LA NUMEROLOGÍA Y EL ÁLGEBRA CHINAS EN LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS ECUACIONES LINEALES

Abraham Hernández y Aurora Gallardo
CINVESTAV, México

RESUMEN

Vía el análisis histórico–crítico, se reflexiona sobre la génesis de los números negativos y el cero, así como sobre las primeras aplicaciones de un método de resolución de ecuaciones surgido en el álgebra de la antigua China. En este estudio, el método Fang Cheng, al ser enseñado a alumnos del presente, posibilita la adición de números signados, el reconocimiento de la sustracción en todos los casos, aunque persiste el rechazo hacia las soluciones negativa y nula de ecuaciones.

ABSTRACT

An historical-critical analysis leads to reflections upon the genesis of negative numbers and zero, as well as upon the first applications of a method for solving equations that arose from the algebra of ancient China. When the Fang Cheng method was shown to students in this study, it made possible addition of signed numbers, recognition of subtraction in all cases, albeit the negative and nil equation solutions continued to be rejected.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Abraham Hernández y Aurora Gallardo (2007). LA NUMEROLOGÍA Y EL ÁLGEBRA CHINAS EN LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS ECUACIONES LINEALES , pp. 181-188.

El presente trabajo exhibe un episodio histórico y su contraparte empírica pertenecientes a un proyecto de investigación en curso[1]. Este proyecto se aboca en su conjunto, al estudio de la negatividad y el cero en sujetos que se encuentran en la transición de la aritmética al álgebra. Retomamos el término "negatividad" de Lizcano (1993) quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos, aclarando que estos no pueden considerase aun, como enteros. En este proyecto extendemos esta negatividad histórica a los significados y sentidos que los estudiantes manifiestan al utilizar los números negativos en la resolución de expresiones numéricas, ecuaciones y problemas de enunciado verbal. El proyecto plantea las interrogantes siguientes:

1. ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del sistema numérico de los naturales a los enteros?
2. ¿Conciben los estudiantes a los negativos y al cero como números?
3. ¿Entienden la suma, la sustracción, la multiplicación y la división de enteros?
4. ¿El realizar un análisis histórico–crítico sobre el cero y la negatividad, puede contribuir a comprender las dificultades que se presentan hoy día con los estudiantes?
5. ¿Qué cambios cognitivos provoca en los alumnos la enseñanza de los enteros vía entornos tecnológicos?

En los trabajos de Gallardo (2002), Gallardo y Hernández (2005, 2006 y 2007), hemos avanzado en dar respuesta parcial a las tres primeras interrogantes. Nuestra investigación se encuentra ubicada en este momento, en responder a la pregunta 4. Recurrimos al análisis histórico-crítico que caracterizamos por movimientos recurrentes entre el estudio de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado con sujetos del presente. El análisis histórico facilita, por ejemplo, el diseño de secuencias de enseñanza que reflejan el progreso obtenido de la investigación histórica que puede ponerse a prueba en situaciones actuales, en las que conviven estudiantes y profesores. Acto seguido se vuelve a la historia de las ideas, una vez que la búsqueda se ha enriquecido con los resultados del análisis empírico (Filloy y Rojano, 1984). En particular, el análisis de textos históricos permitió a Gallardo (2002) identificar interrelaciones entre el nivel de aceptación de los negativos con los lenguajes y métodos utilizados en la resolución de problemas del pasado. Este hecho le sugirió a la autora categorías de análisis en el ámbito didáctico.

UN EPISODIO HISTÓRICO

El episodio aquí presentado exhibe un método general de resolución de ecuaciones descrito en un antiguo texto chino titulado: *Jiuzhang suanshu,* o *(Nueve capítulos sobre el arte matemático)* (Lin Yan and Du Shirán (1987). Este libro se escribió aproximadamente en el año 200 a. C., siendo un compendio de las matemáticas en China. Es importante señalar que empleaban ábacos para calcular, lo que significa que se usaba un sistema numérico posicional decimal.

En el capítulo octavo del *Jiuzhang suanshu* se plantean problemas de compra y venta de mercancías. Al utilizar el método general para resolver este tipo de problemas, podían obtener resultados opuestos a los que designaban con los nombres *zheng* y *fu*. Para los números *zheng* usaron palillos de cálculo rojos, mientras que los números *fu* se representaban por

1 Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. "Procesos de abstracción y patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad."

palillos negros. De manera alternativa, un número *zheng* podía cambiarse en uno *fu* cuando se colocaba un palillo inclinado sobre él. En el cálculo en el tablero, donde están implicados palillos tanto rojos como negros, tenían un método para manipular números en las columnas de la izquierda y de la derecha.

En el método *fang cheng*, o cálculo por tabulación para la resolución de ecuaciones lineales, se contemplan sistemas de 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4 y 5 x 5. Este método consiste en ir obteniendo lugares vacíos en el tablero, para lo cual se procede a multiplicar todos los números de una columna por un cierto número y a efectuar, a continuación, "sustracciones sucesivas" entre esta columna y la precedente, hasta lograr vaciar un espacio. La forma de obtener "ceros" con la manipulación de los palillos rojos y negros en adiciones y sustracciones de números signados, se corresponde con el método de solución de ecuaciones lineales, donde se plasman todas las acciones realizadas, hasta dejar sola a la incógnita con su valor correspondiente, por ejemplo, en términos actuales:

$$x + 5 = 8$$
$$x + 5 - 5 = 8 - 5$$
$$x + 0 = 3$$
$$x = 3$$

El método fang cheng contiene en su esencia la dualidad del cero, que caracterizamos por "el cero nulo", es decir, el neutro y "el cero total" formado por una infinidad de parejas de opuestos. En el episodio aquí presentado, este método es utilizado en el estudio empírico. Es importante señalar que los números negativos conviene enseñarlos de la forma en que se originaron, dado que, como afirma Cid (2003), el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se introdujo por una necesidad de modelizar el mundo físico o social. La aparición de los números negativos en la escuela es "el primer paso de la matemática práctica a la matemática formal" y, por consiguiente, el tratamiento didáctico debe ser consecuente con su génesis.

El Estudio empírico

Se trabajó con 40 estudiantes de 12 a 14 años de edad del segundo grado de secundaria. Se les aplicó un cuestionario que permitió elegir a tres alumnos de alto, de medio y de bajo desempeño escolar para realizar entrevistas clínicas individuales. Estos alumnos ya habían estudiado el álgebra básica y se les mostró la numerología china, es decir, la representación de los números signados vía el uso de palillos rojos y negros. Supongamos que A > B > 0, entonces las reglas de adición y sustracción pueden representarse en simbología moderna como:

Sustracción: $\pm A - (\pm B) = \pm(A - B)$

$$\pm A - (\mp B) = \pm(A + B)$$
$$0 - (\pm A) = \mp A$$

$$\text{Adición: } \pm A + (\pm B) = \pm(A + B)$$
$$\pm A + (\mp B) = \pm(A - B)$$
$$0 + (\pm A) = \pm A$$

El cuestionario y la entrevista constaron de operaciones de adición y sustracción en lenguaje aritmético – algebraico, así como de la resolución de ecuaciones lineales.

En este artículo intentamos responder una pregunta específica perteneciente al análisis histórico–crítico planteado en la cuarta interrogante del proyecto:

¿Qué acontece cuando se enseña a los estudiantes la numerología china únicamente para operar adiciones y sustracciones y se les enfrenta a la resolución de ecuaciones lineales?

A continuación, reportamos seis de los ejercicios de una entrevista video–grabada con la estudiante de bajo desempeño. Esta estudiante fue elegida por tratarse de un sujeto extremo que proporcionó una versión amplificada de las dificultades que la población estudiantil manifestó en su conjunto. Se denota por C a la alumna y por E al entrevistador.

Resolver: (–5) – (+9) – (–8) – (–4) =

C: Supongo que tengo 5 palillos rojos, es como si tuviera negativo cinco y le tengo que quitar positivo nueve… primero voy a encontrar el resultado de negativo cinco menos positivo nueve (escribe): (– 5) – (+9) =…no tengo para quitar positivo nueve, le tengo que agregar nueve ceros…sería (escribe): $-5+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1+\cancel{1}-1$*…ahora sí puedo quitar los positivos nueve (cancela los unos que son positivos)… quedan… negativo catorce (escribe): (– 5) – (+9) = – 14 … de estos (–14) tengo que quitar negativo 8, y sí tengo para quitarle…me queda negativo 6, ésta es como si fuera una resta: catorce menos 8 es seis, pero de los negativos (escribe): (–14) – (– 8) = – 6 …de aquí… le tengo que quitar negativo 4, también tengo para quitarle…(escribe):(–6) – (–4) = –2… el resultado es dos negativo (escribe): – 2.*

Observaciones:

Ante la expresión (– 5) – (+9) – (–8) – (–4) =, C recurre a los palillos, descomponiendo los números en sus correspondientes unidades con el propósito de formar ceros y poder sustraer. De hecho, desarticula la expresión original en tres sustracciones:

(–5) – (+9) =
(–14) – (–8) =
(–6) – (–4) =

Esta descomposición se debe a que C, ha aprendido a operar por pares, es decir, en forma binaria. El hecho de que el sustraendo sea un número mayor que el minuendo, no la conflictua. Afirma: "…no tengo para quitar positivo nueve, le tengo que agregar nueve ceros…".

Después de algunos ejercicios resueltos C, ya no explicita en sus intervenciones la semántica de los palillos, sino se refiere únicamente a números signados: "positivo seis, negativo siete". Logra, entonces, la transferencia de la numerología china el ámbito aritmético. Esta situación se observa en el ejercicio siguiente:

Resolver: (+13) + (– 7) + (+9) + (–6) + (–9) =

C: Supongamos que tengo trece que son de los positivos… luego tengo que aumentar negativo siete (escribe): (+13) + (– 7) = +6

E: ¿Cómo encontraste ese seis?

C: …Son positivo trece [(+13) + (– 7) = +6] …como le tengo que aumentar negativo siete, estos [(–7)] se pueden juntar con siete de los positivos de éste [(+13)] para que de cero… como resultado va a quedar positivo seis, a éste le aumento positivo nueve, es como si tuviéramos una suma (escribe): +6 + (+9) = +15… tengo seis y nueve… son positivo 15…, ahora le voy a aumentar negativo seis, es igual que al principio, de los quince, seis que son positivos, se juntan con el negativo seis y se hacen ceros…quedan (escribe): +15 + (–6) = +9…ahora…tengo (escribe): (+9) + (–9) =, positivo nueve más negativo nueve… el resultado es cero.

Observaciones: Para llevar a cabo la adición de los dos primeros términos de la expresión, la estudiante descompone el +13 como: + 7 + 6, lo que le permite “hacer un cero” que se encontraba implícito. El proceso fue el siguiente:

$$(+13) + (-7) = (+7) + (+6) + (-7) = (+7) + (-7) + 6 = 0 + 6 = 6$$

Ella tiene presente todo el tiempo, la dualidad del cero, tanto en adiciones como en sustracciones de números signados.

A continuación presentamos lo que sucedió en el ámbito algebraico:

Resolver: 6 – x = 12

C: (Escribe): 6 – 6 – x = 12 – 6

x = 6… el resultado es seis.

E: ¿Por qué?

C: Supongamos que tengo 6 de los que son positivos… como se tiene que convertir en cero, le agrego 6 de los negativos, para que sea seis menos seis igual a cero y quede la letra sola.

E: Pero… ¿ya te fijaste que tiene la equis?

C: Sí, por eso no sale… tendría que ser seis, más seis para que dé los doce, pero no sale…¡ya sé! (escribe): 6 + x = 12

6 – 6 + x = 12 – 6

x = 6 …el resultado es seis.

E: Pero le cambiaste el signo a la primera expresión.

C: Por que así es más fácil… de la otra forma no me la sé.

E: Inténtalo con 6 – x = 12.

C: Sería seis menos seis…no, no la sé resolver.

Observaciones: Cuando C se enfrenta a resolver 6 – x = 12, advierte que “no sale” y modifica la ecuación. Escribe: 6 + x = 12

6 – 6 + x = 12 – 6

x = 6

A pesar de que C ha transferido en forma espontánea la numerología de los palillos al álgebra, ha surgido un evitamiento de la negatividad al transformar: 6 – x = 12 en 6 + x = 12. Argumenta que restar es más difícil que sumar. Cuando el entrevistador le pide que intente resolver la ecuación original, aparece un segundo evitamiento: “no la sé resolver”.

Resolver: 6 – 5x = 26 – 3x

C: Primero le agrego seis de los negativos para que este seis se convierta en cero… (escribe): 6 – 6 – 5x = 26 – 3x – 6

– 5x = 26 – 3x – 6

– 5x = 20 – 3x …la voy a hacer de otra forma…

E: ¿Cómo de otra forma?

C: Voy a hacer que éste [– 5x] se haga cero… (escribe): – 5x + 5x = 20 – 3x + 5x

= 20 + 2x…ya..

– 20 = 20 – 20 + 2x

– 20 = 2x

– 20/2 = x

– 10 = x … la volteo para que esté igual que las otras… x = – 10 … el resultado es negativo diez…

E: ¿Por qué no le pusiste nada aquí?[= 20 + 2x]

C: Aquí tenía cinco equis menos cinco equis… no queda nada…no le puedo poner cero porque la letra no vale cero…si le pongo cero terminaría y no puede terminar…porque del otro lado hay más números y letras…pero luego le agregué veinte de los negativos de los dos lados, para encontrar el valor de la letra.

E: ¿Estás segura?

C: ¡Sí!, porque… el diez es de los negativos…me cuesta más trabajo…y así, casi no la sé hacer.

E: Entonces, ¿cómo demostrarías que está bien?

C: Supongamos que aquí [6 – 5x = 26 – 3x]…puedo quitarle las equis…por ejemplo le agrego tres equis a los dos lados…para que de un lado quede sólo el número sería (escribe): 6 – 2x = 26… no, no puedo.

Observaciones: En este ejercicio C recurre al mismo procedimiento que en la ecuación 6 – x = 12, esto es: “voy hacer que éste [– 5x] se haga cero” y llega a la solución: x = – 10. Anteriormente, durante su desempeño en la entrevista, había podido comprobar valores positivos obtenidos como solución, al sustituirlos en las ecuaciones correspondientes. En este caso que la solución es negativa, afirma: “no, no puedo”. Nuevamente se presenta un síntoma de evitamiento ante la negatividad. Además, es muy relevante el segundo paso del proceso de resolución, donde deja vacío el primer miembro de la ecuación:__= 20 + 2x, afirmando que: “no queda nada… no le puedo poner cero, porque la letra no vale cero… si le pongo cero, terminaría y no puede terminar ahí”. En esta reflexión, C muestra dificultad para igualar a cero una expresión algebraica, creyendo que este hecho interrumpe el proceso de solución.

Resolver: 7x – 4 = 3x + 8

C: (Escribe) 7x – 4 = 3x + 8

7x – 4 + 4 = 3x + 8 + 4

7x = 3x + 12…¡Ya me acordé!, tengo que quitar las equis… agarro éste (3x), que es más chiquito…

7x – 3x = 3x – 3x + 12
4x = 12
x = 12/4
x = 3… el resultado es tres porque aquí [7x – 4 = 3x + 8] sería… 21 menos 4 es igual a 17, igual a… 9 más 8… diecisiete igual a diecisiete…está bien.

E: Pero, ¿por qué no elegiste el otro número (7x)?

C: Yo no sé con negativos.

Observaciones:

En 7x – 4 = 3x + 8, sigue utilizando el mismo procedimiento heredado del método Fang Cheng. Aclara que logrará hacer un cero "agarrando 3x que es más chiquito". Se refiere a que: 3x < 7x. Cuando el entrevistador le pregunta: "¿Por qué no elegiste a 7x?, Contesta: "Yo no sé con negativos". Ella está evitando llegar a la sustracción: 3x – 7x, pues en este momento, solamente está centrada en el lenguaje algebraico y ha olvidado la numerología de los palillos.

Resolver: 3x + 14 = 14

C: (Escribe): 3x + 14 – 14 = 14 – 14
3x = 0

$$x = \frac{0}{3}$$

… equis igual a cero, . . . y sí, porque acá… [3x + 14 = 14]. . . sería cero. . . me queda catorce igual a catorce… x = 0… se me hace raro que la letra sea cero…

E: ¿Por qué se te hace raro?

C: ¿Cómo vamos a tener un número que le sumamos otro número y de todas maneras es cero?… se me hace raro.

Observaciones: En 3x + 14 = 4, C presenta un comportamiento ambivalente ante la solución nula. Acepta que x = 0, pues verifica este valor en la ecuación, pero al mismo tiempo afirma que: "se me hace raro, porque hay otros números". Se manifiesta la dificultad para llevar a cabo operaciones con el cero. En suma, podemos afirmar que en el álgebra, campo más complejo que el ámbito numérico, la presencia de la incógnita aunada a la negatividad y el cero, complica aún más la comprensión de las situaciones planteadas.

CONCLUSIONES

En síntesis, de los diálogos de la entrevista con la estudiante, podemos afirmar lo siguiente: C dio sentido al "cero nulo" y al "cero total". Así mismo, la formación de ceros la condujo a la aceptación de números signados, verbalizados por C como "los positivos y los negativos" y la consiguiente distinción de estos de la operación de sustracción, simbolizada con el mismo signo menos. Con respecto a la adición, la alumna descubrió "el cero implícito" en una expresión donde el minuendo es mayor que el sustraendo, ya que este último está contenido en el primero y da lugar a la formación de un cero no explícito. Esta situación le permitió sumar números signados en el caso descrito. C pudo transferir las reglas de operación aprendidas del método Fang Cheng al lenguaje aritmético-algebraico en forma espontánea.

El método Fang Cheng posibilitó el reconocimiento por parte de C, de la sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. Resulta muy relevante la aceptación de la sustracción de números signados, pues esta operación es inhibida cuando se utiliza la regla de los signos (–)(–) = (+), artificio muy difundido en los estudiantes de secundaria. Además, con el uso de este método, C fue capaz de convertir una ecuación con dos ocurrencias de la incógnita: 6 – 5x = 26 – 3x en una ecuación con una sola ocurrencia de la x. Sin embargo al arribar a: – 5x + 5x = 20 – 3x + 5x, no pudo igualar – 5x + 5x a cero, “a la nada” como ella verbalizó. En un contexto algebraico más complejo que el aritmético, el simbolizar “una nada” de naturaleza algebraica resultó muy extraño para C. La presencia del cero, los negativos, otros números y la incógnita todos juntos en una misma expresión, se convirtió en una dificultad extrema para ella. Estos hechos y las causas del evitamiento de las soluciones negativa y nula necesitan de una mayor indagación en los ámbitos histórico y didáctico. En el texto Chino “Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático” ninguno de los problemas planteados conducen a soluciones negativa o nula (Li Yan and Du Shirán, 1987).

REFERENCIAS

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión.* Pre- Publicaciones del Seminario Matemático “García de Galdeano”. Universidad de Zaragoza, España.

Filloy, E y Rojano, T. (1984). *La aparición del lenguaje aritmético y algebraico.* L’Educazione Matematica, V (3), 278 – 306.

Gallardo (2002). *The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra.* Educational Estudies in Mathematics. 49: 171-192, 2002. Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2005). *The Duality of Zero in the Transition from Arithmetic to Algebra.* Helen L. Chick and Jill L. Vincet (eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Melbourne, Australia, University of Melbourne, V.3 pp. 17–24.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2006). *The Zero and Negativity Among Secondary School Students.* Proceedings of the XXX PME, Charles University, Prague, Czech Republic. Vol. 3, pp. 153 – 160.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2007). *Zero and Negativity on the number line.* Proceedings of the XXXI PME, Seoul Nacional University, Seoul Korea. (Aceptado)

Lin Yan and Du Shirán (1987). *Chinese Mathematics A Concise History.* Claredon Press. Oxford University Press, New York.

Lizcano, E. (1993). Imaginario Colectivo y creación Matemática. Editorial Gedisa. Barcelona.