviembre de 2017.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Edgar A Guacaneme S.
EDGAR ALBERTO GUACANEME (UPN)

Jurados:

Profesor: Harry A. Gomez E.
HARRY AUGUSTO GOMEZ (UPN)

Profesora: Ana Cecilia Medina
ANA CECILIA MEDINA (UPTC)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas
Autor(es)	Rendón Mayorga, César Guillermo
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 111 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	LÍMITE MATEMÁTICO; CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA (MKT); EDUCACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS; HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS; TAREAS PARA PROFESORES.

2. Descripción

Este documento se trata de un trabajo de grado inscrito al campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas y que presenta el diseño de una serie de tareas mediadas por la Historia de las Matemáticas sobre el concepto de límite con el fin que el docente se apropie de distintas herramientas históricas que puedan convertirse eventualmente en recursos metodológicos para orientar su acción educativa en el aula ampliando de esa manera su conocimiento profesional.

3. Fuentes

Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*(4), 453-468.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanco, L., Mellado, V., & Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en ciencias experimentales y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación*(307), 427-446.

Bocanegra, I., Galeano, O., & Huerfano, H. (2013). Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional (Tesis de Maestría).

Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. *Annals of Mathematics, 25*(1), 1-46.

Cardeñoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. In P. Gómez, & L. Rico, *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Universidad de Granada.

Chaves, E. (2008). El seminario "Historia de la Matemática" y su papel en la formación de docentes. *UNICIENCIA*(22), 11-18.

Clark, K. (2012). The influence of solving historical problems on Mathematical Knowledge for Teaching. *History and Pedagogy of Mathematics 2012* (pp. 211-219). Daejeon, Korea: HPM.

Contreras, A., & García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 277-310.

Cottrill, J., Schwingendorf, K., Nichols, D., & Thomas, K. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. 1-18.

Escudero, D. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria. Huelva: Universidad de Huelva (Tesis Doctoral).

Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly, 107*(9), 844-862.

Fisher, G. (1978). Cauchy and the Infinitely Small. *Historia Mathematica, 5*(3), 313-331.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 131-143.

Gómez, H., & Guacaneme, E. (2013). Aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas - Educación Matemática" en el último quinquenio. In *Memorias de la Cuarta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática ENHEM 4.* Cali: Universidad del Valle.

González, K. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía, 15*(35), 29-36.

Grabiner, J. (1983). Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grattan - Guiness, I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el Cálculo? *Mathesis, 7*(3), 363-387.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación del profesor: razones e intenciones. In R. Borba, & C. Monteiro, *Memorias de la XIII CIAEM - IACME.* Recife, Brasil.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle (Tesis doctoral).

Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES, 4*(7), 102-109.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza*, 99-112.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Jankvist, U., Mosvold, T., & Clark, K. (2016). Mathematical Knowledge for teaching teachers: The case of history in mathematics education. *History and Pedagogy of Mathematics 2016.* Montpellier; Francia: HPM.

Jill, A., Ball, D., Konrad, K., Fou-Lai, L., & Jarmila, N. (2005). Reflections on an Emerging Field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 359-381.

Jones, C. (1987). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las Matemáticas. *MATHESIS, 3*(1), 3-14.

Laugwitz, D. (1987). Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica, 14*, 258-274.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología, 14*, 277-298.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecne, Episteme y Didaxis, 1*(9), 44-59.

Medrano, I., & Pino-Fan, L. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT, 5*(1), 287-323.

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de Límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* Alicante: Universidad de Alicante (Tesis Doctoral).

Montes, M., Contreras, L., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. In A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa, & N. Climent, *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Mora, L., Guacaneme, E., & Jiménez, W. (2016). Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(47), 192-206.

Nakane, M. (2014). Did Weierstrass's differential calculus have a limit - avoiding character? His definition of a limit in epsilon - delta style. *Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 29*(1), 51-59.

Pinto, J., & Gonzáles, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., van der Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., . . . Chapman, O. (2009). Tools and settings supporting mathematics teachers' learning in and from practice. In R. Even, & D. Ball, *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 185-209). New York: Springer.

Pourciau, B. (2001). Newton and the Notion of Limit. *historia Mathematica, 28*, 18-30.

Rendón, C. (2017, agosto). Polisemia en la notación usual de límite. *Comunicación presentada en el Cuarto Encuentro Distrital de Educación Matemática.* Bogotá D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, N. (2010). Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno. Granada: Universidad de Granada (tesis de maestría).

Sánchez, M. (2011). A Review of Research Trends in Mathematics Teacher Education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Tirosh, D., & Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 2 Tools and Processes in Mathematics Teacher Education.* Sense Publishers.

Vidal, L., & Salinas, M. (2011). Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional. In M. Marin, G. Fernández, L. Blanco, & J. Palarea (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 587-598). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática: SEIEM.

Vidal, R., Quintanilla, M., & Maz, A. (2010). La Historia de la Matemática: Un valioso componente para la formación del profesorado de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 5*(1), 7-21.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 109-135). Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education , 10*(4), 433-440.

4. Contenidos

El trabajo se desarrolla en cinco capítulos a saber:

- El primer capítulo presenta la definición del problema que da pie a la realización de este trabajo. En ese sentido, se exponen las razones personales y académicas que llevaron la a consecución del proyecto. Se muestra también la justificación del trabajo de grado, así como los objetivos que se persiguen, algunos antecedentes de investigación que proporcionan acicate a la elaboración de este estudio. Finalmente, se presentan en este capítulo los aspectos metodológicos del trabajo de grado.
- En cuanto al segundo capítulo, se presenta el marco teórico que servirá como referente para las distintas definiciones y paradigmas del trabajo. En particular se describe: el campo de investigación relativo a la Educación del Profesor de Matemáticas a partir de caracterizar evidencias de su existencia y sus objetos de estudio. A continuación, se menciona el enfoque "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" que sirve para identificar los distintos conocimientos de los que precisa el profesor de Matemáticas. En tercer lugar, se establecen algunas relaciones entre la Historia de las Matemáticas y la Educación del Profesor de Matemáticas y, por último, se conceptualiza el término de Tareas en el marco de la Educación del Profesor de Matemáticas.
- En el tercer capítulo se formula una revisión histórica del concepto de límite. Se inicia comentando la revisión documental elaborada para tal fin, desarrollando después unos resúmenes analíticos para los documentos estudiados. En seguida se caracterizan los hitos principales en la historia del límite y con base en ello se propone una visión propia de la historia del límite a partir de la documentación estudiada.
- El cuarto capítulo aborda los resultados del trabajo. El principal resultado es el planteamiento de la secuencia de tareas que fue diseñada para los profesores de Matemáticas. A continuación, se propone una clasificación para las mismas la cual comporta la particularidad de expandir el horizonte al sugerir la concepción de nuevas tareas que no se habían pensado hasta ese momento. En este mismo capítulo se reporta el resultado de haber ejecutado una prueba piloto para algunas de las tareas planteadas, se comentan algunas conclusiones con base en la evidencia recolectada de este proceso de pilotaje.
- El quinto capítulo recoge las conclusiones después de realizar el trabajo. En particular se comenta el cumplimiento de los objetivos propuestos, además de mostrar asuntos que quedaron pendientes y que podrían ser abordados con posterioridad en un estudio. Se plantean también algunas recomendaciones en el marco del trabajo, las preguntas abiertas que deja el proyecto y el impacto que su realización tuvo sobre la trayectoria académica de su autor.

Finalmente se presentan las referencias del trabajo y los Anexos del documento.

5. Metodología

El trabajo consistió fundamentalmente en cuatro etapas metodológicas:

1. La realización de una revisión documental sistemática a través de bases de datos y repositorios institucionales con el fin de conseguir una bibliografía extensa sobre la historia

del límite, esto con el fin de realizar una reconstrucción propia de dicha historia en la que se lograran advertir sus principales hitos. De toda la documentación recolectada solo se emplearon los textos que aludieran únicamente a los elementos históricos del límite omitiendo aquellos textos que tuvieran alusiones a aspectos didácticos sobre el tratamiento del concepto.

2. La segunda etapa constitió en la exploración, estudio y descripción del campo de investigación al cual se adscribe la propuesta de trabajo y que es el de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), dado que es un campo de investigación reciente no fue difícil rastrear las distintas evidencias de su importancia y los aportes del campo a la formación de los docentes.
3. La tercera etapa fue la creación y el diseño de las tareas para profesores de Matemáticas, esta fase recoge todo lo anterior del trabajo por cuanto es la consumación misma del objetivo principal del proyecto y se sirve de lo realizado hasta ese momento, pues precisa de la historia del límite que se hizo en la primera etapa así como de los referentes conceptuales obtenidos en la segunda etapa. Para la elaboración de las tareas, hay que mencionar que muchas de ellas emergieron de forma natural al hacer la revisión histórica del límite dado que la misma historia fue inspirando las situaciones que debían ser presentadas a los profesores, en el caso de algunas otras hubo que realizar una revisión breve de algunos trabajos en los que se diseñaran tareas (dirigidas a profesores) para el estudio de algún concepto matemático y, en la medida de lo posible, adaptarlas para el caso del límite.
4. La cuarta etapa fue la categorización de las tareas, en la cual se proporciona un sistema de clasificación para las actividades elaboradas. Particular atención merece esta fase por cuanto mostró que, al usar el marco de clasificación encontrado, era posible diseñar otras tareas que no se habían ocurrido hasta ese momento. No obstante, dado que esta situación se presentó sobre la fase final del trabajo, no fue posible ahondar mucho en ello y en todo caso se deja como una pregunta abierta para futuras investigaciones.

6. Conclusiones

De la realización del trabajo se destacan principalmente las siguientes conclusiones:

1. Las relaciones entre la Historia de las Matemáticas y la Educación del Profesor de Matemáticas aún son bastante iniciáticas y vale la pena aunar el trabajo hacia esa dirección pues se pudo indagar sobre la gran influencia que tiene la historia como recurso metodológico para orientar las gestiones de aula del profesor.
2. Quedaron varios asuntos pendientes, por ejemplo, abordar otros conceptos matemáticos ligados a la historia del límite como, la continuidad, los infinitesimales, el infinito, las series y sucesiones, la noción de aproximación, etc., que permitan ampliar aún más la visión sobre la historia del Cálculo y las perspectivas sobre el pensamiento variacional en aras de una

mejora en las actividades que se desarrollan en el aula (escolar y de estudiantes para profesor) sobre lo correspondiente.

3. El uso de la historia para abordar el estudio de un concepto matemático permite reconocer y aceptar distintos usos del objeto de estudio, simbologías distintas a las convencionales, significados no usuales y, en general, interpretaciones diferentes a las comunes.
4. La Historia de las Matemáticas como herramienta para la educación permite, entre otras, el reconocimiento de la actividad matemática como producto de procesos humanos, no exentos de errores, equivocaciones, complejidades, etc. Perspectiva que debería ser consustancial a la actividad matemática escolar.
5. Las Tareas diseñadas en este trabajo, en la medida en que estuvieron fuertemente ligadas a distintos hitos en la historia, permiten concluir que las mismas son herramientas óptimas para ilustrar al profesor de Matemáticas sobre distintos hechos concretos sobre la historia de un concepto matemático, en este caso el de límite.
6. Se abre la posibilidad para que los docentes de Matemáticas puedan proponer distintas estrategias de Enseñanza para el concepto de límite en el ambiente escolar (y universitario inclusive) las cuales aludan a situaciones históricas poco convencionales en la escuela (o la universidad) tales como: las paradojas de Zenón, el método de exhaución griego, el estudio del triángulo característico de Leibniz, etc.
7. Una de las grandes conclusiones que deja el trabajo gracias a la puesta en práctica de la Tarea relacionada con la notación del límite, es la de evidenciar cómo es que el uso de una misma notación puede comportar distintos significados y diferentes interpretaciones dependiendo de la situación en la que se produzca.

En relación con los aportes personales que dejó la elaboración del trabajo de grado está el fortalecimiento de actividades ligadas a la investigación académica como efectuar revisiones documentales sistemáticas, mejorar las competencias de lectura crítica y de escritura, la utilización de recursos tecnológicos como las bases de datos y los gestores bibliográficos para organizar grandes cantidades de información, etc.

Elaborado por:	César Guillermo Rendón Mayorga
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del Resumen:	29	09	2017

Tabla de contenido

Lista de ilustraciones

Introducción

El presente trabajo de grado refiere al diseño de una serie de tareas para profesores de Matemáticas que, siendo mediadas por la Historia de las Matemáticas, puedan ampliar el horizonte de conocimientos que los docentes tienen sobre el concepto de límite. Se considera que reviste particular importancia desde aspectos tanto matemáticos como educativos. En cuanto a lo matemático no es posible omitir que el límite funcionó en la historia como un puente entre las ideas intuitivas del Cálculo y la formalización de dicha área (Medina, 2001), en particular sirve como fundamento conceptual en las definiciones de la derivada y de la integral, los dos objetos principales que estudia el Cálculo.

Desde el ámbito educativo el límite como objeto de estudio también comporta gran importancia, pues a partir de la experiencia personal como estudiante y como docente, el límite es usualmente un tema abordado en el último grado de colegio y que afianza asuntos como la noción de aproximación, los distintos registros semióticos para representar funciones y da pie para el estudio de la derivada al nivel escolar. En ese mismo sentido, son innumerables los estudios que se han hecho acerca de los errores y las dificultades que existen en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje sobre el límite (Cottrill, Schwingendorf, Nichols, & Thomas, 1996; Contreras & García, 2011; Mira, 2016). Sin embargo, aunque existen, son más escasos los estudios que refieren al conocimiento del límite desde la mirada del profesor, la cual es una de las razones para proponer este trabajo de grado.

Por otra parte, la Historia de las Matemáticas (HM) ha mostrado ser una potente fuente de herramientas que puede proveer al profesor de Matemáticas de recursos metodológicos que orienten su quehacer profesional en el aula (Guacaneme, 2016; Jankvist, Mosvold, & Clark, 2016), razón por la cual el trabajo busca desarrollar el conocimiento profesional del profesor a partir de la mediación de la HM en su formación, con el fin de lograr que él mismo pueda proponer otras maneras y estrategias de enseñanza para el límite, que rompan con la creencia que muchos estudiantes de colegio (e incluso de universidad) tienen, comprobadas a partir de la experiencia personal, y es que “el Cálculo no es más que álgebra pero con funciones”, evidenciando así con meridiana claridad la perdida del carácter variacional y dinámico del Cálculo, el cual debe ser un asunto medular en su estudio.

Para conseguir el objetivo del trabajo de grado, además de considerar las relaciones entre la HM y la formación del profesor de Matemáticas, se ha utilizado también el marco teórico propuesto por Ball y su equipo de investigadores (Ball, Thames, & Phelps, 2008) el cual sirve para delimitar y clasificar los conocimientos que un profesor de Matemáticas debe tener y que van más allá de lo estrictamente matemático. A tal conjunto de conocimientos los denomina *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) y es bajo la mirada de tal enfoque conceptual que es desarrollado este trabajo. También, en lo que respecta a los asuntos conceptuales, el trabajo se guía por la propuesta de Tirosh y Wood (2008) para definir qué es una Tarea en el contexto de la educación del profesor de Matemáticas.

Dicho todo lo anterior, solo resta describir brevemente el orden del trabajo y sobre qué radica cada capítulo del mismo. Así, en el primer capítulo se exponen todos los preliminares del trabajo consistentes en la definición del problema de investigación y la pregunta que va a orientar todo el trabajo. Esto da paso para presentar la justificación y pertinencia del proyecto así como para presentar los objetivos pretendidos. Se incluye también una sección para reportar de forma sucinta algunas investigaciones encontradas a propósito del estudio del límite desde la Educación Matemática las cuales reseñan algunos problemas y dificultades de lo respectivo, y que sirven como antecedentes de investigacion en el trabajo para terminar de mostrar la conveniencia de su realización. Finalmente, en este capítulo son expuestos los aspectos metodológicos del mismo.

La metodología del trabajo fue de corte cualitativo y se sirvió de distintas herramientas investigativas. En particular y para mayor claridad es posible distinguir cuatro etapas metodológicas. La primera fue la realización de una revisión documental sistemática a través de bases de datos y repositorios institucionales con el fin de conseguir una bibliografía extensa sobre la historia del límite, esto con el fin de realizar una reconstrucción propia de dicha historia en la que se lograran advertir sus principales hitos. De toda la documentación recolectada solo se emplearon los textos que aludieran únicamente a los elementos históricos del límite y los mismos tuvieron que ser clasificados para su estudio, de la siguiente manera: aquellos documentos que señalan la controversia entre los infinitesimales y las cantidades infinitamente pequeñas, los que versan sobre las aplicaciones del límite, aquellos que abordan la definición de lo continuo en Matemáticas, los que detallan la dicotomía entre los límites y la teoría de los infinitesimales, los encargados de tratar la distinta simbología que ha existido para el límite durante la historia, un texto sobre la aproximación como una noción inherente al límite y la última clasificación es la de aquellos artículos que refieren a la generalización del concepto de límite bajo la luz de teorías matemáticas más recientes (v.g. topología, teoría de categorías, etc.).

La segunda etapa metodológica fue explorar, estudiar y describir el campo de investigación al cual se adscribe la propuesta de trabajo y que es el de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), dado que es un campo de investigación reciente (Guacaneme & Mora, 2012) no fue difícil rastrear las distintas evidencias de la importancia y los aportes del campo a la formación de los docentes.

La tercera etapa del trabajo fue la creación y el diseño de las tareas para profesores de Matemáticas, esta fase recoge todo lo anterior del trabajo por cuanto es la consumación misma del objetivo principal del proyecto y se sirve de lo realizado hasta ese momento, pues precisa de la historia del límite que se hizo en la primera etapa así como de los referentes conceptuales obtenidos en la segunda. Para la elaboración de las tareas, hay que mencionar que muchas de ellas emergieron de forma natural al hacer la revisión histórica del límite dado que la misma historia fue inspirando las situaciones que debían ser presentadas a los profesores, en el caso de algunas otras hubo que realizar una revisión breve de algunos trabajos en los que se diseñaran tareas (dirigidas a profesores) para el estudio de algún concepto matemático y, en la medida de lo posible, adaptarlas para el caso del límite, naturalmente dando los créditos respectivos donde fuera necesario.

La cuarta etapa fue la categorización de las tareas, en la cual se proporciona un sistema de clasificación (Guacaneme, 2016) para las actividades elaboradas. Particular atención merece esta fase por cuanto mostró que, al usar el marco de clasificación encontrado, era posible diseñar otras tareas que no se habían ocurrido hasta ese momento. No obstante, dado que esta situación se presentó sobre la fase final del trabajo, no fue posible ahondar mucho en ello y en todo caso se deja como una pregunta abierta para futuras investigaciones.

En el capítulo dos, se esquematizan todos los referentes conceptuales que sirven como base para el análisis del trabajo. Así, se describen en orden: el enfoque MKT (Ball, Thames, & Phelps, 2008) como marco conceptual que permite dilucidar con claridad hacia dónde se dirigen las aportaciones que la elaboración del trabajo deje. A continuación, se presenta el campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), y en particular las líneas de investigación con las cuales encuentra coincidencia directa este trabajo (Guacaneme & Mora, 2012). En tercer lugar se elabora un resumen de las relaciones entre la HM y la EPM con el objetivo de encontrar investigaciones anteriores que sirvieran como derrotero y justificación en el camino de realizar este trabajo de grado. Por último es conceptualizado el término de "tarea" en el marco de la EPM, definición que servirá para comprender lo efectuado en los capítulos ulteriores.

En el capítulo tres se ofrece una mirada a la historia del concepto de límite en Matemáticas. Se inicia describiendo cómo fue la recolección de los documentos estudiados, a continuación son presentados los resúmenes analíticos de aquellos textos que finalmente fueron empleados en el trabajo, con tales resúmenes es posible caracterizar los principales hitos en la historia del límite asunto que es ampliamente descrito en el capítulo y sintetizado en una tabla que se presenta al final de la sección.

Terminando el capítulo se escribe una reconstrucción propia sobre la historia del límite con base en todo el trabajo anterior de identificar los hitos principales en la historia del concepto matemático en cuestión.

En el capítulo cuatro son presentados los resultados del trabajo, en primer lugar se muestran las tareas realizadas, a continuación el sistema de clasificación establecido para categorizarlas. Ese punto es aprovechado para describir además la relación que cada tarea guarda con la Historia de las Matemáticas así como la intencionalidad que tiene cada una de las mismas. Se reporta igualmente el resultado de haber desarrollado una prueba piloto para algunas de las tareas planteadas.

Finalmente en el capítulo cinco se exponen las conclusiones del trabajo, en particular se exhibe una síntesis del trabajo, además de dar respuesta explícita a cada uno de los objetivos, asimismo son puestos sobre la mesa algunos asuntos que quedaron pendientes por abordar y que pueden convertirse en materia de indagación para futuros estudios por parte de personas interesadas, también se reseñan algunas recomendaciones y, en definitiva, los aportes que la ralización del proyecto dejó para el autor a nivel personal.

Capítulo 1. Preliminares

1.1. Definición del problema

Son diversos los indicadores que da la literatura especializada en relación con las dificultades que reviste el concepto de límite a la hora de su Enseñanza y Aprendizaje en la escuela, entre otras, se alude que es un concepto de poca recordación por parte de los estudiantes y que su comprensión se reduce a la aplicación de reglas algebraicas determinadas, dejando de lado el carácter variacional que tiene el concepto y que es propio del cálculo (Cottrill, Schwingendorf, Nichols, & Thomas, 1996).

Estudios como el de Vidal y Salinas (2011) evidencian que tales dificultades probablemente tengan alguna relación con la formación inicial que tuvo el docente sobre el concepto de límite, la cual, la mayoría de veces es muy mecánica y es esta misma práctica la que el maestro en formación va a desarrollar en el aula en tanto que no contó con herramientas diferentes durante sus estudios de pregrado.

Teniendo en cuenta el anterior panorama, la problemática inicial que da pie para este proyecto es que hay evidencia tanto empírica como investigativa para considerar que los profesores que se forman en la universidad, no tienen un bagaje suficiente para abordar de forma óptima la Enseñanza del límite durante el ejercicio de su profesión.

Para hacer frente a esta dificultad identificada, el trabajo se sirve de la Historia de las Matemáticas (HM) como una herramienta que es capaz de proveer distintas situaciones ligadas a los desarrollos de un concepto matemático, y que bien pueden ser extrapolables al aula de clase si son reconocidas y comprendidas por el docente. Así, Jankvist (2009) propone una serie de planteamientos que abogan por la utilización de la Historia de las Matemáticas en el contexto educativo, tal y como se detallará más adelante.

Además de la Historia de las Matemáticas, el proyecto utiliza algunos referentes conceptuales que aportan, en el marco de la Educación del Profesor de Matemáticas como campo investigativo, un soporte teórico para saber en qué dirección dirigir el trabajo. Específicamente se emplea el modelo de los Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT por sus siglas en inglés) elaborado por Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008) por cuanto se considera que la Historia contribuye al desarrollo de elementos disciplinares en la formación del profesor.

Finalmente, después de comentar sucintamente el problema por el cual surge esta propuesta de trabajo, así como los enfoques teóricos empleados, se presenta a continuación la pregunta que orienta el desarrollo mismo del trabajo:

¿Qué aporta la Historia de las Matemáticas al Conocimiento Didáctico del Contenido de los profesores acerca del concepto de Límite?

Ante la pregunta es importante mencionar que el trabajo no pretende dar una respuesta exhaustiva al interrogante. Más bien, propone un camino en el que la Historia se convierte en acicate del desarrollo del conocimiento del docente y en ese sentido aporta sustancialmente a su conocimiento del Límite como concepto matemático. En ese sentido, aunque la pregunta anterior es la que orienta el trabajo en términos generales, a medida que el mismo avanzó, se logró concretar aún más, obteniendo la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera podría afectar el conocimiento del profesor de Matemáticas acerca del límite la realización de tareas mediadas por la Historia de las Matemáticas?

Es esta pregunta y no la anterior la que favorece la coherencia es necesario aclarar que, dado que no es objeto del trabajo la implementación de las tareas (solo su diseño), el impacto efectivo de las mismas sobre la formación de docentes se hace a manera especulativa a partir de antecedentes, presupuestos y el pilotaje de algunas de las tareas.

1.2. Justificación

Durante el desempeño de la labor docente se ha logrado conjeturar, a partir de la experiencia de diálogos con estudiantes, con otros profesores o en revisiones a libros de texto, que la enseñanza de algunos conceptos matemáticos carece de suficientes representaciones y perspectivas que puedan dotar a los alumnos de una mirada más amplia y profunda sobre los conceptos en cuestión. Específicamente en este trabajo se busca abordar el objeto de límite como un constructo matemático que se desarrolla usualmente en el último grado de la educación escolar del país y que, a partir de las ideas inicialmente mencionadas, parece estar sometido a un proceso de instrucción que hace énfasis en representaciones meramente numéricas, simbólico-algebraicas y gráficas (en el sentido analítico de la representación de una función en un plano cartesiano) cerrándose a otro tipo de registros reportados en la historia, y en consecuencia limitando también las posibilidades de enseñanza sobre el tema.

Desde la experiencia tenida como estudiante de licenciatura en matemáticas se puede encontrar una eventual razón para la situación anteriormente expuesta, la cual radica en la formación matemática que recibe un estudiante para profesor, pues al menos para el caso personal, cuando se abordó el concepto de límite se hizo desde un curso de Cálculo Diferencial que no tenía elementos distintos a un curso de Cálculo para administradores, ingenieros, etc., por lo cual vale la pena preguntarse si las matemáticas que deben ser apropiadas por un profesor son las mismas que deben ser aprendidas en otras profesiones. Más aún, otra reflexión permitida en este panorama es la de pensar que el profesor de matemáticas va al aula a replicar lo que él mismo hizo en sus clases universitarias de Cálculo, por lo cual es difícil imaginar que las herramientas que va a emplear posean algún bagaje Didáctico potente que las diferencien de las que podría tener un ingeniero, un administrador, etc.

A propósito de la situación anterior, el grupo de investigación al que se adscribe esta propuesta (Grupo RE MATE – Research on Mathematics Teacher Education) está convencido de que la Historia de las Matemáticas (HM) puede servir para potencializar los procesos de Enseñanza y Aprendizaje en los docentes, es por ello que el centro del proyecto consiste en el planteamiento de tareas que estén mediadas por la HM, dirigidas a futuros educadores, de tal manera que los doten de una mejor comprensión sobre el concepto de límite. Esta idea implica adoptar una postura sobre el papel de la HM en la educación, para este caso se adopta la propuesta de Jankvist (2009) quien clasifica la HM según su utilidad en el aula y en particular sugiere una categoría que llama «la historia como herramienta», en esta se describe que la historia puede proveer distintos puntos de vista de un mismo objeto matemático correspondientes a las miradas que los mismos matemáticos han tenido de ese objeto, así mismo plantea que la fenomenología histórica permite establecer posibles trayectorias de aprendizaje en relación con el objeto de estudio y que el empleo de la HM permite una identificación temprana de obstáculos epistemológicos en el aula.

Es importante resaltar que el uso que se pretende dar a la historia aquí trasciende el de presentar elementos anecdóticos en el aula de clase, hace referencia en cambio a su utilización como una herramienta que además de lo mencionado con anterioridad, permite diseñar materiales didácticos tal y como lo sugieren Rodríguez-Vásquez, Romero Valencia y Henao Saldarriaga (2015). De igual manera, hay también una diversidad de autores que estimulan el uso de la HM en la enseñanza, así por ejemplo se propone que una instrucción basada en elementos históricos muestra unas matemáticas más humanas en tanto que permiten hacer conscientes al estudiante de que el mismo concepto con el cual tienen dificultades en la actualidad, también revistió complejidad para los matemáticos en una época específica (Bakker y Gravemeijer, 2006 citados por Rodríguez-Vásquez, Romero Valencia, Henao

Saldarriaga, 2015). Por otra parte Fauvel (1991) citado por Chaves (2008) menciona otro argumento poco convencional a favor del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas en futuros docentes, a saber: el desarrollo de habilidades muchas veces descuidadas como el análisis de lectura, el uso de biblioteca y la redacción explicativa. Es por todo lo anterior que se encuentra pertinencia en proponer tareas que estén mediadas por la HM en la búsqueda de ampliar los conocimientos que tienen los futuros profesores sobre la idea de límite funcional.

Es importante ahora explicitar la ubicación del trabajo en una línea de investigación actual la cual soporte el proyecto realizado y lo ubique en un contexto más global. Para ese fin hay que iniciar mencionando que el trabajo hace parte del campo de investigación denominado «la Educación del Profesor de Matemáticas» (EPM) que, aunque reciente, ya cuenta con una actividad académica que lo avala como tal (v.g. existen al menos cinco revistas cuyo contenido aborda de manera específica la EPM, ha ocupado lugares relevantes en eventos internacionales, se ha realizado la publicación de un Handbook, entre otros fenómenos reportados por Guacaneme y Mora, 2012). Identificando el campo de investigación es posible centrarse en una de las líneas de investigación del campo, en particular atendiendo a la categorización que hace Sánchez (2011) se encuentra pertinencia en que la tesis se ubique dentro de la línea relativa al conocimiento y las habilidades del profesor cuya pregunta central es ¿qué clase de conocimiento y habilidades necesita una persona para ser un «buen» profesor de matemáticas?

No obstante lo anterior ha surgido una nueva tendencia de investigación en el campo de la EPM que refiere al diseño y el papel de las tareas en la educación del profesor (Sánchez, 2011), con la cual también habría puntos de encuentro dada la naturaleza de la propuesta de diseñar de tareas para futuros profesores, por lo cual se asume que el proyecto puede servirse de ambas líneas de investigación para su desarrollo; aunque es pertinente aclarar que el interés de la propuesta no radica en describir cómo las tareas modifican la educación del docente, sino más bien qué tareas inspiradas por la HM podrían permitir esas modificaciones.

Aunque hasta este punto se han presentado algunas razones personales para la realización de este trabajo (así como su adscripción a una línea de investigación) lo cierto es que también se recurrió a distintas fuentes que lograran darle viabilidad al proyecto más allá de la inquietud personal. Para ese fin, se consideraron fuentes investigativas que se relacionan en el apartado denominado “Antecedentes de investigación” (p. 19) y que refieren a trabajos anteriores que aporten a, o se relacionen estrechamente con, la temática propuesta en el trabajo. Por otra parte se diseñó e implementó una encuesta que funge como fuente empírica (Ver Anexo 1, p. 104), esta fue aplicada de forma virtual a 18 de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que estuvieran entre V y VII semestre, la misma se trató de una serie de preguntas las cuales trataban de identificar aquellos aspectos que se enfatizaron en el momento en que estudiaron el concepto de límite en el transcurso de su formación de pregrado, para ello la encuesta hizo alusión a distintos momentos históricos en el desarrollo del Cálculo con el fin de advertir aquellos que los estudiantes reconocían. La conclusión principal es que, en el ambiente universitario consultado, los procesos de Enseñanza – Aprendizaje del límite son muy algorítmicos y poco se relacionan con los problemas históricos o las consideraciones epistemológicas que son propias del concepto y que, sin duda, ayudan a mejorar su comprensión.

Una vez demarcado el problema de investigación y las justificaciones que avalan su realización, se presentan a continuación los objetivos propuestos para el trabajo.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Diseñar una serie de herramientas inspiradas por la Historia de las Matemáticas para futuros profesores que les posibiliten una transformación del Conocimiento Didáctico que tienen sobre el concepto de límite.

1.3.2. Objetivos específicos

- Realizar una reconstrucción histórica del concepto de límite en matemáticas con base en literatura especializada sobre Historia de las Matemáticas.
- Sintetizar y utilizar un marco conceptual en el que se puedan evidenciar las relaciones entre la Historia de las Matemáticas y la Educación del Profesor de Matemáticas.
- Elaborar y caracterizar las tareas para futuros profesores que puedan servir para su aprendizaje del concepto de límite empleando la Historia de las Matemáticas.

1.4. Antecedentes de investigación

A continuación, se mencionan algunas fuentes de investigaciones realizadas que se consultaron para advertir trabajos que estuvieran en la misma dirección que el propuesto. En ese sentido se seleccionaron algunos para presentar en este punto de acuerdo a su pertinencia par este trabajo.

En primer lugar se abordó el trabajo de Vidal y Salinas (2011) en el que reportan las conclusiones de un estudio realizado a profesores de secundaria sobre algunos aspectos de enseñanza relativos al concepto de límite funcional, a saber: ¿cómo considera que este concepto debe ser impartido? ¿A qué edad considera más adecuada su instrucción? ¿Con qué rigor y bajo qué representaciones? ¿Con qué instrumentos y estrategias?, al término de esta indagación una de las conclusiones a la que llegan los autores es que el profesorado sigue utilizando materiales considerados ya tradicionales (v.g. tablero, calculadora científica, libro de texto) para la instrucción del límite, pero además reportan que los profesores entrevistados manifiestan que de recibir una formación más adecuada y de tener unas mejores circunstancias[1] entonces podrían pensar en una enseñanza del límite con una cantidad mayor de elementos cognitivos.

Se considera que esta primera fuente de investigación arroja algunos resultados que son de interés para esta propuesta de trabajo. En primer lugar pone de manifiesto el hecho de que hay una parte de la comunidad de investigadores en la EPM preocupados por el proceso de instrucción que tiene el concepto de límite; en segundo lugar se advierte una situación muy símil con la obtenida aquí a partir de la fuente empírica en el sentido de la carencia de elementos que tienen los profesores a la hora de abordar la idea de límite, aun tratándose de lugares tan distantes (la investigación reportada es de la ciudad de Galicia, España), lo cual llama la atención en tanto que posiciona el tema en un contexto socio-geográfico amplio.

En segundo lugar se tomó un estudio realizado por Bagni (2005) quien realiza una búsqueda sobre las implicaciones didácticas que tienen las raíces históricas del concepto de límite funcional. Básicamente el autor hace una revisión por algunos antecedentes históricos que permiten más adelante la concepción del límite como se conoce hoy. Así hace un recorrido por las nociones griegas de la intuición a partir del método de agotamiento, reportado por primera vez en los Elementos de Euclides y atribuido a Eudoxo en el cálculo del volumen de un cilindro; a continuación, comenta algunas generalidades sobre las ideas de límite en el momento histórico de Euler, en el cual empieza a distinguirse de forma más evidente diferencias entre el infinito actual y el infinito potencial[2] (idea ligada ampliamente al concepto de límite). Comenta después sobre las disquisiciones que existieron en el surgimiento del cálculo en el sentido de las aproximaciones que le dieron Newton (desde la física) y Leibniz (desde el álgebra) y finaliza

[1] Cuando refieren a las circunstancias hablan sobre, por ejemplo, las instalaciones de los colegios, los tiempos que se tienen para cubrir las diferentes temáticas, los recursos con los que cuentan los estudiantes, etc.

[2] Aunque es en ese momento de la historia en el que emerge la discusión entre infinitos actuales y potenciales, lo cierto es que el autor reporta que desde Aristóteles y las paradojas griegas, ya existe una discusión implícita sobre este tipo de infinitos aun cuando todavía no hayan sido considerados como tal.

con los aportes epistemológicos a la enseñanza del concepto formal de límite tal como se conoce en la actualidad sugerido por Weierstrass y Cauchy.

Este estudio reviste importancia en el planteamiento del proyecto, no solo por la revisión histórica *per sé* sino por las conclusiones que señala el autor. En primer lugar, se pregunta sobre la utilidad de establecer un paralelo entre el desarrollo del concepto a través de la historia y el desarrollo cognitivo de los estudiantes, atendiendo a que de cierta manera esa trayectoria corresponde con la idea de transposición didáctica de Chevallard en el sentido de hacer un tránsito entre las nociones y la formalización (sin que ello implique en lo absoluto la trivialización de las ideas matemáticas). Finalmente cierra preguntándose, ante ese panorama de comparativa entre la historia y la educación, cuál es el papel del profesor de matemáticas y el del educador del profesor, en qué medida el profesor está preparado para posibilitar y llevar las riendas de esa trayectoria de enseñanza potenciada por la HM. Es justamente en ese sentido que el documento es completamente pertinente para la propuesta de trabajo, por cuanto sirve los elementos necesarios para implementar la HM en la educación del profesor de matemáticas a propósito del concepto de límite funcional.

No obstante, las anteriores investigaciones reportadas en la literatura, también fue posible encontrar otros documentos que guardan pertinencia en tanto fuentes investigativas, aunque por ahora no se consideren primarias para este trabajo. En primer lugar el trabajo de Cottrill, Schwingendorf, Nichols, y Thomas (1996) en el cual comentan los resultados de un proyecto que tuvo como objetivos, en primer lugar la reinterpretación de la literatura relativa al límite funcional a la luz de su naturaleza dual como proceso dinámico y como concepto estático, y en segundo lugar la realización de una descomposición genética de cómo puede ser aprendido el concepto de límite. Al respecto, los investigadores concluyen esencialmente que la dificultad que tienen los estudiantes para aprender la definición formal de límite se debe gracias a que no cuentan con una definición dinámica de este concepto sino que, previo a la formalización, lo que se tiene son procesos estáticos relacionados al límite, hecho que es consonante con lo que se ha venido proponiendo a lo largo del trabajo, en el sentido que no se puede desconocer en el aula el carácter variacional del cálculo y de los objetos de estudio propios de dicha materia. El documento es relevante para el trabajo en el sentido en que sugiere una visión del mismo objeto que va en otra dirección, pues la descomposición genética corresponde a una herramienta propia de la teoría APOS (Action – Process – Object - Schema) propuesta por Dubinsky hacía los años 80; en esa medida indica la posibilidad de estudiar el límite funcional desde distintas perspectivas y enfoques, en este caso, de la Didáctica de las Matemáticas.

Por otra parte es importante mencionar el trabajo de Medina (2001), quien hace una revisión histórica sobre la evolución del concepto de límite con el fin de reconocer que el origen complejo que tuvo el objeto matemático justifica en buena medida la dificultad que tiene su aprendizaje, por cuanto el proceso de desarrollo del límite no fue históricamente continuo y organizado sino que estuvo permeado por rupturas, avances y retrocesos de cada época.

Finalmente, otra fuente investigativa secundaria es el trabajo de Contreras y García (2011) en el que estudian los significados pretendidos y evaluados por un grupo de profesores cuando desarrollan el concepto de límite en la escuela. En ese sentido los autores concluyen que los docentes ponen en un primer lugar el significado gráfico relacionado a la representación de funciones y la coincidencia gráfica de un límite con su procedimiento algebraico; en segundo lugar, el significado más ponderado es el infinitesimal, el cual estriba sobre las aproximaciones numéricas intuitivas de las cuales se obtiene el valor del límite deseado. El trabajo es de relevancia dado que al analizar los significados desarrollados por los profesores también saca a la luz los conflictos semióticos que cada significado trae consigo (esto en el marco del Enfoque Ontosemiótico) los cuales provienen en cada caso del registro empleado y cuya eventual solución está en analizar el momento histórico representado por cada registro con el fin de identificar los errores, obstáculos y consecuentes respuestas que aparecieron para cada uno de ellos en la historia. Este documento reafirma la posibilidad de acercarse al objeto del límite desde diferentes enfoques, en particular de aquellos que se sirvan de algún elemento propio de lo histórico, lo cual probablemente ayude al desarrollo mismo del trabajo.

Para terminar este apartado es importante subrayar que en el marco de la propuesta de trabajo se acepta que la historia no debe ser utilizada sin modificaciones, sino que deben emplearse argumentos históricos con el fin de elegir una génesis del concepto que se estudia y después diseñar tareas o situaciones de enseñanza que convenientemente desarrollen esa génesis seleccionada (Brousseau, 1997 citado por Jankvist, 2009) la cual no necesariamente responde a una organización cronológica o evolutiva.

A continuación, se presentan los aspectos más fundamentales de orden metodológico que fueron considerados a la hora de elaborar el trabajo, esto con el fin de tener claridad sobre cómo se desarrollaron todos los elementos que son presentados más adelante a lo largo del trabajo.

1.5. Aspectos Metodológicos

Lo primero que vale la pena mencionar en este apartado es que el trabajo desarrollado no atiende de forma exclusiva a un tipo de enfoque metodológico de investigación. En ese sentido, no es posible categorizar el documento de manera exclusiva. Considerando lo anterior, la finalidad de este subcapítulo es, más bien, describir las fases que compusieron la realización del trabajo, haciendo particular hincapié en el proceso de creación de las tareas propuestas y en algunos referentes conceptuales de distintas metodologías de investigación de las cuales se sirvió el trabajo. Para ello se presentan a continuación las fases en las que se dividió la elaboración del trabajo.

1.5.1. Revisión documental

La primera etapa del trabajo consistió en una revisión documental la cual permitiera advertir sobre hitos y momentos en la historia del concepto de límite. Para ese fin se efectuó una búsqueda en bases de datos como son: *Springer*, *Dialnet*, *JStor*, *Google Académico*, etc., y en distintos repositorios como los de la Universidad de Los Andes, la Universidad Nacional y la Universidad Pedagógica Nacional. Como producto de tal indagación se encontraron alrededor de 24 artículos de revista, 15 libros (o capítulos de libro) y una tesis doctoral. Sin embargo, un filtro de búsqueda que hubo que aplicar a los documentos estuvo motivado porque muchos de ellos abordan la idea de límite, pero enfocan sus planteamientos en conceptos como el del infinito en matemáticas, la continuidad de funciones, etc., asuntos estrechamente relacionados a la historia del límite, pero por fuera de los objetivos esenciales de este trabajo. No obstante, para atender de forma coherente a los desarrollos históricos del límite, tales conceptos matemáticos no fueron completamente excluidos del trabajo sino tratados de una manera sucinta.

Una vez seleccionados los documentos que servirían de base para el trabajo, se procedió a elaborar un resumen analítico de cada uno, en dichos resúmenes se describen las ideas principales del documento y su relación con la historia del límite para así dejar en claro la importancia que tal texto representaría en la elaboración del trabajo. Estos resúmenes se encuentran en el capítulo 3 de este trabajo (p. 53).

Es importante resaltar que en esta revisión documental no se estudió en profundidad la literatura especializada que hiciera referencia a aspectos didácticos o pedagógicos del tratamiento de límite en los procesos de Enseñanza - Aprendizaje. La lectura de tales documentos y su respectivo análisis se realizó para la elaboración del apartado correspondiente a los antecedentes investigativos, como una manera de darle sustento a la realización del trabajo por cuanto muchos de ellos tienen referencias de dificultades y errores subyacentes a los procesos educativos relativos al concepto de límite.

También hay que señalar que, aunque el trabajo alude permanentemente a la Historia de las Matemáticas, no se efectuó una revisión o un análisis detallado de las obras originales de los matemáticos que estuvieron relacionados con el desarrollo del límite (Cauchy, Newton, Leibniz, Weierstrass, etc.), esto dado que el trabajo mismo no es acerca de la HM sino de su utilización como un recurso pedagógico para la formación de docentes, razón por la cual la Historia no se entiende como el foco central de la tesis. Sin embargo, en algunos casos sí se revisaron algunas de las obras originales en busca de evidencias sobre hechos específicos, para la aclaración de dudas particulares, etc.

En contraste de los dos párrafos anteriores, se hace necesario especificar que el tipo de literatura objeto de estudio fue aquella en la que los autores realizaran análisis o clasificaciones o estudios sobre la historia del límite. Una vez claros los documentos estudiados, fue posible clasificarlos según sus aportes. Así, se encontraron documentos relativos a: las concepciones intuitivas, la formalización, la relación con otros conceptos matemáticos, la notación y las aplicaciones. Tal clasificación permitió la identificación de los principales hitos en la historia del límite además del diseño y la elaboración de las tareas.

Por otra parte, la realización de las tareas obligaba a la comprensión del campo investigativo en el cual se iban a efectuar para poder determinar sus finalidades e intenciones. Es por ello que la siguiente parte del trabajo consistió en situar el trabajo en una línea de investigación la cual permitiera definir algunos referentes teóricos y conceptuales para delimitar el proyecto.

1.5.2. Descripción del campo de investigación

Desde la concepción misma de este trabajo en su fase de anteproyecto, se pretendió, por motivaciones personales, que el mismo se ubicase en el campo de investigación denominado La Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), asunto que es consonante con el hecho que el trabajo procure el diseño de una serie de tareas destinadas para profesores (en formación o en ejercicio). Es por ello que a continuación se describe brevemente el campo de investigación y el por qué este trabajo guarda pertinencia en el marco de dicho campo.

La EPM como campo de investigación difiere del campo de la Didáctica de las Matemáticas dado que se encargan de estudiar asuntos distintos, pues se asume que los conocimientos del profesor son más que aquellos únicamente matemáticos y por esto es que los sistemas didácticos que estudia la Didáctica se quedan limitados respecto de los conocimientos que deben ser apropiados por un docente (Guacaneme & Mora, 2012).

Por lo anterior, dado que es posible y natural aceptar la necesidad de un campo de estudio propio para la educación del profesor, un siguiente paso puede ser buscar muestras de su existencia y pertinencia en la actualidad. Al respecto, Guacaneme (2016) hace un listado de distintas evidencias que clarifican el estado actual del campo, menciona por ejemplo la presencia de al menos cinco revistas especializadas en el campo (*Journal of Mathematics teacher Education, Mathematics Teacher Education and Development, Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, Mathematics Teaching Research Journal* y *The Mathematics Teacher Educator*), la publicación de un *Handbook* referido exclusivamente a la EPM (Tirosh & Wood, 2008), el papel sobresaliente que ha venido tomando la educación del profesor en distintos eventos académicos de orden internacional relacionados a la Educación Matemática (los eventos ICME y CERME han tenido presencia de investigadores de la EMP en varias de sus versiones en la última década), entre algunas otras que, en suma, se constituyen como pruebas tangibles de la efectividad actual del campo de investigación.

Para entender los focos sobre los cuales se centra el campo de la EPM es conveniente detallar las líneas de investigación en las que se divide el campo. No obstante, tal tarea es demasiado extensa y desborda los fines que persigue este sub capítulo del documento, razón por la cual solamente se presenta a continuación una tabla que menciona las líneas de investigación que proponen los documentos principales que fueron empleados en la descripción del campo. Una discusión más detallada y explícita se propone en el apartado 2.2 (p.34) del trabajo.

Documentos empleados	Cardeñoso, Flores, y Azcárate (2001). El desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática	Sánchez (2011). A Review of Research Trends in Mathematics Teacher Education	Guacaneme y Mora (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación
Líneas de investigación propuestas	a. Problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor **b. Problemáticas sobre la elaboración del conocimiento profesional**	Líneas de investigación iniciales: a. Creencias, visiones y concepciones de los profesores. b. Prácticas docentes. **c. Conocimientos y habilidades del profesor.** d. Relaciones entre teoría y práctica e. Práctica reflexiva. Nuevas tendencias de investigación: a. Educación virtual del profesor. **b. El diseño y papel de las tareas en la educación del profesor.** c. La educación y el desarrollo de los profesores. d. Justicia social en las investigaciones del profesor.	a. Creencias, visiones y concepciones de profesores. b. Actividades prácticas en el quehacer docente. c. Relaciones efectivas entre conocimientos teóricos y práctica. **d. Conocimientos y competencias del profesor.** e. Diferencias de formación del profesor en relación con el nivel educativo de enseñanza. **f. Estrategias y tareas en la formación docente.** g. Dinámicas de formación en comunidades de práctica. h. La educación del formador de profesores. i. Educación online de profesores.

Tabla 1. Líneas de investigación del campo EPM

En la anterior tabla se han señalado aquellas líneas que son pertinentes para enmarcar conceptualmente el trabajo realizado, las razones, como ya se mencionó, serán explicitadas más adelante. Otro asunto por mencionar de la Tabla 1 es que presenta unas líneas de acción de la EPM, pero por la naturaleza misma del campo de investigación, tales líneas propuestas por los autores no son excluyentes entre sí. De hecho, hay que señalar que el trabajo realizado por Guacaneme y Mora (2012) tiene de base los trabajos de Cardeñoso, Flores y Azcarate (2001) así como el de Sánchez (2011), razón que evidencia con facilidad la complementariedad entre los objetos de investigación reseñados en la tabla.

Una vez claro el campo de investigación al cual se adscribe la propuesta de trabajo, el siguiente paso en lo que respecta a los aspectos metodológicos, fue el diseño y la elaboración misma de las tareas, proceso que se describe sucintamente a continuación.

1.5.3. Diseño y elaboración de las tareas

Una vez identificados los hitos históricos del límite que se advirtieron en la revisión documental, se procedió a elaborar las tareas. Las tareas fueron diseñadas teniendo en mente no solo los aspectos históricos sino también sus potenciales aportes al Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de los profesores de Matemáticas. Específicamente se apuntó a lo que Ball, Thames y Phelps (2008) denomina el Conocimiento Especializado del Contenido y que refiere, en esencia, a aquellos conocimientos disciplinares que deben ser propios del profesor y que, en consecuencia, no son de uso común para todas las personas.

En total se diseñaron 6 tareas que van enfocadas al tratamiento de distintos aspectos históricos del límite los cuales se consideran importantes en la formación del profesor por cuanto fueron relevantes en su momento. Los asuntos en cuestión fueron: la notación del límite y sus implicaciones, las nociones de continuidad y de infinito, la construcción de irracionales a partir de sucesiones de racionales y la definición de límite.

Para la elaboración de las tareas cabe mencionar que se inició con una versión preliminar de cada una, la cual fue discutida con el asesor del trabajo varias veces hasta que se logró un consenso sobre la intención, los objetivos y la claridad de la misma. Además, se realizó un documento en el que son descritos los propósitos de cada una de las tareas; tal escrito viene a funcionar como un punto de contraste más adelante en el momento en que se realiza una prueba piloto de las tareas, pues permite comparar si lo obtenido en la práctica concordaba con la idea original. En ese sentido, la prueba piloto se constituyó en un factor más que permeó la modificación de las tareas a la luz de los resultados derivados de su aplicación a dos profesores de matemáticas en ejercicio.

Finalmente, luego de tener una versión definitiva (pero naturalmente perfectible) de las tareas, se procedió a su clasificación en el marco de los referentes conceptuales que plantea Tirosh (Tirosh & Wood, 2008) en la introducción del *Handbook* referido a la educación del profesor de matemáticas y, aunque esta era la idea original y con base en ello es que se desarrollaron las tareas, lo cierto es que se advirtió la posibilidad de proponer una clasificación distinta de las tareas que se adaptara mejor al trabajo realizado. Dichas consideraciones conceptuales y cambios metodológicos son los que se describen en el apartado siguiente.

1.5.4. Categorización de las tareas

Este apartado metodológico tiene dos grandes momentos que serán descritos. El primero de ellos está relacionado con la identificación de referentes conceptuales relativos a lo que se iba a entender por "tarea" en este trabajo. Sin embargo, cuando se estudió la conceptualización que se emplearía (Tirosh & Wood, 2008) apareció un problema y es que, aunque las definiciones de tareas y herramientas para la formación de profesores eran muy completas, la clasificación de las tareas que allí se presentaba no parecía adecuarse por completo a las tareas propuestas en esta tesis, tal situación dio lugar al segundo momento de la categorización que era el de encontrar un sistema que permitiera clasificar las tareas y que fuera más acorde a las necesidades del trabajo. Así, además de emplear elementos del *Handbook* de Tirosh y Wood (2008) para conceptualizar las tareas, se utilizaría otro marco de referencia para su clasificación, el cual fue propuesto por Guacaneme (2016).

A continuación, solamente se muestra un esquema inspirado en la organización de Guacaneme (2016) que ilustra las clasificaciones que recibieron las tareas. Una descripción más completa puede ser encontrada en la sección correspondiente del trabajo (ver p.47).

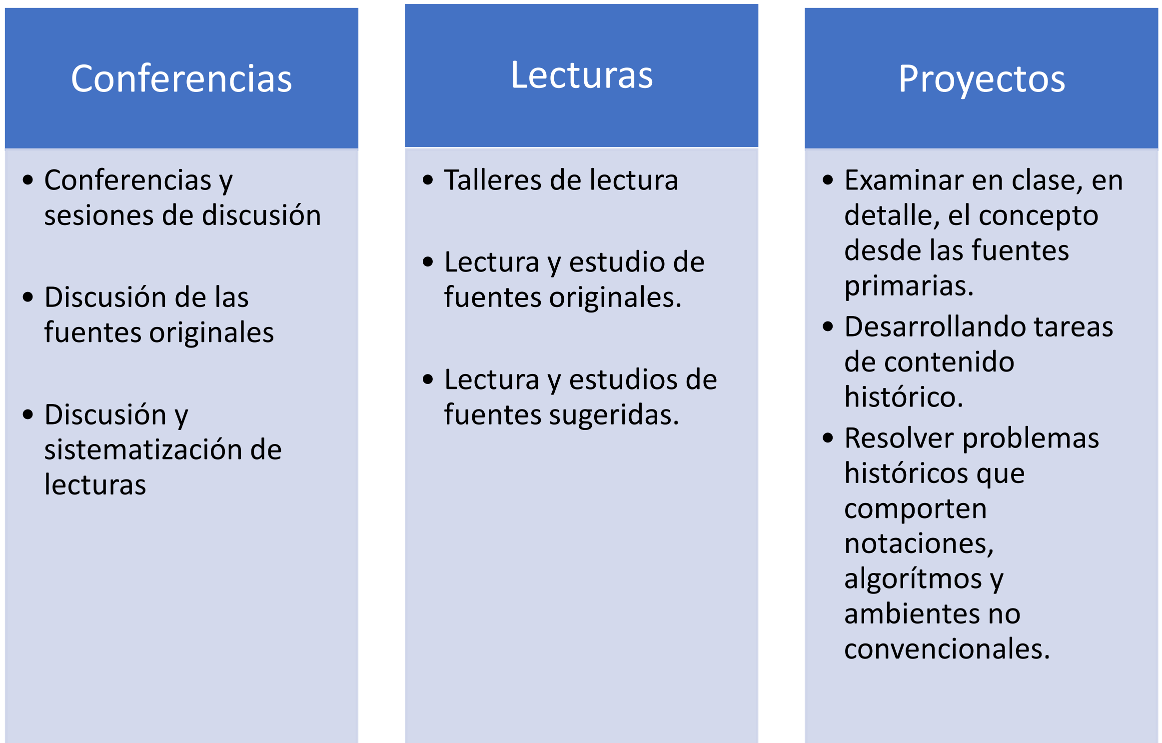


Ilustración 1. Esquema de la clasificación de las tareas

De la anterior ilustración es importante reseñar un par de asuntos. En primer lugar, que los elementos que aparecen en cada tabla no son todos aquellos que aparecen en el trabajo original de Guacaneme (2016), pues solamente se mencionan aquellos que tienen relevancia en este trabajo. En segundo lugar, es importante aclarar en este subcapítulo metodológico, que el sistema de clasificación presentado apareció cuando ya el trabajo estaba sobre su fase final, razón por la cual no se logró elaborar (debido a la premura de los tiempos) una tarea para cada una de las clasificaciones.

Finalmente, habiendo realizado ya una presentación y justificación del trabajo, de sus objetivos, así como una descripción muy sucinta de las distintas fases metodológicas que se contemplaron, es posible avanzar al marco referencial del trabajo, en el cual se definen y se delimitan los conceptos más importantes que utilizará la tesis, todo a la luz de distintos enfoques teóricos debidamente sustentados.

Capítulo 2. Referentes teóricos

2.1. El Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Se pretende en este apartado dar una descripción del modelo denominado "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (MKT por sus siglas en inglés *Mathematical Knowledge Teaching*) como enfoque que va a permitir caracterizar las aportaciones que el trabajo de grado pueda tener en términos de los conocimientos del profesor de matemáticas. Para ello, en primer lugar, se reseña brevemente el surgimiento del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) como enfoque teórico que es antecedente del MKT, tal reseña se efectúa a partir de sus antecedentes conceptuales, a continuación, se comentan los componentes del MKT haciendo énfasis en aquellos que guardan pertinencia en este trabajo y, finalmente, se mencionan algunos ejemplos de trabajos investigativos los cuales muestran que un trabajo sobre Historia de las Matemáticas puede ser acicate para el desarrollo el CDC.

Para lograr lo anterior, se han empleado esencialmente los siguientes documentos: Escudero (2015), quien se sirve del modelo MKT para plantear algunos discernimientos en su tesis doctoral. También a Pinto y González (2008) y Rojas (2010), los cuales servirán para describir el CDC y algunos de sus elementos más importancias. Por otra parte en Montes, Contreras y Carrillo (2013) los autores contrastan los modelos MKT y MTSK (*Mathematical Teacher Specialized Knowledge*) a la luz de su aplicación en la práctica y en ese camino reportan algunas consideraciones importantes acerca del CDC. Para concluir, en Bocanegra, Galeano y Huerfano (2013) se encuentra un trabajo en el que los investigadores se sirven de la Historia de las Matemáticas para aportar al CDC, documento que es relevante por cuanto sirve como evidencia de la relación existente entre ese par de asuntos.

Es importante iniciar señalando que el Conocimiento Didáctico del Contenido es un modelo planteado por Shulman (1987) bajo el supuesto que el profesor requiere no solamente del contenido de su materia y del conocimiento pedagógico general sino también de un conocimiento específico sobre la manera de enseñar su discplina. Dicho conocimiento específico se alimenta de distintos conocimientos como por ejemplo el conocimiento de los estudiantes, del currículo, del contexto y de la pedagogía; es precisamente a ese "nuevo" conocimiento al que denomina Conocimiento Didáctico del Contenido.

Según el enfoque de Shulman (1987) el conocimiento del profesor comporta siete componentes, a saber: conocimiento de la materia, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de otros contenidos, conocimiento del curículo, conocimiento de los alumnos, conocimiento de los fines educativos y el conocimiento pedagógico general (Wilson, Shulman y Richert, 1987 citados por Blanco, Mellado y Ruiz, 1995). Sin embargo como lo mencionan Blanco, Mellado y Ruiz (1995) este enfoque y sus componentes no son la única opción que existe, también hay propuestas de otros autores como Grossman (1990) y Marcelo (1993) las cuales simplemente se mencionan para aclarar la diversidad de posibilidades que hay, aunque no se detalle sobre ellas por cuanto no se utilizarán en el trabajo.

En particular, la discusión ha cobrado relevancia durante las últimas décadas de manera que algunos modelos son muy recientes, tal es el caso de la propuesta elaborada por Ball y su grupo de investigadores de la Universidad de Michigan (Ball, Thames, & Phelps, 2008) quienes han desarrollado el enfoque denominado MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) con base en el trabajo propuesto por Shulman aunque con modificaciones que propenden por la comprensión de un conocimiento específico y único del profesor para el desarrollo de su profesión. En el modelo MKT se diferencian dos particiones del conocimiento denominadas Conocimiento del Contenido (SMK por sus siglas en inglés) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK por sus siglas en inglés) (Escudero, 2015; Rojas, 2010).

Respecto al SMK, este lo dividen en tres subcomponentes: el Conocimiento Común del Contenido (CCC) que hace referencia a aquellos conocimientos de un objeto matemático que cualquier ciudadano con educación promedio debería saber, en ese sentido no se trata solamente del conocimiento desarrollado en la escuela sino también en los contextos de la vida diaria que le permite a una persona resolver problemas, hacer operaciones, etc. Después se encuentra el Conocimiento Especializado del Contenido (CEC) que alude a aquellos conocimientos matematicos específicos que posibilitan al profesor la gestión de los procesos de Enseñanza – Aprendizaje y que, en tal sentido, no son únicamente aquellos desarrollados en la escuela o durante la vida, como en el caso anterior. Finalmente, la última división del SMK, es el Conocimiento del Horizonte Matemático (CH) que apunta a aquellos conocimientos vinculados a las relaciones que existen entre las distintas visiones y naturalezas que tiene un mismo objeto matemático en diferentes niveles escolares. Según lo mencionado por Rojas (2010) este componente del CH es el último sobre el cual estaba trabajando el grupo de investigación de Ball para lograr definirlo con mayor precisión.

Por otra parte, el PCK es traído en forma directa de la propuesta de Shulman como lo reseña Escudero (2015), con la diferencia que, como en el caso anterior, también lo divide en tres subcomponentes, a saber: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCEs), Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CCEn) y el Conocimiento del Currículo (CC). Respecto al CCEs se trata de aquél conocimiento que combina los saberes de los estudiantes y aquellos saberes propios de las matemáticas. El CCEn por su parte versa sobre la combinación entre el conocimiento sobre la enseñanza y el de las matemáticas. El CC como se infiere fácilmente del nombre, trata sobre los conocimientos de enseñanza de temas matemáticos específicos en niveles determinados, así como “el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios” (Sosa y Carrillo, 2010 citados por Escudero, 2015, p. 16).

A continuación se muestra un esquema clásico del MKT tomado de Rojas (2010) que ilustra las divisiones descritas en los párrafos anteriores.

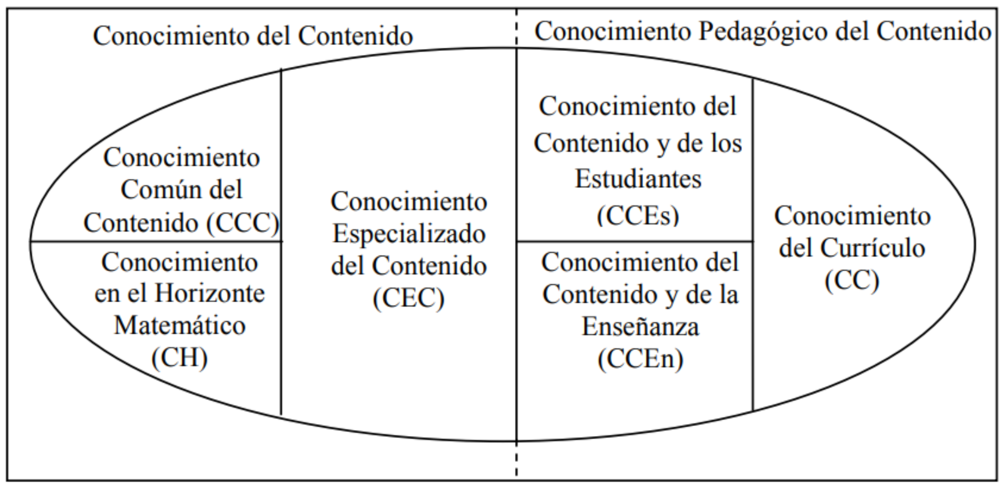


Ilustración 2. Composición del modelo MKT

Es importante señalar que el esquema anterior visibiliza mejor las relaciones entre los distintos componentes del modelo de Ball y su equipo de trabajo. De hecho, llama la atención que las intersecciones entre los distintos componentes son vacías, asunto que no debe ser casual y que en todo caso obliga a centrar el foco de este trabajo sobre particiones específicas del modelo. En esa vía, hay que decir que el trabajo de grado apunta a aportar elementos sobre el CEC y en alguna medida menor al CH.

Se considera que la tesis puede contribuir al CEC por cuanto el diseño de las tareas mediadas por la Historia de las Matemáticas refieren a unos conocimientos bastantes específicos (v.g. notaciones en la historia, algoritmos no usuales, problemas históricos, etc.) que deberían tener los profesores de matemáticas y que, en circunstancias comunes, un adulto poco cercano con las matemáticas no va a estudiar ni a explorar. Más aún, son algunos conocimientos que dotan de una mayor cantidad de herramientas a los docentes para el ejercicio de su profesión. Así mismo, no se puede descartar la cercanía que posiblemente tenga el trabajo con el componente del Horizonte Matemático del modelo MKT dado que el límite está estrechamente relacionado con otros conocimientos de las matemáticas escolares como por ejemplo los procesos de aproximación, el tratamiento del infinito, la completitud de los números reales, etc.

Para concluir este apartado correspondiente al MKT se propone una breve reseña de tres trabajos que integran la Historia de las Matemáticas y el modelo MKT como evidencia investigativa de la posibilidad que tienen de relacionarse estos dos asuntos.

a. En primer lugar está el trabajo de Kathleen Clark (2012), investigadora de la Universidad de la Florida, titulado *"The Influence of solving historical problems on Mathematical Knowledge for Teaching"* y en el cual se busca responder de qué manera la resolución de problemas históricos puede potenciar el conocimiento del profesor de Matemáticas; para ese fin, se les propuso a un grupo de docentes una serie de 10 problemas asociados a la HM para que los resolvieran , presentaran su propuesta de solución y comentaran una reflexión sobre cómo es que el desarrollo del problema les ayudaba a una mejor comprensión de los objetos matemáticos subyacentes a cada situación.

b. Se reseña aquí también la investigación de Jankvist, Mosvold y Clark (2016). Aunque este trabajo se sirve de un enfoque distinto al MKT llamado MKTT (*Mathematical Knowledge for Teaching Teachers*) lo cierto es que hace una disertación acerca del uso de la HM en el marco de los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas. En tal sentido, los autores mencionan que la HM puede llegar a ser un elemento fundamental en los conocimientos del profesor por cuanto "puede incrementar los saberes que tenga sobre misconcepciones, obstáculos e impedimentos relativos a diversos conceptos e ideas matemáticas" (Mosvold, Jakobsen y Jankvist, 2014 citados por Jankvist, Mosvold y Clark, 2016, p.5). Para su trabajo proponen una secuencia de seis lecciones para estudiantes de docencia en matemáticas en las cuales efectúan un estudio de textos históricos de matemáticas para elaborar una lista de posibles "mini proyectos" que podrían implementarse en un aula de clase, con las implicaciones educativas que ello implica.

c. Como último documento que asocia el MKT con la HM se escogió la tesis de maestría de Bocanegra, Galeano y Huerfano (2013), en la cual diseñan e implementan una herramienta didáctica para futuros profesores de matemáticas la cual alude a conocimientos sobre lo exponencial y lo logarítmico por medio de la HM. Para ese fin, usan como marco conceptual el

PCK como subdominio del MKT pero bajo la perspectiva original de Shulman (1987) con el fin de categorizar los aportes que su trabajo produce en el marco de tal enfoque teórico.

Habiendo definido el MKT como enfoque teórico sobre el cual se busca aportar en este trabajo, ahora se describe el campo de investigación en el que esta se enmarca y que delimita la pertinencia de su realización.

2.2. El campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas

Es posible afirmar que el campo de investigación llamado la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM) es un campo reciente todavía (aproximadamente aparece hace dos décadas) y que emerge en el momento en el cual la enseñanza de las matemáticas opta por enfocarse en los conocimientos del profesor y la puesta en acción de los mismos, y se deja atrás la visión que se tenía, según la cual el objeto matemático era el centro del proceso de enseñanza (Rojas, 2010).

Resulta importante señalar que el campo de la EPM no hace parte del campo de la Didáctica de las Matemáticas (o de la Educación Matemática) sino que más bien se sirve de la Didáctica, así como de muchos otros campos del conocimiento (v.g. sociología, psicología, filosofía, historia, etc.) por cuanto se acepta que el triángulo que sustenta a la Didáctica de las Matemáticas (estudiante – profesor de matemáticas – conocimiento matemático) se queda corto para el caso del profesor, pues precisamente una de las causas que provoca la creación de la EPM es la de concluir que el docente de matemáticas precisa de otros conocimientos además del matemático tal y como lo reportan Guacaneme y Mora (2012).

En el proceso de identificar, estudiar y analizar los conocimientos que debe tener el profesor de matemáticas[3] empiezan a aparecer distintas evidencias que empiezan a conformar el campo de investigación. Así, para el ICME10 (*International Congress on Mathematical Education*) realizado en 2004 se presenta una investigación que es el fruto de la recolección de distintas evidencias que ilustran la aparición del campo de investigación a partir de publicaciones especializadas, eventos específicos, etc., en el intervalo de 1999 a 2003. Tal trabajo es realizado por Jill, Ball, Konrad, Fou-Lai y Jarmila quienes son investigadores en Educación Matemática de distintos países, es presentado en 2004 en el ICME10 y publican un artículo en 2005 titulado "*Reflections on an Emerging Field: Researching Mathematics Teacher Education*" (Jill, Ball, Konrad, Fou-Lai, & Jarmila, 2005). En el mencionado artículo, entre otras, sistematizan en una tabla las publicaciones y actas de conferencia que encuentran en su estudio a propósito de la EPM durante los cuatro años de su investigación. A continuación se muestra dicha tabla:

Journals (126 papers in all; 72 in focus)	Journal of Mathematics Teacher Education JMTE, 1998–2003	65
	Journal for Research in Mathematics Education JRME, 1999–2003	7
	Journal of Mathematical Thinking & Learning JMT&L, 1999–2003	3
	Journal of Teacher Education JTE, 1999–2003	3
	Educational Studies in Mathematics ESM, 1999–2002	2
	Mathematics Teacher Education and Development MTED, 1999–2003	34
	Pacific Journal of Teacher Education, 1999–2003, together with the Chinese Journal of Science Education, 1999–2003	11
	Pedagogika, 1999–2002	1
Conference proceedings (154 papers in all; 88 in focus)	Proceedings of Psychology of Mathematics Education Conferences 1999–2003	88
	Papers from discussion group on teacher education in proceedings ICME9, 2000 (a selection of these appears as a special issue of MTED in 2001)	15
	Conferences of the European Society for Research in Mathematics Education CERME, 1999–2003	4
	Symposium on Elementary Mathematics Teaching: SEMT 2001 and SEMT 2003, together with the Mediterranean Conferences on Mathematical Education MedConf 2000 and 2003	21
	National Science Council and Teacher Education Conferences Taiwan, 1999–2001	24
Handbooks	Second International Handbook of Mathematics Education	4
Total		282
In focus		160

Ilustración 3. Revistas y actas de conferencias en la EPM de 1999 a 2003. Tomada de Jill, et al. (2005).

[3] Salvo que se indique lo contrario, la expresión "profesor de matemáticas" refiere al profesor en ejercicio tanto como al profesor en formación inicial.

La ilustración anterior es de particular relevancia porque refleja de manera concreta cómo es que para inicios de siglo la EPM como campo investigativo ya contaba con una producción robusta y una importancia en la comunidad de Educación Matemática. Años más tarde, en una publicación realizada por Guacaneme y Mora (2012), así como en la tesis doctoral de Guacaneme (2016) se elabora un nuevo escenario de evidencias que muestran la existencia y consolidación del campo de investigación. Para fines comparativos entre los dos estudios (2004 y 2012) con el fin de ver la evolución del campo, se presenta a continuación una tabla basada en la información reportada por Guacaneme (2016).

Revistas especializadas específicamente en la EPM	Journal of Mathematics Teacher Education
	Mathematics Teacher Education and Development
	Issues in the Undergraduated Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal
	Mathematics Teaching - Research Journal
	Mathematics Teacher Educator
Estudios internacionales acerca de la EPM	Ball, D. (1988) The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers: Challenging the Myths
	CBMS (2001) - The Mathematical Education of Teachers: American Mathematical Society - Mathematical Association of America
	CBMS (2012) - The Mathematical Education of Teachers II: American Mathematical Society - Mathematical Association of America
	Even, R., & Ball, D. (2009). The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study
	Tatto, et al. (2008). Teacher Education and Development Study in Mathematics. Policy, Practice and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics. Conceptual Framework.
	Tatto, et al. (2012). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics.
Publicación de *Handbook* sobre la EPM	Wood, T., et al. (2008). The International Handbook of Mathematics Teacher Education
Números especiales sobre la EPM en publicaciones especializadas en la Educación Matemática	Revista UNO, 51, 2009.
	ZDM, 40(5), 2008.
	Revista UNO, 41, 2006
	Yearbook, 66, 2004
	Revista UNO, 17, 1998
	ICME 11, México, 2008
	ICME 12, Korea, 2012.
	CERME 3, Italia, 2003

Presencia en eventos internaciones de la Educación Matemática	CERME 4, España, 2005
	CERME 5, Chipre, 2007
	CERME 7, Polonia, 2011
	CERME 8, Turquía, 2013

Tabla 2. Evidencia de la EPM basado en Guacaneme (2016).

Como se puede ver, el crecimiento del campo de la EPM ha sido productivo y continuo. Mientras que en la Ilustración 3 se mostraban solo algunos documentos relativos a la EPM, en la tabla 2 lo que aparecen son publicaciones periódicas destinadas por completo a los distintos asuntos del campo, así como una presencia constante en los principales eventos internacionales de Educación Matemática (lo cual, por cierto, muestra que no son campos desligados entre sí, sino más bien que la EPM depende en buena medida de los avances de la EM).

Después de identificar el campo de investigación y de advertir su evolución, a continuación, se reseñan las líneas de investigación del campo y los asuntos que la EPM estudia a la luz de tres documentos analizados para tal fin. Se hará particular énfasis en aquellos asuntos que guarden relación con este trabajo.

1. El primer documento que fue estudiado es "El desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática" de Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001), quienes además de delimitar el campo de investigación, proponen dos grandes bloques en los cuales demarcan los posibles trabajos que pueden ser de interés para el campo. El primero lo denominan "Problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor" y el segundo "Problemáticas sobre elaboración del conocimiento profesional". Mientras que la primera categoría ahonda en la caracterización del docente de matemáticas y cómo dicho profesional es visto por otros miembros de la sociedad (otros profesores, formadores de profesores, comunidad escolar, etc.), la segunda por su parte, busca estrategias y herramientas que le permitan al profesor hacer parte de una comunidad, así como mejorar su labor y práctica.

Líneas de investigación	Problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor
	Problemáticas sobre elaboración del conocimiento profesional

Tabla 3. Líneas de investigación de la EPM propuestas por Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001).

Considerando la clasificación anterior este trabajo encuentra mayor coincidencia con el segundo bloque, relativo a las problemáticas sobre la elaboración del conocimiento profesional, por cuanto se trata de emplear la HM como una herramienta potente que permite el desarrollo de estrategias en la formación disciplinar del docente, en este caso el diseño de las tareas sobre el concepto de límite.

2. El siguiente documento que fue estudiado es el Sánchez (2011) llamado "*A Review of research trends in Mathematics Teacher Education*", a partir de una revisión de la literatura especializada, memorias de eventos, revistas académicas y documentos de trabajo publicados, categoriza también algunas líneas de investigación sobre las cuales se pueden desarrollar aportes en el campo de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas. El autor, sin embargo, es puntual al mencionar algunas de las limitaciones y condiciones que tuvo su trabajo. Entre las más importantes cabe destacar que solo se mencionan asuntos que hayan sido continuamente investigados por al menos cinco años, también se incluyen solo temas que hayan sido estudiados desde distintos enfoques teóricos o metodológicos y, finalmente, que la revisión solo abarca el periodo 1999 - 2009.

No obstante lo anterior, Sánchez (2011) logra clasificar sus resultados en tres grandes bloques, a saber: (a) líneas de investigación principales, (b) conceptos teóricos del campo (entre los cuales destacan el PCK y el MKT a propósito del sub capítulo anterior de este trabajo) y (c) nuevas tendencias de investigación. Dado que el propósito en este punto es el de explorar las líneas de investigación del campo, solo se hará referencia a los literales (a) y (c). A continuación, se presenta una tabla que esquematiza los resultados del autor sobre las tendencias investigativas de la EPM.

Líneas de investigación	Visiones, concepciones y creencias de los profesores de Matemáticas
	Prácticas de los profesores de Matemáticas
	Conocimientos y habilidades del profesor de Matemáticas
	Relaciones entre teoría y práctica
	Práctica reflexiva
Nuevas tendencias de investigación en el campo	Educación virtual del profesor de Matemáticas
	El diseño y papel de las tareas en la Educación del Profesor de Matemáticas
	La educación y el desarrollo de los formadores de profesores de Matemáticas
	Justicia Social en la investigación sobre la Educación del Profesor de Matemáticas

Tabla 4. Líneas de investigación de la EPM propuestas por Sánchez (2011).

De las líneas presentadas en la tabla cuatro, se comentan dos que tienen coincidencia con el trabajo desarrollado:

a. Conocimientos y habilidades del profesor de Matemáticas: esta línea se identifica bajo la pregunta ¿Qué clase de conocimientos y habilidades debe tener una persona para ser un "buen" profesor de Matemáticas?, las evidencias investigativas señalan que no se trata solamente de poseer un conocimiento disciplinar, sino que el docente debe precisar de otros conocimientos como el relativo a la manera de enseñar, a la manera como aprenden los estudiantes, el conocimiento del currículo, etc.

   En ese sentido las tareas que este trabajo propone, mediadas por la Historia de las Matemáticas para el tratamiento del límite, no exponen un conocimiento matemático en el más estricto sentido (para este caso dicho conocimiento matemático se trataría de un estudio formal desde la definición *épsilon – delta* del límite) sino más bien otros conocimientos relativos a las matemáticas pero que dota de distintas herramientas y de distintos saberes al profesor, como por ejemplo el reconocimiento de distintas notaciones a través de la historia, la fenomenología del objeto matemático, los problemas históricos más representativos, etc.

b. El diseño y papel de las tareas en la Educación del Profesor de Matemáticas: en correspondencia con el autor, quien posiciona esta línea como una de las nuevas tendencias del campo de investigación, es posible afirmar que la misma ha venido teniendo un auge en los últimos años (Ponte, et al., 2009; Zaslavsky, 2007). Esta línea trata esencialmente sobre el papel que tienen las tareas en la formación del profesor, partiendo de una premisa: "lo que los estudiantes aprenden está en gran parte definido por las tareas que ellos reciben" (Hiebert & Wearne, 1993, p. 395 citados por Sánchez, 2011, p. 139), entendiendo que aquí el papel de "estudiante" se puede interpretar como el de docente en formación o incluso el de formador de profesores.

   Es bastante fácil de inferir la importancia de esta línea en el trabajo de grado, pues el trabajo mismo pretende el diseño de una secuencia de tareas para docentes de matemáticas con el fin de aportar a su conocimiento profesional.

3. El último documento estudiado para indagar sobre las líneas de investigación del campo de la Educación del Profesor de Matemáticas fue el de Guacaneme y Mora (2012) llamado "La

educación del profesor de matemáticas como campo de investigación". Este documento se compone esencialmente de tres partes. En la primera los autores advierten la necesidad epistemológica de un campo de investigación dedicado exclusivamente a la educación del profesor a partir de elementos que ya se mencionaron con anterioridad, como, por ejemplo, la limitación del sistema didáctico de la Educación Matemática (estudiante – saber matemático – profesor de matemáticas) en relación con los saberes que debe tener un docente.

En la segunda parte evidencian la existencia del campo de la EPM por medio de la presentación de las publicaciones especializadas y de la presencia del campo en eventos académicos. Aunque un ejercicio similar ya se desarrolló en páginas anteriores de este mismo subcapítulo, el trabajo de los autores aporta, sin embargo, unas evidencias llamativas e importantes de la presencia del campo de investigación a nivel nacional, las cuales se listarán a continuación:

- ✓ La realización de cuatro versiones del Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.
- ✓ En el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME) 13 se propuso una convocatoria para discutir sobre las normativas y las políticas que se han promovido en el país sobre la formación de los profesores de matemáticas.
- ✓ La propuesta de formación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas quien adopta su programa de licenciatura (Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas) como proyecto de formación y de investigación.
- ✓ En la Universidad Pedagógica Nacional se han desarrollado al menos cinco proyectos de investigación que tratan el tema de la educación del profesor de Matemáticas.
- ✓ Hasta la fecha (2012) se habían realizado seis trabajos de grado en la Maestría en Docencia de la Matemática en la Universidad Pedagógica Nacional que tratan el asunto de la educación del profesor.

Este listado de elementos a escala nacional que ponen de manifiesto la importancia que está teniendo el campo no solo al nivel global sino también al local terminan de darle pertinencia investigativa a esta propuesta de trabajo.

En la tercera parte del documento Guacaneme y Mora presentan las líneas de investigación que ellos advierten en el campo de la EPM. Es necesario anotar que los autores toman como documentos de estudio, entre otros, el de Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) y el de Sánchez

(2011), razón por la cual algunos de los asuntos de investigación que ellos advierten, están en estrecha correspondencia con los que ya han sido expuestos. A continuación, una tabla que sintetiza los objetos de estudio del campo de investigación identificados en el texto:

Líneas de investigación	Las creencias, visiones y concepciones de los profesores.
	Las actividades prácticas en el quehacer docente de los profesores.
	Las relaciones efectivas entre la teoría y la práctica
	Los conocimientos y competencias que el profesor debe desarrollar.
	Las diferencias de formación que exige el nivel educativo de desempeño del futuro profesor.
	Las estrategias y tareas empleadas en los programas de formación docente.
	Las dinámicas de formación que se dan en comunidades de práctica de profesores de matemáticas.
	La educación de los formadores de profesores.
	La educación online de profesores.

Tabla 5. Líneas de investigación de la EPM propuestas por Guacaneme y Mora (2012).

De las líneas de investigación planteadas en la anterior tabla, son de interés para el trabajo las denominadas: "Los conocimientos y competencias que el profesor debe desarrollar" y "Las estrategias y tareas empleadas en los programas de formación docente". Sin embargo, no se ahondará en ellas por cuanto esa tarea ya se llevó a cabo en la descripción del documento de Sánchez (2011).

Una vez identificadas las líneas de investigación que sustentan el proyecto, así como los referentes conceptuales que se emplearán en el diseño y análisis de las tareas, se considera que solo falta por comentar algunas relaciones halladas entre la Historia de las Matemáticas y la EPM que ayuden a darle mayor solidez a la propuesta de trabajo y, finalmente, describir la conceptualización de lo que significará en el marco de la tesis una "tarea" para la formación de un profesor de matemáticas (en formación o en ejercicio). Es precisamente a estos dos asuntos que atenderá la última parte de este capítulo.

2.3. La Historia de las Matemáticas y la Educación del Profesor de Matemáticas

En este apartado de la tesis se busca dilucidar la existencia (o no) de relaciones entre la HM y la EPM entendiendo que este trabajo gira, precisamente, en torno a la contribución del conocimiento del profesor de matemáticas a partir de la utilización sistemática de la historia. Para ello, se inicia distinguiendo sucintamente entre las relaciones HM – EPM y HM – EM (Educación Matemática) pues comportan grandes diferencias las cuales vale la pena describir, so pena de no ser exhaustivo, dado que tal comparación no es el objeto principal de este subcapítulo.

2.3.1. La relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

La primera relación que se abordará es la de Historia de las Matemáticas – Educación Matemática, por cuanto ha sido bastante fértil desde hace muchos años y, en la actualidad, tiene publicaciones especializadas, estudios internacionales, etc. Al respecto de la relación HM – EM, Vidal, Quintanilla y Maz (2010) aportan un listado (tomado de Schubring, 1983) de escenarios emergentes que muestran las primeras relaciones entre ambas áreas después del movimiento denominado "matemáticas modernas" del grupo Bourbaki. Entre otros, mencionan los siguientes:

- Fundación del grupo Inter – IREM (Institutos de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas) en Francia con el objetivo de emplear la HM en los procesos de enseñanza.
- Grupo internacional de estudio sobre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas (HPM) como reunión en el marco de los eventos ICMI.
- Publicación de trabajos sobre la historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática.

Aunque en el listado original se reseñan un par de elementos más, se considera que los tres anteriores demarcan bien el inicio de la relación fructífera HM – EM. Dado que no se pretende aquí realizar una descripción de la evolución que ha tenido el vínculo entre estos dos campos del conocimiento a través de los años, se presenta a continuación una revisión más reciente entre los nexos que existen en la actualidad basado en los aportes de Guacaneme (2016) quien en su tesis doctoral hace un reconocimiento muy completo al respecto, así como en el documento de Gómez y Guacaneme (2013) desde el cual hacen una aproximación breve al estado del arte de la relación HM – EM. Después de una revisión de los dos documentos mencionados, los resultados sobre las evidencias de la relación HM – EM son principalmente:

1. Existen al menos 14 números de revistas académicas que especializaron su contenido en la HM – EM.
2. Se encontraron al menos dos revistas especializadas en la relación HM – EM.
3. Se han realizado al menos cuatro inventarios bibliográficos a nivel internacional para documentar la relación HM – EM.
4. Fueron reportados al menos 350 artículos que tratan la relación HM – EM en distintas revisas especialiadas.
5. Se hallaron 15 libros que estudian la relación en cuestión.
6. Se advirtió la realización de, como mínimo, 22 eventos académicos que han tratado específicamente la relación estudiada.

Como resulta manifiesto, las evidencias de la relación HM – EM son numerosas y van en un creciente aumento. Ahora bien, la intención de exponer someramente la relación HM – EM no es otra más que compararla con la relación HM – EPM la cual se describirá a continuación.

2.3.2. La relación Historia de las Matemáticas – Educación del Profesor de Matemáticas

Para estudiar la relación HM – EPM a partir de sus evidencias factuales, lo primero que se debe mencionar es que es posible el abordaje de tal estudio a partir de muy diversas miradas. Es necesario recordar que, cuando se estudia en el campo de la EPM, el sistema didáctico sobre el cual se sustenta, se ve modificado y aparecen distintos *planos*[4] en los cuales el papel del docente se transforma. Así, es posible ahondar en la relación HM – EPM desde: (a) la visión del conocimiento profesional del profesor, (b) la formación de los profesores (aludiendo a las normativas, políticas, formulaciones curriculares, etc.) y (c) la educación del formador de profesores (Guacaneme, 2016).

Como ha sido señalado a lo largo del documento, este trabajo pretende aportar al conocimiento profesional del profesor, razón por la cual solamente se explorará dicha perspectiva a la luz de identificar la relación HM – EPM.

[4] Empleando el término de Guacaneme (Guacaneme y Mora, 2012; Guacaneme, 2016).

A partir de lo identificado por Guacaneme (2016) en su tesis doctoral, se logra evidenciar que las relaciones entre la HM y la EPM son, en cantidad documentada, mucho menores que las de la HM-EM; así, por ejemplo, son registrados los siguientes hechos[5]:

1. 7 artículos que tratan el tema de la HM en el *Journal of Mathematics Teacher Education* (que ha publicado más de 400 artículos a lo largo de su existencia).
2. En el libro, producto del "*15th Study*" del ICMI sobre la EPM, solamente en dos de los capítulos se hace referencia a la HM (de un total de 30 capítulos).
3. Solamente cuatro capítulos del *Handbook* sobre la EPM versan sobre la HM de forma primaria (de un total de 60 capítulos que componen todos los volúmenes del *Handbook*).
4. Se indica la existencia de al menos una investigación de profesores orientales (Li, Huang y Shin, 2008) que propenden por el estudio de la Historia de las Matemáticas, en un curso electivo, relacionado estrechamente con la pedagogía de las matemáticas.

Al contrastar lo escrito en esta sección y en la anterior (2.3.1), se revela -como ya se comentó- la desigualdad que hay entre las relaciones HM-EM y HM-EPM. Pero como si esto no fuera suficiente, se hace necesario indicar también que, para el anterior listado, el papel de la HM no se adopta en una forma medular, esto es, sin hacer que la Historia haga parte fundamental de la discusión sobre el conocimiento del profesor (Guacaneme, 2016).

En consonancia con lo anterior, Furinghetti (2007) reseña algunas investigaciones en la EPM que se han servido de la HM pero, aunque tampoco son muchas en número, la autora comenta una conclusión que resulta alentadora para continuar en la realización de este tipo de trabajos, y es que la preparación de los docentes sí se ve modificada positivamente después de hacer un uso de la HM con fines formativos, entre otras porque transforma las concepciones que de los objetos matemáticos tienen los profesores, además de darles un sentido cultural y social específico.

Aunque el panorama de las evidencias sobre las relaciones HM – EPM no es muy esperanzador en cantidad de aportes académicos, esa exigua relación sí demarca una idea que se trasluce relevante en la realización de este trabajo, por cuanto le sirve como un potente acicate: los nexos HM – EPM se constituyen como un campo fértil de exploración sobre el cual vale la pena indagar y examinar con la convicción (no ingenua) de impactar en forma provechosa la formación docente.

[5] Aunque no se listan todos los hallazgos que son documentados, sí se mencionan los que se consideran principales, pues, aquellos que quedaron por fuera, no parecen modificar sustancialmente el panorama general ni tampoco amplían la lista de una forma notable.

Si bien la documentación relativa a la relación HM – EPM no es particularmente numerosa, lo cierto es que hay algunos documentos que plantean algunas posturas sobre la utilización de la HM en la educación del profesor los cuales serán útiles para conceptualizar y comprender el trabajo ulterior de esta tesis. En particular se emplearán dos textos que tratan elementos importantes para la demarcación de este apartado del marco teórico, a saber:

a. En primer lugar, Guacaneme (2011) advierte la HM como un conjunto de potenciales herramientas que pueden favorecer el conocimiento del profesor de matemáticas, tales artefactos[6] los clasifica así: (i). Visiones de la actividad matemática: asunto que alude a la perspectiva de la actividad matemática, la cual está permeada de conjeturas, errores, argumentaciones y otros procesos que no siempre se evidencian cuando se muestran los resultados formales de las matemáticas. (ii). Competencias profesionales: aquí refiere al desarrollo de competencias de un profesional (lectura, escritura, análisis, etc.) y finalmente (iii). **Visiones de los objetos matemáticos**, sobre el cual se centrará la atención dado que es precisamente esta la utilización que se le pretende dar a la Historia en este trabajo. Esta herramienta se ocupa del estudio de distintas representaciones, notaciones, definiciones, problemas, preguntas, de un objeto matemático en cuestión así como de sus posible correlación con otras áreas del conocimiento, es de esta manera que será entendido el trabajo de los capítulos siguientes de este trabajo, el uso de la Historia de las Matemáticas para tener visiones de un mismo objeto matemático (el límite) de manera que tales perspectivas incidan eficazmente en la formación del profesor.

b. Una vez aceptado el papel de la HM en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas, Bruno D'Amore advierte dos deberes que tiene el profesor respecto al uso de la Historia en su quehacer docente, uno de ellos es el de "efectuar una Transposición didáctica, de modo de no convertirse en un mero reproductor o "pasador de materias" tal como se le mostraron en su formación." (D'Amore, 2004 citado por Vidal, Quintanilla y Maz, 2010, p. 12). Si se lee entre líneas este deber que plantea D'Amore, lo que se está proponiendo es un uso formativo y transversal de la Historia para el profesor y no su

[6] Entendiendo artefacto en el sentido de Verillon y Rabardel (1995, citados por Guacaneme, 2011) según el cual, un artefacto puede convertirse en herramienta cuando el usuario del mismo es capaz de emplearlo para sus fines.

utilización como asunto meramente anecdótico (o informativo) que sirva para la introducción o la conclusión de un tema matemático escolar.

Hasta aquí, resumiendo, lo que se ha buscado en este apartado del documento ha sido identificar algunas relaciones entre la HM y la EPM (en particular en lo que se refiere al desarrollo del conocimiento profesional del profesor). En tal búsqueda, se advierte que los resultados no son muchos ni muy extensos, lo cual lejos de ser impedimento para el trabajo, por el contrario, se establece como un impulso más para su realización.

No obstante, aunque las relaciones entre HM y EPM no han sido objeto de indagación muy profunda al parecer, sí se lograron dilucidar perspectivas de uso de la HM en la formación de profesores, estas fueron las reseñadas en los párrafos anteriores (a) y (b), que aluden a Guacaneme (2011) y a D'Amore (2004 citado por Vidal, Quintanilla y Maz, 2010). Es precisamente estas menciones de uso de la HM en la formación del docente las que, finalmente, se constituirán como referentes conceptuales para el análisis de las tareas diseñadas en este trabajo de grado.

Para terminar este subcapítulo, se mencionan a continuación tres ejemplos de investigaciones (seleccionados sin ningún criterio de discriminación específico) que han empleado la Historia de las Matemáticas como eje transversal de propuestas específicas para la formación de profesores, con el fin de ilustrar algunos posibles usos de la Historia en la educación del docente.

1. Furinghetti (2007) plantea un caso de utilización de la HM en la EPM, la idea central de su investigación consiste en que un grupo de profesionales en ciencias (principalmente profesionales en matemáticas y, en todo caso, no en educación) dedicados a la docencia, diseñaran una secuencia de aprendizaje de álgebra para estudiantes de secundaria. Para ese fin se les proponen diversos cursos, uno de los cuales es de HM, y a partir del mismo se reconoce que los participantes van adquiriendo de forma sistemática distintas herramientas que les permiten la creación de su secuencia de aprendizaje, habiendo allí un reconocimiento explícito por parte de la autora acerca de la transformación que tuvieron los docentes en las concepciones epistemológicas que tenían de las matemáticas y, en consecuencia, la modificación de su manera de enseñar.

2. Mora, Guacaneme y Jiménez (2016) reportan una experiencia de uso de la HM en la EPM a partir de usar a la primera como un organizador curricular para la gestión de un espacio académico de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra en el marco del proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas (Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá). En ese sentido realizan, por ejemplo, un

contraste entre si algunos hitos históricos de distintos objetos propios de la Aritmética y el Álgebra (v.g. sistemas de numeración, estudio de fracciones, aparición de la incógnita en el álgebra, etc.) coinciden con lo solicitado en los estándares de educación gubernamentales. También, entre otras, efectúan analisis con los docentes en formación inicial sobre las ventajas y desventajas de llevar al aula distintas representaciones históricas de un objeto matemático y una revisión de si tales representaciones son reportadas en libros de texto escolares. En este caso la HM en la EPM genera una transformación de lo que Guacaneme (2011) denomina la "visión de los objetos matemáticos" procurando así, como ya se ha mencionado antes, la innovación en el proceso de Enseñanza – Aprendizaje por parte del educador con base en la ampliación de su conocimiento didáctico.

3. Chaves (2008), por su parte, describe una experiencia de un espacio académico de HM en el que tenía como fin no solo revisar, estudiar y analizar las condiciones en las cuales fueron cambiando distintos matemáticos a través del tiempo, sino, también, que los estudiantes lograran crear secuencias de aprendizaje para sus clases (talleres, guías, actividades, etc.) en los cuales la HM fungiera como recurso metodológico. De las diversas reflexiones que reporta el autor posteriores a su práctica, se rescata que sus estudiantes al final del seminario advirtieron que no importa la teoría didáctica que se siga en las clases, con unas buenas ideas y posturas se puede implementar la Historia de las Matemáticas como un recursos determinante en el aprendizaje de los estudiantes por cuanto permite miradas distintas de un mismo objeto.

2.4. El diseño de tareas para profesores

En esta sección del trabajo se comentarán esencialmente dos aspectos: primero, la conceptualización de lo que se entenderá en este trabajo por "tarea" en el marco de la educación del profesor y segundo, la clasificación que será empleada en la tesis para categorizar las tareas diseñadas.

Frente a la definición que se adoptará de tarea en este trabajo, se hace acopio esencialmente de la propuesta de Tirosh (Tirosh & Wood, 2008) quien realiza una discusión de lo respectivo en la introducción del segundo volumen del *Handbook* sobre la Educación del Profesor de Matemáticas. Específicamente la autora comenta que las tareas son, ante todo, un tipo de herramienta cuyo fin es la formación del profesor desde distintas perspectivas posibles (la formación del profesor en relación con el contenido matemático, el conocimiento pedagógico, el conocimiento del currículo, etc.). Así mismo, señala que, en la utilización de una tarea, además de la tarea misma, el "proceso" también reviste particular importancia, entendiendo aquí que el proceso es la manera específica en la cual una tarea es usada.

Aunque no hace parte de la definición de tarea, parece importante subrayar aquí que la autora esclarece que las tareas son el tipo de herramienta más utilizado en la EPM (aclarando que hay otras opciones como por ejemplo el estudio de casos o la investigación en la EPM). Este hecho, aunque pueda mostrarse como menor, indica la idoneidad de la tesis y de su ubicación en un cuerpo de referentes teóricos; pero, por otra parte, deja una invitación muy clara al lector interesado en realizar un trabajo que persiga fines similares a los del presente pero que se sirva de otro tipo de herramientas.

Una vez se esboza la acepción de tarea en el *Handbook* mencionado, la autora ofrece, entre otras, la relación de algunos tipos de tareas desarrollados en la EPM, a saber:

1. Tareas escritas
2. Ejemplos de situaciones particulares
3. Herramientas manipulativas
4. Máquinas

Del anterior listado, este trabajo se encargará -entre otras- de las llamadas "tareas escritas"[7]. Al respecto, en el mismo volumen del *Handbook*, hay un par de autoras (Watson & Sullivan, 2008) que emplean este tipo de tareas en su investigación y reseñan los propósitos que su uso puede tener en el marco del desarrollo del conocimiento profesional del profesor, específicamente menciona los siguientes:

1. Para informar a los docentes acerca del alcance e intención de posibles tareas en el aula.
2. Para proveer de oportunidades para aprender más acerca de las Matemáticas.
3. Para proveer de una visión sobre la actividad matemática.
4. Para estimular e informar la formación de los maestros en relación con el aprendizaje de sus estudiantes.

Algo significativo que mencionan Watson y Sullivan (2008) en relación con el listado anterior es que tales propósitos no son excluyentes entre sí, por el contrario, el diseño de una tarea tiende a combinar varios de estos objetivos, como puede ser el caso de las tareas fruto de este trabajo de grado.

[7] Es importante resaltar que las tareas escritas no son el único tipo de tareas que habrá en el trabajo, tal y como se verá más adelante cuando se relacione el sistema de clasificación empleado para las mismas. Sin embargo, las tareas escritas sí fueron la base para la construcción de todas las demás

Por otra parte, también es conveniente comentar algunas posturas expresadas por Zaslavsky (2007) en relación con las ventajas que trae la implementación de tareas en la EPM, por ejemplo refiere asuntos como: el desarrollo de interconexiones, múltiples significados y distintas representaciones de los objetos matemáticos, el desarrollo de técnicas y procedimientos para la resolución de problemas propuestos, la reflexión crítica acerca de la pertinencia de los temas estudiados en la tarea y su aparición en el currículo, la ampliación de algunos conocimientos propios de su práctica docente como la comprensión de los errores y las dificultades que presentan los estudiantes, la relación que hay entre un tipo de tarea específica y el pensamiento que dicha tarea evoca en los discentes, etc. Razones que, en suma, acicatean las ideas del trabajo de grado y resaltan su pertinencia.

Una vez efectuada la conceptualización de las "tareas" y de su posible incidencia en la formación del profesor de Matemáticas, se pasa ahora a exponer la clasificación que se utilizó para las tareas. Es importante señalar que, en principio, aunque las definiciones de Tirosh y Wood (2008) satisfacían las necesidades del trabajo, su sistema de clasificación de las tareas se quedaba corto a la luz de los requisitos de la tesis, por lo cual era conveniente encontrar otra manera de clasificar las tareas o proponer una clasificación propia.

Frente a tal dicotomía se optó finalmente por buscar una clasificación distinta (por cuanto se trató de elaborar un sistema propio, pero fue evidente que ese trabajo demandaría mucho más tiempo del que se podía emplear en tal empresa) y adaptarla a las necesidades particulares de la tesis. La clasificación hallada, y que será descrita a continuación, se encontró faltando muy poco para concluir el trabajo de grado, por tal razón cuando se utilice este esquema clasificatorio en el capítulo de resultados, se observará que hay categorías en las cuales no se profundizó debido a que el número de posibilidades de tareas se expandió bastante, pero en un momento culminante del proyecto en el que, para el grupo de trabajo, era improcedente darse a la tarea de elaborar todas las posibles tareas que aparecieron a causa de la clasificación utilizada.

La siguiente ilustración (tomada de Guacaneme, 2016) muestra el sistema de clasificación empleado en este trabajo para las tareas, inmediatamente después de la imagen se detalla una explicación de la misma.

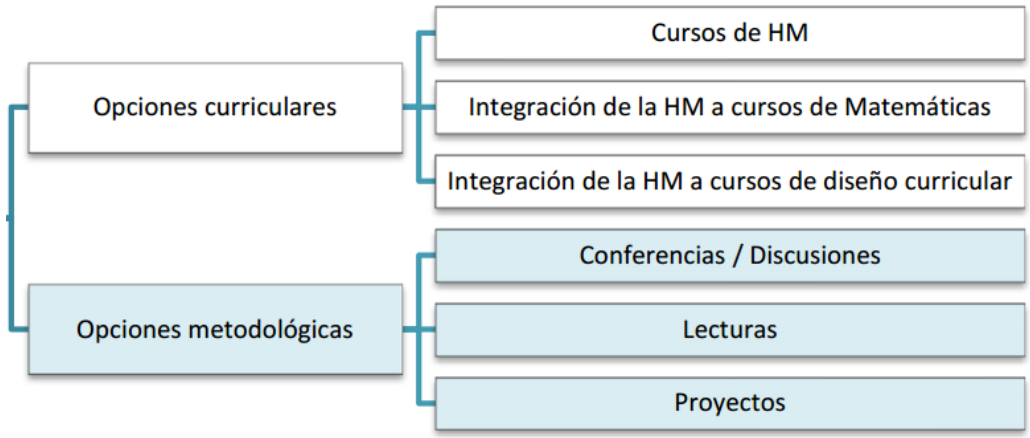


Ilustración 4. Clasificación para las tareas, tomada de Guacaneme (2016).

El esquema de la anterior ilustración aparece cuando el autor está explicando en su tesis doctoral la manera cómo se lleva a cabo la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los docentes y así es que plantea dos opciones, una que denomina **curricular** y otra que llama **metodológica**.

Para el caso de la primera opción, se trata del abordaje serio que hace el profesor de Matemáticas (o el formador de profesores) sobre la HM en cursos de Historia, o en cursos disciplinares, pero atravesados metodológicamente por un uso sistemático de la HM, o en cursos de diseño curricular mediados por tareas en las que se vea involucrada la historia. En lo que respecta a la segunda opción, son acciones específicas del profesor (o del formador de profesores) para acercar la HM al quehacer docente bien sea a través de conferencias o discusiones las cuales, eventualmente, pueden generar espacios de seminarios, también se encuentra un estudio sistemático de lecturas y, finalmente, la realización de proyectos específicos.

Puntualmente en este trabajo de grado, se adoptaron las opciones metodológicas (conferencias – lecturas - proyectos) aunque, entendiendo que es posible combinar los dos tipos de opciones y generar nueve clases de categorías. Con base en esta clasificación aceptada, se describe a continuación, sucintamente, en qué consiste cada una de las opciones metodológicas:

- Conferencias: esta opción alude en esencia a presentaciones que normalmente son seguidas por espacios de discusión a propósito de la exposición hecha y usando las lecturas previas que se hayan podido efectuar para la conferencia en cuestión.

- Lecturas: como es muy fácil de inferir por su nombre, esta opción apunta a la realización de lecturas metódicas sobre el asunto de interés. Tales lecturas pueden estar seguidas por la resolución de talleres, tareas, preguntas o ejercicios relacionados. Así mismo, se considera que las Lecturas pueden ser sobre fuentes sugeridas, fuentes primarias o fuentes originales.

- Proyectos: posiblemente esta sea la categoría más amplia; en general propende por muy distintos tipos de actividades como por ejemplo: estudio de citas y de sus contextos históricos; dramatizaciones y representaciones teatrales de eventos propios de la Historia de las Matemáticas; la escritura de ensayos a partir del estudio de fuentes documentales; la ubicación del profesor en la calidad de estudiante al enfrentarlo a problemas históricos que, entre otras, refieran a notaciones o algoritmos poco usuales, etc.; la construcción de memorias individuales o colectivas en relación con asuntos matemáticos; consultando sobre la etimología de palabras matemáticas, etc.

Así pues, cuando se presenten las tareas diseñadas como fruto de la realización de este trabajo (capítulo 4) la clasificación empleada corresponderá a las tres opciones presentadas.

Para concluir el capítulo, y haciendo un breve resumen del mismo, se puede afirmar que se encuentra claro el sustento teórico que da pie para empezar a presentar los resultados del trabajo, específicamente se tiene que: la elaboración de la tesis se hace en el marco del campo investigativo de la Educación del Profesor de Matemáticas, en particular empleando el enfoque del Conocimiento Matemático para la Enseñanza propuesto por Ball, et al. (2008), siendo este mediado por la Historia de las Matemáticas (habiendo documentado las relaciones HM – EPM) y atendiendo a la definición de tarea que plantean Tirosh y Wood (2008) y a la clasificación de Guacaneme (2016).

Con todo lo anterior, los dos siguientes capítulos ya dejan ver el trabajo realizado en términos del diseño de las tareas, en particular el siguiente se trata de una reconstrucción de la historia del concepto de límite.

Capítulo 3. Reconstrucción propia sobre la Historia del Límite

3.1. Introducción

Este capítulo busca la realización de una fundamentación histórica acerca del concepto de límite a partir de la literatura encontrada al respecto (artículos, capítulos de libro, tesis, etc.). Para ello, lo primero que se hará es describir cómo fue el proceso de búsqueda de la literatura empleada, a continuación, se presenta un resumen de cada uno los documentos haciendo énfasis en las ideas centrales que se proponen alrededor de la historia del límite (i.e. hitos y momentos más relevantes). Seguidamente se realiza una identificación de los hitos principales que fueron ubicados en la historia, lo cual da pie para, finalmente, plantear una reconstrucción propia de la historia del límite a partir del análisis efectuado.

Cabe resaltar aquí que este capítulo nace de la necesidad de una revisión histórica para poder emprender la labor de diseñar tareas mediadas por la HM.

3.2. Revisión documental

La búsqueda de los documentos se efectuó en distintas bases de datos (Springer, Dialnet, Scopus, etc.) y repositorios (de la Universidad Pedagógica Nacional y Funes de forma principal), esencialmente se buscó documentación que fuera relativa de forma exclusiva a la historia del concepto de límite, aclaración que es pertinente por cuanto gran parte de la literatura hallada refiere a aspectos didácticos y pedagógicos a propósito del estudio de límites. En esa medida es necesario reportar que la literatura específica de la historia del concepto que se logró encontrar no es mucha. En total se estudiaron 20 artículos de revista tanto en inglés como en español.

Durante la realización del análisis, en el cual fundamentalmente se estudiaba cada documento en la búsqueda de momentos relevantes en la historia y evolución[8] del límite, cabe destacar que los resúmenes hechos de cada uno de los documentos (como herramienta de ayuda para sistematizar toda la información recolectada) fueron sometidos a revisiones de forma y contenido varias veces, lo cual implicó una serie de distintas versiones que, finalmente, al terminar el análisis documental, tratan de

[8] Sin que el término evolución deba entenderse aquí como un mejoramiento o empeoramiento del límite a través de la historia.

reflejar una organización de los documentos como un cuerpo engranado y no como objetos aislados entre sí.

En general lo que se buscaba advertir en cada uno de los documentos eran distintos hitos o aspectos relevantes a través de la historia del concepto de límite. Por lo anterior, se presentan a continuación los resúmenes analíticos realizados de forma posterior a la lectura de cada uno de los textos y al final una tabla que recoge de forma esquemática aquellos momentos relevantes de la historia que se lograron identificar.

3.3. Resúmenes analíticos

Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. *Annals of Mathematics*. 25(1). 1-46.

El artículo hace una revisión sobre las notaciones que han tenido algunos objetos del Cálculo a lo largo de la historia (i.e. derivadas, diferenciales, integrales, etc.). En particular, tiene un apartado dedicado a los cambios de la simbología del límite. Hay que mencionar que no se van a comentar todas las transformaciones que ha sufrido la notación de límite, solamente se describirán de forma sucinta aquellas que fueron identificadas con mayor relevancia a lo largo de la historia.

La sección dedicada al límite inicia comentando que el primer reporte que se tiene para su notación es el uso de la expresión "lim.", el cual data de Lhuilier finalizando el siglo XVIII, quien en particular escribía expresiones como "$lim. q : Q$" y "$Lim. \frac{\Delta y}{\Delta x}$", tal notación fue utilizada por diversos matemáticos (Stockler, Carnot, etc.) e incluso es la notación que emplea Cauchy; sin embargo, él agrega el uso de paréntesis para designar todos los valores que la función encerrada en tales paréntesis puede tomar cuando la variable se aproxima a cero. Así, por ejemplo, escribe "$lim. (sin. x)$" que tiene un único valor 0, mientras "$lim. \left(\left(\frac{1}{x}\right)\right)$" admite dos valores. Con el paso del tiempo "lim." pasó a convertirse en "lim".

Otro hito importante que se encuentra en el artículo refiere a la notación empleada por Weierstrass en el siglo XIX, época en la cual emerge la necesidad de mencionar a qué valor se está aproximando el límite. En ese sentido se empieza a usar la expresión "$\mathrm{Lim}_{x=a}$" para expresar "el límite cuando x se aproxima a a", también se encuentra "$\lim_{n=\infty} p_n = \infty$". Esta última forma de escritura traería problemas más adelante que implicarían un nuevo cambio.

Hacia 1905, en Inglaterra, J.G. Leathem empieza a utilizar una flecha en la escritura del límite, para representar la aproximación al límite. Este cambio en la notación llega incluso a Hardy quien en uno de sus textos escribe la expresión “$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$” y a propósito del uso de la flecha resalta su importancia especialmente cuando infinito es a lo cual se aproxima el límite, pues comenta que en la notación anterior ($n = \infty$) se asume como si cualquier cosa fuera igual a infinito.

Finalmente, Carey hace una modificación a la flecha del límite, así, emplea “⇀” para indicar que el límite “tiende por abajo” y “⇁” cuando el límite “tiende por arriba”.

Fisher, G. (1978). Cauchy and the infinitely small. Historia Mathematica. 5. 313 – 331.

El análisis de Cauchy se fundamenta en lo que él llama variables que decrecen indefinidamente o variables con límite cero y establece su teoría en el marco del análisis estándar y del análisis no estándar (sin que ello supusiera incoherencias). En esta última teoría se consideran los números infinitos, los cuales son los recíprocos de los infinitesimales “no cero”. Este sistema, denominado de Hiperreales, es consistente[9] igual que el de los números reales. Robinson (pionero del análisis no estándar en 1966) comenta que para Cauchy las cantidades infinitamente pequeñas no son números ni variables sino más bien estados de variables cuyo límite es cero.

El artículo señala que la importancia histórica de Cauchy es que, por un lado, instaura la teoría de límites, y por otro la de las cantidades infinitamente pequeñas (y grandes), dándole particular valor a la variable la cual tiende al límite cero. Sin embargo, el mismo Cauchy parece no tener claro ese concepto de variable y Robinson comenta que el primero terminó argumentando con cantidades infinitamente pequeñas (CIP) tratadas como infinitesimales en el sentido actual.

Un dato importante que comenta el artículo es que Cauchy en su libro de análisis nunca define el límite de funciones, solamente define el límite de variables (para él una función es una relación entre variables y una variable es una cantidad para la cual se puede pensar que toma sucesivamente un número de diferentes valores). Esto implica que una CIP no significa que sea el límite de una función en el marco de su teoría, más bien podría tratarse del límite de una variable.

Grabiner, J. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly.* 90 (3). 185 – 194.

El artículo inicia resaltando que el Cálculo desde una perspectiva histórica aborda asuntos sobre velocidades, distancias, áreas y tangentes; en ningún caso de desigualdades o inecuaciones por lo cual la definición rigurosa y formal del límite carece por completo de la intuición que estimuló su aparición.

---

[9] Esto es, sin que sea un conjunto que presente contradicciones en sí mismo.

No se toman más aportes específicos de este artículo por cuanto el foco de su atención radica en el estudio de series y sucesiones y cómo esta teoría de las matemáticas ayudó a ir acotando la definición formal de límite. En ese sentido son pocos los aportes históricos que se identifican en el cuerpo del texto.

Jones, C. (1985). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las matemáticas. En *Primer Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de las Matemáticas.* Universidad Nacional Autónoma de México.

El artículo hace una revisión por lo que el autor llama los *primeros fundamentos de las matemáticas* (para distinguirlos de los fundamentos propuestos por Cantor, Rusell, etc., y que el autor denomina los *segundos fundamentos)*. En esa vía plantea *grosso modo* las dificultades que tuvieron los griegos al abordar lo continuo y lo discreto. El primero de tales fundamentos es el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables y el otro fueron las paradojas de Zenón. El autor las explica brevemente: la primera supone que el continuo se puede dividir infinitamente (Aquiles y la tortuga); la segunda asume que el continuo se compone de indivisibles (paradoja de la flecha).

Un aporte importante del artículo en relación con la investigación se presenta cuando el autor muestra la definición de continuo que Aristóteles expone en su libro *Física:* "el continuo es una subdivisión de lo contiguo (esto significa *estar en sucesión y tocándose)*: cosas se llaman continuas cuando los límites del tocamiento de cada uno se convierten en uno y lo mismo y son, como la palabra implica, contenidos uno en otro: la continuidad es imposible si estos extremos son dos". Aristóteles emplea esta definición física para construir una matemática.

Dice que los indivisibles no tienen partes. En particular no pueden tener extremos (porque estos serían una parte), por tanto, no pueden ser contiguos pues no tienen límites para estarse tocando, por ende, no son continuos y entonces el continuo no puede estar hecho de indivisibles. Sin embargo, luego menciona que el continuo sí tiene partes y estas pueden ser divididas infinitamente. Así entonces define *matemáticamente* el continuo: "por continuo entiendo aquello que es divisible en divisibles que son infinitamente divisibles (…)". Luego de esta definición ejemplifica algunas ideas que él entiende por continuas: tiempo, movimiento, peso, longitud, área y volumen. Por ejemplo, si el continuo no puede estar hecho de indivisibles (porque sería contrario a la definición) entonces el tiempo no puede componerse de *momentos*, ni las longitudes podrían constituirse de puntos, ni las áreas podrían tener líneas o puntos. Esta idea, para el autor, marca la gran diferencia esencial entre los *primeros fundamentos* y los *segundos fundamentos,* pues, por ejemplo y según lo anterior, para las matemáticas griegas las líneas no pueden tratarse como si estuvieran hechas de puntos; mientras que en la actualidad ocurre todo lo contrario.

"La conclusión de Aristóteles que las líneas no están hechas de puntos es el resultado de argumentos filosóficos, pero influencia la manera en que se hacen las matemáticas y, por tanto, es importante para la historia de las matemáticas" (Jones, 1987, p. 7).

Laugwitz, D. (1987). Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. Historia Mathematica. 14. 258 – 274.

Se describen las concepciones que Cauchy tiene para las denominadas *cantidades infinitamente pequeñas* las cuales proveen de teoremas coherentes entre sí en el marco del análisis matemático cuando son estudiados desde los demás conceptos que Cauchy plantea. Así, se hace una reconstrucción de lo que él entiende por continuidad de funciones, límites y convergencia (de series), series binomiales, diferencial y derivada, integral, integración de series y polinomios de Taylor.

Usualmente muchos de los resultados que Cauchy obtiene al respecto se consideraron erróneos por los matemáticos de la misma época, sin embargo, los autores presentan la pertinencia de los resultados cuando se emplea exclusivamente la teoría desarrollada por el mismo Cauchy.

En cuanto a los límites el artículo reporta la definición que propone Cauchy: "cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de manera que se termina diferenciando de este en un valor tan pequeño como se desee, este último valor fijo es llamado el *límite* de todos los otros. Así pues, por ejemplo, un número irracional es el límite de diversas fracciones las cuales proporcionan más y más valores aproximados del mismo".

Grattan – Guiness (1991). ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? Mathesis 7(3). 363 – 387.

El artículo resume los principales aportes que se dieron en el desarrollo del Cálculo desde 1660 hasta 1900 a través de los trabajos de los autores más destacados en cada época (i.e. Newton, Leibniz, Lebesgue, Zermelo, etc.).

Inicia comentando sobre los aportes de Newton y Leibniz. Una idea importante que señala el autor es que, antes de quienes son considerados como padres del Cálculo, esta rama de las matemáticas se ocupaba casi exclusivamente por la determinación de valores específicos para funciones (i.e. puntos de optimización, puntos de tangencia, etc.) y gracias a la comprensión que ellos desarrollan del Cálculo, el mismo pasa a ocuparse del hallazgo de nuevas funciones o relaciones a partir del uso de una función determinada, su derivada o su integral.

En lo que corresponde a los límites, un siguiente aporte relevante está cuando se referencia el trabajo de Lagrange, en el cual se explica que él tiene un afán por formalizar el Cálculo convirtiéndolo en reglas formales de álgebra, en ese camino demuestra que casi cualquier función tiene una expansión en series de Taylor. Al reescribir las funciones como polinomios entonces lleva al terreno del álgebra los problemas del Cálculo y surge en ese momento la inquietud de si pueden los cálculos necesarios en ese trabajo realizarse sin tener que recurrir a la teoría de límites o infinitesimales. Sin embargo, lo cierto es que se menciona que Lagrange mostró que eso era posible solo en algunos casos y nada más.

La importancia del trabajo de Lagrange es que instala en el escenario matemático mundial una tradición que habría de reñir con otras dos, a saber: las teorías de límites (informal e intuitiva todavía), de diferenciales (proveniente del trabajo de Leibniz) y de series de Taylor (del trabajo de Lagrange). Esta situación desembocó en que, en 1812 en Francia (en la Escuela Politécnica de París), se decidiera dejar de enseñar límites y se retornara a la enseñanza solo de infinitesimales. No obstante, se menciona que esta situación volvería a cambiar cuando en 1816 Cauchy asumió como profesor de la Escuela Politécnica para impartir la catedra de Análisis.

A continuación, el siguiente hito tratado es el denominado *refinamiento* que Weierstrass y su escuela le dan al Cálculo instaurado por Cauchy; sin embargo, se especifica que este apartado histórico es breve y poco profundo por la dificultad que supone re armar la historia en tanto que Weierstrass publicó muy poco. Un primer refinamiento refiere al análisis multivariado: las técnicas desarrolladas por Cauchy eran útiles para una variable, pero el rigor se perdía cuando se trataba de dos o más variables, son los *weierstrassianos* quienes detallan ese tipo de casos. Un segundo refinamiento trata sobre el simbolismo (épsilon - delta) que se empieza a desarrollar desde la época de Weierstrass para seguir dotando de rigurosidad y sencillez la teoría del Cálculo. Finalmente, otro de los refinamientos relevantes en el caso de los límites, hace referencia al perfeccionamiento que se le dio a la teoría, por ejemplo, haciendo distinción entre el límite superior y el mínimo límite superior y lo que ello implica; también menciona que en ese momento se empezó a distinguir el uso entre los símbolos " $<$ " y “$\leq$ " a la hora de trabajar con las inecuaciones que establecía la definición de límite.

En cuanto al contenido puramente histórico, el artículo termina señalando los aportes de Zermelo, en particular a lo que respecta a la necesidad de tener un axioma de elección para demostrar el teorema de Cantor. A continuación, el documento tiene dos apartados más, el primero de ellos relativo a los aportes educativos en relación con la revisión histórica efectuado, y el segundo que respecta a las perspectivas que abre el análisis presentado a través de la historia.

En cuanto a los señalamientos pedagógicos que eventualmente aporta la historia del Cálculo presentada se comenta lo siguiente (en relación con los límites):

> Para el caso de la enseñanza del Cálculo, la misma se ha permeado por una hegemonía de límites y "epsilonitis" aguda ignorando la forma diferencial del Cálculo que propone Euler (de los primeros en preocuparse por las determinaciones de coeficientes de diferenciales y más específicamente de la resolución de algunas ecuaciones diferenciales). (Grattan - Guiness, 1991, p. 11).

El artículo finaliza con algunos comentarios de experiencias propias del autor en relación con la divulgación de la Historia de las Matemáticas como herramienta para la enseñanza de las Matemáticas.

Felscher, W. (2000). The Evolution of Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly*. 107(9). 844 – 862.

El artículo inicia describiendo la definición actual de límite de una función en un punto, así como de límite de una sucesión y de convergencia de una sucesión. A propósito de eso realiza una observación en cuanto a la terminología empleada: para el caso del límite de funciones se emplean las letras ε y δ y la convergencia de una sucesión, lo cual significa implícitamente el uso de cuantificadores para cada uno de tales símbolos (letras). Por otra parte, cuando se trata el límite de sucesiones usualmente la literatura solo se sirve de las letras ε y n o N y de forma análoga el uso de "un cuantificador menos" en la definición. Esta distinción es importante porque a lo largo del documento va a estar comparando los límites entre funciones y sucesiones.

Una segunda sección del artículo reseña las concepciones que tuvo D'Alambert acerca del límite y menciona que este matemático del siglo XVIII fue uno de los más representativos de la *época dorada del Cálculo* junto con Euler y los hermanos Bernoulli. En principio menciona la definición que D'Alambert da sobre *Limite* en la *Enciclopedia* que editan junto a Diderot. Al respecto dice que:

> Una *cantidad (grandeur)* (N.A: refiriéndose a cantidad, magnitud; actualmente tal noción hace referencia a un punto de un continuo geométrico) es el límite de otra cantidad si la segunda se puede aproximar la primera más que cualquier otra *cantidad* dada que sea tan pequeña como se pueda suponer, siempre que la *cantidad* no supere a la cual se está acercando, tal que la diferencia entre la *cantidad* y su límite es absolutamente indeterminable.

> Estrictamente hablando, el límite nunca coincide y nunca llega a ser igual a la cantidad de la cual es el límite, sin embargo, este se acercará más y más tal que su diferencia será tan pequeña como uno desee.

No obstante lo anterior, D'Alambert en 1754, en un artículo acerca de la Diferencial en el cual, para la parábola $y^2 = ax$, determina geométricamente la pendiente $a/2y$ de una tangente, como el límite de la proporción $a/(2y + \varepsilon)$ cuando ε tiende a cero y concluye tal texto mencionando que parece ser claro, luego del cálculo desarrollado en el artículo, que las cantidades infinitamente pequeñas solo sirven como medio para abreviar y simplificar el trabajo del Cálculo Diferencial. Más aún, comenta que probablemente el Cálculo no asuma la existencia de tales cantidades dado que las mismas vienen a no ser más que el desarrollo algebraico del límite de un cociente.

D'Alambert continua en la conclusión de su artículo señalando que, finalmente las cantidades infinitamente grandes o pequeñas son inútiles en el Cálculo y que solo se emplea el término como una abreviación del proceso de calcular un límite específico. En ese sentido invita a no decir, como muchos geómetras lo hacen, que "una cantidad es infinitamente pequeña antes de desvanecerse o después de haberse desvanecido, pero en el mismo momento en que se desvanece" pues para qué se emplea una definición la cual resulta mucho más complicada de entender que el mismo objeto que se está definiendo. Finalmente hace la invitación a la comunidad académica para no asumir más la existencia de cantidades infinitamente pequeñas en el Cálculo Diferencial.

La postura de D'Alambert la cual, en cierto sentido, buscar una formalización del Cálculo podría coincidir con posturas como la de Weierstrass. Sin embargo, lo que en realidad reflejan es que el trabajo que se hacía con los límites para ese momento no tenía un marco conceptual sólido que lo respaldara todavía.

A continuación, una tercera sección del artículo está dedicada a Bolzano. Al respecto no es mucho lo que se comenta. Inicia reseñando algunos aspectos de su bibliografía en particular de su formación como doctor en Matemáticas y sacerdote de la iglesia, hecho que viene a ser relevante más adelante, pues de cierta forma Bolzano se aisló de la comunidad matemática (sin que le dejara de interesar el trabajo de las Matemáticas) y se insertó de lleno en su trabajo religioso.

En 1817 Bolzano publica un pequeño libro cuyo objetivo central es la demostración del teorema del valor intermedio. En ese libro Bolzano propone la siguiente definición de continuidad de una función f en un argumento x:

> De acuerdo con una explicación correcta, la expresión ‘que una función f(x) cambia por la ley de continuidad para todos los valores de x dentro o fuera de ciertos límites’ significa exactamente esto: si x es tal valor, entonces la diferencia f (x + w) - f(x) puede hacerse menor que cualquier magnitud dada si sólo w se puede suponer tan pequeño como se desee.

Bolzano solo emplea su definición en dos secciones del libro:

1. Cuando demuestra que si f y φ son funciones definidas y continuas en una vecindad de un número α y si $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ entonces $f(\alpha + w) < \varphi(\alpha + w)$ probando que w es suficientemente pequeño.
2. Cuando muestra que cualquier función polinómica es continua.

Del trabajo de Bolzano se reseñan esencialmente dos asuntos. El primero es la “limpieza” y la claridad de los conceptos que expone en su texto y que no distan demasiado de los usados actualmente. Lo segundo por comentar es que, todo indica (como ya se mencionó antes) que, dado el trabajo religioso de Bolzano, este estuvo alejado de contacto con otros matemáticos durante la elaboración de su libro. En esa medida su publicación fue desconocida hasta 30 años después de su muerte.

A continuación, el artículo dedica la siguiente sección a Cauchy, la cual resulta ser la más extensa de todo el documento y se divide en varias subsecciones. Dada la extensión de este apartado, se mencionan las ideas más relevantes del mismo:

1. En la mayoría de libros de texto actuales se emplea indistintamente la palabra *variable* sin que exista un objeto matemático llamado por ese nombre. Más bien se trata de un objeto lingüístico que, en el marco de las matemáticas, ayuda a denotar expresiones. Esto se menciona porque antes de hablar de límites, Cauchy primero hace una definición de *cantidad variable*.
2. Variable según Cauchy: El nombre variable es dado a una cantidad la cual se asume que puede tomar varios valores diferentes y de forma sucesiva uno tras otro. Tal cantidad se denota por una letra tomada de las últimas letras del alfabeto.
3. Límite según Cauchy: si los valores asignados sucesivamente a la misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, tal que la diferencia de estos sea tan pequeña como se desee, entonces el último valor es llamado su límite.
4. En particular hay variables cuyo límite es cero: si los sucesivos valores numéricos de una variable decrecen indefinidamente, de modo que disminuyen por debajo de cada número dado, entonces esta variable llega a ser lo que uno llama *infinitamente pequeña* o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de este tipo tiene límite igual a cero.

Un asunto que llama la atención al comparar los trabajos de D'Alambert y de Cauchy es que los dos inician con una noción de límite desarrollada por la aproximación, la cual es concebida muchas veces como un proceso matemático que toma un lugar en el tiempo o que implica movimiento.

Lo que resta del artículo es una revisión que los distintos autores (D'alambert, Bolzano y Cauchy) hacen sobre la definición de funciones continuas, sirviéndose de la noción de límite que cada uno desarrolla, asunto que no se considera de particular relevancia en este resumen.

Pourciau, B. (2001). Newton and the Notion of Limit. *Historia Mathematica,* 28, 18-30.

El artículo busca dar un panorama sobre la definición que tiene Newton acerca del límite la cual, para el autor, no ha sido bien explorada y comprendida por lo que, en consecuencia, siempre se ha *subestimado* el trabajo de Newton frente a ese respecto.

Se inicia haciendo una comparación entre algunas concepciones de Newton y de Cauchy (específicamente de Cauchy porque el autor afirma que para el grueso de la gente es el matemático que en apariencia tiene más claridad sobre el concepto de límite). Una primera defensa del trabajo de Newton reporta el autor cuando cita un extracto del cierre de los Principia en el que se está discutiendo sobre las razones últimas, a saber: "Estas razones últimas… No son actualmente razones de cantidades últimas, sino límites… Que pueden acercarse tan estrechamente que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada" (Traducción libre). Para el autor, este extracto refleja ya un argumento del tipo *épsilon,* aunque sea un poco incipiente, lo cierto es que evidencia un conocimiento lúcido de Newton sobre los límites.

Para vislumbrar con claridad la comprensión del proceso de límite que Newton tenía, hay que revisar, según el autor, esencialmente tres de los once lemas que se proponen en los Principia: el lema I que trata sobre el límite de una diferencia, el lema II sobre la existencia de la integral y el lema XI sobre la segunda derivada.

En el Lema I el cual dice: "las cantidades, y también las proporciones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden constantemente a la igualdad, y que antes del final de ese tiempo se acercan tan cerca unas de otras que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada, se vuelven finalmente iguales" (traducción libre), aunque no son del todo explicitables las concepciones que Newton pone en juego aquí, lo cierto es que se presenta una idea clara de límite: que una cantidad tiene límite cero si esta puede ser volverse menor que cualquier distancia dada. Una idea sin confusiones en el sentido de no aludir a indivisibles o *fantasmas de cantidades desvanecidas.*

En cuanto al Lema II esencialmente el mismo se trata de considerar una curva y algunos rectángulos inscritos y circunscritos a la curva. Aunque Newton lo hace en algunos casos, con la terminología actual se puede entender que el área de los rectángulos es menor que cualquier rectángulo dado y concluye, gracias al lema I y en notación moderna que:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = A = \lim_{n\to\infty} U_n$$

Siendo L_n y U_n la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos respectivamente y A el área bajo la gráfica de la curva. Aunque la notación simplifica la comprensión del lema II lo cierto es que, de fondo, es esa idea de límite la que subyace para el autor en dicha proposición y en su demostración.

Respecto al Lema XI que establece algunas proporciones entre magnitudes en el marco de un arco de una curva y una recta tangente a esa curva por un punto dado, se evidencia con claridad cómo es que Newton en un punto de la demostración hace referencia a una magnitud *que puede ser tomada tan pequeña como cualquier longitud dada,* haciendo referencia a una noción acertada de límite, en el sentido de prescindir de cantidades infinitamente pequeñas, o razones entre indivisibles o comentarios alusivos a la física, etc., simplemente en el lema XI plantea la pregunta clave: ¿puede ser la diferencia entre esta cantidad y un valor fijo menor que cualquier número dado positivo fijo?.

Finalmente, el artículo concluye haciendo ver que, contrario a lo que se piensa usualmente, Newton tenía (100 años antes que D'Alembert y 134 años antes que Cauchy) una noción de límite bastante clara y sin tantas confusiones conceptuales fruto de la intuición que tenían los fundamentos del Cálculo en su época. Al respecto un apartado del artículo que resume bien esta idea es la última frase: "En 1983 Grabiner pregunta: ¿Quién te dio el *épsilon*? Y responde Cauchy, nuestro trabajo sugiere aquí una pregunta – respuesta diferente: ¿Quién encontró el primer *delta*?: Cauchy. ¿Quién nos dio el primer *épsilon*?: Newton".

González, K. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía*. 15(35). 29 – 36.

Una primera idea llamativa del artículo es que hace una distinción entre dos tipos de Cálculos. En primer lugar, habla del Cálculo con infinitesimales que operó en las Matemáticas hasta finales del siglo XIX. Luego menciona el Cálculo que se basa en el concepto de límite que es, según el autor, el que se enseña actualmente en el aula de clases.

Se distingue una idea central e iniciática del artículo. Para el autor, los fundadores del Cálculo (menciona a Newton, Leibiniz, Wallis, Euler, L'Hopital, etc. -no a Cauchy-) tenían una distinción clara entre Álgebra y Cálculo. La primera de dichas ramas trabaja con un número finito de símbolos, mientras que la segunda manipula infinitos.

Atendiendo a las consideraciones previas del artículo, hay un punto en el que se menciona lo que es para Bertrand Rusell (1996) el Cálculo: “Cálculo infinitesimal es el nombre tradicional que recibe el conjunto de Cálculo diferencial e integral, y como tal lo conservo; pero como veremos en breve, no existe alusión ni implicación a los infinitesimales en parte alguna de esta rama de la matemática”.

Más adelante, y en relación con los fundamentos del Cálculo infinitesimal, se reseña el ensayo del Obispo Berkeley que compara las bases del Cálculo para esa época con los cimientos de la fe o la religión. En ese sentido el autor cita a Berkeley: “Aquél que pueda digerir una segunda o tercera fluxión, o una segunda o tercera diferencia, no necesita, de veras, sentir pudor de cualquier asunto sobre la divinidad”. Este suceso es importante en primer lugar, porque muestra la *debilidad* de los fundamentos de una teoría matemática que se creía sólida y estable. En segundo lugar, porque es el inicio de la reconfiguración de las bases del Cálculo en aras de encontrar un piso más estable sobre el cual construir su edificio teórico. En ese sentido es que los infinitesimales son expulsados del cálculo debido a las inconsistencias que presentan su tratamiento y conceptualización, e inicia así la llamada *época del rigor*, en la cual se alude al método de los límites como una manera de manejar el problema de la continuidad y lo continuo sin tener que acudir al tratamiento de lo infinitesimal (aparentemente).

La introducción del límite (por parte esencialmente de Weierstrass) elimina, para el autor, las problemáticas de las fluxiones y cantidades evanescentes de Newton y las diferenciales de Leibiniz. Se define la derivada como el límite de un cociente y a la integral como el límite de sumas parciales, quedando así *formalizados* los objetos fundamentales del Cálculo y dejando de lado los elementos intuitivos tan ampliamente criticados.

Ímaz, J.C., y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su enseñanza.* CINVESTAV, México D.F.

El artículo hace una revisión general sobre la historia del Cálculo, referenciando brevemente aportes de los griegos (v.g. el rigor geométrico euclidiano, los métodos de Arquímedes que aluden a la física, etc.) y haciendo hincapié en los aportes de los siglos XVII, XVIII e inicios del XIX (Galileo, Kepler, Newton, Leibniz, Euler, Cauchy, etc.). Es importante mencionar que, aunque los periodos abarcados por el documento son amplios y ricos en aportes, son más bien pocos los que refieren de manera puntual a los límites. La revisión que hace el texto se realiza para describir lo que los autores denominan *drama educativo* refiriéndose a la dicotomía que hay en la enseñanza sobre, por un lado, la formalidad del Cálculo, y por otro, las aplicaciones de la ciencia que históricamente son las que permitieron la emergencia de buena parte del Cálculo.

Un primer asunto relacionado con los límites es cuando mencionan que Cauchy fundamenta su enseñanza del Análisis en una noción de límite imaginado como un proceso dinámico sobre el continuo de la recta numérica. Además de lo anterior, el autor agrega que el aporte de Cauchy es análogo al de Euclides en el sentido de ser sistematizadores y organizadores de la información con la que contaban hasta ese momento en su época. Agrega que el afán de sistematizar que tiene Cauchy posiblemente se deba a su necesidad de contar con versiones coherentes y conceptualmente claras para su trabajo docente.

Finalmente, el artículo concluye listando algunas reflexiones de tipo educativo en relación con la enseñanza del Cálculo contrastándola con los eventos históricos descritos a lo largo del documento. En ese sentido, grosso modo lo que los autores ponen de manifiesto es, en primer lugar, lo que denomina *síndrome de Klein* aludiendo al matemático alemán quien pregonaba que el entendimiento del cálculo solo se podía lograr por medio del análisis. También una *alergia* a los infinitesimales, la cual llama *síndrome de Cantor* para recordar que este matemático incluso bautizó a los infinitesimales como "*bacilos coléricos de la matemática".*

Nakane, M. (2014). Did Weierstrass's differential calculus have a limit- avoiding character? His definition of a limit in epsilon – delta style. Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics. (29) 1. 51 – 59.

En este documento se pretende mostrar parte de las concepciones del límite que tenía Weierstrass. Inicia comentando la definición que tenía Cauchy, la cual ya empleaba (aunque de manera informal) inecuaciones con épsilon – delta; sin embargo, se menciona que no es Cauchy (ni Weierstrass), sino Dini en su libro de Análisis publicado en 1871 quien formaliza esta definición de límite. Sobre Cauchy se menciona también que su definición tan "estática" de límite permite desarrollar cualquier aspecto de su teoría de análisis dado que finalmente todo lo reduce a álgebra de inecuaciones sin que medie ningún sentido de dinamismo propio del Cálculo.

A continuación, se hace una revisión sobre las ideas de Weierstrass, básicamente se comenta que, aunque él también emplea argumentos del tipo épsilon – delta, de hecho, él prefería evitar el concepto de límite en la construcción de su teoría de Análisis Matemático. No obstante, su definición se sirve de las inecuaciones formales y bien definidas (esto es, sin usar aproximación, ni cantidades que fluyen o son dinámicas, etc.) lo cual marca una diferencia con el carácter "informal" que se traía anteriormente en el marco de los fundamentos del cálculo.

Medrano, I. y Pino-Fan, L.R. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT*, *5*(1), 287-323.

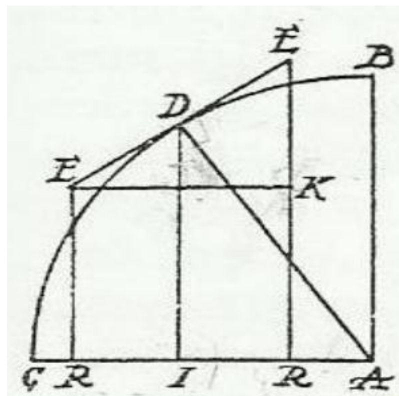
El artículo hace una revisión por los "estadios" principales que ha tenido la evolución del concepto de límite (finito). Así, un primer estadio refiere a los aportes de Eudoxo y Arquímedes, se señala que posterior al descubrimiento de las magnitudes inconmensurables por parte de los pitagóricos, y en consecuencia, la ruptura entre la aritmética y la geometría, Eudoxo años más tarde resuelve esta reconsideración de las matemáticas a través de su definición de proporcionalidad entre magnitudes geométricas el cual, apoyado por el hoy llamado axioma de Arquímedes, permite fundamentar el método de agotamiento y solucionar problemas que tengan implícitamente procesos infinitos.

Un segundo estadio refiere a la concepción de los indivisibles. Este apartado se enfoca en los aportes de Cavalieri, Kepler, Galileo, Stevin y Viéte. En particular se describe cómo la algebrización de la idea de indivisibles (estudiados por Cavalieri en su afán de comparar los volúmenes de figuras generadas a partir de rotación de figuras planas: conos, cilindros, etc., y de Kepler quien se sirve de las ideas de Arquímedes en cuanto al método de agotamiento) da origen a lo que se conocería como infinitesimales.

En cuanto a la idea de infinitesimales y el debate que generaron, destaca la figura de Pascal y su defensa a los infinitesimales. Pascal argumenta, entre otras, que si el espacio estuviera compuesto por un número finito de indivisibles entonces en ese espacio se podría determinar dos cuadrados siendo uno el doble del otro y ordenar puntos (los indivisibles) en los cuadrados, de tal manera que en un cuadrado haya el doble de puntos que en el otro.

Un tercer estadio refiere al trabajo de Newton, en él se menciona que una primera pre concepción acerca de la idea de límite aparece en su trabajo cuando busca perfeccionar sus ideas sobre fluentes y fluxiones (las cuales pasan a denominarse método de las razones primeras y últimas). En ese sentido se menciona el avance que hace en relación con los procesos de aproximación y variación de una curva en la cual inscribe y circunscribe paralelogramos y luego hace las razones entre tales paralelogramos asumiendo que se aumenta infinitamente el número de ellos. Así se puede ver que, aunque no cuenta con las herramientas ni los símbolos adecuados, lo cierto es que sí dispone de una concepción de continuo geométrico dinámico y de una noción intuitiva de límite.

El cuarto estadio hace referencia a la idea de infinitesimales en el desarrollo del trabajo de Leibniz. Se inicia comentando que sus trabajos fructíferos en el Cálculo Diferencial suceden en el momento en que tiene oportunidad de leer algunos manuscritos originales de Pascal, en los cuales, en el marco de demostrar una igualdad entre áreas, aparece un triángulo que más adelante pasaría a denominarse *Triángulo característico de Leibniz*, a saber:



Triángulo Característico de Leibniz

Específicamente se trata del ΔEEK, el cual es semejante al ΔDAI, es precisamente tal semejanza la que dota de importancia al triángulo EEK: sus lados se pueden disminuir hasta hacerse infinitesimales, sin embargo y a pesar de eso, no puede ser un elemento que pueda dejar de considerarse por la semejanza con el triángulo DAI. Más aún, Leibniz piensa que dicho triángulo compuesto por una parte infinitesimal de la tangente a la curva y partes infinitamente pequeñas de paralelas a la abcisa y a la ordenada, pueden ser un elemento característico de esa curva. Esta idea va a permitir considerar de nuevo a las superficies como constituidas por pequeñas superficies. En ese sentido el autor destaca que la idea de Leibniz es más filosófica (en contraposición a la de Newton la cual está más marcada por lo práctico) y busca una "Característica universal" que trasciende las ideas de la aritmética, el álgebra o la geometría.

Como resultado de su búsqueda desarrolla el potente concepto de diferencial y la manera de operar diferenciales, todo ello sin usar explícita o implícitamente la noción de límite, hecho que la matemática contemporánea ha dejado de lado sirviéndose de la postura de Cauchy quien subordina el concepto de diferencial al de derivada y en consecuencia al de límite.

Finalmente se comenta sobre algunos momentos relevantes en los aportes de Leibniz en relación con su postura acerca del continuo. A saber: (1) en 1671 concibe el continuo como formado por infinitas partes las cuales son los indivisibles. (2) en 1673 niega la existencia de los indivisibles y afirma que el continuo se forma por partes infinitamente pequeñas. (3) Finalmente Leibniz niega la existencia de los componentes últimos y no logra elaborar una definición definitiva del continuo.

El quinto estadio se refiere a las concepciones pre formales del límite. En este apartado esencialmente se marca un hito determinado por el trabajo de formalización que inicia Cauchy y que viene a romper con la intuición que marcaba la historia del Cálculo hasta ese momento. Entre los matemáticos que destacan por sus intentos de formalización del Cálculo Infinitesimal están Euler y D'Alembert. Por una parte, Euler congrega el Cálculo Diferencial y el método de fluxiones en el Análisis, una nueva rama de las matemáticas que estudia los procesos infinitos.

D'Alambert por otra parte se opone a la idea de Euler de considerar la diferencial como un símbolo para representar cantidades que se pueden considerar como cero pero que son distintas de cero. Para él la *Metafísica del Cálculo* se debe encontrar en la idea de límite, así es como presenta su propia definición haciendo referencia a elementos como la aproximación, las magnitudes, la diferencia (indeterminable) entre las magnitudes, pero sin atisbos de infinitesimales. En ese mismo sentido más adelante D'Alambert considera las razones primeras y últimas de Newton como límites y elimina su carácter etéreo de cantidades que nacen o se desvanecen.

Otros conceptos que son redefinidos en ese momento de la historia según el artículo, son el de continuidad y el de infinito. En el caso de la continuidad gracias al trabajo de Fourier la misma pasa a ser una propiedad local de las funciones y no general como se consideraba hasta ese momento. En cuanto al infinito se resalta la postura de Cauchy quien solo admitía el infinito potencial en el marco de su trabajo en el Cálculo. Se menciona que define un número irracional como el límite de una sucesión de números racionales. No obstante, no cae en cuenta que para demostrar la existencia de dicho límite según las definiciones de límite y convergencia se debe asumir como dado el número en cuestión, problema resuelto por matemáticos posteriores a él quienes entendieron que una fundamentación rigurosa del Cálculo se debe basar en el sistema axiomatizado de los números reales.

El sexto estadio que contempla el artículo es sobre la formalización de la idea de límite en el marco del Cálculo. Se remarcan los nombres de Dedekind, Weierstrass y Cantor. Dedekind por una parte formaliza el conjunto de los números racionales y lo establece en correspondencia con la recta real; a continuación, define la continuidad y, dado que los racionales no aseguran la continuidad de la recta, define los números irracionales, y en consecuencia a todos los números reales, a partir de cortaduras y sirviéndose de la idea de conjunto. Por su parte Weierstrass y Cantor (quien es alumno de Weierstrass y en consecuencia comparten muchas ideas) definen los números reales a partir de series y sucesiones, en particular empleando las sucesiones de Cauchy y el concepto de punto de acumulación o punto límite.

Aunque como se ha mencionado la formalización inicia con Cauchy, lo cierto es que sus intentos todavía carecían de todo el rigor que daría después los conceptos de continuidad, completitud y la construcción de los números reales, es en ese sentido que Weierstrass puede finalmente proponer una definición rigurosa de límite, la cual recoge Heine, uno de sus alumnos, en 1872, a saber: “si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$”. (Boyer, 2013, p. 696 citado por Medrano, 2016, p. 318). La cual reviste particular importancia por cuanto traduce en operaciones aritméticas sobre cantidades finitas nociones asociadas a la aproximación a un valor límite dado, incrementos infinitamente pequeños, etc.

Finalmente, el séptimo estadio refiere a la generalización del concepto de límite. Cuando Weierstrass define el límite a partir de distancia y completitud, estos se extienden a los conceptos de espacios métricos y conjuntos perfectos. Una generalización de los espacios métricos son los espacios topológicos, así, al definir límite entre espacios métricos tal definición se puede expresar a partir de conjuntos utilizando las propiedades de los espacios topológicos.

En dicho tratamiento generalizado hay diversos usos del límite, así se distingue, por ejemplo, entre el límite de las sucesiones en un espacio métrico y el límite de una función definida de un espacio métrico a otro. Sin embargo, se reporta que un tratamiento unificado de la idea de límite puede desarrollarse en términos de una nueva definición: el concepto de filtro.

3.4. Caracterización de hitos en la historia del límite

Posterior al estudio de los artículos anteriormente resumidos y una vez identificados los temas centrales que cada uno de ellos aborda desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas, se lograron extraer algunos aspectos de particular relevancia histórica en la evolución del concepto de límite, a saber:

3.4.1. Infinitesimales VS Cantidades Infinitamente Pequeñas (CIP)

Para Cauchy un infinitesimal es una entidad que puede ser comparada “en tamaño” con cualquier número real, con otros infinitesimales y con sus recíprocos y para el cual se cumple que $-r < x < r$ siendo x el infinitesimal y r un número real cualquiera (en el sentido moderno, pues para la época de Cauchy el conjunto de números reales aún no estaba formalizado como tal). Por otra parte, cuando los valores numéricos sucesivos de la misma variable disminuyen indefinidamente, de tal manera que caen por debajo de cualquier número dado, esta variable se convierte en lo que se llama *infinitamente pequeña* (Fisher, 1978). Estas definiciones sugieren una duda fundamental: ¿pueden las CIP de Cauchy, esas variables con límite cero, tomar valores infinitesimales? A partir de allí se genera una discusión que contrapone en orillas opuestas dos conceptos que no son fácilmente asimilables por cuanto Cauchy no está trabajando con ellos dentro del conjunto de números reales (o el Análisis estándar) sino que, por el contrario, su dominio va más allá de los reales lo cual comporta una complejidad mayor en la tarea de comprender su trabajo.

3.4.2. Aplicaciones del límite

Se distinguen esencialmente dos tipos de aplicaciones en el estudio de los documentos relativos a la historia del límite. Una clase de aplicación que refiere a situaciones importadas de otras áreas (física) y que dotan de una utilidad particular al objeto de límite, estas aplicaciones serán denominadas *aplicaciones no matemáticas.* En otro sentido se evidencian también algunas aplicaciones del límite desde y para las matemáticas, estas serán denominadas *aplicaciones matemáticas*. Al respecto de cada una se han identificado en los documentos los siguientes ejemplos:

- Aplicaciones no matemáticas:
  - ✓ Variación de la velocidad
  - ✓ Variación de la aceleración
  - ✓ Cálculo de distancias
  - ✓ Cálculo de áreas y volúmenes
  - ✓ Determinación de rectas tangentes a curvas

- Aplicaciones matemáticas:
  - ✓ Concepción de números irracionales como límite de racionales.
  - ✓ Fundamento teórico para el establecimiento de conceptos como derivada, integral y continuidad.

Es necesario aclarar que la lista de aplicaciones “no matemáticas” supera ampliamente a las “matemáticas” por cuanto no es sino hasta Cauchy que aparece la concepción del “matemático puro” como profesional de las Matemáticas estudioso de la disciplina *per sé*. Antes de él, se consideraba que las Matemáticas estaban siempre ligadas a sus aplicaciones científicas.

3.4.3. El concepto de continuo

El concepto de continuo a través de la revisión documental efectuada adquiere importancia porque es una definición que, en sus inicios remontados esencialmente a la cultura griega, introduce someramente las nociones de infinito actual y potencial (las paradojas de Zenón), asunto que se relaciona de forma inmediata con una noción naciente de procesos infinitos o límites infinitos. Por otra parte, una vez formalizado el Cálculo Infinitesimal, el continuo o la continuidad pasa a ser una propiedad de las funciones que para su conceptualización se sirve del límite como objeto matemático riguroso.

Es en ambos sentidos que se reporta la literatura hallada. Por un lado, Jones (1985) comenta algunas concepciones relativas al continuo griego. Por su parte, Felscher (2000) aborda la definición de continuo sugerida por Bolzano, la cual ya cuenta con cierto grado de formalidad matemática.

3.4.4. Dicotomía: límites e infinitesimales

Para hacer claridad en lo que respecta a este hito, vale la pena aclarar dos momentos que atraviesa en la historia la evolución del concepto de límite. Un primer momento pone a los límites como noción naciente en medio de la informalidad, en tanto no cuenta con bases conceptuales que la fundamenten, y en la orilla opuesta a los infinitesimales que, aunque sin tener absoluta rigurosidad, sí consistían un objeto matemático más familiar para los matemáticos de la época. Después, un segundo momento cambia los papeles y pone a los límites como un objeto dotado del formalismo propio del Cálculo posterior a Cauchy y Weierstrass, y en la posición contraria ubica a los infinitesimales, como concepto matemático que puede ser abolido de las matemáticas en tanto que carece de la rigurosidad propia la época.

3.4.5. Simbología del límite

En este ítem es importante mencionar que, aunque se esperaba una cantidad de información amplia en relación con las notaciones que haya podido tener la idea de límite lo cierto es que resultó, al contrario: pocos documentos abordan tal asunto. En todo caso, aquellos que lo hacen referencian esencialmente la notación moderna *épsilon – delta* introducida por Weierstrass y que formaliza la idea de límite. Solamente Felscher (2000) muestra una diferencia entre la notación moderna de límites para sucesiones y para funciones de dominio en los reales, pero en todo caso se alude de igual forma a la simbología de Weierstrass. Es dicha notación la identificada en este análisis documental.

3.4.6. La aproximación como proceso inherente al límite

Dado que a través de la historia el concepto de límite ha estado ligado al de infinito, y este último se ha relacionado con procesos que implican movimiento o continuidad (i.e. paradojas de Zenón, indivisibles de Galilei, fluxiones y fluentes de Newton, etc.), entonces la noción de aproximación emerge de forma natural como un elemento que aporta a la discusión sobre la fundamentación de la idea de límite durante su evolución.

3.4.7. Generalización del concepto de límite

Solamente en uno de los documentos estudiados es referida la historia más reciente del concepto de límite. Específicamente se trata el asunto de cómo el límite es extrapolado a distintas estructuras topológicas, asunto que obliga a generalizar el concepto de límite para cualquier caso, generalización que recoge el concepto matemático de *filtro*.

Tabla que recoge los momentos más relevantes de la historia que fueron identificados:

ASPECTOS IDENTIFICADOS	ARTÍCULO	ÉNFASIS
Infinitesimales VS Cantidades Infinitamente Pequeñas (CIP)	Fisher (1978)	Se demarcan los números infinitos que propone Cauchy y que son los recíprocos de los infinitesimales; los cuales, según el artículo, tienen importancia por cuanto son la base del trabajo que hasta ese momento había realizado el Cálculo.
	Laugwitz (1987)	Las CIP son mencionadas en el marco de la teoría que construye Cauchy para el Análisis Matemático y cómo son fundamento para su idea de límite.
	Felscher (2000)	Es de relevancia cuando se comenta como es que D'Alambert considera las CIP como un método para abreviar el trabajo del cálculo y no porque realmente considere que tales objetos existan.
Aplicaciones	Grabiner (1983)	Comenta el uso histórico del cálculo para resolver situaciones asociadas a velocidades, distancias, áreas, tangentes, etc.
	Laugwitz (1987)	Se ejemplifica el uso de límites como herramienta para definir un número irracional como el límite de diversas fracciones que se aproximan cada vez más al número mismo.

Concepto de continuo	Jones (1985)	El problema de lo continuo y lo discreto desde los griegos: inicia con las paradojas de Zenón. A continuación, se propone dos definiciones de continuo que plantea Aristóteles, una física y una matemática. El asunto del continuo es importante a propósito del límite porque introduce las nociones del infinito (potencial y actual).
	Feslcher (2000)	Se comenta la definición de continuo que sugiere Bolzano (en términos ya de funciones).
	Medrano y Pino-Fan (2016)	Es de particular importancia la enumeración y descripción que se hace sobre las distintas ideas que Leibniz tuvo acerca del continuo, las cuales evidencias de forma clara la dificultad asociada a tal concepto.
Dicotomía: límites - infinitesimales	Grattan - Guiness (1991)	Pone de manifiesto la confrontación que emerge entre la teoría de límites (informal) y los infinitesimales sobre todo a efectos de la enseñanza del Cálculo en las universidades. Se asume la enseñanza de infinitesimales hasta cuando Cauchy imparte la catedra de Análisis de la Escuela Politécnica de París.
	González (2003)	Este artículo es, en cierto sentido, una continuación del anterior (Grattan - Guiness, 1991) pues narra como un evento importante la expulsión de los infinitesimales de las matemáticas y el inicio del desarrollo del rigor y el formalismo en la teoría de límites.
Simbología	Cajori (1928)	Refiere distintos tipos de notación que tuvo el concepto de límite a lo largo de la historia, esencialmente entre los siglos XVIII y XIX.
	Grattan - Guiness (1991)	Plantea el surgimiento de la simbología *épsilon - delta* a partir de la época de Weierstrass para "simplificar" el cálculo y seguir dotándolo de rigor.
	Felscher (2000)	Hace una comparación entre los símbolos épsilon-delta empleado para el límite de funciones, así como los símbolos épsilon y N para los límites entre sucesiones, con el fin de poner en evidencia el contraste entre lo continuo, lo discreto y la cuantificación que cada uno requiere.

La aproximación	Felscher (2000)	Llama la atención que tanto el trabajo de Cauchy como el de D'Alambert asumen la idea de límite como algo relacionado con el proceso matemático de aproximación y en consecuencia con las ideas de dinamismo y movimiento.
	Medrano y Pino-Fan (2016)	Es mencionado el trabajo de Newton en relación con la aproximación y variación de curvas que tienen inscritas y circunscritas infinitos paralelogramos. De igual forma el trabajo de D'Alambert, según reporta el artículo, se sirve de la aproximación cuando quiere dar una definición de límite.
Generalización del concepto de límite	Medrano y Pino-Fan (2016)	Presenta la historia más reciente en la evolución del límite, particularmente la generalización del límite a distintas estructuras matemáticas (i.e. topológicas) y una definición que funciona para conceptualizar el límite de la forma más general en las matemáticas actuales.

Tabla 6. Resumen de documentos sobre la historia del límite

3.5. Reconstrucción de la historia del concepto de límite

En este apartado se pretende elaborar una reconstrucción propia sobre la historia del límite, tomando como base el estudio de todos los artículos que han sido mencionado a lo largo del capítulo hasta ahora. Es importante resaltar que no se busca la escritura de un documento histórico, sino de un texto que, guardando orden cronológico, delinee los hitos que se advirtieron como principales durante la historia del límite y cuya finalidad sea tener un panorama general de las distintas transformaciones que ha tenido dicho objeto a lo largo del tiempo, para unas primeras elaboraciones de las tareas planteadas en los objetivos generales del trabajo.

Dicho lo anterior, una primera aparición importante de un hito relativo al límite ocurre en la antigua Grecia, específicamente en las paradojas de Zenón (siglo V a.C), las cuales, en la búsqueda de mostrar la imposibilidad del movimiento que planteaba el filósofo, pusieron también sobre la mesa unas nociones muy someras de razonamientos ligados al infinito (que siglos más tarde el estudio de las series y las sucesiones resolvería mostrando que la suma de infinitos elementos puede dar un resultado finito), y en consecuencia, tal asunto guarda conexión con la idea de “aproximación al infinito” que años más tarde sería vital en la construcción de la idea de límite.

Casi un siglo después de Zenón, emerge otra idea importante aportada por Aristóteles[10] (s. IV a.C) quien da una definición de continuo (justamente para mostrar la falacia de las paradojas de Zenón); para ello, como lo señala Jones (1987), establece dos continuos distintos, uno físico y otro matemático. Para el caso del primero, cosas se denominan continuas cuando "los límites del tocamiento de cada uno se convierten en uno y lo mismo y son, como la palabra implica, contenidos uno en otro" (Jones, 1987, p. 6). En lo que corresponde al continuo matemático, Aristóteles razona que el continuo debe ser divisible en partes que son infinitamente divisibles, para ilustrar lo que el filosófo tiene en mente con esa definición, da algunos ejemplos de lo que imagina por continuo bajo la perspectiva matemática; a saber: tiempo, movimiento, peso, longitud, área y volumen.

A continuación, sobre el siglo III a.C., Euclides postuló en el libro X el principio de exhaución, el cual ya había sido estudiado con anterior pero solo sistematizado hasta ese momento. El método de exhaución había sido desarrollado por Anaxágoras y más adelante por Eudoxo y Arquímedes, y elementalmente busca calcular áreas de figuras geométricas a partir de un proceso infinito (infinito potencial) relativo a inscribir y circunscribir polígonos en las figuras deseadas y aumentar indefinidamente el número de lados de tales polígonos. La exhaución reviste importancia particular por cuanto es una primera aproximación de paso al límite que desarrollan las matemáticas sin necesidad de hablar del infinito explícitamente.

Aunque los griegos discutieron más asuntos que se relacionan con el infinito (i.e. el infinito potencial de Aristóteles, la inconmensurabilidad de los pitagóricos, etc.), no se mencionan en este texto por cuanto no se considera que aporten de manera medular a la construcción del concepto de límite, por el contrario, eventualmente pueden desviar el objetivo central del texto.

Posterior a la civilización griega como representante principal de la edad antigua en lo que respecta a la fundamentación de las Matemáticas viene la edad media; en ese periodo no se registran avances significativos en relación con la comprensión del infinito (aún menos de la idea de límite) (López, 2014).

Al finalizar la edad media y entrar en el renacimiento, surge de nuevo el interés por estudiar los objetos y los procesos matemáticos ligados al infinito. En ese sentido, destaca una triada de matemáticos de la época que aportaron a la comprensión del infinito en Matemáticas y sus implicaciones, a saber: Kepler, Galileo y Cavalieri (s. XVI d.C). Antes de detallar las contribuciones de cada uno, es importante

[10] Aunque son aportes temporalmente distantes, es importante reseñar que es gracias a Aristóteles en su obra *Física* que se conocen formalmente las paradojas de Zenón.

mencionar una característica común para los tres, la cual vendría ser recurrente en la gran mayoría de matemáticos hasta el siglo XVIII, y es que ellos van a estudiar lo infinito para responder a necesidades más prácticas que teóricas, es por ello que sus resultados persiguen la resolución de situaciones concretas y no la formalización de una teoría matemática.

Por una parte, Kepler se desprende de los resultados arquimedianos del método de exhaución y los admite en su teoría de indivisibles desde el principio, así asume que un solido se puede “dividir” en un número finito de piezas indivisibles, y de igual manera relaciona una curva con segmentos de recta infinitamente pequeños, aceptando así, dado por supuesto, el paso al límite que para Arquímedes era el fruto de un proceso de reducción al absurdo.

Esta manera de actuar de Kepler, aunque polémica en su momento por renunciar a los razonamientos griegos representados por Arquímedes, le valió también que buena parte de matemáticos desde su época hasta la actualidad hayan seguido su forma de proceder (Medrano & Pino-Fan, 2016).

Por otra parte Galileo y Cavalieri (quien fue discipulo de Galileo), aportan ideas que comparten fundamentos entre sí y también con las ideas de Kepler. En principio Galileo se adhiere a los postulados de Aristóteles en el sentido de aceptar el continuo como algo que se puede dividir indefinidamente. Sin embargo, para Galileo se trata de un infinito actual, que ya está terminado, y al respecto se ve obligado a hacer diversas aclaraciones de sus indivisibles, por ejemplo que los infinitos son incomparables entre sí, tampoco es viable comparar un infinito con un finito, ni puede ser cierto que un segmento que tenga el doble de longitud que otro, tendrá el doble de infinitos indivisibles (López, 2014). Todas estas consideraciones para Galileo se deben a la dificultad que supone estudiar el infinito con nuestra mente finita.

En cuanto a Cavalieri, él está preocupado por la composición de figuras y sólidos, en particular declara que el área es la suma de infinitos segmentos y un volumen es la suma de infinitas superficies planas. En ese camino inicia el estudio de la comparación entre volumenes (principio de Cavalieri) y trabaja adicionando o sustrayendo infinitos segmentos o superficies planas indivisibles a las figuras que está estudiando. Sin embargo, y dado que se mantiene siempre en el terreno de lo geométrico, sus principios presentan problemas por cuanto esas adiciones y sustracciones no se pueden representar o evidenciar en la figura misma, ni tampoco ver cuál es su comportamiento en relación con el todo que componen. Es por ello que Cavalieri se enfrenta al problema de lo continuo en Matemáticas cuando quiere algebrizar los indivisibles. No obstante, este trabajo de álgebra transforma los indivisibles en un nuevo objeto matemático: los infinitesimales. En defensa de los infinitesimales destaca la figura de Pascal, sin embargo no se comentarán los aportes de este matemático porque no parecen redundar en la posterior construcción del límite.

Una vez establecida una reconstrucción propia de la historia del límite y habiendo efectuado una revisión organizada de lo correspondiente, ya hay suficientes elementos históricos que permiten la presentación del diseño y elaboración de las tareas, razón por la cual el siguiente capítulo versa sobre los resultados de la realización de las tareas, su concepción, clasificación, el pilotaje etc.

Capítulo 4. Resultados

4.1. Introducción

Se pretende mostrar en este capítulo cómo fue el proceso de creación, diseño, organización y clasificación de las tareas realizadas en el trabajo de grado. Para ese fin se ha establecido el siguiente orden: primero se mostrará la clasificación efectuada para las tareas, describiendo las particularidades que cada caso comporte. En segundo lugar, se hará énfasis especial en un tipo de tarea denominada "proyectos" por cuanto allí es donde están las tareas que fundamentan el trabajo de grado. En tercer lugar, se comentan algunos resultados de las tareas; aunque en los objetivos de la tesis no ha estado la implementación de las tareas, lo cierto es que algunas de ellas se pudieron someter a una prueba piloto y de tal experimento surgieron algunos resultados interesantes y que vale la pena reportar en el trabajo.

4.2. Clasificación de las tareas

Como se comentó en la sección 2.4 (p. 47) de este trabajo, el sistema de clasificación para las tareas se modificó de la idea original y la nueva clasificación fue encontrada en un momento muy cercano a la conclusión del trabajo, por lo cual hay algunas categorías de tareas que no pudieron ser exploradas a fondo dado que los tiempos del proyecto no se prestaban para asumir tal empresa. Dicho lo anterior, se presenta a continuación el esquema que ilustra los distintos tipos de tarea que se van a considerar, tal categorización es una adaptación particular de lo propuesto por Guacaneme (2016) en su tesis doctoral.

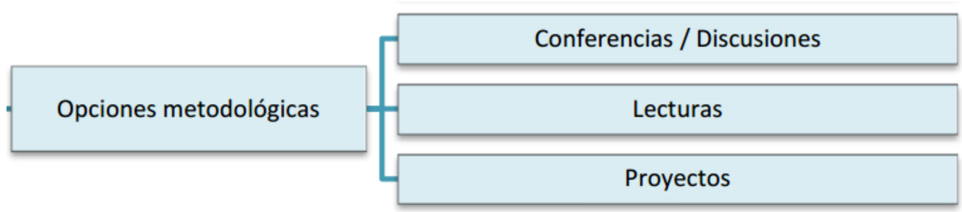


Ilustración 5. Clasificación de las tareas

Antes de continuar, es necesario precisar varios asuntos a propósito de la anterior ilustración. Por una parte, las "opciones metodológicas" reportadas están acompañadas por las denominadas "opciones curriculares" (p. 42) las cuales no se traen a colación por cuanto no se van a considerar. Sin embargo, hay que notar que, si se incluyeran las tres opciones curriculares, se generarían nuevas tareas, las cuales se nombran a continuación aclarando que las mismas no se abordaron en el trabajo por haberlas descubierto muy tarde.

1. Conferencias sobre límite en el marco de un curso de Historia de la Matemática.
2. Actividades de lecturas (de fuentes originales o primarias) en un curso de HM.
3. Integración de proyectos (ensayos, dramatizaciones, estudio de citas, etc.) en un curso de HM.
4. Conferencias sobre el límite para ser presentada en el marco de un curso de Matemáticas (Cálculo diferencial).
5. Actividades de lectura en una clase de Matemáticas
6. Integración de proyectos acerca del límite en la clase de Matemáticas.
7. Conferencia sobre el límite en un espacio académico de diseño curricular
8. Actividades de lectura sobre el límite en curso de diseño curricular (por ejemplo, para revisar la coincidencia o no de los estándares educativos con los hitos históricos del límite)
9. Integración de proyectos acerca del límite en un espacio de diseño curricular.

El anterior listado queda entonces como una invitación abierta para su estudio en futuras investigaciones.

Por otra parte, hay que mencionar que, en lo que respecta a las tareas del trabajo, se hizo particular énfasis en la denominada "Proyecto" por cuanto inicialmente se pensaba que la clasificación se reduciría a esas y no aparecerían más. Por tal razón, se presenta a continuación una descripción de lo realizado en cada categoría (conferencia – lecturas - proyectos) puntualizando que las tareas de Conferencia y de Lecturas no se lograron concretar como hubiera sido deseable.

4.2.1. Conferencias

En este tipo de tarea se plantea la realización de una conferencia que verse sobre alguno (o varios) de los distintos hitos históricos correspondientes al límite (v.g. notaciones poco convencionales, conflictos con las cantidades infinitamente pequeñas y los infinitesimales, la visión del límite como objeto o como proceso, etc.) y que pueda trascender a una discusión en la cual los profesores logren reflexionar sobre distintos problemas históricos que han surgido en la historia del límite y cómo es que los mismos pueden transformarse en modelos para establecer secuencias de aprendizaje mediadas por la Historia de las Matemáticas.

4.2.2. Lecturas

Como se advierte fácilmente por el nombre del tipo de tarea, aquí el trabajo se trata del estudio sistemático de una fuente literaria que trate el tema del límite y que, después de ser leída, permita el desarrollo de algunas reflexiones sobre el quehacer del profesor. En particular se consideran textos como los siguientes:

- Cajori (1923) que trata ampliamente las interpretaciones de las notaciones que ha tenido el límite a través de la historia.
- González (2003) que documenta con mucha solvencia los problemas a los que se vio abocada la postura que defendía la existencia de infinitesimales y que pone sobre la mesa algunas consideraciones sobre el infinito en matemáticas a propósito del límite, etc.
- Jones (1987) que documenta fundamentalmente las paradojas de Zenón y las reflexiones históricas que tales cuestionamientos suscitaron. En ese sentido se considera de particular interés pues puede proveer al docente de herramientas para que implemente elementos conceptuales adaptados de las paradojas de Zenón para el abordaje de asuntos como el límite, el infinito actual, el infinito potencial.
- Medrano y Pino-Fan (2016) que es una revisión muy completa de la transformacion que ha tenido el límite a través de la historia y hasta nuestros días en asuntos como la topología o la teoría de categorías.

4.2.3. Proyectos[11]

Como es señalado por Guacaneme (2016) este es el tipo de tarea que mayores posibilidades brinda, pues el autor reporta, por ejemplo, escritura de ensayos, revisión de etimología de palabras, representaciones teatrales de episodios de la HM, elaboraciones de secuencias de aprendizaje, etc. En este caso particular se hace hincapié en la elaboración de un taller para ser resuelto por los profesores de Matemáticas (Es importante aclarar que el taller se considera un tipo de Proyecto, el cual se compone de una serie de tareas que pueden o no guardar una secuencia u orden). A continuación, se va presentando cada una de las tareas que componen el taller, acompañada por la intencionalidad de la misma. Luego de ello, se presenta la relación que cada una de las tareas guarda con la Historia de las Matemáticas.

4.2.3.1. Intencionalidad de cada tarea

PRIMERA TAREA[12]

1. Se propone a continuación una modificación a la notación usual del límite en funciones reales. Considerando el cambio realizado, resolver los siguientes límites justificando los procedimientos efectuados para tal fin.
   a. $\lim\limits_{x=3} x^2 - 4x + 2$
   b. $\lim\limits_{x=-2} e^x + 3$
   c. $\lim\limits_{x=-3} |x+3|$
   d. $\lim\limits_{x=2\pi} Senx$
   e. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} \tan x$
   f. $\lim\limits_{x=0} Csc\ x$

Ilustración 6. Primera tarea

Proponer una notación distinta para los límites de funciones reales, de tal manera que se logre un conflicto entre el significado de la simbología usual y la nueva (por cuanto la usual lleva implícita la

[11] Es importante señalar que hasta este momento la palabra “proyecto” se ha empleado principalmente como un sinónimo del trabajo de grado en sí mismo o de la investigación realizada. Sin embargo, en adelante y a menos que se indique lo contrario, el término “Proyecto” (con mayúscula) referirá al tipo particular de opción metodológica reportada en esta sección.

[12] Aunque a partir de ahora las tareas serán nombradas como “primera”, “segunda”, etc. Esta denominación no significa que exista un orden entre las mismas o que deban ser realizadas de forma secuencial, pues no está pensado de esa manera el proyecto. Se trata, simplemente de una manera para facilitar mencionarlas.

idea de aproximación y la segunda no; por el contrario, se enfoca en la igualación de una expresión para un valor específico) y fruto de ese conflicto emerja una reflexión sobre la noción misma de límite que tiene el profesor de matemáticas así como en la necesidad (o no) de los elementos que componen la escritura simbólica de los límites.

Para ese fin, los primeros ejercicios que se proponen con la nueva notación, se pueden resolver realizando una sustitución algebraica y operando, por lo cual la notación hasta ese ítem no lleva diferencias con el trabajo que usualmente se hace. Sin embargo, en los últimos dos ejercicios se proponen funciones que son discontinuas en el punto para el cual se solicita el límite, por lo que una sustitución ya no tiene el mismo sentido, pero, gracias a la notación, tampoco es tan clara la idea de poderse aproximar por valores cercanos al número, así pues, se espera que quien desarrolle los ejercicios tenga que pensar en otras estrategias llegado a ese momento.

SEGUNDA TAREA

2. Con base en el trabajo realizado en el anterior ítem, ¿qué está representando la "nueva" notación del límite? ¿qué diferencias matemáticas hay entre la notación usual y esta? ¿la notación para el límite podría ser más simple? Proponga una notación para el límite que simplifique su comprensión, ¿en qué sentido su notación es más simple? Justifique sus respuestas.

Ilustración 7. Segunda tarea

Esta tarea busca que el profesor se cuestione acerca de la notación del límite; de manera más específica si realmente la escritura actual es significativa en la resolución de límites funcionales y si la misma podría simplificarse en términos de la cantidad de símbolos que comporta su escritura. Pensar en la escritura o notación de objetos matemáticos (por qué se escribe de una manera y no de otra, de qué maneras se puede reescribir, etc.) no es un ejercicio que sea tan común de la educación del profesor de matemáticas en el marco de su formación disciplinar y cuando se realiza obliga a que se piense en la naturaleza misma del objeto representado y de su representación, por cuanto se debe reflexionar en el significado y en la intención de cada uno de los símbolos empleados en su escritura y de si tal simbología sí está representando fielmente la idea del concepto o si existe una desconexión entre el significante y el significado del objeto representado.

TERCERA TAREA

3. Simbolizar matemáticamente las siguientes situaciones (paradojas de Zenón):
   a. *Aquiles, el corredor griego más veloz, propone una competición entre él y una tortuga. Ufano y convencido de su triunfo, Aquiles permite que el animal tome una pequeña ventaja. Da inicio la carrera, y contra todo pronóstico, acontece algo extraño, cuando Aquiles alcanza el punto del que partía la tortuga, ésta se ha desplazado ya un ligero trecho. Por mucho que acelere Aquiles, al llegar a ese mismo lugar, la tortuga mantendrá aún cierta ventaja; aunque éste vaya avanzando a cada paso, aunque la separación tienda a cero, nunca será completamente cero, y, por lo tanto, Aquiles nunca alcanzará la tortuga*[1].

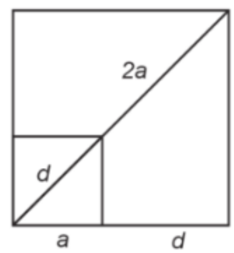
   b. *Zenón está a ocho metros de un árbol. Llegado un momento, lanza una piedra, tratando de dar al árbol. La piedra, para llegar al objetivo, tiene que recorrer antes la primera mitad de la distancia que le separa de él, es decir, los primeros cuatro metros, y tardara un tiempo (finito) en hacerlo. Una vez llegue a estar a cuatro metros del árbol, deberá recorrer los cuatro metros que le quedan, y para ello debe recorrer primero la mitad de esa distancia. Pero cuando esté a dos metros del árbol, tardará tiempo en recorrer el primer metro, y luego el primer medio metro restante, y luego el primer cuarto de metro... De este modo, la piedra nunca llegará al árbol*[2].

Ilustración 8. Tercera tarea

Esta tarea pretende, en primer lugar, hacer reflexionar al profesor sobre la determinación de límites de sumatorias, que no vienen a comportarse igual que los límites de funciones reales, aunque normalmente se pongan en el mismo "estatus". Además, se busca evaluar la capacidad que tiene el profesor de matematizar una situación como las paradojas de Zenón, pues, aunque este asunto pueda parecer trivial, lo cierto es que puede tener más dificultades de las esperadas. Por ejemplo, la manera que tiene el profesor de transformar una situación del lenguaje verbal al lenguaje matemático, máxime si en la situación interviene el infinito. También podría existir conflicto en cuanto al contraste entre el formalismo matemático sobre el infinito y el aspecto intuitivo que se puede tener acerca del infinito. Se considera como hipótesis de esta tarea que la misma puede poner de relieve tales dificultades las cuales es necesario que reconozca el docente para poder hacer un acto de reflexión sobre lo correspondiente.

CUARTA TAREA

4. Se propone la siguiente situación: sea un cuadrado de lado a y diagonal d, constrúyase un nuevo cuadrado de lado $a + d$ y diagonal $2a + d$ (ver figura a continuación). En Excel desarrollar los siguientes ítems:



   a. Determinar la razón entre el lado y la diagonal; a continuación, iterar al menos 500 veces en la hoja de cálculo el proceso de construir un nuevo cuadrado de lado $a + d$ y diagonal $2a + d$ Posteriormente determine la razón entre el lado y la diagonal para cada iteración.

   b. ¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los resultados que obtiene al determinar las razones entre lado y diagonal? ¿Qué resulta al realizar indefinidamente el proceso?

   c. Tomar dos términos sucesivos de la sucesión y realizar su diferencia; repetir el proceso para las 500 iteraciones. Describa qué ocurre con tales diferencias.

Ilustración 9. Cuarta tarea

A partir de un proceso “indefinido” de iteraciones se busca que el profesor logre identificar que una sucesión de números racionales (construidos con base en las razones entre la diagonal y el lado del cuadrado) tiende a un número irracional. Más aún, el ejercicio se propone como una función con dominio y codominio en los números racionales y se indagará cuál es el resultado de realizar indefinidamente el proceso (si la función solo está definida para el conjunto de los racionales).

QUINTA TAREA

5. Sea la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

   a. Una persona afirma que, dado que el denominador de la fracción se va haciendo cada vez más grande, entonces el resultado de la fracción cada vez es más próximo a cero y en consecuencia la sucesión converge a cero. ¿Está de acuerdo con tal afirmación? ¿por qué?
   b. Otra persona asegura que la afirmación del literal anterior es incorrecta, porque la sucesión probablemente converja a un número real al cual se le van sumando cantidades cada vez más pequeñas, por lo que el número siempre está en aumento, pero cada vez, dicho aumento es menor? ¿Considera que es válida tal afirmación?
   c. Justifique. Después de las consideraciones realizadas en los literales anteriores y con ayuda de software, indique hacia qué número converge la sucesión al hacer el paso al infinito.

Ilustración 10. Quinta tarea.

En el imaginario común de una persona con ciertos conocimientos matemáticos está la idea de que si se tiene una fracción de la forma $1/_x$ y la x toma valores cada vez más grande entonces el cociente respectivo se va acercando cada vez más a cero. En este caso el denominador en efecto adquiere valores cada vez más grandes (el factorial asegura este hecho) pero la serie no converge a cero. Así pues, una primera intención es que el profesor identifique, o recuerde en sus conocimientos, que esto no siempre es cierto y que en particular para este caso cada término de la sucesión se va acercando cada vez más al valor de e.

Por otra parte, con el literal b de la tarea, se pretende poner de manifiesto un carácter de proceso infinito que comporta la tarea, pues, a cada término de la sucesión se le va sumando siempre algo, aunque ese valor sumado sea cada vez más pequeño. Esto asegura que la sucesión siempre va creciendo y convergiendo al valor específico, aunque la velocidad de crecimiento disminuya.

Finalmente, dado que es posible que el profesor no recuerde cómo realizar la deducción para comprobar que la sucesión presentada es igual a e cuando se hace el límite al infinito, entonces la última parte de la tarea busca presentarle de forma intuitiva esta aproximación al docente por medio de software, obviamente con la salvedad que con el software siempre se van a obtener aproximación y nunca el valor exacto dada la imposibilidad física de hacer el paso del infinito potencial al actual.

SEXTA TAREA

> 6. Dada la siguiente definición de límite: *si los valores asignados sucesivamente a una cantidad o magnitud se aproximan indefinidamente a un valor fijo, tal que su diferencia es tan pequeña como se desee, entonces el último valor es llamado el límite.*
>   a. Proponga una escritura en símbolos matemáticos de esta definición.
>   b. Para la definición usual *épsilon – delta* ¿puede proponer una definición similar a la presentada? Es decir, escrita de forma verbal.

Ilustración 11. Sexta tarea

El objetivo de este punto es lograr ampliar la comprensión que el profesor tiene sobre la definición formal de límite funcional. La definición presentada corresponde a la dada por Cauchy y llama la atención, por ejemplo, que hable exclusivamente de cantidades o magnitudes (es decir, de los conjuntos N y Q+) así mismo que ponga de manifiesto el proceso de aproximación (como un elemento no necesariamente bien definido en términos de la rigurosidad matemática). Se busca que el profesor ponga en juego la capacidad de traducir a símbolos matemáticos una definición verbalizada (y no trabajada con anterioridad) y que realice el proceso inverso con la definición usual, como una manera de llamar su atención sobre la interiorización del concepto formal de límite.

4.2.3.2. Relación de cada tarea con la Historia de las Matemáticas

PRIMERA TAREA

La nueva notación empleada en esta tarea es reportada por Cajori (1923), quien reseña que es utilizada en el siglo XIX por matemáticos como Weierstrass y Hamilton, y cuya intención era la de explicitar hacia qué valor se aproxima la variable independiente. A continuación, se muestra el comentario que hace Cajori (1923) al respecto de tales notaciones en el que comenta la intencionalidad de los matemáticos al proponer dicha notación:

> K Weierstrass: En el siglo XIX muchos escritores sintieron la necesidad de un símbolo que indicara también el límite al cual la variable independiente se aproxima. La notación que fue utilizada ampliamente en Europa es: $\text{Lim}_{x=a}$ para expresar "el límite cuando x se aproxima a a" Esta fue encontrada en los papeles de Karl Weierstrass, quien en 1841 escribió "$\text{Lim}_{e=0}$" y en 1854 escribió "$\lim_{n=\infty}.\, p_n = \infty$". W.R Hamilton en 1853 utilizó "$\lim_{n=\infty}\{\varepsilon = 1\}$". (Traducción libre de Cajori, 1923, p. 42).

A fin de ilustrar el comentario de Cajori, se muestra a continuación una imagen tomada de Hamilton (1853, p.569) quien en su libro "*Lectures on quaternions*" emplea la notación comentada con el fin de esbozar una conexión entre el cálculo diferencial con las ecuaciones lineales en cuaterniones:

> **568.** Although, as already remarked in art. 477, it will not be possible in this Course to do much more than *allude* to the DIFFERENTIAL CALCULUS OF QUATERNIONS, yet I cannot forego the opportunity of giving here at least some general *notion* of the *connexion* of *that* differential calculus, with such *linear equations* in quaternions, as have been lately discussed. For this purpose, it is necessary first to DEFINE THE DIFFERENTIAL, $\mathrm{d}fq$, *of a* FUNCTION OF A QUATERNION; and I do so by the following formula:
>
> $$\mathrm{d}fq = \lim_{n=\infty} n\,\{f(q + \frac{1}{n}\mathrm{d}q) - fq\};$$
>
> where q and $\mathrm{d}q$ are *any two proposed quaternions*, and n is a positive whole number, which, as the formula expresses, is conceived to increase without limit. In fact this formula is evidently

Ilustración 12. Facsímil tomado de…Hamilton (1853). *Lecture on quaternions*, p. 569.

Llama la atención que, aunque su notación de límite emplea el término "$n = \infty$" no obstante, después comenta que n es un número positivo que es concebido para incrementar sin límite. En esa aclaración se logra percibir la idea de aproximación, aunque la escritura matemática indique algo distinto.

SEGUNDA TAREA

No hay una relación directa con la HM, aunque esta tarea está inspirada por el hallazgo de las diferentes notaciones que reporta Cajori (1928) para el caso de los límites a través de la historia.

TERCERA TAREA

Las paradojas de Zenón aparecen por primera vez escritas en la *Física* de Aristóteles y este último las emplea para abordar asuntos relativos al continuo del tiempo y el espacio, así como para dar su definición de continuo matemático, asunto que en la época griega estaba estrechamente relacionado con procesos infinitos, la idea de aproximación, etc.

A continuación, se muestra la manera como Aristóteles introduce su libro VI de la Física relativo a la continuidad y a todos sus problemas derivados.

LIBRO VI

1 El continuo como lo infinitamente divisible

231a Si la continuidad, el contacto y la sucesión son tales como los hemos definido antes[506] —es decir, si decimos que son «continuas» aquellas cosas cuyos extremos son uno, «en contacto» cuando sus extremos están juntos, y «en sucesión» cuando no hay ninguna cosa del mismo género entre ellas—, entonces es imposible que algo continuo esté hecho de indivisibles, como, por ejemplo, que una línea esté hecha de puntos, si damos por supuesto que la línea es un continuo y el punto un indivisible. Porque ni los extremos de los puntos pueden ser uno, ya que en un indivisible no puede haber un extremo que sea distinto de otra parte, ni tampoco pueden estar juntos, pues lo que no tiene partes no puede tener extremos, ya que un extremo es distinto de aquello de lo cual es extremo[507].

Ilustración 13. Introducción al libro VI de la Física de Aristóteles

CUARTA TAREA

Una de las utilidades que Cauchy obtiene del estudio de límite es precisamente el de lograr determinar que una sucesión de números racionales tiende a un número irracional. Sin embargo, la aproximación teórica de Cauchy tiene un error y es asumir la existencia del número irracional de antemano. Este impase viene a solucionarse con la axiomatización del conjunto de números reales por parte de Dedekind y de Cantor - Weierstrass.

El ejercicio busca, precisamente, que el profesor advierta la existencia del número irracional como una aproximación de una serie, y más aún, que identifique que no se asume como hipótesis la pre existencia de los números irracionales, sino que vienen a ser una consecuencia de un proceso infinito de aproximación de sucesiones de racionales. Es decir, el número irracional es una consecuencia de la sucesión infinita.

QUINTA TAREA

Evidentemente se trata del mismo asunto que el caso anterior. A partir de una sucesión específica de racionales se puede construir el conjunto de números irracionales y en consecuencia el de números reales, a la manera cómo lo haría Cauchy y más tarde Cantor y Weierstrass. En este ejercicio es más puntual el tratamiento que se le da a partir de series y sucesiones, en el anterior en cambio se hace uso de elementos geométricos, medibles, etc.

SEXTA TAREA

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, la definición dada en este ítem corresponde a la propuesta por Cauchy (y la primera que busca formalizar la idea de límite), en tal sentido la tarea revisa una definición de la historia y la contrasta en los términos actuales a partir del tratamiento del lenguaje de una definición y otra, con la finalidad de lograr identificar aspectos que se ponen de relieve en una o en otra definición recordando que la definición actual *épsilon – delta* no es suficientemente clara en el carácter dinámico

Como se logra evidenciar, el grueso del trabajo de grado se desarrolla en los Proyectos, como tipo particular de tarea para la formación de profesores en el esquema de relaciones HM – EPM (Guacaneme, 2011; Jankvist, Mosvold y Clark, 2016; Vidal, Quintanilla y Maz, 2010), pues es a la realización de dichas actividades que se dedicó la mayor parte del proyecto y las demás clasificaciones aparecieron, como ya se mencionó, sobre el final.

Por otra parte, entre los objetivos principales del trabajo de grado se encontraba el diseño y la elaboración de las tareas, pero, previendo las presiones acerca del tiempo que debía durar el desarrollo del trabajo, se decidió no proponer su aplicación como parte de las metas del mismo. Sin embargo, se logró efectuar una prueba piloto para varias de ellas la cual produjo algunos resultados que vale la pena mencionar para cerrar este capítulo.

4.3. Realización de prueba piloto

El pilotaje se realizó para algunas de las tareas descritas en la sección de "Proyectos" y los resultados de uno de tales casos produjo la aceptación y posterior presentación de una conferencia en un evento académico, constituyéndose así (sin saberlo para ese momento) en una prueba piloto de la tarea denominada "Conferencia". Así pues, los resultados obtenidos que son relevantes, serán presentados en ese orden.

4.3.1. Prueba piloto de Proyectos

Dado que fue una prueba piloto de la tarea número uno, la misma fue propuesta, en forma simultánea, a dos licenciados en Matemáticas que actualmente se desempeñan en la docencia al nivel de educación secundaria.

1. La prueba inicial aplicada fue la denominada “primera tarea” (p. 71) la cual, como ya se ha comentado, pretende generar una reflexión sobre el peso semántico que comporta la notación usual de límite y cómo es que el mismo se ve modificado al modificar la notación.

   En general, para el cálculo de los límites a, b, c y d de la primera tarea no hubo problemas en que, los profesores que desarrollaron la tarea, realizaran una sustitución directa del valor solicitado en el límite. Sin embargo, cuando se vieron enfrentados a los límites e y f de las funciones tangente y cosecante respectivamente, estuvieron en la obligación de reflexionar sobre aquello que la nueva notación quería decir.

   Una primera conclusión de los profesores es que la notación usual (llamada *notación flecha* en adelante) permite la idea de aproximación empleando valores por derecha e izquierda[13]; no obstante, la nueva notación (*notación igual* en adelante) solo da pie para la sustitución directa, asunto que choca con la concepción usual de límite que tienen los profesores de “acercarse mucho a un valor sin llegar nunca a ser el valor en sí mismo” como lo manifiestan en la resolución de la tarea.

   Una segunda conclusión radica en que los docentes piensan entonces que, si van a adoptar la *notación igual* entonces debe haber otra simbología más para el caso en que la función no está definida en el punto en el cual se solicita un límite particular. Consideración que termina finalmente cuando uno de los profesores comenta que entonces la *notación igual* está contenida en la *notación flecha* porque el caso de la segunda notación abarca el caso de la sustitución directa (es decir, abarca lo conceptuado por la primera notación) y, también, el caso de la aproximación utilizando valores mayores y menores.

   A continuación, se transcribe el dialogo del episodio en el cual se les pregunta a los maestros sobre las diferencias sustanciales que ellos advierten en las dos notaciones (notaciones flecha e igual) y cómo es que se suscita la discusión sobre los diferentes significados que tienen para los profesores las notaciones de límite presentadas.

[13] Empleando el vocabulario comúnmente usado para comentar que se pueden utilizar valores mayores o menos que el valor en cuestión. Se utiliza la expresión “izquierda o derecha” por la representación gráfica de la recta numérica.

1	*Profesor 1*	Es que cuando a uno le piden un límite, nunca puede ser igual al valor solicitado. Esa notación está mal, nos está generando un conflicto. La *notación igual* no sirve en todos los casos como por ejemplo el de la tangente de pi medios.
2	*Profesor 2*	Exacto, se supone que el límite nunca puede ser igual, pero para el caso de las funciones polinómicas pues lo que uno hace es una sustitución algebraica y ya (…) Entonces yo diría que para el caso de las funciones polinómicas la *notación igual* sirve, porque ahí no es necesaria la idea de aproximación [Después de un momento de silencio] Mejor dicho, la *notación igual* está dentro de la *notación flecha*, esa es la diferencia.

Tabla 7. Diálogo entre profesores, prueba piloto de la primera tarea

Después de implementada la tarea y de analizar de manera global los resultados de los profesores, la conclusión a ser subrayada es la de los distintos significados que comporta la notación usual de límite. Aunque el profesor de matemáticas asigne el mismo tratamiento a la notación de un límite que se resuelve por sustitución y a la de uno que obligue a aproximarse con valores cercanos al deseado, lo cierto es que allí hay dos ideas bien diferenciadas: la de sustitución algebraica y la noción de aproximación. Así pues, una misma notación refiere situaciones distintas dependiendo del tipo de función que sea estudiada (polinómica, por partes, discontinua, etc.) y del valor numérico solicitado (Rendón, 2017).

Tal hecho parece trivial; sin embargo, es algo de lo que el docente de matemáticas debe ser consciente dado que, si utiliza la idea de límite de forma indiscriminada (como sustitución o como aproximación), probablemente vaya a generar muy diversos errores y dificultades en sus estudiantes como ha sido ampliamente reportado en la literatura (Contreras & García, 2011; Mira, 2016).

2. Los profesores también accedieron a realizar la “segunda tarea” (p. 72) la cual está estrechamente relacionada con la primera por cuanto se trata de interpretar la nueva notación presentada para el límite (*notación igual*), darle sentido a su significado y, además, proponer una notación propia para el límite buscando que fuera más sencillo en términos semánticos o sintácticos. Frente a ello, los profesores emitieron las siguientes respuestas a las preguntas planteadas en la actividad:

¿qué está representando la “nueva” notación del límite? (la *notación igual*)	Profesor 1: El límite se está analizando en un valor específico del dominio y no en su entorno o aproximación.
	Profesor 2: Esta notación representa la igualdad de la variable a un valor específico.
¿qué diferencias matemáticas hay entre la notación usual y esta?	Profesor 1: En la *notación flecha* se analiza el límite en un conjunto de números mientras que en la *notación igual* se analiza el límite en un punto específico.
	Profesor 2: Cuando se indica un valor específico para la variable se da a entender que se debe realizar una sustitución, sin embargo, cuando se realizan las demostraciones se requiere de analizar si los valores por la izquierda y por derecha coinciden.

Tabla 8. Respuestas a las preguntas de la Segunda Tarea.

Para el caso de la primera pregunta se tiene que los docentes reconocen una dualidad en la interpretación del límite, pues a veces alude a realizar un proceso de sustitución algebraica y otras refiere al estudio de una valor a partir del análisis de su vecindad, por lo cual parecería ser que la propuesta de una nueva notación sí los hace reflexionar sobre la notación usual, sus implicaciones y en consecuencia sobre su conocimiento profesional bajo la mirada del MKT (Ball, Thames, & Phelps, 2008).

En lo que respecta a la segunda pregunta las reflexiones son bastante similares, pues sigue presente el reconocimiento de las distintas interpretaciones del límite, sin embargo, en la respuesta del profesor 2 a la segunda pregunta llama la atención que emplee la expresión “valores por izquierda y derecha” pues resulta natural pensar que el docente está evocando en su mente un registro gráfico de la situación, posiblemente esté haciendo una alusión mental a la gráfica de una función real.

3. Otra de las tareas que pudo ser puesta a prueba de forma inicial, es la que corresponde a la paradoja de Zenón sobre la carrera de Aquiles contra la tortuga. La denominada “Tercera Tarea” (p. 72) tuvo varios asuntos interesantes en el resultado de su aplicación. Lo primero que vale la pena resaltar es que los dos profesores de Matemáticas que ejecutaron la tarea, propusieron una escritura en símbolos matemáticos de la situación planteada, algo que llama la atención pues se podría asumir en principio que los profesores no tendrían inconveniente en reescribir una situación en lenguaje español al lenguaje matemático convencional, no obstante, no fue así y se produjeron las siguientes posibilidades:

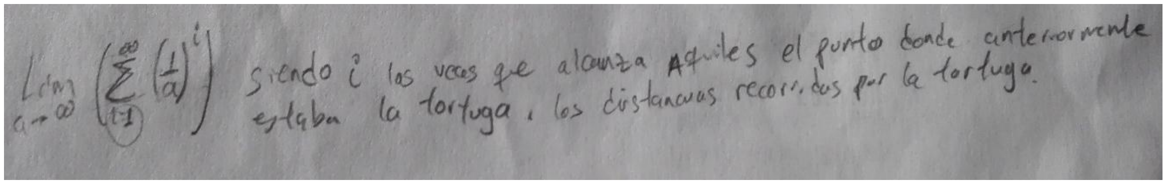
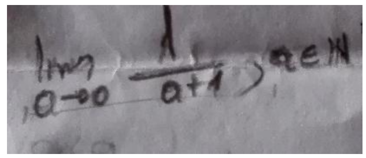



Tabla 9. Imágenes de las respuestas a la Tercera Tarea.

En la imagen superior se puede observar cómo es que el profesor, quizás de forma inconsciente, calcula el límite de un objeto matemático que no es el de las funciones sino el de las series, lo cual pone de manifiesto una nueva posibilidad de indagación (la cual se deja abierta en este trabajo) y es la de explorar sobre las implicaciones didácticas o epistemológicas que puede conllevar el cálculo, indiscriminado o no, de límites en objetos distintos a las funciones. Pero, además, en la misma imagen, el docente quizás no advierte de la inconsistencia conceptual o procedimental que tiene su escritura, pues va a realizar el límite cuando la variable "a" tiende a infinito de una serie cuyo límite superior es el mismo infinito, asunto que también llama la atención.

Por otra parte, en la imagen inferior resulta evidente que el profesor está pensando en calcular el límite de una función racional que tiende a ser uno a medida que el valor de la variable aumenta, una suposición podría ser que el profesor quiere aludir a una suma de infinitos elementos cuyo resultado es igual a la unidad, aunque esto es una mera especulación. Sin embargo, por comparación, llama la atención el resultado de la segunda imagen respecto de la primera por todo lo que se ha comentado.

A partir de lo efectuado en la prueba piloto de la tarea, lo cual dio pie para la preparación de una conferencia en un evento local de Educación Matemática denominado EDEM 4 (Cuarto Encuentro Distrital de Educación Matemática) organizado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas con el fin de presentar las conclusiones sobre la polisemia que comporta la notación convencional de límite. Dado que para ese momento la clasificación de las tareas aún no existía en el trabajo, la conferencia se llevó a cabo sin ninguna pretensión más que la de divulgar los resultados parciales de la tesis, no obstante, cuando en la clasificación apareció la categoría "Conferencia" se advirtió que la ponencia hecha se podría constituir en el "pilotaje" de ese tipo de tarea, lo cual es descrito a continuación.

4.3.2. Prueba piloto de la Conferencia

La conferencia que se efectuó, titulada "Polisemia en la notación usual de límite", en el marco del Cuarto Encuentro Distrital de Educación Matemática (EDEM4), reportaba lo hallado en la prueba piloto de las primeras dos tareas, en particular, aquello que refería a los distintos significados que puede tener la notación convencional de límite en el sentido en que, dependiendo de la función y del valor que se esté estudiando, puede indicar una sustitución o un estudio de algunos valores que se encuentren en la vecindad del número en cuestión.

Como ya se comentó, la conferencia no se realizó con la intención que fuera una prueba piloto de una tarea del trabajo, en ese sentido es necesario aclarar que no hubo una preocupación por registrar el material en audio, vídeo, fotos, etc., por lo cual los comentarios que se realicen sobre la misma aluden a los recuerdos de la jornada o a las impresiones subjetivas del autor.

No obstante, las conclusiones de tal ejercicio es que la presentación de los resultados nombrados causó interés en los asistentes (que eran en su gran mayoría estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital) pues se avizoraba sorpresa en sus expresiones y gestos cuando, por ejemplo, se mostraba una notación distinta a la usual en la notación de límite así como en exponerles que el profesor debía ser consciente de la dualidad que tiene la notación de límite al ser utilizada, la inferencia que se hace de ello es que los docentes en formación probablemente no hubieran reflexionado sobre esos hechos.

Con lo anterior, y mencionando de nuevo que no es pretensión del trabajo presentar tal conferencia como un pilotaje objetivo y preparado del tipo de tarea homónima, pues tal tarea no estaba prevista para ese momento; es posible afirmar después de esa experiencia que la Conferencia (como tipo de tarea en la EPM) sí aporta al desarrollo del conocimiento profesional del profesor, por cuanto tiene la potencia para hacerlo reflexionar sobre su formación y quehacer, así como para suscitar entre ellos la discusión y el debate en torno a tales temas.

Capítulo 5. Conclusiones

Después de la realización de este trabajo de grado quedan diversos aspectos por mencionar, a propósito de establecer algunas conclusiones, los cuales se tratarán de abordar de forma sistemática en el siguiente orden: se presentará una síntesis del trabajo hecho, lo cual dará pie para responder específicamente sobre el cumplimiento de los objetivos planteados, así mismo se podrán reflejar luego aquellos asuntos que quedaron pendientes y que podrían ser tratados con posterioridad en otros estudios, también se hacen algunas recomendaciones, se esbozan algunas preguntas abiertas que quedaron de las distintas fases del proyecto, luego hay una descripción de las limitaciones que tuvo la realización del trabajo y, por último, el impacto que su realización conllevó en el autor.

Para hacer un breve resumen del trabajo que se llevó a cabo se podrían nombrar las siguientes etapas: (i) el planteamiento del anteproyecto en el cual se presentó la pregunta de investigación que motivaba la presentación y realización del trabajo, así como una justificación inicial para lo mismo. Luego de ello (ii) se inició una revisión documental en varios sentidos, primero para identificar literatura sobre tratamientos didácticos o pedagógicos alrededor del límite (propuestas de enseñanza, casos de estudio, identificación de errores y dificultades, etc.) con el fin de encontrar sustento sobre la pertinencia de realizar un trabajo de tales características, y segundo para encontrar literatura especializada exclusivamente en la historia del límite, fruto de tal exploración fue el hallazgo de aproximadamente 50 documentos de unos y otros, los cuales se fueron filtrando atendiendo a las necesidades que iban apareciendo en la realización del trabajo.

A continuación, con los documentos que versaban únicamente sobre la historia del límite, se dio inicio a otra etapa (iii) en la que hubo un estudio organizado de tales textos con el fin de advertir los hitos principales en el desarrollo histórico del objeto matemático en cuestión, ese estudio se refleja en la elaboración de unos resúmenes analíticos, que además dieron pie para construir una historia propia sobre el progreso del límite a través de la historia.

En la medida en que estuvieron claros los hitos en la historia del límite se pudo iniciar (iv) el desarrollo de las tareas, en lo cual medió un proceso creativo para integrar la HM en distintas actividades que pudieran potenciar el conocimiento profesional del profesor (Ball, Thames, & Phelps, 2008), después, pero en la misma fase, se realiza la prueba piloto de las mismas. Una vez concretadas las tareas clasificadas como Proyectos, se dio paso a (v) la elaboración metódica del capítulo relativo a los referentes conceptuales que implicó el estudio de literatura especializada sobre el campo de investigación de la EPM para saber en cuál línea adscribir el trabajo, así como de las relaciones HM – EPM para tener algunas ideas de las implicaciones que la HM puede tener sobre la EPM, y de la conceptualización del término "tareas" y su clasificación para establecer la coherencia entre lo reportado en el marco teórico y en las tareas que fueron diseñadas. Por último, (vi) estuvo el reporte de los resultados y del trabajo realizado a la luz del contraste entre el diseño de las actividades y lo considerado en los referentes teóricos.

Tener clara las etapas de realización del trabajo, permite dar respuesta a los objetivos que desde el inicio se plantearon en el trabajo. Se iniciará comentando a continuación los objetivos específicos propuestos:

- Realizar una reconstrucción histórica del concepto de límite en matemáticas con base en literatura especializada sobre Historia de las Matemáticas. Tal objetivo se cumplió sin ningún inconveniente, el reporte de tal realización constituye todo el capítulo 3 de este trabajo.
- Sintetizar y utilizar un marco conceptual en el que se puedan evidenciar las relaciones entre la Historia de las Matemáticas y la Educación del Profesor de Matemáticas. Dicho objetivo también fue cumplido, evidencia de ello es el trabajo hecho con los referentes mencionados en el capítulo 2 y su utilización en el capítulo 4 cuando se presentan los resultados del proyecto.
- Elaborar y caracterizar las tareas para futuros profesores que puedan servir para su aprendizaje del concepto de límite empleando la Historia de las Matemáticas. El cumplimiento de dicho objetivo se puede observar a lo largo de todo el capítulo 4 del trabajo, entre otras, tal objetivo es el grueso mismo de la tesis por lo que su realización era una condición absoluta para la presentación del documento final.

Finalmente, en relación con el objetivo general:

- Diseñar una serie de herramientas inspiradas por la Historia de las Matemáticas para futuros profesores que les posibiliten una transformación del Conocimiento Didáctico que tienen sobre el concepto de límite.

Se considera que sí se cumplió, las tareas que fueron presentadas guardan estrecha relación con la Historia de las Matemáticas y por lo evidenciado a lo largo del trabajo, su aplicación puede traer reflexiones y cambios a los docentes en relación con su conocimiento profesional acerca del límite como objeto y proceso matemático. En la medida en que los objetivos específicos se fueron cumpliendo sistemáticamente, entonces el objetivo general se fue consumando secuencialmente.

No obstante, aunque se cumplieron los objetivos del trabajo es cierto también que fueron quedando algunos asuntos sin resolver y que pueden constituirse en objetos de estudio para estudios posteriores, como, por ejemplo:

- La elaboración de más tareas que puedan complementar la clasificación efectuada de las tareas en Conferencias, Lecturas y Proyectos, pues el fuerte de este documento estuvo sobre la categoría de Proyectos, quedando las otras dos un poco rezagadas a causa de la premura del tiempo.
- El pilotaje de todas las tareas efectuadas y no solamente de algunas pocas. Dicho inconveniente se presentó, entre otras, porque la aplicación de algunas tareas implicaba el uso de computadores los cuales no estuvieron al alcance en el momento preciso, también por las obligaciones de los profesores que accedieron a realizar las tareas, por cuanto la realización y la reflexión sobre cada una de las mismas les demandó una gran cantidad de tiempo, aproximadamente dos horas por cada actividad.

En relación con las recomendaciones que se advierten al haber finalizado el trabajo, quizás la primera que debe ser mencionada es procurar que los trabajos que propendan por el desarrollo y la mejora del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas tengan una mayor divulgación y distribución no solo entre la comunidad académica, sino también entre los profesores del área que realizan su labor sin estar al tanto de los avances e investigaciones en el campo de la EM o la EPM. En ese mismo sentido sería deseable que, al divulgar las tareas, se incluyera un aspecto formativo sobre las mismas, es decir que no solamente esté el desarrollo las tareas, sino que además se les brinden herramientas a los docentes para interpretar sus respuestas y reflexionar sobre las mismas de manera que se garantice así un impacto real y provechoso en su quehacer profesional.

También sería recomendable ahondar más en la categorización de las tareas, pues tal aspecto quedó flaqueando en este proyecto y vale la pena profundizar más en el impacto que pueda tener los demás tipos de tareas en la formación del profesor, en aras de construir un cuerpo más amplio de tareas que abarquen otros aspectos (matemáticos o didácticos) sobre el concepto de límite.

Una situación recurrente en la elaboración del trabajo fue la de toparse con otros objetos o conceptos matemáticos ligados ampliamente al límite pero que escapaban de los objetivos del trabajo y que, de tratarlos, habrían desbordado los parámetros del mismo, ejemplos de tales asuntos encontrados son: el concepto de infinito, la continuidad, las series infinitas, la noción de aproximación, etc. Por lo cual, una recomendación es ampliar la investigación para que pueda incluir algunos elementos más y de esa manera tener un mayor impacto, ampliar la visión sobre los objetos propios del Cálculo, etc.

Las anteriores recomendaciones ineludiblemente hacen reflexionar, entre otras, sobre algunos interrogantes que fueron surgiendo en el desarrollo de la investigación y que quedan como preguntas abiertas para personas interesadas en el tema que puedan realizar investigaciones sobre lo correspondiente, así por ejemplo, una primera pregunta que queda es la de indagar sobre cuáles serían las implicaciones y los resultados de aplicar todas las tareas del trabajo de una manera organizada en un estudio con una metodología mixta (cuantitativa/cualitativa) para lograr medir el alcance del trabajo.

En el diseño de las tareas se consideró en algún momento la utilización del método de bisección para el cálculo de las raíces de una función. Dicho método consiste, esencialmente, en ir realizando aproximaciones a la raíz por medio de acotamientos sucesivos tomando dos imágenes de la función f, una positiva y una negativa, realizando su promedio c y observando el comportamiento de $f(c)$ respecto a las imágenes iniciales.

Este procedimiento genera una sucesión de números $c_1, c_2, \dots c_n$ la cual converge hacia la raíz de la ecuación. No obstante, tal herramienta se descartó como potencial tarea por al menos dos razones. La primera razón alude a la convergencia de la sucesión dado que la misma puede ser hacia un número real cualquiera y la idea de límite encuentra soporte en el concepto de sucesión solamente cuando se empieza a construir el conjunto de los números irracionales (Cauchy plantea que un irracional se consigue gracias a la aproximación de sucesiones de racionales (Medrano y Pino-Fan, 2016)); por ello, pensar en el método de bisección para converger a términos de Q no tiene particular sentido en el marco de este trabajo. La segunda razón, es que, dicho proceso recursivo parte de la base de que la sucesión es convergente; en tal sentido una primera preocupación si se hubiera elegido esta tarea, sería la de determinar la convergencia de sucesiones y asegurarse que los profesores que van a responder la tarea tienen en su mente de forma clara los criterios de convergencia, hecho que no se podría haber constatado tan fácilmente y que en cualquier caso habría desviado de forma considerable los objetivos iniciales del trabajo.

Es por lo anterior que el planteamiento de una eventual tarea, inspirada en el método de bisección, se deja como una posibilidad abierta, producto de la elaboración de este trabajo, para futuras investigaciones más centradas en el estudio de la convergencia de sucesiones, métodos de aproximación de raíces, etc.

Así mismo, otro asunto que fue hallado durante el transcurso del trabajo es la influencia de la geometría en la idea del límite (la relación entre los números reales y la recta numérica de Weierstrass, el método de exhaución de Eudoxo, el triángulo característico de Leibiniz, etc.) así que en un momento surgió la idea de estudiar el concepto de límite sin tener que aludir a aspectos geométricos, pues de hecho el tratamiento escolar que comúnmente se le da al límite carece de argumentos que aludan a la geometría. No fue analizada tal opción porque, como en los casos anteriores, habría desviado los fines del trabajo. Sin embargo, se deja como una opción para futuros estudios.

Por último, en lo que respecta a las preguntas abiertas, fue una constante de interés durante todo el desarrollo del trabajo el hecho de comprender el trabajo Cauchy sobre los límites, en particular por tres asuntos: el primero, porque Cauchy en su definición concibe los límites entre variables, pero no habla de funciones, elemento que es contrario al estudio de límites que se hace actualmente y que, sin embargo, se empleó eficazmente durante muchos años. El segundo, porque en la misma definición de límite, Cauchy refiere a cantidades o a magnitudes (para él una variable es una cantidad que puede tomar distintos valores) lo que hace pensar que solo está aludiendo al conjunto de números racionales, pero tal hecho eliminaría la continuidad de la recta numérica o, dicho de otro modo, la completitud de los números reales, por lo que parece interesante analizar las implicaciones que este particular trae. El tercer asunto es que vale recordar que Cauchy desarrolla su teoría sobre el conjunto de los números hiperreales en el cual tiene cabida la idea de infinitesimal como número positivo menor que cualquier otro positivo pero distinto de cero. Si bien Robinson dilucida tal trabajo y fundamenta el Análisis no Estándar sobre el trabajo de Cauchy (Fisher, 1978), es posible que valga la pena estudiar ese trabajo, pero en busca de consideraciones epistemológicas o didácticas.

Para cerrar este apartado de conclusiones, es importante subrayar el impacto que la realización del trabajo tuvo sobre el autor. Indudablemente la huella más importante que deja el trabajo de grado es el acercamiento organizado a una experiencia en la realización de una investigación; si bien no se trata de una investigación en el sentido más estricto del término, el proyecto sí se constituyó en una aproximación a lo respectivo.

En ese sentido, la experiencia deja enseñanzas fundamentales en el desarrollo académico personal, como por ejemplo haber aprendido a realizar búsquedas documentales de una manera metódica, determinar sistemas de categorías para efectuar análisis, crear herramientas de enseñanza para profesores de Matemáticas, advertir la existencia de un campo de investigación muy amplio que abarca la propuesta del trabajo de grado y que avanza de forma acelerada, entre muchas otras.

Quizás una de las enseñanzas más importantes y que merece punto aparte es la de haber compartido una experiencia de innovación educativa con el asesor del trabajo, entendiendo que se lograron establecer discusiones entre pares académicos (en el sentido de debatir argumentos del trabajo, salvando naturalmente las diferencias en lo que respecta a la trayectoria académica del autor y del director). Tal experiencia aportó, a partir del ejemplo vivenciado con el asesor, elementos que son consustanciales al desarrollo profesional docente por el cual propende el programa de Maestría.

Finalmente, pero en relación con lo anterior, el trabajo de grado amplió el panorama epistemológico e histórico que tenía sobre asuntos como el Cálculo, la Historia de las Matemáticas, el pensamiento variacional, etc. Reflejo de dichos cambios fue el proceso de divulgación al que se sometieron algunos resultados parciales del trabajo y que permitieron al autor mostrar avances pero, esencialmente, introducirse de forma modesta en la comunidad académica de la Educación Matemática a partir, por ejemplo, de una comunicación breve en las Jornadas del Educador Matemático de la Universidad Pedagógica Nacional (evento que congrega fundamentalmente a la comunidad del Departamento de Matemáticas de dicha Universidad) la cual desembocó en una invitación a publicar en la Revista "Pre Impresos Estudiantiles" de la misma Universidad. Así mismo la presentación en los eventos EDEM 3 2016 y EDEM 4 2017 (Encuentro Distrital de Educación Matemática) organizado por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y que reúne a profesores, investigadores y estudiantes de Educación Matemática del distrito capital, y por último una aprobación de ponencia en el II CEMACYC (Segundo Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe).

Todos estos eventos de divulgación mencionados, y en general el compendio de conclusiones expuestas, en suma, muestran la pertinencia del trabajo efectuado, el aprendizaje del autor sobre distintos aspectos del mundo académico y, sobre todo, la posibilidad latente de continuar realizando investigaciones en la misma dirección, las cuales puedan llegar a tener repercusiones reales en el contexto formativo de un país y de una sociedad que precisan de ciudadanos cada vez más y mejor educados.

Referencias

Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*(4), 453-468.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Blanco, L., Mellado, V., & Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido en ciencias experimentales y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación*(307), 427-446.

Bocanegra, I., Galeano, O., & Huerfano, H. (2013). Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional (Tesis de Maestría).

Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. *Annals of Mathematics, 25*(1), 1-46.

Cardeñoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas como campo de investigación en Educación Matemática. In P. Gómez, & L. Rico, *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Universidad de Granada.

Chaves, E. (2008). El seminario "Historia de la Matemática" y su papel en la formación de docentes. *UNICIENCIA*(22), 11-18.

Clark, K. (2012). The influence of solving historical problems on Mathematical Knowledge for Teaching. *History and Pedagogy of Mathematics 2012* (pp. 211-219). Daejeon, Korea: HPM.

Contreras, A., & García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 277-310.

Cottrill, J., Schwingendorf, K., Nichols, D., & Thomas, K. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. 1-18.

Escudero, D. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria. Huelva: Universidad de Huelva (Tesis Doctoral).

Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly, 107*(9), 844-862.

Fisher, G. (1978). Cauchy and the Infinitely Small. *Historia Mathematica, 5*(3), 313-331.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 131-143.

Gómez, H., & Guacaneme, E. (2013). Aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas - Educación Matemática" en el último quinquenio. In *Memorias de la Cuarta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática ENHEM 4.* Cali: Universidad del Valle.

González, K. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía, 15*(35), 29-36.

Grabiner, J. (1983). Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grattan - Guiness, I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el Cálculo? *Mathesis, 7*(3), 363-387.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación del profesor: razones e intenciones. In R. Borba, & C. Monteiro, *Memorias de la XIII CIAEM - IACME.* Recife, Brasil.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle (Tesis doctoral).

Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES, 4*(7), 102-109.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza*, 99-112.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Jankvist, U., Mosvold, T., & Clark, K. (2016). Mathematical Knowledge for teaching teachers: The case of history in mathematics education. *History and Pedagogy of Mathematics 2016.* Montpellier; Francia: HPM.

Jill, A., Ball, D., Konrad, K., Fou-Lai, L., & Jarmila, N. (2005). Reflections on an Emerging Field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 359-381.

Jones, C. (1987). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las Matemáticas. *MATHESIS, 3*(1), 3-14.

Laugwitz, D. (1987). Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks. *Historia Mathematica, 14*, 258-274.

López, C. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología, 14*, 277-298.

Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecne, Episteme y Didaxis, 1*(9), 44-59.

Medrano, I., & Pino-Fan, L. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT, 5*(1), 287-323.

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de Límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* Alicante: Universidad de Alicante (Tesis Doctoral).

Montes, M., Contreras, L., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. In A. Berciano, G. Gutierrez, A. Estepa, & N. Climent, *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Mora, L., Guacaneme, E., & Jiménez, W. (2016). Un ejemplo de integración de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento didáctico de profesores de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(47), 192-206.

Nakane, M. (2014). Did Weierstrass's differential calculus have a limit - avoiding character? His definition of a limit in epsilon - delta style. *Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 29*(1), 51-59.

Pinto, J., & Gonzáles, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., van der Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., . . . Chapman, O. (2009). Tools and settings supporting mathematics teachers' learning in and from practice. In R. Even, & D. Ball, *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 185-209). New York: Springer.

Pourciau, B. (2001). Newton and the Notion of Limit. *historia Mathematica, 28*, 18-30.

Rendón, C. (2017, agosto). Polisemia en la notación usual de límite. *Comunicación presentada en el Cuarto Encuentro Distrital de Educación Matemática.* Bogotá D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, N. (2010). Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno. Granada: Universidad de Granada (tesis de maestría).

Sánchez, M. (2011). A Review of Research Trends in Mathematics Teacher Education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Tirosh, D., & Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 2 Tools and Processes in Mathematics Teacher Education.* Sense Publishers.

Vidal, L., & Salinas, M. (2011). Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional. In M. Marin, G. Fernández, L. Blanco, & J. Palarea (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 587-598). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática: SEIEM.

Vidal, R., Quintanilla, M., & Maz, A. (2010). La Historia de la Matemática: Un valioso componente para la formación del profesorado de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 5*(1), 7-21.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 109-135). Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related tasks, teacher education, and teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education , 10*(4), 433-440.

Anexos

Anexo 1. Fuente empírica de investigación: encuesta realizada a estudiantes para profesor de Matemáticas.

La siguiente encuesta fue diseñada en la fase inicial del trabajo de grado con el fin de identificar ideas que sobre el concepto de límite tienen profesores de Matemáticas en formación inicial. Así, la encuesta se realizó con la herramienta *Google Forms* y se envió por medio de correo electrónico a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que estuvieran al menos en sexto semestre, en total la contestó un total de 18 estudiantes.

A continuación, se muestra la encuesta y después los resultados obtenidos.

1. *¿Cuando aprendió el concepto de límite recuerda que en la clase se hubiera hecho uso o mención de algún elemento de la Historia de las Matemáticas? En caso afirmativo describa cuáles fueron esos elementos*
2. *En los siguientes ítems se presentan algunas temáticas, indique para cada una de ellas, qué tanto la conoce en una escala de 1 a 5, siendo 1 el menor reconocimiento y 5 el máximo.*
    a. *Método exhaustivo, de agotamiento o de exhaución griega*
    b. *Paradojas de Zenón de Elea*
    c. *Cantidades evanescentes*
    d. *Cálculo de fluxiones*
3. *Si un estudiante de grado undécimo que no ha tenido ningún acercamiento al concepto de límite le pregunta qué es el límite de una función en un valor específico, ¿qué le contestaría usted? Describa de forma breve su respuesta.*
4. *Cuando aprendió el concepto de límite en la Universidad, ¿cuáles de los siguientes registros fueron utilizados en esas clases?*
    a. *Numérico (tabla de valores)*
    b. *Gráfico Analítico (gráficas de funciones en un plano cartesiano)*
    c. *Algebraico*
    d. *Geométrico*
    e. *Software de Geometría Dinámica*

Una vez aplicado el material se procedió a realizar un sucinto análisis descriptivo con el fin de determinar algunas tendencias que apoyaran la problemática evidenciada desde la experiencia personal y que dio origen al anteproyecto de investigación.

Para la primera pregunta se logró establecer claramente que sólo un bajo porcentaje de maestros en formación recuerdan haber tenido algún acercamiento de tipo histórico cuando desarrollaron el concepto de límite. Cabe aclarar que en esta pregunta se admitía cualquier uso de la HM como el anecdótico, como organizador curricular, como objetivo de estudio, etc., por otra parte, los estudiantes que reportan haber estudiado algo de la historia hicieron referencia a:

- ✓ "La noción de límite según Cauchy"
- ✓ "Las sumas de Riemann como método de exhaustivo" (en este punto cabe la inquietud de si el MEF hace referencia a cálculo integral, dado que las sumas de Riemann usualmente son estudiadas en ese curso y no en Cálculo Diferencial).
- ✓ "Las diferentes definiciones de autores a lo largo de la historia (nada muy profundo)". En este caso no es difícil inferir que la HM no fue utilizada como herramienta ni como objetivo, es posible que se haya tratado más de un uso meramente anecdótico.

En relación con la segunda pregunta fue posible evidenciar un desconocimiento de la muestra poblacional estudiada sobre algunas temáticas de la HM que de una u otra forma están ligadas a la idea de límite funcional y de infinitesimales. Así pues, la mayoría solo reportó conocer sobre el método de agotamiento griego y principalmente se debe a que los futuros profesores estudiaron someramente el tema en el curso Tópicos de Historia de las Matemáticas.

Para la tercera pregunta se obtuvieron algunos resultados más heterogéneos, algunos como:

I. "El valor al que tiende una función en un punto"
II. "Consideraría tres funciones: una función por partes, una función continua que tenga imagen en ese punto y otra que no tenga imagen en ese punto. Teniendo esto lo explicaría gráficamente, primero para la función por partes que es donde se ven límites por izquierda y por derecha en un mismo punto y son diferentes, luego de que haya entendido como se halla, le pregunto lo mismo para las otras dos funciones, ya uniendo el límite por izquierda y por derecha"
III. "Que es el valor aproximado de la función en ese punto, ejemplificándolo mediante una tabla de valores en los valores próximos al valor y mostrándolo gráficamente"

IV. “Es la frontera a la cual se aproximan ciertas cantidades, se podría explicar por medio de ejemplos que describan cómo un límite es la frontera de otros números”

V. “Significa el valor que tiende al punto f lo más cercano a él, pero que nunca toma el valor de f”

VI. “Es el valor al cual se acercan las imágenes de la función, tanto por la izquierda del número, como por la derecha”

VII. “Es ver lo que pasa alrededor de ese valor específico, qué sucede no tanto en ese valor sino en entornos suficientemente pequeños”

VIII. “Es intentar llegar a un número lo más que se pueda sin tenerlo que tocar”

De lo anterior es posible identificar que en la gran mayoría de casos (excepto quizás en IV, VII y VIII) los estudiantes para profesor respondieron a la situación pensando en una representación gráfica de una función en un plano cartesiano, lo cual eventualmente permite reforzar la idea que en los estudiantes prima el registro gráfico mencionado y el numérico entendido como la construcción de una tabla de valores (caso III). Por otra parte, en IV y VII se puede vislumbrar una respuesta que posiblemente esté influenciada por la usual definición métrica de límite propuesta por Weierstrass en tanto aluden a conceptos como *frontera* o *entorno.* En general ningún estudiante reportó alguna posibilidad mediada, por ejemplo, por la geometría o las sucesiones para explicar la idea de límite funcional en la situación hipotética planteada, modelos que abundan al hacer un recorrido histórico de la evolución del concepto.

Finalmente, en cuanto a la última pregunta de la encuesta, llama la atención en primer lugar que el registro menos empleado según los encuestados es el que corresponde a entornos de geometría dinámica, es llamativo en tanto que estos programas (Cabri, Geogebra, etc.) permiten una representación gráfica cuya potencialidad se encuentra en la posibilidad de *acercarse* visualmente al punto de la función del que se quiere calcular el límite tanto como se desee y pone de manifiesto parte del carácter infinitesimal que tiene el concepto de límite.

En segundo lugar hay que mencionar que se evidencia cierta contradicción en la última pregunta y la tercera: por una parte en el tercer ítem los futuros profesores reportan haber utilizado en buena medida representaciones geométricas para el aprendizaje del límite, sin embargo en la pregunta anterior, como se mencionó ninguna de las respuestas se sirvió de ese tipo de elementos, lo cual posiblemente se deba a que esas herramientas geométricas no representaron un aprendizaje significativo en ese momento quizás porque no constituyeron un elemento central. Pero además esta contradicción manifiesta en la encuesta permite realizar otra inferencia de carácter más informal, como la encuesta misma, pero no por ello menos importante: según las respuestas obtenidas por los estudiantes de pregrado se puede establecer que esa generación de profesores irá al aula a seguir replicando la enseñanza de los últimos años, la cual evidentemente no genera en la mayoría de casos una movilización de conocimientos relevante en los escolares.