

MÉTODOS EMPÍRICOS PARA LA DETERMINACIÓN DE ESTRUCTURAS DE COGNICIÓN Y AFECTO EN MATEMÁTICAS

Empirical Methods for the Determination of Cognition-Affect Structures in Mathematics

Gómez-Chacón, I. M.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una revisión crítica de los estudios empíricos y teóricos que se centran en la interacción entre el afecto y la cognición, así como los efectos que tienen. En esta conferencia se plantea cuestiones metodológicas relativas a la evaluación de la interacción entre afecto-cognición. Se prestará especial atención al concepto de la Estructura cognitiva-afectiva. Después de más de dos décadas de investigación, parece pertinente preguntarse si se puede hablar de estructuras o sistemas de referencia subyacentes a este fenómeno. Además, vamos a tratar de identificar categorías y representar modelos prototípicos de la relación cognición-afecto en diferentes procesos de pensamiento matemático o en diferentes grupos de aprendizaje.

Palabras clave: *pensamiento matemático y emoción, estructura cognitiva-afectiva, matemáticas, métodos empíricos*

Abstract

The aim of this paper is to bring together a critical review of theoretical investigation and empirical studies that focus on the interaction between affect and cognition as well as the effects they have. This lecture poses methodological questions concerning the evaluation of the interaction between emotion and cognition. Special attention will be given to the concept of the Cognitive-Affective Structure. After more than two decades of research, it seems pertinent to ask whether we can speak of structures or reference systems underlying cognitive-affective phenomena. Also, we will attempt to identify categories and represent prototypical models of the interplay cognition and affect in different mathematical thought processes or in different collective learning groups.

Keywords: *Thinking and emotions, Cognitive-Affective Structure, mathematics, empirical methods*

INTRODUCTION

Me siento honrada y agradecida por estar invitada a impartir esta conferencia en el XX Simposio SEIEM. Ello me permite reflexionar, y ejemplificar sobre dos temas que han sido el centro de mi trabajo desde mis inicios en la investigación en Educación Matemática hace casi 20 años: 1) Una investigación sobre pensamiento matemático en sus aspectos de interacción cognición y afecto. 2) La construcción de puentes entre la investigación básica sobre enseñanza y aprendizaje matemático y la práctica diaria en clase.

Gómez-Chacón, I. M. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Málaga: SEIEM.

Considero que si el tema de la interacción cognición y afecto está adecuadamente situado nos permite una visión más holística de la persona y nos da información sobre sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje. Además, la investigación reciente podría ser más útil si se establecieran más conexiones entre las intuiciones derivadas de la investigación básica y estudios sobre la mejora de la práctica. La investigación y la práctica pueden y deben vivir en sinergia productiva, procurando el enriquecimiento mutuo.

La significatividad de la interacción entre los dominios cognitivo y afectivo durante el aprendizaje matemático se ha observado en investigaciones anteriores, utilizándose distintas formas de comprensión o modelos de la interacción cognición y afecto (Fennema, 1989; Mandler, 1989; McLeod & Adams, 1989, Evans, 2000, Goldin, 2000; Gómez-Chacón, 2000). Sin ánimo de realizar una síntesis exhaustiva podría destacar cuatro aproximaciones. Una primera la podemos encontrar en los trabajos basados en las diferencias individuales. Estos ponen de manifiesto vínculos causales entre cognición y afecto, separando los aspectos sociales del individuo: social, cultural y socialización. Un segundo modelo, se centra en los procesos de aprendizaje de un individuo frente a una tarea o problema integrando la experiencia emocional (modelo cognitivo-constructivista). Un tercer modelo de estudio interacción cognición y afecto viene informado por los estudios de psicoanálisis (Freud y Lacan) en las que los conceptos de inconsciente son claves. Por último señalamos el modelo que tiene en cuenta conjuntamente los aspectos culturales, sociales y personales. Estos estudios abordan cuestiones relacionadas con la singularidad de los patrones individuales de desarrollo en la construcción y reconstrucción de los instrumentos culturales, así como las cuestiones relacionadas con el valor social de los conocimientos, los cambios en las estructuras sociales y el sentido personal y colectivo de identidad.

En la exploración de interacción cognición y afecto los estudios que han focalizado en los sistemas de valoración cognitiva son más abundantes que los que se han centrado en procesos cognitivos matemáticos (tareas cognitivas o de resolución de problemas). Respecto a esta última cuestión la producción científica ha sido menor aunque con resultados interesantes que animan a un mayor desarrollo. Por ejemplo, , estudios en afecto y aprendizaje (Goldin, 2000, 2004, Gómez-Chacón, 2000, 2011, 2012, 2015; Gómez-Chacón, Romero y García, 2016 McLeod, 1994, Liljedahl, 2005) tienden a referirse a las reacciones afectivas que pueden influir en algunos de los procesos cognitivos y conativos implicados en el desarrollo del pensamiento matemático (la creatividad y la intuición, la atribución, la visualización, la generalización, los procesos de prueba y argumentación), o los llamados procesos directivos (procesos metacognitivos y meta-afectiva) (De Corte, Depaepe, Op 't Eynde, & Verschaffel, 2011, Gómez-Chacón, 2008 y 2015). O cómo las emociones también afectan el procesamiento cognitivo de varias maneras: sesgos en la atención y en la memoria (Schlögmann, 2002, Gómez-Chacón, García Madruga, et. al., 2014). Además, las emociones son consideradas funcionales, con un papel clave en el afrontamiento y la adaptación humanas (Evans, 2000; DeBellis and Goldin, 2006; Hannula, 2002, Gómez-Chacón, 2011).

Motivada por la temática, la interacción entre emoción y cognición, esta ponencia aspira a plantear algunas cuestiones metodológicas relativas a su evaluación. Partimos del hecho de que la detección de esta interacción es compleja, es difícil ya que manejamos constructos (es decir, cantidades conceptuales no directamente medibles) con fronteras difusas y con formas de expresión variadas. No obstante, y con la prudencia que nos da la conciencia de esta complejidad, presentamos un enfoque y diseño de investigación que ha resultado productivo para abordar este objetivo y que puede impulsar en una dirección de avance.

UNA FORMA DE MIRAR Y HACER

A la conferencia, impartida en el ICME 13 celebrado este año en la Universidad de Hamburgo en Alemania, le puse el título “Hidden connections, double meanings A mathematical exploration of affective and cognitive interactions in learning” ya que quería expresar metafóricamente el tipo de

búsqueda (de trabajo intelectual) que ha cualificado mi forma de estudiar este tema de la relación afecto-cognición. Siempre, he buscado profundizar en la comprensión del ser humano. En muchas situaciones los significados no vienen dados por lo aparente visible, sino que hay un mundo invisible; o más bien se dan en la intersección entre lo visible e invisible. Es como cuando consideramos los tan conocidos ejemplos de ambigüedad y reversibilidad Gestalt, por ejemplo el del pato y el conejo.

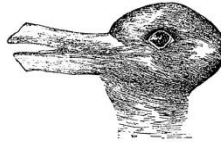


Fig. 1

Estos dibujos atraen y mantienen nuestra atención debido a su ambigüedad perceptiva: nos invitan a invertir la relación figura-fondo que en un principio y de forma espontánea vemos. Nos invitan a cambiar nuestro enfoque visual, la figura a lo que habíamos tomado como fondo y al fondo lo que habíamos tomado como figura. Nos invitan a dejar que nuestros ojos jueguen con la interacción que fluye libremente y que es posible entre figura y fondo, para suavizar el dualismo que normalmente da diferencia entre la figura y el fondo. La duplicidad de estas imágenes lo hace intrigante y a la vez una fuente de placer visual. Nuestra visión se puede mover libremente, de forma espontánea, de ida y vuelta. Este cambio de configuración, revirtiendo figura y el fondo, dejando una configuración emergente diferente -Wittgenstein habla de la aurora de un aspecto² -es un buen ejemplo de un proceso hermenéutico. Los estudios que he realizado han tenido como base esta hermenéutica a la hora de estudiar los fenómenos de interacción cognición y afecto en la enseñanza y aprendizaje. Una hermenéutica que considero que a la vez es inherente y espontáneamente operativa en la dinámica afecto-cognición.

Voy a centrar el tema de esta conferencia en cuestiones metodológicas para la determinación de las Estructuras de Afecto-Cognición. Conectada con esta noción de uso de una imagen mencionada anteriormente está otra noción pertinente para nuestro tema, las nociones de “ver como” y “ver cómo”.

“Ver como” presupone que es “sólo ver”, ver un objeto como lo que es. Se pueden derivar los casos erróneos de visión, en los que se toma algo por lo que no es a partir de su apariencia. Por ejemplo, en una noche oscura, puede verse un arbusto como un asaltante agazapado. El ejemplo tomado del pato y el conejo, una categoría de figuras ambiguas, que puede ser visto ora de este modo, ora de este otro, pero que tiene que ser visto de un modo u otro. Alguien que dijera que no ve ni un pato ni un conejo, sino un oso, nos dejaría perplejos. Hay además diagramas ilustrativos que pueden verse de múltiples maneras distintas, pero que en un contexto determinado tienen que verse de una determinada manera. El concepto de “ver como” o “ver un aspecto” proporciona para el investigador una clave tanto epistemológica como ontológica en la metodología que actúa.

He vivido distintas etapas en mi investigación sobre esta temática, pero todas ellas en este juego de ver cambios, transversalidades o comunalidades que se perfilaban según pusiera la visión en la figura o en el fondo.

² Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Investigations* (New York: Macmillan, 1953), p. 194.

FIGURA Y FONDO, CATEGORIAS PARA UN MODELO DE ANÁLISIS

Desde mi primer trabajo de investigación sobre afecto y cognición (Gómez-Chacón, 1997, 2000a y 200b) he estado interesada por los aspectos metodológicos que me permitieran establecer un modelo de análisis. En la búsqueda de un modelo de análisis para esta interacción, mi afirmación es la siguiente: si queremos comprender la interacción entre cognición y afecto en un individuo cuando actúa en “el momento”, es necesario tener una visión holística de la persona, explorar al individuo a diferentes niveles (individuo, grupo, sociedad-) y “capturar” diferentes aspectos que constituyan el modelo. Algunos aspectos clave que podrían ser capturados (explicados y modelados) para describir con detalle el modelo sobre la dinámica afecto y cognición son los siguientes: las estructuras de afecto (local y global), la dimensión cognitiva (procesos de valoración y procesos matemáticos) y meta-afecto.

Seguidamente se describen estas categorías³:

Estructura de Afecto Local y global

Estructura de Afecto-Cognición Local, a nivel microscópico e individual. Se define como la comprensión de los estados de cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de una actividad matemática a lo largo de toda la sesión. Observar y conocer las etapas en el proceso del cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de problemas y la detección de los procesos cognitivos asociados con la emoción positiva o negativa. Consiste en la representación de la información sobre las reacciones emocionales que afectan el procesamiento consciente. Esto permite establecer rutas afectivo-cognitivas productivas. Las rutas afectivas son secuencias de reacciones emocionales (locales) que interactúan con configuraciones cognitivas en la resolución de problemas. La estructura local expresa tipos de interacción cuando el código emocional interactúa con el sistema cognitivo: interrupciones, desviaciones, atajos cognitivos, que se pueden expresar a través de distintas rutas. Tales rutas proporcionan información útil, que posteriormente puede ser usada para favorecer el proceso de aprendizaje y sugerir estrategias heurísticas para resolver problemas.

Estructura Afecto-Cognición Global: a nivel meso y macroscópico, se comprende como el resultado de los siguientes aspectos:

1- Resumen de las rutas seguidas por el individuo en la dimensión afectiva local. Estas rutas se establecen con el sistema cognitivo y contribuyen a la construcción de las estructuras generales del propio auto-concepto, así como las creencias sobre las matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas.

2- Las interacciones e influencias socio-culturales en las personas y cómo esta información se internaliza y configura su sistema de creencias. Dos aspectos a tener en cuenta: las representaciones sociales del conocimiento matemático y la identidad sociocultural de los sujetos. Las características que la identidad de los estudiantes tiene en su contexto son equivalentes a una red de significados que se manifiestan en el aprendizaje de las matemáticas. Estos significados ilustran nuestra búsqueda de una mayor comprensión de su configuración afectiva global, su forma de conocer y reaccionar afectivamente con el aprendizaje de las matemáticas y su forma de construcción de los sistemas de creencias y el conocimiento de sí mismo.

³ Hacemos notar que estas categorías se pueden trabajar siempre que tengamos dos fuentes de información la del sujeto y las que vienen de la interacción. Consideramos que el estudio del afecto no se trata solo de una labor introspectiva del sujeto sino en la interacción, y en la interacción natural.

Hacemos notar las implicaciones del afecto local en el afecto global y viceversa, consideramos que el afecto local deja al final un rastro global y la doble dirección del afecto global al local da lugar al concepto de uno mismo, las creencias acerca de la matemática y su aprendizaje influye en la determinación de las rutas seguidas en el afecto local. El afecto global configura la estructura local del afecto-cognición en el sujeto.

Dimensión cognitiva

Utilizamos el término cognitiva en un amplio sentido. Por un lado se refiere al uso de los procesos de valoración cognitiva y de otra, a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de la dimensión cognitiva de la heurística de resolución de problemas matemáticos y procesos de pensamiento matemático.

Se propone varias dimensiones de valoración cognitiva para diferenciar la experiencia emocional: agrado, esfuerzo anticipado, comprensión, atención, responsabilidad de control / yo-otro, y el control de la situación.

Meta-afecto o meta-emoción

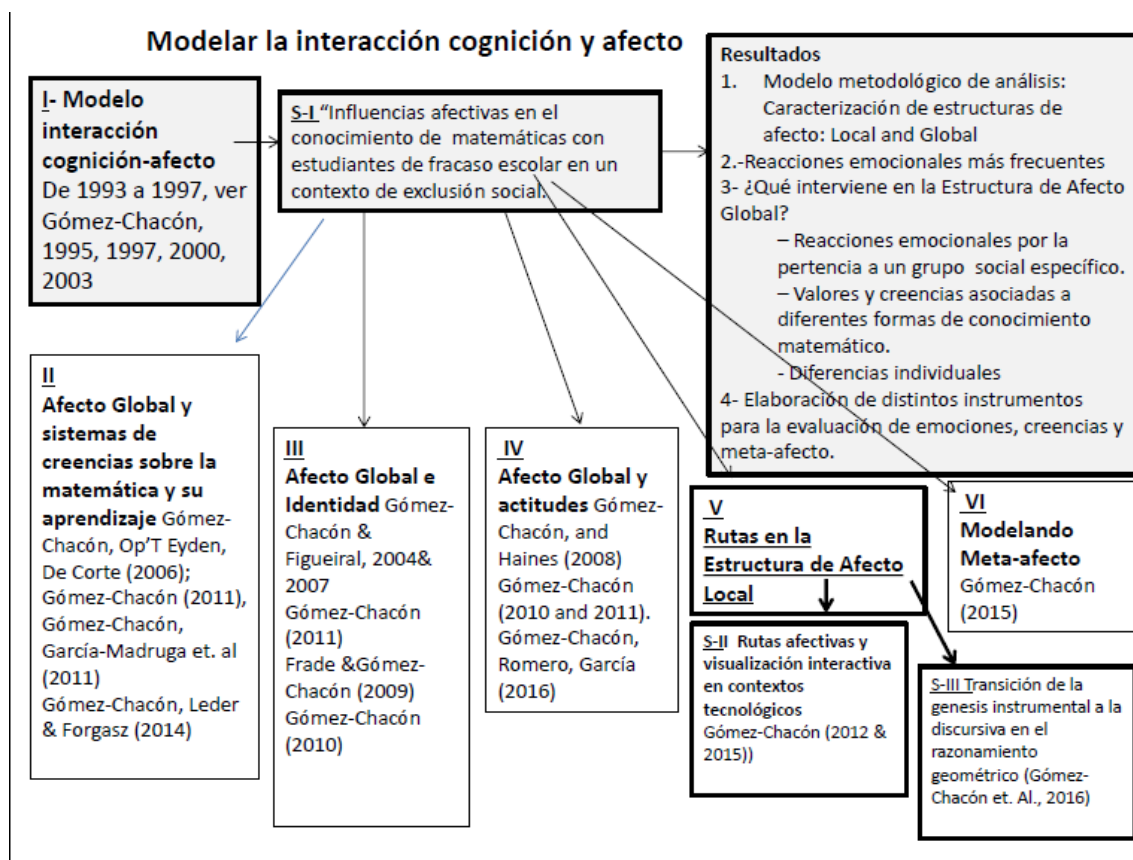
Meta-afecto o meta-emoción, una noción central se refiere a la capacidad que tenemos de autorregular el propio afecto, es decir, de planificar estrategias que se han de utilizar en la interacción cognición y afecto. Se centra en factores que se refieren a la comprensión meta-emocional y habilidades meta-emocionales. Investigaciones previas han demostrado que la estabilidad de las creencias de los individuos está estrechamente relacionada con la interacción entre las estructuras de creencias. Esto incluyen no sólo afectos (sentimientos, emociones), sino también y sobre todo meta-afecto (emociones sobre los estados emocionales, las emociones sobre los estados cognitivos, pensamiento sobre las emociones y cogniciones y, la regulación de las emociones).

Quiero hacer notar que estas categorías están sustentadas por estudios empíricos desarrollados en estos 20 años. En el Cuadro 1 se recoge una síntesis de los mismos.

No tenemos espacio en esta conferencia para explicitar cuál fue la contribución de cada uno de ellos. Solo haré una breve reseña del estudio inicial para mostrar como surgen estas categorías y en las secciones posteriores tomaré un estudio más reciente centrado en la estructura afectivo-cognitiva local.

Mi primer estudio llevó por título “Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas en estudiantes de fracaso escolar en un contexto de exclusión social” (realizado de 1993 a 1997, ver Gómez-Chacón, 1995, 1997, 2000, 2003) fue un estudio descriptivo-interpretativo sobre las interrelaciones entre la cognición y el afecto. Para tipificar esta interrelación se adoptó una perspectiva holística y como diseño metodológico se combinaron las técnicas propias de la etnografía con las de los estudios de casos, así como la reflexión sobre la propia acción. Esta investigación fue tanto un punto inicial de respuestas así como fuente de nuevas preguntas a afinar (Ver Cuadro 1).

Cuadro 1. Resumen de distintos estudios realizados sobre modelización de la interacción cognición y afecto



Mirando con perspectiva este estudio varios fueron los elementos de interés:

- La comprensión de la persona tanto en el dinamismo creativo de sus acciones como en sus posicionamientos en distintas circunstancias y niveles en la interacción con otros.
- La necesidad de sinergias a nivel de marcos teóricos y metodológicos.
- La identificación de distintas estructuras de afecto en el individuo.

Retomo brevemente la metáfora que he utilizado al comienzo de la reversibilidad de figura y fondo para explicarme respecto a lo aprendido con esta investigación. Es conocido que la reversibilidad de figura y fondo han sido ampliamente estudiadas por la teoría de la Gestalt (o Psicología de la Forma). Su planteamiento se ilustra con el axioma: El todo es mayor que la suma de sus partes. Con ello se pretende explicar que la organización básica de cuanto percibimos está en relación a la figura en la que nos concentramos, que a su vez es parte de un fondo más amplio, donde hay otras formas, o sea, todo lo percibido es mucho más que la información procesada por los sentidos.

Algo de esto me ocurrió en esta investigación cuando utilicé como marco teórico la aproximación cognitiva de la emoción. Esta me permitió un estudio microscópico de las acciones y comportamientos de los sujetos muy valioso (en términos que diré después, para el estudio del Afecto Local –FIGURA-). Sin embargo, utilizando esta aproximación había algo que quedaba sin explicación y que sobrepasaba las categorías establecidas. Esto me hizo valorar y pensar el dinamismo intrínseco de la persona en su realidad histórica y social (FONDO). Para ello hice una relectura de los datos teniendo como base otra aproximación teórica a la emoción el interaccionismo simbólico y las perspectivas de identidad social.

Explico un poco más esto. Mi supuesto básico es que el desarrollo en una persona no es lineal y no puede ser predicho solamente por identificación de episodios locales. Son numerosas las formas que

pueden llevar a una persona a desarrollar una habilidad o a comprender algo. Admitir estos principios tiene claramente unas consecuencias en el estudio del ser humano: el curso de la vida no sólo está caracterizado por las regularidades y el progresivo establecimiento de regularidades, sino también por los momentos en los cuales estas continuidades se interrumpen, se reorientan y se cambian.

Aunque en mi comprensión de la interacción cognición y afecto pienso que es posible establecer regularidades, sin embargo, captar estos momentos de ruptura (de irregularidades) es interesante por diversas razones. Primero, a nivel teórico, los puntos de bifurcación en los cuales la persona desarrolla nuevas conductas son altamente significativos. Segundo, a nivel empírico y metodológico, estos episodios o momentos constituyen de forma natural “laboratorios de cambio”. Muchas veces en un contexto experimental planteamos tareas como cuestionarios sin que se presenten puntos de ruptura. Simplemente la gente tiene que responder y el investigador examina detalladamente las respuestas o los procesos que guían estas. Sin embargo, en esta investigación planteada en un contexto natural de seguimiento de las personas –en mi caso durante 2 años– permitió ver estas interrupciones, rupturas o puntos de cambio que requerían de una respuesta, de un ajuste por parte del individuo.

Aunque este estudio trajo consigo diversos resultados a nivel metodológico y la elaboración de ciertos instrumentos para evaluación de creencias y emociones, aquí quería resaltar la contribución que tuvo a la precisión más ampliamente del concepto Estructura de Afecto Local y Global (conceptos que han sido usados por Goldin & Debellis, 2006 en una acepción más limitada).

En nuestro caso fue ampliada la noción de Estructura Global del Afecto⁴.

En este estudio (Gómez-Chacón, 2000b) se reveló que para comprender las reacciones afectivas de los estudiantes hacia las matemáticas, no es suficiente observar y conocer las etapas en el proceso del cambio de sentimientos o reacciones emocionales durante la resolución de problemas (dimensión afectiva local), o detectar procesos cognitivos asociados con emociones positivas o negativas. Por ejemplo, las dificultades en la comprensión de un problema, o en recordar conceptos, pueden producir frustración y ansiedad en el individuo, mientras que la experiencia de los avances en el aprendizaje puede traer alegría y satisfacción; la curiosidad podría fomentar el desarrollo de procesos heurísticos que son importantes para la investigación y la planificación, etc. Sino que era necesario contextualizar sus reacciones emocionales dentro de la realidad social que da lugar a ellas. Por Afecto Global se entiende no sólo como la combinación de rutas afectiva locales del individuo, sino también, el concepto de sí mismo como estudiantes que está relacionado con sus actitudes, su perspectiva del mundo matemático, su sistema de creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas y su identidad social. En este estudio se tomó en cuenta las representaciones sociales del conocimiento matemático y la identidad de los sujetos. Dos aspectos que permitían precisar como descriptores: sistemas de creencias sociales, autoconcepto como aprendiz de matemáticas, autoconcepto por las pertenencias sociales que claramente quedaban reflejadas en las estructuras de creencias sobre la matemática y su aprendizaje. Estos resultados y esta aproximación interpretativa han funcionado en su totalidad en estudios realizado bien con estudiantes como con profesores en contextos donde hay un marcador social negativo –contextos de exclusión social, contextos de minorías étnicas- y ante el cual los individuos toman claros posicionamientos (Gómez-Chacón & Figueral, 2007).

En lo que sigue nos vamos a centrar en la determinación de la Estructura Afecto-Cognición Local. Una de las razones principales para centrarnos en las Estructuras de Afecto-Cognición Locales es porque dan lugar a un perfil de Estructura de Afecto Global en los sujetos y porque, como he

⁴ Aunque en versión inglesa se dio a conocer en el 2000, hay publicaciones previas en español desde 1995 donde se deja constancia de este avance, ver por ejemplo Gómez-Chacón (1997).

indicado al comienzo, los resultados obtenidos de esta investigación básica podrían ser fácilmente integrados en una práctica de aula.

LA DETERMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE AFECTO LOCAL

La determinación de la Estructura de afecto local como meta de investigación se podría abordar mediante diseños de investigación que integren diferentes combinaciones de metodologías, métodos y paradigmas. Aquí hemos hecho la elección de presentar un diseño metodológico que ha sido eficaz y productivo.

Partamos de un ejemplo. Planteamos en un aula el siguiente problema sobre Lugares Geométricos para ser resuelto mediante SGD a un grupo de estudiantes universitarios del grado en Matemáticas:

Escalera: Una escalera que mide 5 metros está apoyada por su extremo superior en una pared vertical, y su extremo inferior está situado en el suelo ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por el punto medio M de la escalera al resbalar y caer ésta? (Y si el punto no es el punto medio de la escalera)⁵⁶.

Para este objetivo de determinar la Estructura de afecto local, uno podría preguntarse: "Supongamos que tenemos una hipótesis sobre esa meta. ¿Cómo situarse para evaluarla? O de otra forma, "Supongamos que estás tratando de explicar algunos aspectos de la conducta individual o de grupo correspondiente a esta meta. ¿Cómo caracterizar y teorizar el comportamiento?"

Cuando nos centramos en la interacción cognición afecto local como meta de investigación estamos tratando de "capturar":

- 1) Movimientos de zigzag en el pensamiento entre lo cognitivo-afectivo.
- 2) Precisión de procesos cognitivos y afectos (en este caso nos centramos principalmente en emociones).
- 3) Patrones: rutinas y cambios dinámicos –bifurcaciones- en la ruta de cada individuo.
- 4) Modelado de la Estructura cognitiva-afectiva local que configura la Estructura de afecto global en el individuo.

Para "capturar" lo señalado en estos cuatro puntos se necesita adoptar una posición teórica y metodológica. Explícito a continuación la que ha sido eficaz para nosotros.

Sistema de referencia afectivo-cognitivo, un camino de "zig-zag" en el razonamiento matemático

Hoy nadie niega la constante interacción entre cognición y afecto, aunque distintos autores han sostenido diferentes puntos de vista a propósito de esta interacción y el rol posibilitador o inhibidor

⁵ Para formular las cuestiones metodológicas y avalar con datos y ejemplificaciones tomaré unos de los penúltimos estudios realizados: Rutas afectivas y procesos de visualización en un contexto tecnológico y de desarrollo del conocimiento matemático profesional (Estudio de referencia (ER)) (Gómez-Chacón, 2012 y 2015). Estudio realizado con universitarios del grado en matemáticas, posibles futuros profesores de Secundaria.

⁶ Este problema es uno de los planteados en el experimento de enseñanza (Design Based Research). Consideramos que se trata de un problema de nivel medio alto para nuestros estudiantes. El enunciado está formulado sin consignas explícitas de construcción. Es una situación realista de fácil comprensión. No obstante, la traslación a construcción con el software GeoGebra no es evidente, es necesario ayudarse de un objeto auxiliar. El razonamiento visual-analítico requiere superar la dificultad inicial de construcción de la escalera a través de un objeto auxiliar, en ese caso GeoGebra ofrece el locus de forma precisa. Para el registro analítico o algebraico es necesario situar cinco puntos sobre el locus y después trazar con el comando "cónica que pasa por tres puntos". En este caso se obtiene la ecuación algebraica precisa. En lo referente al razonamiento instrumental que debe seguir el estudiante, dos momentos son claves en este problema: 1) La construcción de la escalera con una circunferencia auxiliar. 2) Y si se quiere estudiar el lugar que describen los puntos sobre la escalera, estos puntos deben estar determinados de forma precisa (punto medio, 1/4).

de la afectividad. Nosotros consideramos que es imposible encontrar un comportamiento afectivo sin ningún elemento cognitivo. A menudo hemos encontrado en distintos autores los términos “esquemas afectivos” o “esquemas cognitivos-afectivos” (Schlöglmann, 2005) en un esfuerzo por profundizar en esta interacción. Lejos de contradecir nuestro supuesto básico, el reconocimiento de “estructuras afectivas” nos confirma en que las estructuras afectivas son isomorfas con las estructuras cognitivas y son resultados de una intelectualización (Piaget, 1981). Tal intelectualización existe en el momento en que los sentimientos se estructuran. De hecho, la estructura y funcionamiento de la cognición y la afectividad es indisociable en todo comportamiento.

Mantener una postura dialógica en la interacción cognición y afecto nos lleva a tener en cuenta las cuestiones relacionadas con la singularidad de los patrones individuales en el razonamiento, así como las cuestiones relacionadas con las interacciones sociales. Partimos del hecho de que el razonamiento matemático no sigue una línea recta, sino que los procesos de razonamiento matemáticos, tal como expresa Lakatos, siguen una trayectoria en “zig-zag” (“El descubrimiento ni sube ni baja, sino que sigue una trayectoria zigzagueante agujoneado por los contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema. La conjetura ingenua y los contraejemplos no aparecen en la estructura deductiva desplegada: el zigzag del descubrimiento no se puede discernir en el producto terminado” (Lakatos, 1978, p.42). El afecto es un aspecto esencial en los procesos de autorregulación y autorreflexión que se produce en el curso del razonamiento. Los procesos de autovaloración de la competencia personal, la mediación de la respuesta afectiva y la autorregulación en la resolución de problemas son clave. En esta línea Lakatos señala que se necesita una dimensión actitudinal de perseverancia para superar las dificultades cognitivas y afectivas que surgen (“respecto a las conjeturas conscientes vienen de las mejores cualidades humanas: valor y modestia” (Lakatos, 1978, p.30).

En esta exploración de interacción cognición y afecto se ha tomado como marco de referencia el afecto como un sistema representacional (DeBellis & Goldin, 2006, Goldin, 2000 & 2004; Gómez-Chacón 2000, 2012). Al afirmar que este sistema es representacional, se quiere indicar el intercambio de información con sistemas cognitivos (verbal semántico/ sintáctico, imaginario, formal simbólico y de planificación heurístico y de regulación). En este marco se tiene en cuenta las dos categorías de afecto, afecto local y afecto global mencionadas. La conjetura implícita en este marco es que con el tiempo las experiencias afectivas locales que son similares y de gran alcance puede llegar a influir en las construcciones más estables de afecto global. Por ejemplo, si un estudiante ha repetido experiencias de frustración al tratar de crear y utilizar GeoGebra para resolver un problema, el estudiante puede comenzar a tener una actitud negativa hacia la herramienta e incluso posiblemente desarrollar la creencia de que GeoGebra no es una herramienta útil. Además, el afecto en el individuo (local y global) está influenciado por el efecto de los demás, las condiciones sociales y culturales y los factores contextuales externos.

Precisión de procesos cognitivos y emociones

En el estudio utilizamos el término cognitivo en sentido amplio. De una parte referido al uso amplio de procesos de valoración (cognitive appraisal) y de otra, a la caracterización de los significados personales de los sujetos acerca de la dimensión cognitiva de los procesos de visualización.

Procesos cognitivos matemáticos: visualización

Estudiar los procesos de visualización va a requerir un acercamiento a los marcos teóricos de este tema. En nuestro caso hubo que precisar con que concepto de visualización trabajaríamos y precisar categorías para las tipologías de imágenes.

En los trabajos que se presentan a continuación vamos a entender la visualización como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. El análisis de tipologías de imágenes y los usos de la visualización se llevó a cabo mediante el establecimiento de categorías utilizando los modelos de Presmeg (2006) y de Guzmán (2002). En el enfoque de Presmeg, las imágenes se describen distinguiendo entre tipos de imágenes como productos (imágenes concretas ("imagen en la mente"), imágenes cinestética, imágenes dinámicas, imágenes al recordar una fórmula, imágenes de patrones). En Guzmán se clasifican desde el punto de vista de la conceptualización matemática, el uso de la visualización como una referencia en la matematización, y en la función heurística de las imágenes en la resolución de problemas (visualización isomórfica, visualización homeomórfica, visualización esquemática y visualización analógica). Es esta última categorización la que permite identificar procesos instrumentales en el manejo de herramientas de SGD en la resolución de problemas y la distinción precisa entre la función icónica y heurística de imágenes para analizar el rendimiento de los estudiantes.

Procesos cognitivos de valoración

Se proponen varias dimensiones de evaluación cognitiva para diferenciar la experiencia emocional: nivel de agrado, esfuerzo anticipado, la actividad atencional, la responsabilidad de control / yo-otro, y el control de la situación. En el presente estudio se analizan los patrones de valoración y se trata de identificar ante una misma creencia (creencias sobre visualización y creencias sobre tecnología) el rol de cada una de estas dimensiones en la diferenciación de la experiencia emocional.

Emociones

Al identificar y analizar las emociones en sí mismas nos hemos centrado en un sistema interrelacionado (valoración- afecto-sistema de acción) que tenga en cuenta emociones epistémicas - emociones que surgen cuando el objeto de atención se centra en el conocimiento y el saber- y los procesos de autorregulación cognitivos y afectivos (meta-emoción).

Para la identificación de ambas tipologías de procesos cognitivos y emociones se recogieron datos tanto de los protocolos de resolución de problemas de los sujetos antes mencionados, así como la utilización de dos cuestionarios, uno sobre las creencias y emociones sobre el razonamiento visual completado al inicio y el otro en la interacción entre la cognición y afecto en un contexto tecnológico rellenado después de la resolución de cada problema.

Un primer cuestionario se centró en la identificación de las creencias de los sujetos acerca de la visualización y ordenadores, con objeto de estudiar su afecto global y determinar si una creencia puede provocar diferentes emociones en diferentes individuos (Ver Cuadro 2).

Cuadro 2. Cuestionario creencia-emoción

El razonamiento visual es central en la resolución de problemas
El razonamiento visual no es central en la resolución de problemas
Da razones y ejemplos. ¿Cómo te sientes cuando utilizas representaciones o imágenes?
<input type="checkbox"/> Me gusta. <input type="checkbox"/> Me disgusta. <input type="checkbox"/> Indiferente.
Explica las razones para estos sentimientos

También, se utilizó un segundo cuestionario completado al final de cada problema. Las cuestiones principales se explicitan en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Cuestionario sobre la interacción cognición y afecto

Responde a las siguientes cuestiones después de resolver el problema:

1. ¿Es el problema fácil o difícil? ¿Por qué?
2. ¿Qué es lo más difícil para ti?
3. ¿Sueles utilizar representaciones e imágenes en la resolución de problemas?
4. ¿Has sido capaz de visualizar el problema sin hacer una representación gráfica de los elementos problema? ¿Cuándo? ¿Cómo?
5. Describe cuales han sido tus reacciones emocionales, tus sentimientos, tus bloqueos, emociones, al trabajar el problema con el ordenador y sin el ordenador.
6. Si tuvieras que describir, el camino que han seguido tus reacciones emocionales al resolver el problema ¿Con cuál de estas rutas te identificas más?

Ruta afectiva 1 → Curiosidad → confusión →perplejidad → estímulo-animo → placer →júbilo-alegría → satisfacción →estructura global de autoconcepto positiva

Ruta afectiva 2 → Curiosidad → confusión →perplejidad → frustración → ansiedad → miedo y desesperación→ estructura global (estructuras generales de auto-concepto, odio y rechazo de la matemática/tecnología).

Si no te identificas con ninguna de ellas, especifica a continuación tu propia ruta:

7. Ahora, ya que has definido tu ruta indica si algunas de esas emociones han tenido relación con procesos de visualización y de representación del problema. Especifica la parte del problema en la que estabas.

Modelado de la Estructura Local de afecto en el individuo: rutinas y bifurcaciones

Llegar a establecer patrones de interacción cognición y afecto requiere de un análisis a nivel microscópico de los individuos y de todas las fuentes de datos. Presentamos a continuación el análisis realizado en el estudio de casos. En esta sección se exploran los procesos cognitivos-emocionales relativos al pensamiento visual en la resolución de problemas de lugares geométricos con estudiantes universitarios del grado en matemáticas. Tomamos como ejemplo el formulado al inicio de la sección 4: Escalera. Se tratará de dar respuesta a las cuestiones de investigación: ¿Qué hace que un estudiante se mantenga en una ruta afectiva productiva en la resolución de problema o qué hace que este caiga en una ruta de ansiedad, de desesperación que le impide resolver el problema? ¿Qué tipo de ruta afectiva cognitiva se puede describir?

Para lograr un establecimiento posible de patrones se analizó para cada sujeto:

- 1.- Creencias expresadas y creencias en acción sobre el pensamiento visual y reacción emocional que se deriva.
- 2.- Coincidencias en tipologías de uso de visualización y emoción asociada.
- 3.- Valoración realizada sobre los sucesos que le causan emociones. Tal como se ha indicado en la sección anterior nos hemos centrado en procesos relacionados con la visualización y con el uso tecnológico.

Caso de TT-19

TT-19 es un estudiante del grado en matemáticas con un estilo visualizador. Su placer y gusto por la visualización está estrechamente ligado a una concepción evolutiva de la matemática: “El carácter intuitivo y lúdico de la matemática se desarrolla en mayor medida mediante un razonamiento visual que mediante un razonamiento algebraico, aunque lo ideal es complementar ambos en el proceso de resolución del problema” (respuesta al cuestionario).

Considera que el razonamiento visual es esencial en la resolución de problemas (“En los problemas de geometría es fundamental realizar un razonamiento visual a partir de la representación gráfica

para su resolución. Pero no sólo en ellos. En muchos otros campos de la matemática la utilización de diagramas y representaciones ayudan a avanzar hacia la solución”). La emoción de placer que experimenta usando visualización la refiere a la experiencia de control y de creación de aprendizaje profundo que experimenta. Considera que le ayuda en su dimensión intuitiva del conocimiento y en formarse imágenes mentales “Expresar la información del problema en un gráfico o diagrama nos puede permitir reducir el problema a uno de tipo geométrico, haciéndolo más accesible. Además, una demostración visual es igual de válida y formal que una algebraica, siendo en muchas ocasiones más intuitiva. Este tipo de razonamiento nos permite ahondar más en las relaciones entre los elementos que intervienen”.

A continuación, ilustramos las relaciones cognición-afecto con el análisis del problema 4 que realizamos sobre los procesos de visualización-representación-afecto en el sujeto (Cuadro 5). Cuando se le pregunta al estudiante si ha sido capaz de visualizar el problema sin hacer una representación gráfica de los elementos problema nos responde: “sí, al ser un instrumento de la vida cotidiana, no he tenido en problemas en visualizar el problema ni en hacer algunas conjeturas”. Considera que el problema tiene una dificultad media, aunque señala que “no resulta trivial encontrar la construcción adecuada para representar el problema”, para él lo más dificultoso ha sido “la manera de representar la escalera resbalando por la pared. He tardado tiempo en encontrar la solución”. Define su propia ruta de afecto-cognición (Cuadro 4):

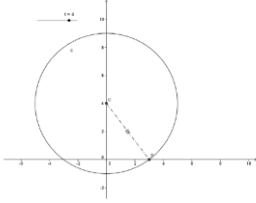
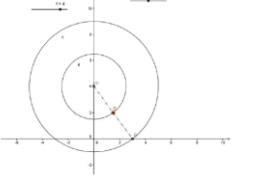
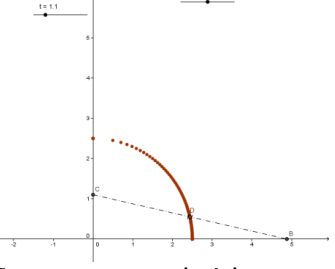
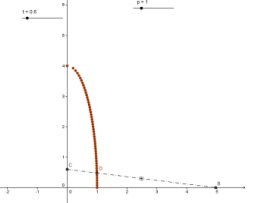
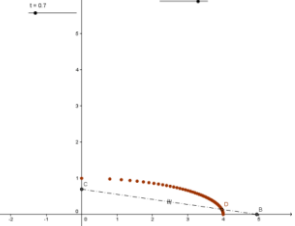
Cuadro 4. Ruta afectiva-cognitiva de TT-19 explicitada en el cuestionario.

Curiosidad → confusión →perplejidad → reflexión → perseverancia- ánimo →confusión → confianza →júbilo-alegría→ satisfacción→ estructura global de autoconcepto positiva

Y cuando se le pregunta si sus emociones han tenido relación con procesos de visualización y de representación del problema y que especifique la parte del problema en la que estaba nos dice: “en el proceso de visualización ha predominado la curiosidad. Me parecía un problema interesante y diferente a los habituales de cónicas. Por ello afrontaba la resolución con energía e ilusión. En el proceso de representación del problema y en la posterior búsqueda de estrategias sufrí el bloqueo más importante en el transcurso de la resolución. No era capaz de encontrar una buena estrategia para llegar a la solución. La confusión me duró lo suficiente como para dejar el problema para otro momento. En una nueva visualización del problema encontré la estrategia a seguir: construir una circunferencia de radio 5 para representar la escalera, y una más pequeña para representar el punto a estudiar. En esos momentos sentí confianza, alegría y satisfacción”.

Cuadro 5. Análisis de proceso de resolución, uso de imágenes en situación y emoción experimentada detallada por el estudiante TT-19 en su protocolo

Descripción del proceso	Tipología de uso de representación/imagen	Afecto: emoción
En primer lugar, represento en el papel el problema. Intento buscar algún camino para resolverlo analíticamente pero no encuentro ninguno. Reflexiono sobre posibles relaciones entre los triángulos que va formando la escalera al caer con la pared y el suelo sin alcanzar nada en claro.	Dibujo (De patrones y pautas/pictórica) Analítico Búsqueda de imagen mental (Concretas pictóricas y Dinámica)	Curiosidad Confusión Me bloqueo.
Pienso en la solución: ¿Será una recta, una elipse, una circunferencia?		Confusión Perplejidad
Dejé el problema para otro día. Estuve pensando el problema mientras realizaba otras actividades. Confianza en que el subconsciente siguiera trabajando.	Búsqueda de imagen mental	Confianza Perseverancia-animo

<p>Retomo el problema con ilusión y esperanza. Experimento con un bolígrafo y una goma elástica enrollada en su punto medio. Parece formar un arco de circunferencia. Por lo menos, ya tengo una idea.</p>	<p>Manipulación física cinética (Cinésctica)</p> <p>Imagen mental –identificación objeto matemático</p>	<p>Ilusión y esperanza</p>
<p>Comienzo a trabajar con Geogebra. Tras probar alguna construcción con rectas me doy cuenta que al ser la escalera un segmento de longitud 5 puedo realizar una construcción basada en una circunferencia de radio 5 que recorra el eje de ordenadas.</p>	<p>Manipulación tecnológica con ordenador</p> <p>Representación radio de circunferencia (Concretas pictóricas)</p>	<p>Confianza</p>
<p>Creo un deslizador t y defino C, el centro de la circunferencia, como $C = (0, t)$. El deslizador decrecerá desde 5 hasta 0, momento en el cual la escalera estará tumbada sobre el suelo. El punto B representa la intersección de la circunferencia y el eje de abscisas.</p>	 <p>Creación de imagen interactiva, deslizador (Analógica)</p>	<p>Confianza Júbilo</p>
<p>Una vez representada la escalera, construyo otra circunferencia de radio variable (según un nuevo deslizador p), que indicará el punto del que vamos a estudiar su trayectoria. En nuestro primer caso, el punto medio de la escalera.</p>	 <p>Creación de imagen interactiva, deslizador (Analógica)</p>	<p>Júbilo y alegría</p>
<p>Observamos la trayectoria del punto medio de la escalera al activar el rastro.</p>	 <p>Concreta pictóricas con interactividad/ Analógica)</p>	<p>Sentimiento de belleza</p>
<p>Se trata de un arco de circunferencia de centro $C = (0,0)$ y radio $r = 2.5$. Probemos ahora con un punto situado a 4 m del inicio de la escalera (estando en un principio situada verticalmente sobre el eje de ordenadas):</p>	 <p>Concreta pictóricas con interactividad/ Analógica)</p>	<p>Sentimiento de belleza</p>
<p>Hemos obtenido un arco de elipse de semieje mayor 4 (vertical) y semieje menor 1. Por último probemos con un punto situado a 1 m del inicio de la escalera:</p>	 <p>Concreta pictóricas con</p>	

	interactividad/ Analógica)	
<p>El lugar geométrico descrito por el punto D es una elipse de semiejes los siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Semieje mayor:</i> $\max(h, 5 - h)$ <p><i>Vertical</i> si $h > (5 - h)$ <i>Horizontal</i> si $h < (5 - h)$</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Semieje menor:</i> $\min(h, 5 - h)$ <p><i>Horizontal</i> si $h > (5 - h)$ <i>Vertical</i> si $h < (5 - h)$</p> <p>Donde h es la altura del punto desde la base de la escalera, estando ésta en posición vertical. En el caso $h=2.5$ los dos semiejes son iguales, por lo que se trata de una circunferencia. Por último tratar los casos triviales en los que el punto se encuentra en uno de los extremos de la escalera. En el caso del extremo superior el punto recorre el segmento entre el punto (0,5) y el origen O; recorriendo el segmento entre O y (5,0) en el caso contrario.</p>	<p>Analítico-Visual</p> <p>De fórmulas en la memoria</p>	Satisfacción

El estudiante usa el poder visual de la tecnología para mejor comprender la situación matemáticamente. El uso tecnológico le permite un cambio de contexto permitiéndole la aplicación de nociones o propiedades. GeoGebra actúa como una verdadera herramienta de modelización matemática. No obstante, el estudiante no resuelve el problema haciendo uso del comando lugar geométrico, aunque llega a una solución correcta mediante el trabajo de modelización realizado.

Y por último, para este estudiante se describe las rutas afectivas en los distintos problemas e interacción con procesos cognitivos de visualización. De la comparación de las rutas de los 6 problemas (Cuadro 6) planteados en el experimento de enseñanza se puede observar que la interacción procesos cognitivos de razonamiento visual y emoción negativa se produce en la identificación de estrategias de representación interactiva y la elaboración de determinadas representaciones, donde se tiene que poner en juego la identificación de variaciones paramétricas. Es un estudiante que tiene un uso fluido de imágenes pictóricas concretas, cinestéticas y analógicas. Este estudiante reconoce una estructura global de autoconcepto positiva al trabajar la matemática con el ordenador.

Este tipo de análisis de los datos nos permite identificar en profundidad perfiles de estudiantes con características variadas: género, rendimiento en matemáticas, creencias, estilo de visualización y emociones. La caracterización de las rutas cognitivo-afectiva y las relaciones implicadas según las variables reveló: a) concurrencia en la tipología de usos de visualización y emociones asociadas; y b) que la autorregulación emocional que se produce depende de sus percepciones individuales considerando en ellas estilo, disposición, tipo de actividad o dimensión de habilidad, del conocimiento instrumental y de los sistemas de creencias respecto a aprendizaje matemático con tecnología. Para más información más detallada ver (Gómez-Chacón, 2012 y 2015).

Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas

Problema	Tipo ruta	Emociones/procesos cognitivos									Afecto Global
Pr-1	Ruta 3 (propia)	Curiosidad	Estimulo animo	Júbilo-alegría	Placer	Satisfacción					Autoconcepto positivo
		Imaginación visual	Imaginación visual	Selección estrategia	Comprobar solución	Ver la resolución					
Pr-2	Ruta 1	Curiosidad	Confusión	Perplejidad	Estimulo animo	Placer	Júbilo y alegría	Satisfacción			Autocomp +
		Imaginar situación	Representación	Representación-comprensión de registros	Intuir respuesta	Lograr representación	Lograr representación	Ver la resolución			
Pr-3	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Alegría	Perplejidad	Júbilo	Placer	Satisfacción			Autocomp +
		Visualización-comprensión	Visualización-identificación de conocimiento/ Representación en papel	Representación en papel	Construcción con GeoGebra	Construcción de representación con GeoGebra	Lograr representación dinámica	Constatar y verificar la resolución			
Pr-4	Ruta 3	Curiosidad	Confusión	Perplejidad	Reflexión	Perseverancia -Animo	Confusión	Confianza	Jubilo-Alegría	Satisfacción	Autocomp +
		Comprensión del problema	Búsqueda de estrategia	Bloqueo en llegar a una estrategia		Búsqueda de imagen-mental-	Identificación de estrategia de representación interactiva	Utilización de imágenes pictóricas	Creación de imagen interactiva Visualización analógica	Creación de imagen interactiva Visualización analógica	
Pr-5	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Seguridad	Satisfacción						Autocomp +
			Comprensión del enunciado e imagen mental	En el uso de la estrategia y proceso de representación							
Pr-6	Ruta 3	Curiosidad	Confianza	Seguridad	Satisfacción						Autocomp +
		Comprensión del enunciado Visualización como inferencia de lo analítico	Comprensión del enunciado	En el uso de la estrategia y proceso	Comprobación del resultado mediante gráfica						

Cuadro 6. Resumen rutas cognitiva-afectiva en 6 problemas de lugares geométricos

MODELADO DE LA ESTRUCTURA DE AFECTO LOCAL EN UN GRUPO

Una cuestión básica en la que hemos estado trabajando en estos últimos años es en tratar de ver cómo dar el salto de la caracterización de individuos a la caracterización del grupo. Metodológicamente en esta área la caracterización de un grupo se ha solventado mediante estudios cuantitativos, principalmente basados en encuestas. Aquí, me gustaría plantear otras formas metodológicas que parten de medidas cualitativas y que modelizan cuantitativamente comportamientos recogidos de forma cualitativa. En mis trabajos más recientes he trabajado con modelos de Análisis Estadísticos Implicativos o modelos basados en la Lógica Difusa o Borrosa (Gómez-Chacón, 2015 y en prensa). En esta ponencia describiré los modelos primeros.

Método de análisis implicativo de datos

A continuación se describe brevemente el método de análisis implicativo de datos (Gras et al., 1997). Este procedimiento comienza con un grupo de individuos descritos por un conjunto finito de variables binarias (las emociones, la preferencia por el razonamiento visual, las dificultades de aprendizaje cognitivas, el tipo de rutas). La pregunta que se plantea es: ¿en qué medida es la variable b verdadera cuando la variable a es verdadera? En otras palabras, ¿los sujetos que se sabe que se caracterizan por a tienden también a exhibir b? En situaciones de la vida real teoremas deductivos de la lógica formal $a \rightarrow b$ son a menudo difíciles de establecer debido a la existencia de excepciones. Se hace necesario "explotar" el conjunto de datos para extraer reglas que sean lo suficientemente fiables como para conjeturar relaciones causales que estructuren la población. A nivel descriptivo, permiten detectar una cierta estabilidad en la estructuración. Y, a nivel predictivo, permiten hacer suposiciones.

En la investigación que venimos presentando junto al análisis cualitativos (sec. 4.3.) se realizó un análisis implicativo para explorar la estructura en las interacciones cognición y afecto. Este análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos cruzando variables e individuos, marcando las tendencias de conjuntos de propiedades usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial. Se trata de estadística no simétrica utilizando la idea de implicación del álgebra booleana y la inteligencia artificial. El conocimiento se forma inductivamente a partir de que se encuentra un número de éxitos que aseguran un cierto nivel de confianza en cierta regla. En el momento en que se alcanza ese nivel (subjetivo), la regla se acepta y se pone en práctica.

De acuerdo con Gras (Gras et al, 1997), el aprendizaje comienza con hechos y reglas que están interrelacionadas y que forman progresivas estructuras de aprendizaje. Este es justamente el objetivo del presente trabajo, encontrar reglas que permitan disminuir el número de categorías y que, al mismo tiempo, proporcionen información sobre los aspectos que están interviniendo en la estructura cognición y afecto. Siguiendo a Grass hay tres importantes reglas que se pueden describir en los procesos de aprendizaje: 1) $a \rightarrow b$, donde a y b pueden ser categorías y reglas; 2) $a \rightarrow (b \rightarrow c)$; y 3) $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)$. Estas reglas describen una estructura de aprendizaje que es jerárquica, orientada y no simétrica. Esta estructura se puede obtener mediante el programa Clasification Hiéraschique et Cohesitive (CHIC) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Este programa produce tres tipos de diagramas que ofrece diferente información: a) Árbol de similitudes: aglutina grupos de variables en función de su homogeneidad lo que da pie a la interpretación de las agrupaciones con que se manejan las variables, produciéndose en cada nivel del gráfico una agrupación de similaridad en orden decreciente. b) El árbol jerárquico: permite interpretar en términos de semejanza clases de variables constituidas significativamente a ciertos niveles, identificando reglas y niveles de cohesión entre las variables o clases. c) Gráfico implicativo: su construcción utiliza tanto el índice de intensidad y un índice de validez. Muestra las asociaciones implicativas que son significativas a niveles específicos.

Resultados del modelado de la Estructura de Afecto Local en un grupo

A continuación presentamos para el grupo de universitarios del grado de matemáticas la estructura de afecto local las categorías de análisis y los resultados que se derivaron.

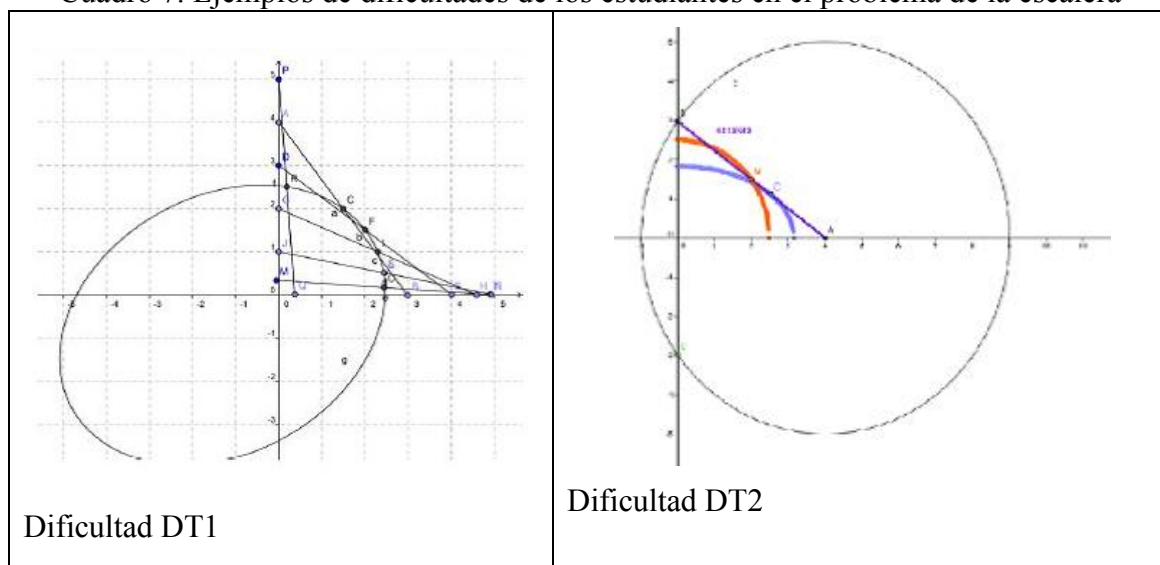
Definición de categorías

Primeramente a la realización del análisis implicativo es necesario un análisis exploratorio, descriptivo e interpretativo, que implica el análisis de datos, principalmente de forma inductiva, con las categorías y construcción de patrones e interpretaciones sobre la información recogida (sec. 4.3). Este análisis basado en un enfoque cualitativo es cotejado por tres investigadores con objeto de establecer categorías para un análisis de implicación. En nuestro estudio se definieron las siguientes categorías:

1. *Emociones asociadas con el razonamiento visual en el problema de la escalera*: P4EviP (gusto), P4EviN (disgusto), P4EviM (mezcla de emociones), and P4viInd (indiferencia).

2. *Dificultades instrumentales*: se seleccionaron dos tipos de dificultades que caracterizaban los problemas (Cuadro 7 y Gómez-Chacón & Escribano, 2011). Tipo 1: Construcciones estáticas (discreta) (DT1P4). En esta tipología, el alumno utiliza GeoGebra como una pizarra avanzada pero no utiliza el dinamismo que propicia el software, sólo repite las construcciones para un conjunto de puntos. Para trazar el lugar geométrico se ayudan del comando cónica que pasa por 5 puntos. Tipo 2: definición no correcta de la construcción (punto libre) (DT2P4). El alumno resuelve aparentemente el problema pero la solución impide la utilización de las herramientas de GeoGebra. Para utilizar la herramienta lugar geométrico es necesario que los puntos que lo definen estén correctamente determinados (no pueden ser puntos libres). En esta aproximación el alumno, en el mejor de los casos, puede obtener una representación parcialmente válida pero que no admite ningún tratamiento algebraico con GeoGebra. En este problema, la dificultad está en definir el punto de la escalera que no es el punto medio. Si se toma un punto libre no se podrá utilizar la herramienta Locus.

Cuadro 7. Ejemplos de dificultades de los estudiantes en el problema de la escalera



3. *Visualización inicial del problema*: VisiP4

4. *Creencias sobre el razonamiento visual*: BeviP (positiva), BeviN (negativa)

5. *Preferencias y emociones sobre la visualización*: EviP (gusto), EviN (no gusto), EviInd (indiferente)

6. *Creencias sobre el aprendizaje con ordenador*: BeGeoP (positiva), BeGeoN (negativa)

7. *Emociones hacia el ordenador*: EGeoP (gusto), EGeoN (no gusto), EGeInd (indiferencia)

8. *Rutas cognitiva-afectiva R1 y R2 (explicitadas en el cuestionario Cuadro 3) and R3 (formuladas por el propio sujeto como el ejemplo dado en el Cuadro 5).*

Cada investigador llevó a cabo un análisis por separado. Los resultados se compararon y se discutieron los desacuerdos. La identificación de las rutas afectivo-cognitiva, las emociones y meta-emoción fue objeto de análisis conjunto.

Resultados

En este estudio se refleja una respuesta similar, entre los individuos, en las creencias sobre el uso de software de geometría dinámica como ayuda a la comprensión y la visualización de la idea geométrica de locus. Todos los estudiantes afirmaron que le resulta útil y el 80% expresan emociones positivas argumentando su fiabilidad, rápida ejecución y el potencial para desarrollar su intuición y visión espacial. Añadieron que la herramienta les ayudó a superar los bloqueos mentales y mejorar su confianza y motivación. Como futuros profesores destacaron que GeoGebra podría favorecer no sólo el pensamiento visual, sino ayudar al alumno a mantener una vía afectiva productiva. Indican que el trabajo con herramienta les induce creencias positivas hacia sí mismo y en su propia capacidad y disposición para participar en las matemáticas aprendizaje de las matemáticas (concepto de sí mismo como aprendiz matemática).

El Cuadro 8 presenta un resumen de frecuencias de tipologías de las rutas y emoción asociada al proceso de visualización en el problema 4. Se ponen de relieve las rutas afectivas mixtas, donde las emociones negativas y positivas alternan y donde la autorregulación emocional es optimizada:

Cuadro 8. Frecuencias de tipología de rutas afectivas cognitivas y emociones asociadas a los procesos de visualización al problema 4 (N=32)

	R1	R2	R3	EviP	EviN	EviM	EviInd
Problema 4	15	4	13	6	8	17	1

Para profundizar en esta relación de mezcla emocional y en la meta-emoción nos planteamos la cuestión ¿qué diferencias existes en la determinación de estas tres rutas por un estudiante? Un primer análisis indica que la ruta R3 tiene una elaboración propia y presenta mucha más mezcla de emociones y además, en gran parte de los casos, no se refleja tan explícitamente una tendencia tan clara como la que representa R1 (positiva) o R2 (negativa), sino que hay atribuciones negativas a momentos de elaboración de la visualización y positivas por el logro de la representación y las emociones negativas se regulan. En un segundo nivel de análisis de la R3 mediante el estudio implicativo jerarquizado se obtuvo algunas implicaciones afectivo-cognitivo significativas en las que está implicada la ruta R3 respecto a los procesos visuales como las siguientes: $R3P4 \rightarrow^{0.99} \text{VisiP4}$ y $R2P4 \rightarrow^{0.90} \text{DT2P4}$.

En el árbol cohesitivo (Figura 2) se obtuvieron nueve nodos de los cuales tres fueron significativos que nos permitió la identificación de los grupos siguientes:

Grupo 1 (N (nivel 1, cohesión: 0.998)= (R3P4 VisiP4) al que contribuyen más del 40% sujetos que tienen una visualización inicial del problema 4 y han indicado la ruta R3 como expresión de su interacción cognición y afecto. Además, estos individuos tienen como característica más significativa su emoción positiva por el ordenador (manejo de software GeoGebra (EGeoP)).

Grupo 2 (N (nivel 7, cohesión: 0.276= ((EviP BeviP) BeGeoP)) en el que se destaca que una creencia positiva en el uso de GeoGebra viene marcada por creencias y preferencias de gusto por el razonamiento visual.

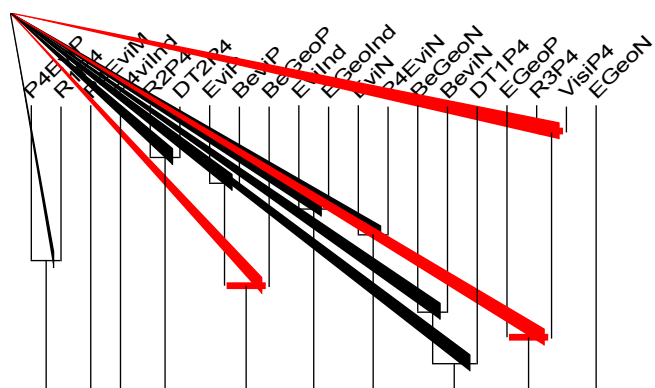


Figura 2. Árbol cohesivo

A MODO DE EPILOGO

En síntesis, en esta ponencia se ha argumentado, dando evidencias empíricas de que la articulación entre cognición y afecto está en la base de toda actividad matemática. Sin embargo, hemos reseñado que este tipo de investigaciones son aún escasas en la agenda de Educación matemática. Una de las razones principales es que éstas se han escorado más a los procesos de valoración cognitiva que a considerar procesos cognitivos propios de la actividad matemática (procesos de pensamiento, heurísticas de resolución de problemas, etc.). La abundancia de unos frente a la escases de otros viene mediada tanto por la adecuación de marcos teóricos como metodológicos.

Un estudio como el descrito brevemente aquí requiere de sinergias entre marcos y sinergias entre métodos. Cuando me refiero sinergias entre marcos teóricos me estoy refiriendo no a los tradicionales trabajados en la dimensión afectiva sino aquellos vinculados a los espacios de trabajo matemático.

En esta ponencia se ha tratado de visibilizar la clave tanto epistemológica como ontológica de la metodología que actúa en la determinación de “la interacción cognición y afecto” en matemáticas. También, se ha mostrado un diseño de investigación que ha sido potencialmente significativo y productivo para abordar este objetivo. Destacamos:

- La *Estructura de Afecto Local*. En nuestro trabajo, cuando se estudia la dimensión emocional de los sujetos, consideramos que no solo se puede evaluar sus afectos desde un cuestionario sobre qué piensa sobre A (qué nos dice el sujeto de su actitud o emoción...), sino en qué circunstancias la persona ha sido expuesta a A (es decir, las condiciones de una posible internalización), y lo que ella dice o hace sobre A (lo que exterioriza) -y sólo desde esta base es como inferimos su dimensión emocional.
- La *conceptualización del trabajo matemático* pueden propiciar una contribución esencial en la metodología para el diagnóstico de la interacción cognición y afecto. En relación a la dimensión cognitiva en procesos de valoración, las categorías de niveles establecidas han sido útiles para un análisis global, mientras que el modelo de visualización matemática ha posibilitado una mirada local en cómo se producen las representaciones e imágenes. El marco matemático de visualización nos ha permitido caracterizar las dialécticas que se llevan a cabo al transitar (de modo no lineal) por la interacción cognición y afecto.
- Las *decisiones metodológicas*: la comprensión del sujeto y objeto de la investigación a diferentes niveles y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos para abordar el tema del estudio. Mientras que los estudios de encuestas y cuestionarios pueden ser métodos adecuados para la medición de variables de tipo rasgo, experimentos de diseño proporcionan los medios para hacer frente a la complejidad de los entornos educativos. Ofrecen una mayor comprensión de la ecología

de aprendizaje (un complejo sistema que implica muchos elementos de diferentes tipos y en diferentes niveles de interacción) por el diseño de los elementos que intervienen y anticipar cómo interactúan para apoyar el aprendizaje (Cobb et al 2003). La investigación cualitativa se llevó a cabo mediante la observación de los sujetos, ya que resuelven un problema durante el entrenamiento. Se pidió a los estudiantes para discutir su enfoque para resolver el problema de protocolos que cubren los siguientes elementos: proceso de resolución de problemas paso a paso, descripción de las dificultades que podrían enfrentar y las estrategias desplegadas. También se les pidió que registraran las emociones y las dificultades experimentadas por escrito. Sus procesos motivacionales y emocionales fueron evaluados a través de análisis de rendimiento y entrevistas semiestructuradas grabadas en vídeo.

- Y por último el uso *del análisis implicativo de datos* nos da elementos para generar predicciones con respecto a la estructura cognitiva y afectiva en el uso de heurísticas de resolución de problemas. Una de las metas de uso de estas herramientas es identificar los patrones de conducta de los datos para inferir conocimiento y predecir situaciones. En el caso que nos ocupa en esta investigación es predecir perfiles de interacción, combinando variables cualitativas y cuantitativas. El aplicar el análisis implicativo en el área de las emociones y procesos cognitivos complejos supone un avance en la forma de analizar los problemas, ya que esta herramienta tiene la ventaja de incorporar el lenguaje común al diseño de sistemas automatizados.

REFERENCIAS

- Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive- Version sous Windows-CHIC 1.2*, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques Rennes.
- Cobb, P., Cofrey, J., di Sessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1): 9-13.
- De Corte, E., Depaepe, F., Op 't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2011). Students' self-regulation of emotions in mathematics: An analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM*, 43, 483-495.
- DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.
- Di Martino, P., Gómez-Chacón, I. Ma, Liljedahl, P., Morselli, F., Pantziara, M., Schukajlow, S. (2015). Affect and mathematical thinking, Working group 8, *Proceedings CERME-9*, Praha University.
- Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions: A Study of Numerate Practices*, Routledge Falmer, London.
- Fennema, E. (1989). The study of affect and Mathematics: a proposed generic model for research. En McLeod, D. B., & Adams, V. M. *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. (pp. 205-219). Rotterdam, NL: Springer-Verlag Publishing.
- Goldin, G. (2002). Affect, Meta-Affect, and Mathematical Belief Structures. In G. Leder, R. Pehkonen & G. Törner (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 59-73) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Goldin, G. A. (2004). Problem Solving heuristics, affect and discrete mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 36(2), 56-60, doi: 10.1007/BF02655759.
- Goldin, G.A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2 (3), 209-219.
- Gómez-Chacón, I. M. (2015). Meta-emotion and mathematical modeling processes in computerized environments. In B. Pepin & B. Rösken-Winter (Eds.), *From beliefs and affect to dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions* (pp. 201-226). Switzerland: Springer.

- Gómez-Chacón, I. M. (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3-4), 57-74.
- Gómez-Chacón, I. M^a (2011). Mathematics attitudes in computerized environments. A proposal using GeoGebra. In L. Bu and R. Schoen (eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, (pp. 147-170). Sense Publishers.
- Gómez-Chacón, I. M^a (2008). Suggesting practical advances in the research on affect in mathematical learning, ICME-11, 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, México.
- Gómez-Chacón, I. M^a (2000a). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.
- Gómez-Chacón, I. M^a (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 43: 149-168.
- Gómez-Chacón, I. M^a (1997/2003). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*, Tesis Doctoral Universidad Complutense de Madrid. Publicaciones Universidad Complutense de Madrid.
- Gómez-Chacón, I. M^a & Figueral, L. (2007). Identité et facteur affectifs dans l'apprentissage des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM Strasbourg*, 12, 117-146.
- Gómez-Chacón, I. M^a & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers, *GeoGebra International Journal of Romania (GGIJRO)*, 2 (1), 209-224.
- Gómez-Chacón, I. M^a, García-Madruga, J. A.; José Óscar Vila, J, Elosúa, M^a: R , Rodríguez, R (2014) The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, Cognitive Reflection, Reasoning and Working Memory, *Learning and Individual Differences*, January Vol. 29, 67-73.
- Gómez-Chacón, I. M^a, Romero, I. M^a, García, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect, *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-016-0755-2
- Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies (Vol. 2, pp. 412-419)*. New York: Springer-Verlag.
- Guzmán, M. de (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical Analysis. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. University of Crete. Greece.
- Hannula, M.S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics* 49(1), 25-46.
- Leder, G.C., Pehkonen, E. and Torner, G. (eds.) (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Kluwer, Dordrecht.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.
- Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 219-236.
- Mandler, G.: (1989) Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. In D. B. McLeod y V M. Adams (Eds) *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer-Verlag. New York. pp. 3-19.

- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 637-141.
- McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 575–596). Macmillan, New York.
- McLeod, D. B., & Adams, V. M. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Rotterdam, NL: Springer-Verlag Publishing.
- Pepin, B. & Rösken-Winter, B. (Eds.) (2015). *From beliefs and affect to dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions*. Switzerland: Springer.
- Piaget, J. (1981). *Intelligence and affectivity: Their relationship during child development*. Palo Alto: Annual Reviews.
- Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*. (205–235). Ed. Sense Publishers.
- Schlöglmann, W. (2005). Affect and Cognition - Two Poles of a Learning Process. In: C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Conceptions of Mathematics. Proceedings of Norma 01*. (pp. 215- 222). Svensk Förening för Matematikdidaktisk Forskning, Linköping.
- Schlöglmann, W. (2002). Affect and mathematics learning, In A.D. Cockburn and E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th PME*, (Vol. 3, pp. 185–192.). Norwich, UK.