NOTAS
DE
CLASE

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.81-93

Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen

Fecha de recepción: Abril, 2000

M. J. González-López,
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, España
glopez@matesco.unican.es
P. Flores,
Dpto. Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España
pflores@plato.ugr.es

Resumen: *En este trabajo profundizamos en el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria sobre el contenido matemático volumen. Presentamos una evolución histórica de este concepto, basada en la búsqueda de relaciones entre volúmenes de cuerpos utilizando estrategias de descomposición. Seguimos las propuestas de Euclides, Liu-Hui y Cavalieri, poniendo de manifiesto las dificultades principales que se derivan del uso de los métodos de descomposición, entre las que cabe mencionar la necesidad de justificar procesos infinitos para relacionar volúmenes de cuerpos elementales (como la pirámide y el prisma). Proponemos que esta profundización se aborde en la formación inicial de profesores de matemáticas, como información necesaria a partir de la cual el profesor de secundaria puede construir dimensiones didácticas del conocimiento matemático.*

Abstract: *In this paper we go into the mathematics teacher knowledge of secondary education on the mathematical content 'volume'. We present a historical evolution of this concept, based in the searching of relations among volumes of solids using decomposition strategies. We follow the proposals of Euclid, Liu-Hui and Cavalieri, highlighting the main difficulties that arise out of using decomposition methods; among these difficulties it is worth mentioning the necessity of using infinite processes in order to relate volumes of elementary solids (as pyramid and prism). We propose this approach to be incorporated to the mathematics teachers training, as we consider it provides essential information from which the future secondary education teacher can build didactical dimensions of the mathematical knowledge.*

1. Introducción

El sistema educativo español[1] establecido por la LOGSE (Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo, 1990) demanda profesores reflexivos y autónomos, capaces de tomar decisiones razonadas, tanto en la planificación global de su tarea como en la

[1] Sistema Educativo Español:
- Educación Primaria (6-12 años).
- Educación Secundaria (12-18 años), dividida en dos etapas: Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años) y Bachillerato (16-18 años).

ejecución diaria de la misma. Este novedoso planteamiento ha impulsado en los últimos años la reflexión sobre la caracterización de la profesión de educador matemático, lo que ha permitido identificar una serie de componentes del conocimiento profesional (García, 1997) que el profesor de matemáticas tiene que adquirir en su desarrollo profesional.

Entre dichas componentes cabe mencionar el conocimiento de y sobre las matemáticas (Llinares, 1998), es decir, un conocimiento de los referentes históricos y epistemológicos de los conceptos matemáticos que, más allá de su estructura formal, los contemple con fines educativos.

Situándonos en la perspectiva de la formación de profesores, consideramos necesario materializar esta demanda de conocimiento matemático con fines profesionales en los planes de estudios de las Licenciaturas de Matemáticas, que son los que soportan la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en España. En dichos planes la tónica habitual es obviar los aspectos relacionados con la enseñanza de las matemáticas; en ellos se transmite a los futuros profesores la idea de que el conocimiento matemático se justifica por sí mismo, que es independiente del contexto y que forma un cuerpo de conocimiento formal que basta conocer para después transmitir. En el mejor de los casos, algunas universidades cuentan con alguna asignatura específica de Didáctica de las Matemáticas, que pretende remediar todas las carencias didácticas producidas durante largos años de formación técnica, pero en la que difícilmente se pueden afrontar profundizaciones matemáticas como las que vamos a proponer aquí.

Sin embargo, dichas profundizaciones sobre contenidos matemáticos podrían abordarse desde las distintas asignaturas de la Licenciatura de Matemáticas, haciendo que sus programas incorporasen aspectos que, siendo matemáticos, son también relevantes en la tarea profesional del profesor de matemáticas. Se contemplarían así las necesidades formativas del estudiante, futuro profesor de matemáticas de secundaria.

En este trabajo nos hemos propuesto profundizar en el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria sobre el contenido matemático **volumen**. Para ello presentamos, en primer lugar (Sección 2), los contenidos sobre el tema que se imparten en secundaria y la formación correspondiente que reciben los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas. Analizamos ambas propuestas en la Sección 3, poniendo de manifiesto la brecha existente entre ellas en los contenidos. Expresamos el interés de otros métodos que permiten presentar el conocimiento matemático sobre el volumen como resultado de una evolución histórica y permiten tratar en profundidad los aspectos relacionados con la conservación y la comparación de volúmenes, aspectos que consideramos están en la base del conocimiento profesional del profesor de matemáticas sobre el volumen. Se trata de los métodos de descomposición de un cuerpo geométrico en otros cuerpos (Liu-Hui y Eudoxo) o en capas (Cavalieri). En las secciones 4 y 5 analizamos los aspectos clave que surgen del uso de dichos métodos para la obtención de relaciones entre el volumen de distintos cuerpos (el ortoedro, el prisma, el cilindro, la pirámide y el cono), y su consiguiente utilidad en la justificación de las fórmulas habituales de volumen. Detallamos las peculiaridades que tiene este tratamiento del volumen respecto del área, entre las que cabe destacar la necesidad de justificar procesos infinitos. Finalizamos con una sección de reflexiones sobre el interés matemático y formativo del desarrollo presentado.

2. Enseñanza del volumen: desde la educación secundaria a la universidad

En la educación secundaria obligatoria (12-16 años)

Entre los contenidos relacionados con el volumen que se prescriben en los documentos oficiales para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) podemos extraer los siguientes, desde dos perspectivas distintas:

1. Desde el nivel conceptual, en el bloque de representación y organización en el Espacio, donde se estudian los *elementos característicos de los poliedros y los cuerpos redondos, las relaciones de inscripción, descomposición e intersección entre figuras y cuerpos, la utilidad e importancia de algunas figuras y cuerpos para propósitos concretos (por ejemplo, teselar) o las relaciones entre el volumen de figuras semejantes* [2].
2. En la particularización de la teoría general de la medida, estimación y cálculo de magnitudes al caso del volumen, incidiendo en *la medición aproximada (estimación) la medición directa (manejo de instrumentos de medida) y la medición indirecta (uso de fórmulas).*

La primera perspectiva contiene algunos de los elementos útiles para percibir la magnitud volumen, como paso necesario y fundamental, previo a la medición. Sin embargo, los documentos oficiales no recogen explícitamente esta necesidad y pasan a presentar el volumen, directamente, en el ámbito de la medida.

Así, es la segunda perspectiva la que recoge los aspectos más relevantes del tratamiento del volumen en la ESO. Dichos aspectos pretenden ser una *continuación de los conceptos adquiridos en Primaria (los procedimientos usuales de medición y las formas de expresar la medida), para avanzar en Secundaria en la conceptualización de las ideas relacionadas (magnitud, cambio de unidad, etc.), la ampliación de los sistemas de medida convencionales y el desarrollo de diversas estrategias de medida (estimación, uso de fórmulas, etc).* Además, la evolución del concepto de volumen a lo largo de la ESO consiste en *controlar el error de estimación y medida con más precisión y ampliar progresivamente el rango de figuras de las que calcular el volumen.*

Es significativo el hecho de que desde los primeros contactos con el concepto de volumen -que se producen por primera vez en la ESO- se prime una cualidad de este concepto (ser susceptible de ser medido), previamente al estudio del concepto en sí. A pesar de esta postura, un criterio de evaluación propuesto en los documentos oficiales es *calcular volúmenes de cuerpos compuestos por ortoedros (...)no se trata tanto de la aplicación de fórmulas como de la utilización de la noción de volumen.*

En el bachillerato (16-18 años)

Sólo en la asignatura matemáticas II de las modalidades de ciencias de la naturaleza y la salud, y de tecnología, se menciona el volumen como ejemplo de aplicación de los determinantes al cálculo de productos vectoriales y mixtos.

[2] El texto en cursiva de esta sección es un compendio de extractos, casi literales, del documento oficial *Educación Secundaria Obligatoria (Matemáticas)*. Ministerio de Educación y Ciencia (1992).

En la licenciatura de matemáticas

La situación en la licenciatura de matemáticas en cuanto al volumen es la siguiente:

i) En álgebra vectorial, se estudian las magnitudes vectoriales, que aparecen cuando se trata de dar interpretación geométrica a los distintos productos (escalar, vectorial, mixto) que se pueden definir entre los vectores de un espacio vectorial. Esto permite medir ángulos, áreas y volúmenes orientados; en particular, el volumen orientado del paralelepípedo que se forma sobre tres vectores linealmente independientes. La generalización de este concepto de volumen a cualquier otro subconjunto acotado del espacio es la medida de Jordan, que se calcula usando el supremo y del ínfimo de sumas de volúmenes de paralelepípedos que aproximan, por dentro y por fuera, respectivamente, al subconjunto en cuestión.

ii) El cálculo integral ofrece otra perspectiva en el tratamiento del volumen. En este caso se parte del espacio euclídeo E, donde el volumen es una función real positiva, cuyo dominio son los subconjuntos compactos de E, que verifica una serie de propiedades (es aditiva, invariante respecto a desplazamientos, etc). Dependiendo de la descripción del recinto considerado (cuerpo de revolución, cilindroide limitado por una superficie, etc.) la teoría general de la medida proporciona un tipo de integral (integral definida, integral doble o triple sobre un recinto, etc), que responde a las propiedades requeridas para la función volumen.

3. Contraste entre contenidos a impartir y contenidos recibidos

En nuestra opinión esta situación presenta una brecha evidente entre la formación recibida y los conocimientos posteriores necesarios para poder llevar a cabo la enseñanza del volumen en secundaria, a nivel de contenidos:

a) en la licenciatura de matemáticas se presentan marcos teóricos generales que fundamentan, en particular, algunas de las operaciones concretas que se estudian en secundaria; no se tiene como objetivo justificar las fórmulas de volumen, sino que éstas son el resultado de evaluar funciones abstractas entre estructuras también abstractas; no hay una ligazón clara entre la geometría sintética en la que se contextualiza el volumen en secundaria y los temas avanzados de la licenciatura;

b) en la etapa secundaria, la consideración del volumen como medida es el aspecto predominante, quedando en segundo plano las actividades encaminadas a la adquisición del concepto de volumen. Además, de las distintas posibilidades que tenemos para medir el volumen, la que nunca falta en los libros de texto de secundaria es el uso de fórmulas. Éstas se presentan frecuentemente como productos terminados, cuya justificación se obvia, quizás por considerarla fuera del alcance de la etapa en que se usan.

Tenemos en este planteamiento una doble crítica: por un lado, la ausencia casi total de aspectos didácticos en las licenciaturas de matemáticas sobre los contenidos de secundaria, en particular, el volumen; por otro lado, el uso indiscriminado de fórmulas sin justificar en secundaria y la no distinción necesaria entre las magnitudes y el hecho de asignarles medida.

Ambas carencias pueden intentar conjugarse desde la perspectiva de la formación de profesores, abordando en la licenciatura el tema del volumen con el objetivo general de intentar justificar las fórmulas mediante métodos que:

1. permitan tratar en profundidad los aspectos relacionados con la conservación y la comparación de volúmenes (actividades previas a la medición),
2. estén contextualizados en un ámbito de geometría sintética,
3. tengan una base empírica suficiente que permita adaptarlos al nivel de secundaria, aunque formalmente necesiten técnicas matemáticas fuera del alcance de esta etapa.

Consideramos que los métodos de **descomposición de unos cuerpos geométricos en otros cuerpos, o de la aplicación del Principio de Cavalieri**, basada en la descomposición de un cuerpo en capas, a los que dedicamos las secciones siguientes de este trabajo, cumplen estos requisitos. Estos métodos tienen reconocida utilidad en la enseñanza del volumen (Del Olmo, Moreno, Gil 1989). Están centrados en la obtención de **relaciones entre los volúmenes** de distintos cuerpos y, como consecuencia de dichas relaciones, permiten justificar las fórmulas, que se presentan así como el final de un proceso. Podemos así deducir el volumen de cuerpos diversos a partir del volumen -que se supone conocido- del ortoedro, de la misma forma que en el caso de la superficie se pueden deducir las fórmulas del área de cualquier polígono a partir del área del rectángulo. Dado que este proceso es habitual para la enseñanza del área, permiten seguir la misma línea argumental para el caso del volumen.

Sin embargo, el tratamiento del volumen mediante métodos de descomposición presenta algunas peculiaridades respecto del área: en lo que sigue detallaremos los puntos críticos que encontramos, desde el punto de vista de los contenidos matemáticos, al usar estos métodos para obtener las relaciones clásicas del volumen del ortoedro, el prisma, el cilindro, la pirámide y el cono. Nuestra intención es recopilar información útil para el (futuro) profesor de secundaria, que le ayude a plantear la enseñanza del volumen evitando el uso irreflexivo, cómodo y habitual de las fórmulas, al mismo tiempo que controla los obstáculos encontrados. Presentamos estos aspectos en las dos secciones siguientes, adoptando un estilo deductivo que puede ser útil como posible secuencia de enseñanza para alumnos de la licenciatura de matemáticas.

Nota: Aunque el concepto de *capacidad* está íntimamente ligado al de *volumen*, tenemos en la capacidad cualidades que dependen de aspectos no matemáticos, como el tipo de sustancia u objeto con que llenar un recipiente, la posición o el grosor físico del mismo etc., que escapan al análisis que pretendemos realizar en estas páginas, por lo que nos ocupamos exclusivamente del concepto de volumen.

4. Métodos de descomposición de un cuerpo en otros en cuerpos

En el caso de la superficie los métodos de descomposición y de completado garantizan relaciones de igualdad de área entre polígonos: el Teorema de Boliay-Gerwien afirma (Boltianski, 1981):

En el plano euclídeo, dos polígonos tienen la misma superficie
si y sólo si son equicompuestos[3]
si y sólo si son equiadicionales[4]

Encontramos numerosas actividades que se pueden realizar con material, que convencen de la veracidad de este resultado en el nivel de primaria. La obtención del área de cualquier superficie poligonal a partir del área del rectángulo es la consecuencia didáctica más significativa que se puede extraer del mismo.

En el caso del volumen no tenemos un resultado equivalente (volveremos sobre este asunto en la sección 4.3), pero también la descomposición tiene su utilidad, como veremos a continuación.

Cortando un paralelepípedo por planos perpendiculares a su base, obtenemos partes que, dispuestas de otra forma, proporcionan un ortoedro de la misma altura y con el mismo polígono en la base que el paralelepípedo dado (Figura 2, tomada de (Puig Adam, 1986), p. 338)

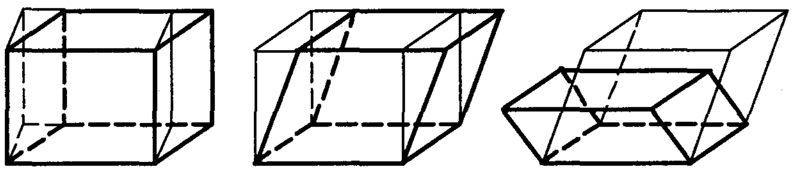


Figura 2

Utilizando el resultado de Bolyai-Gerwien, podemos debilitar la condición sobre las bases: no es necesario que éstas sean el mismo polígono, basta que tengan la misma cantidad de superficie (en terminología griega, que sean iguales).

Así justificamos que:

Cualquier paralelepípedo es equicompuesto con el ortoedro de igual base y altura.

El método de descomposición también es válido para comparar el prisma recto con el ortoedro, pues basta extender al prisma la descomposición de su base. Pero no ocurre lo mismo con el prisma oblicuo, donde la descomposición de la base (que recompuesta formaría un paralelogramo) extendida al prisma no garantiza, obviamente, la recomposición en un paralelepípedo.

Pero el método de descomposición permite relacionar el prisma recto y el oblicuo a través de otras magnitudes distintas de la base y la altura del prisma. Se trata de la arista lateral y la sección perpendicular: realizando un corte por un plano perpendicular a las aristas de un prisma oblicuo lo transformamos en uno recto que tiene la misma arista (l), pero distintas base y altura (Figura 3). El tipo de descomposición mostrado en la Figura 3

[3] Dos figuras se llaman *equicompuestas* si descomponiendo una de ellas en un número finito de partes y disponiendo dichas partes de otra forma, se obtiene la otra.

[4] Dos figuras se llaman *equiadicionales* si ambas pueden ser completadas por partes de igual área (volumen), de modo que resulten figuras de igual área (volumen).

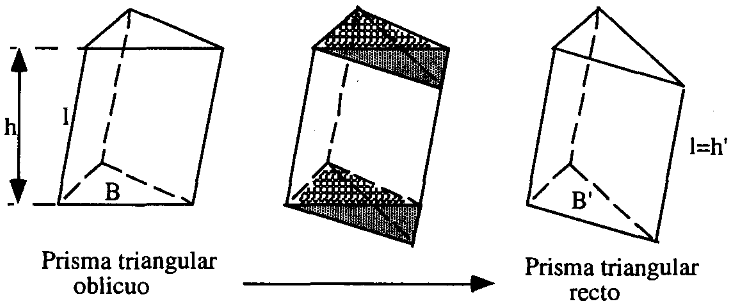


Figura 3

tiene la ventaja de que también es válido para el cilindro oblicuo, produciéndose, en este caso, secciones elípticas.

[illegible]

Algunas pirámides particulares

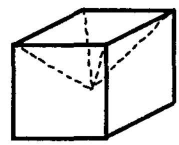


Figura 4

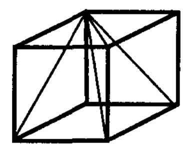


Figura 5

Sobre cada una de las seis caras de un cubo podemos construir una pirámide cuadrangular de altura la mitad de la arista del cubo, obteniendo así la relación 1:6 entre el volumen de ambos cuerpos (Figura 4). También es posible justificar una relación 1:3 entre el volumen del cubo de arista l y la pirámide cuadrangular recta de anchura, largura y altura iguales (l), ya que es posible descomponer dicho cubo en tres de tales pirámides (Figura 5).

La generalización de esta relación al caso de una pirámide (triangular) cualquiera no es evidente. Es uno de los puntos clave que debemos tratar. Usar para ello los métodos de descomposición conduce a la necesidad de justificar un proceso infinito, como detallamos a continuación.

4.1 Descomposición de LIU-HUI: PIEH-NAO (o pirámide triangular) y YANG-MA

En (Chemla, 1992) y (Cromwell, 1997) tenemos demostraciones detalladas de las afirmaciones de este párrafo, así como reproducciones de las figuras que aquí presentamos.

En los comentarios de Liu Hui a la obra china *Nueve capítulos sobre el arte matemático* aparecen métodos de descomposición de ciertos poliedros en cuatro cuer-

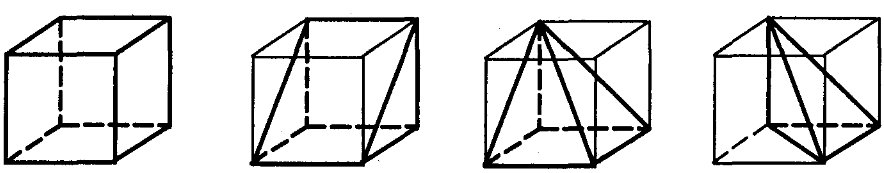


Figura 8

pos básicos, a saber, el cubo, el semi-cubo, y los llamados Yang-ma y Pieh-nao estándar (Figura 8).

La composición del Yang-ma estándar con el Pieh-nao estándar forma un semi-cubo. La composición de tres Yang-ma estándar forma un cubo. Así, *el volumen del Yang-ma estándar es el doble que el del Pieh-nao estándar*. Estas relaciones permiten probar que el volumen del Pieh-nao estándar es 1/3 del volumen del semi-cubo.

Si ahora generalizamos estos cuerpos estándar a los obtenidos de la misma forma a partir de un paralelepípedo general (en lugar de un cubo) tendremos un semi-paralelepípedo (o prisma triangular), un Yang-ma (o pirámide de base un paralelogramo) y un Pieh-nao (o pirámide triangular). En este caso falla obviamente la propiedad de que tres Yang-ma formen el paralelepípedo y por ello no podemos justificar, de la misma forma que antes, que el volumen del Yang-ma es el doble que el del Pieh-nao. Veremos a continuación una descomposición de estos cuerpos que, reiterada sucesivamente, permite justificar esta propiedad de forma intuitiva.

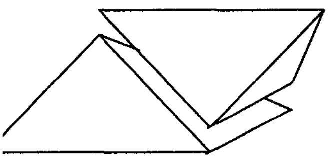


Figura 9

La Figura 9 muestra la descomposición de un semi-paralelepípedo en un Yang-ma y un Pieh-nao, que a su vez pueden descomponerse, como indica la Figura 10, en cuerpos de dimensiones las mitad de las dadas (a/2, b/2 y h/2):

- un Yang-ma se descompone en un paralelepípedo, dos semi- paralelepípedos y dos Yang-ma;
- el Pieh-nao correspondiente se descompone en dos semiparalelepípedos y dos Pieh-nao.

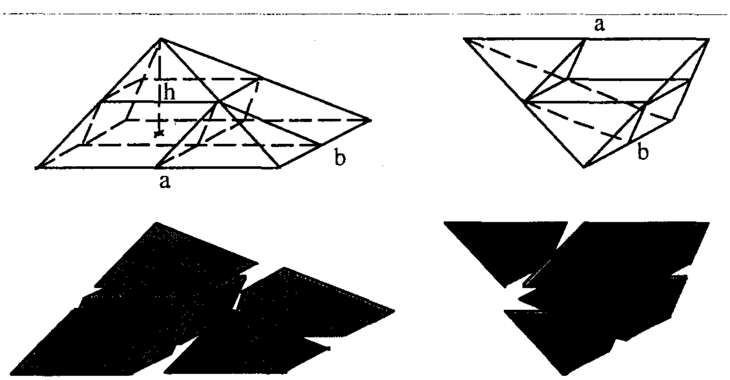


Figura 10

Liu-Hui considera los cuerpos pintados de gris y rojo, lo que facilita la explicación de su argumento posterior. Con ayuda de esta descomposición, observa que en las tres cuartas partes del volumen del semi-paralelepípedo original se da la proporción 2:1 para los colores gris:rojo. En la cuarta parte restante desconocemos la proporción, pero tenemos dos reproducciones del semi-paralelepípedo original, y sobre ellas volvemos a descomponer de la misma forma. Así, en la segunda descomposición, reducimos la parte de proporción desconocida a $1/4^2$, y, si seguimos el proceso, en el paso n-ésimo, la parte de proporción desconocida es $1/4^n$. Liu-Hui no concluye formalmente este proceso, sino que, tras un número suficiente de pasos, considera despreciable la cantidad de proporción desconocida, dando así por probado que la proporción global gris:rojo es 2:1. Por supuesto, el uso del límite hubiera resuelto este escollo, pero estaba lejos del alcance en la época (siglo III). Nuestro interés principal ha sido poner de manifiesto la necesidad de añadir a la ingeniosa descomposición la justificación de un proceso infinito.

Una vez convencidos de que se cumple esta proporción 2:1, si consideramos una pirámide triangular cualquiera (es decir, un Pieh-nao, de volumen P) podemos completarla (con un Yang-ma, de volumen Y, con Y=2P), para formar un prisma triangular (semi-paralelepípedo, de volumen S) de la misma base y altura. Entonces:

$$S=P+Y=P+2P=3P$$

Hemos justificado así que *el volumen de la pirámide triangular es 1/3 del volumen del prisma de su misma base y altura*. Dado que cualquier pirámide se puede descomponer en pirámides triangulares, hemos justificado:

El volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma de igual base y altura

En el camino hemos necesitado reiterar indefinidamente un proceso de descomposición cuya formalización (el límite) está fuera de lugar en secundaria obligatoria. Sin embargo, es posible a ese nivel intuir el final del proceso, convenciéndose de la validez del resultado, al igual que Liu-Hui, a partir de un argumento manipulativo que sí está a su alcance.

4.2. El método de exhausción

La obtención por Liu-Hui de la relación anterior para la pirámide necesita de un proceso de descomposición infinito que se resuelve formalmente en el siglo XVII, con la aparición del cálculo infinitesimal. Sin embargo hay otro método, utilizado por Euclides, que permite justificar completamente dicha propiedad. Se trata del **método de exhausción**, propuesto por Eudoxo, que se fundamenta en el llamado Axioma de Arquímedes[5].

Euclides consigue soslayar el proceso infinito mediante una prueba por reducción al absurdo, para la cual, a diferencia de Liu-Hui, necesita conocer de antemano una cantidad a la que aproximarse. Utiliza la descomposición de la pirámide indicada en la Figura 6 (en dos pirámides y dos prismas triangulares), para probar que *dos pirámides de la misma altura son entre sí como sus bases* (Proposición 5, Libro XII). El punto clave de esta demostración es observar que, dada una cantidad d tan pequeña como queramos, podemos descomponer cada una de las pirámides dadas y reiterar la descomposición sobre cada una de las pirámides obtenidas, hasta llegar a tener, en un número finito de pasos (n), pirámides cuyo volumen (R_n) es menor que d.

Nuevamente observamos que este proceso es equivalente a probar que la sucesión de volúmenes de las pirámides obtenidas en la descomposición (R_n) converge hacia cero. Ponemos así de manifiesto que el proceso de exhausción involucra un paso al límite que se puede resolver en un número finito de pasos (en este caso, utilizando argumentos geométricos), dado que conocemos de antemano el valor de dicho límite.

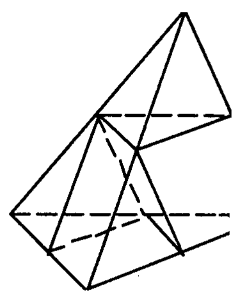


Figura 6

[5] Axioma de Arquímedes: *Dadas dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra.* (Boyer 1999; p. 128).

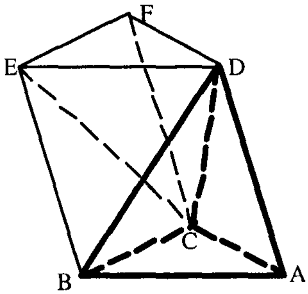


Figura 7

El resultado establecido en la (Proposición 5, Libro XII) es la base, junto con un argumento de descomposición más, para reencontrar la relación 1:3 entre la pirámide y el prisma. En efecto, se trata de la Proposición 7, Libro XII, donde se considera la descomposición de un prisma triangular en tres pirámides triangulares, como indica la Figura 7. Las tres pirámides consideradas tienen base de igual superficie y la misma altura, por lo que, ahora podemos concluir que tienen el mismo volumen. Además una de ellas tiene la misma base y altura que el prisma de partida.

En el caso del cilindro hemos visto una forma de relacionar el cilindro oblicuo y el elíptico recto por descomposición. En el caso del cono no tenemos ninguna descomposición que permita relacionarlo con el cilindro, a fin de obtener las relaciones análogas a las obtenidas para la pirámide y el prisma. Euclides utiliza el método de exahusción para justificar la relación 1:3 entre el cono y el cilindro, pero, a diferencia de lo visto para la pirámide (donde se aplica la exhausción a la descomposición de la misma en otros cuerpos), en este caso la exahusción sirve para probar que *podemos aproximar el cilindro y el cono mediante prismas y pirámides, respectivamente, por dentro y por fuera, tanto como queramos.*

4.3. La imposibilidad de los métodos de descomposición en cuerpos

En los casos particulares de descomposición establecidos al inicio de la sección 4 hemos obtenido relaciones entre:

- el volumen del paralelepípedo y el prisma recto con el del ortoedro,
- el volumen del prisma o cilindro oblicuos y los correspondientes rectos,
- el volumen de algunas pirámides particulares y el cubo.

Sin embargo, para establecer relaciones sobre la pirámide general hemos recurrido a técnicas que, en los dos casos presentados (el proceso de Liu-Hui y la exhausción de Eudoxo), involucran un proceso infinito.

Nos preguntamos si hubiera sido posible obtener, agudizando el ingenio, alguna descomposición de la pirámide o el cono que nos diese directamente su relación con el prisma o el cilindro. Si esto fuera posible, podríamos deducir, por descomposición, las fórmulas de volumen de los poliedros a partir de la del ortoedro. Pero desde 1901 nuestra pregunta tiene una respuesta negativa, ya que el matemático alemán Dehn probó:

> ***Teorema de Dehn:*** *Un tetraedro regular y un cubo del mismo volumen no son equicompuestos*

La demostración de este resultado puede consultarse en (Boltianski, 1981). Se trata de una demostración no constructiva, basada en la consideración de unos invariantes que dependen de la longitud de las aristas y de los ángulos diedros (llamados invariantes de Dehn) asociados a cada cuerpo, y de la aplicación de un resultado de Hadwiger, que caracteriza la equicomposición de poliedros por la igualdad de dichos invariantes.

Utilizando los invariantes de Dehn es posible encontrar pirámides de igual base y altura que no son equicompuestas, lo que implica que, utilizando únicamente métodos de descomposición, no es posible deducir que pirámides de iguales bases y altura tienen el mismo volumen. Así podemos afirmar, a diferencia de lo que ocurre para el área, que los métodos de descomposición no permiten desarrollar una teoría del volumen a partir del ortoedro.

El resultado de Dehn sirvió para dar respuesta afirmativa al tercer problema planteado por Hilbert en 1900, quien conjeturó que *desarrollar una teoría del volumen sin involucrar el uso de límites es imposible.* Esta idea ha sido reflejada en los desarrollos infinitos aquí presentados para determinar el volumen de la pirámide. Ahora podemos afirmar que no había otra forma de hacerlo.

5. Consideración de las "capas" de un cuerpo: el principio de Cavalieri

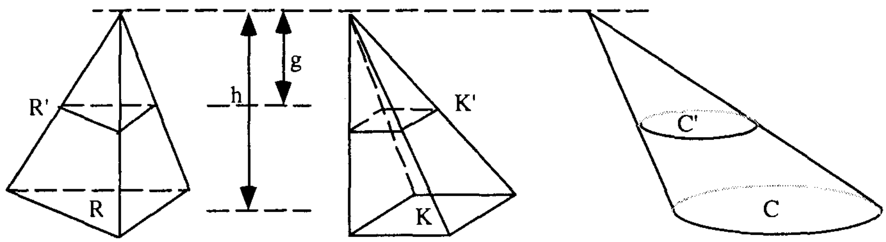
Hasta el momento hemos utilizado técnicas de descomposición de cuerpos *en otros cuerpos* con los que comparar su volumen. Esto nos ha mostrado la primera línea de argumentación que históricamente ha sido utilizada para encontrar relaciones de volumen entre cuerpos. Sin embargo, hay otra vía, desarrollada también desde tiempos remotos, que permite argumentar las relaciones obtenidas. Se trata del desarrollo de la idea (en sus inicios filosófica) de que una línea está compuesta por puntos, una superficie se compone de segmentos y un cuerpo está compuesto por capas. Los primeros antecedentes de esta idea son los argumentos mecánicos de Arquímedes, basados en considerar *"a volume as the sum of an infinite number of plane sections parallel to one another"* (Heath 1956, p. 367), o de Demócrito: *"a solid being the sum of an infinite number of parallel planes, or indefinitely thin laminae, indefinitely near together"* (Heath 1956, p. 368), argumentos que les permiten asumir como válidas las relaciones clásicas sobre el volumen de la pirámide o el cono, a pesar de que sus métodos son cuestionados en su época y, por supuesto, no se reconocen como demostraciones formales hasta la formalización del cálculo infinitesimal; más concretamente, hasta la justificación de B. Cavalieri, en el siglo XVII, de la propiedad que lleva su nombre:

> *Principio de Cavalieri: si en dos cuerpos de igual altura las áreas de las secciones producidas por planos paralelos a la base son iguales, entonces los cuerpos tienen el mismo volumen.*

La utilización del Principio de Cavalieri para justificar las relaciones de volumen anteriores empieza comparando unos cuerpos con otros:

I. un ortoedro, un prisma y un cilindro que tengan igual base y altura tienen el mismo volumen,

II. pirámides y conos que tengan igual base y altura tienen el mismo volumen; esta afirmación necesita además de un argumento de proporcionalidad que prueba que *si dos pirámides o conos de la misma altura se cortan por planos que están a la misma distancia perpendicular de los vértices, las secciones son como las respectivas bases. En particular, si las bases de las dos pirámides o los dos conos son iguales, entonces las secciones también son iguales.* (Figura 11)



R/R' = K/K' = C/C'

Figura 11

Utilizando estas propiedades podemos afirmar que las tres pirámides triangulares en que se descompone un prisma triangular (Figura 7) tienen igual volumen, lo que conduce a la razón 1:3 entre el volumen de la pirámide y el prisma. Relacionando ahora el cono con su pirámide y el prisma con su cilindro, extendemos esta razón al cono y cilindro.

Este tipo de descomposición en capas es la base para generalizar el cálculo de volumen a otros cuerpos geométricos, mediante el uso de la integral.

Reflexiones finales

Hemos presentado el conocimiento matemático sobre el volumen como resultado de una evolución histórica, haciendo hincapié en las dificultades que aparecieron en su desarrollo. Hemos destacado la diferencia entre la magnitud volumen y su medida, observando que ninguno de los resultados presentados necesita asignar un número a una cantidad de volumen: ha bastado estudiar estrategias de medida por comparación. Dichas estrategias fundamentan el proceso que se sigue para obtener las fórmulas de cálculo indirecto de volúmenes a partir de áreas y longitudes una vez establecida la fórmula para el ortoedro. A lo largo del artículo se plasman las dificultades más llamativas de los procesos de deducción y demostración de fórmulas de volumen de distintos cuerpos, destacando que, a diferencia de lo que ocurre en la superficie, donde el establecimiento de la fórmula del rectángulo es el aspecto más significativo (Castro y otros, 1997, Segovia y otros, 1996), en el caso del volumen hay además una imposibilidad de razonar por equipartición de figuras sin involucrar un proceso infinito.

Creemos que el artículo puede facilitar al formador de formadores y al futuro profesor bases en las que asentar el conocimiento matemático profesional, constituyendo un filtro con el que contemplar el conocimiento matemático formal y el conocimiento matemático del currículo de educación secundaria obligatoria y bachillerato sobre el volumen. A partir de reflexiones como las que presentamos, el profesor puede construir dimensiones didácticas del conocimiento matemático, tales como los organizadores curriculares de Rico (1998). No sólo por destacar los puntos álgidos de la evolución histórica del concepto, sino por que los razonamientos presentados muestran relaciones entre las distintas formas de concebir la comparación y medida del volumen, pensamos que este trabajo puede ayudar a establecer el rango de aplicaciones del concepto volumen (fenomenología), y algunas formas de concebir y representar el concepto (representaciones y modelos).

Bibliografía

Boltianski V. G. (1981) *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Lecciones populares de matemáticas. Moscú: Ed. Mir.

Castro E., Flores P., Segovia I. (1997) *Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas*. SUMA n. 26, pp. 23-32.

Cromwell P. R. (1997) *Polyhedra*. Cambridge University Press.

Chemla K. (1992) *Méthodes infinitésimales en Chine et en Grèce anciennes: les limites d'un parallèle*. En Le labyrinthe du continu. Colloque de Cerisy. J.-M. Salanskis, H. Sinaceur Eds. Paris: Springer Verlag, pp. 31-46.

Del Olmo M. A., Moreno M. F., Gil F. (1989) *Superficie y volumen*. Madrid: Ed. Síntesis.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla, GIEM.

Heath T. H. (1956) *The thirteen books of Euclid's elements with introduction and comentary by Sir Thomas L. Heath*. Second Edition, Vol. III. New York: Dover Publications, Inc.

Llinares, S. (1998). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación*. UNO 17, 51-64.

Puig Adam P. (1986) *Curso de Geometría Métrica. Tomo 1*. Madrid: Euler Editorial. Decimotercera edición.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori.

Segovia I., Castro E., Flores P.(1996) *El área del rectángulo*. UNO, n. 10, pp. 63-77.