CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS EN TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

Teresa Fernández,
José A. Cajaraville
Universidad de Santiago de Compostela

Juan D. Godino
Universidad de Granada

RESUMEN

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial con estudiantes de magisterio, en este trabajo presentamos el análisis a priori de una de las tareas incluidas en el cuestionario de evaluación utilizado. Aplicando herramientas conceptuales del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático identificamos las redes de objetos intervinientes y emergentes en la realización de la tarea, lo que permite formular algunas conjeturas sobre conflictos semióticos potenciales que pueden encontrar los sujetos. Algunas de estas conjeturas son comprobadas analizando las configuraciones cognitivas manifestadas por un estudiante en la realización de la tarea. Se concluye resaltando las posibilidades analíticas ofrecidas por las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico respecto de las nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre visualización y razonamiento espacial.

ABSTRACT

This work was carried out within a framework of research into the evaluation and development of spatial reasoning and visualization capacities in student teachers. We present an initial study of the tasks included in the assessment questionnaire used. When applying conceptual tools of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge, we identify networks of intervening and emerging objects in carrying out the task, which allows us to formulate conjectures on potential semiotic conflicts that the subjects may encounter. Some of these conjectures may be checked by analysing the cognitive configurations manifested by the student when doing the task. To conclude, we highlight the analytical possibilities given by the theoretical tools of the ontosemiotic approach regarding cognitive notions used in research into spatial reasoning and visualization.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Teresa Fernández, José A. Cajaraville y Juan D. Godino (2007). CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS EN TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL , pp. 189-197.

1. INTRODUCCIÓN

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

En estos estudios los autores se apoyan básicamente en la dualidad representación interna (*imagen visual*) y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas de visualización y razonamiento espacial. Entendemos que estas nociones pueden ser insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, y de modo más general las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales[1].

En este trabajo vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años, y que describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007[2]).

Consideramos que esta aproximación teórica puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales), y las institucionales (sociales o culturales). Además la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intra-matemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido. El EOS puede aportar un punto de vista complementario para abordar cuestiones tales como:

- ¿Qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial?
- ¿Por qué ciertas tareas que requieren visualización y razonamiento espacial presentan una dificultad elevada para determinados estudiantes?

En esta comunicación tratamos de avanzar algunas respuestas parciales a estas cuestiones usando datos experimentales de un proyecto de investigación en curso, completando el análisis realizado en trabajos previos (Fernández, 2005). Por limitaciones de espacio no podemos describir las nociones teóricas del marco teórico; remitimos al lector a las referencias correspondientes.

La visualización y el razonamiento espacial serán interpretadas como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen "configuraciones" mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas. Este trabajo tiene una orientación básicamente teórica y metodológica. Por una parte se trata de plantear

1 El trabajo de Gorgorió (1998) centra la atención en identificar estrategias cognitivas, tanto visuales como no visuales, en tareas espaciales que requieren rotaciones de los cuerpos o figuras.

2 Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

el problema de las limitaciones de los análisis cognitivos de tareas de razonamiento espacial, los cuales pueden ser complementados con herramientas epistemológicas como las propuestas por el EOS. Desde el punto de vista metodológico se introducen dos niveles de análisis del proceso de solución de un problema, en cada uno de los cuales se aplican categorías específicas que amplían la visión básicamente conceptualista de los estudios cognitivos y curriculares.

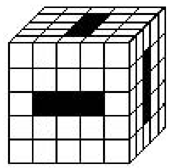
2. CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA ASOCIADA A UNA TAREA DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales. Esta tarea ha sido usada en nuestra investigación sobre razonamiento espacial con estudiantes de magisterio (Fernández, 2005)[3]. El análisis se realiza a dos niveles distintos y complementarios. En el primero se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico. A continuación aplicamos los atributos contextuales (nivel pragmático).

2.1. Enunciado de la tarea: volumen de un cubo perforado

5. Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



2.2. Solución experta

1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.

2) Tomando el cubo pequeño como unidad, el volumen del cubo grande es 125 unidades (5 x 5 x 5 = 125)

3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades (3 x 5 x 1 =15).

4) Sin embargo existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a 125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.

5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, 15 – 3 =12.

6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar 15 – 3 – 3 + 1 = 10

7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será, 15 + 12 + 10 = 37, y el volumen del cubo con los túneles será, 125 – 37 = 88.

3 Trabajo realizado en el marco de los proyectos MCYT – FEDER: SEJ2004-00789 y SEJ2004-07346 Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

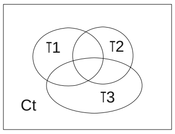
2.3. Objetos y relaciones primarias

En la tabla 1 resumimos los objetos y relaciones primarias que intervienen en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

LENGUAJES:

Ordinario (Términos y expresiones):
túneles, atraviesan, cubos, "Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande" , ortoedro, unidades, intersecciones

Gráfico (Icónico):
Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos y tres túneles que lo atraviesan"



Simbólico (notaciones):
5 x 5 x 5 = 125
3 x 5 x 1 =15
15 – 3 =12
15 – 3 – 3 + 1 = 10
15 + 12 + 10 = 37
125 – 37 = 88

C = Ct ∪ (T1 ∪ T2 ∪ T3) – (T1∩T2) – (T1∩T3) – (T2∩T3) + (T1∩T2∩T3)

Expresa

Ayuda

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
- Enunciado del problema y sus generalizaciones

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Previos:
- cubo; volumen; unidad de volumen; medida

Emergentes:
- volumen de un sólido perforado

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES::
Previos:
- el volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista.
- el volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
- aditividad de la medida
-Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos

Emergentes:

- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 88

PROCEDIMIENTO:
Operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación)

Justifican

ARGUMENTOS:
El cubo grande está formado por 125 cubitos
Hay tres túneles, cada túnel ocupa 15 cubitos
Se producen intersecciones de los túneles dos a dos y entre los tres

Deductivo: Teniendo en cuenta el volumen de un cubo y el de un ortoedro, y las intersecciones de los túneles se deduce que el volumen del cubo perforado es de 88 unidades.

Tabla 1: Objetos y relaciones primarias en el problema del cubo perforado

2.4. Objetos y relaciones secundarias

Realizamos a continuación un segundo nivel de análisis de la solución del problema aplicando los atributos contextuales.

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La tarea se puede generalizar de diversas maneras. Se puede suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, o cambiándolos a una longitud de A unidades. Se puede pedir encontrar una fórmula general en función de L, conectando esta tarea geométrica con el álgebra. También podemos considerar túneles de anchura variable y no iguales entre sí. Podemos conjeturar que estas generalizaciones serán conflictivas con los estudiantes de magisterio dados los conocimientos algebraicos que se ponen en juego.

Ostensivo – no ostensivo:

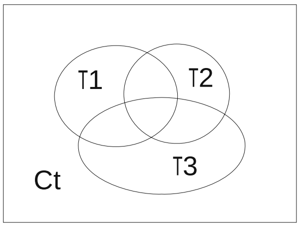
El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático); en ambos casos es una entidad no ostensiva. La regla general que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que, en sí misma, no es ostensiva, aunque se expresa de manera ostensiva con la escritura simbólica, 125 – 15 – 12 – 10 = 88. El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema.

Unitario – sistémico:

Las nociones de cubo, ortoedro (túneles), y las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forman un sistema). Si simbolizamos por Ct (cubo tunelado), C (cubo), T1, T2, T3 los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar con la siguiente operación conjuntista:

$$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$$

Expresión – contenido (significante – significado)

<table>
<tr>
<td>El uso de representaciones conjuntistas y algebraicas puede ayudar a visualizar el problema y a generalizarlo.
$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$
La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

La expresión del problema mediante un dibujo en perspectiva, sin señalar las intersecciones interiores ni las salidas ocultas de los túneles es otro factor de dificultad potencial: ¿atraviesan los túneles completamente al cubo?

3.CONFIGURACIÓN COGNITIVA: ESTUDIO DE UN CASO

Se trata de un estudiante de primer curso de magisterio. Este ítem fue incluido en el examen final de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, que incluye un bloque temático sobre Geometría.

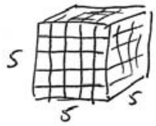
3.1. Solución de un estudiante a la tarea del cubo perforado

3.- Empiezo contando el nº total de cubos: $5 \times 5 = 25 \times 5 = \boxed{125 \text{ cubos}}$

De la cara frontal hay que restar $3 \times 5 = 15$

" lateral " $3 \times 5 = 15$

" superior " $3 \times 5 = 15$



En total $= 125 - 45 = 80$ cubos

La respuesta es la c)

3.2. Objetos y relaciones primarias

En la tabla 2 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego SS en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

LENGUAJES: Ordinario (Términos y expresiones): Contar; número total de cubos, cara lateral, cara frontal, cara superior, túnel Gráfico (Icónico): Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos Simbólico (notaciones): Números y operaciones aritméticas 5x5=25x5 = 125 3x5 = 15 125 – 45= 80 c)	Expresa Ayuda	SITUACIONES/ PROBLEMAS: Problema del cubo perforado Motivan ↓ Resuelven ↑ CONCEPTOS/ DEFINICIONES: Previos: - cubo; volumen, unidad de medida de volumen Emergentes: - Volumen de un sólido perforado PROPIEDADES/ PROPOSICIONES: Previos: Propiedad asociativa de la multiplicación El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad. Aditividad de la medida Conservación del volumen Emergentes: - En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 80 PROCEDIMIENTO: Operaciones aritméticas elementales Cálculo mental (15+15+15=45) Justifican ↑ ARGUMENTOS: El lado del cubo grande está formado por 5 cubitos. El número total de cubos es 125 El número de cubos de cada túnel es 15 El número de cubos de los tres túneles es 45 El número de cubos que queda es el total menos la suma de los tres túneles Quedan 80 cubos Deductivo (informal): El argumento es incorrecto al no tener en cuenta las condiciones del problema (intersecciones de los túneles)

Tabla 2: Configuración cognitiva de SS sobre el problema del cubo perforado

3.3. Objetos y relaciones secundarias

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La solución dada corresponde al caso en que los túneles no tuvieran intersecciones comunes, lo que podría ocurrir, pero no en el caso propuesto. No se perciben intentos de generalización en la respuesta de este estudiante, aunque tampoco se requieren.

El proceso seguido es deductivo (informal) sobre el caso particular, en este caso calculando el volumen del cubo y descontando los ortoedros sin tener en cuenta sus intersecciones. Por tanto, toda generalización que hipotéticamente pudiera hacer a un cubo de lado L y un túnel de arista A no le llevaría a una respuesta correcta.

El estudiante recuerda las reglas generales (definiciones) del volumen del cubo y los ortoedros y las aplica correctamente al caso particular dado. La fórmula general para calcular el número total de cubos dados por la fórmula conjuntista que se propone en la configuración epistémica no forma parte de los conocimientos previos de los estudiantes.

Ostensivo – no ostensivo:

El estudiante utiliza un dibujo para señalar las dimensiones del cubo, no consiguiendo representar los túneles ni visualizar (lo que resulta esencial) las intersecciones. Su representación no ostensiva (mental) de la situación no tiene en cuenta que hay que descontar los cubos comunes a los tres túneles.

Las intersecciones de los túneles no son directamente visibles; es un caso de un objeto empírico no ostensivo. Hay intersecciones comunes dos a dos y entre los tres; la medida del tamaño de las intersecciones tiene que hacerse de manera indirecta, mediante razonamientos que expresen las relaciones entre las posiciones en que se hacen los túneles y sus dimensiones respectivas. Una justificación ostensiva (con lenguaje ordinario) de este tipo ciertamente es compleja. También se puede hacer una descripción ostensiva de las intersecciones mediante secciones planas del cuerpo realizadas en distintas posiciones, procedimiento que hemos encontrado en algunos estudiantes.

Unitario – sistémico:

El estudiante reconoce el cubo y el ortoedro como entidades unitarias a las cuales es capaz de atribuir un volumen, y hallar su medida. También sabe lo que es medir y la noción de unidad de medida. Pero el objeto "cubo perforado" es un sistema que hay que descomponer en sus elementos. No es suficiente con imaginar mentalmente (visualizar) que hay unas intersecciones comunes; hay que cuantificar (medir) el tamaño de un objeto no ostensivo, para lo cual hay que descomponerlo, "verlo" como un sistema formado de partes relacionadas de manera específica. Esta descomposición se puede apoyar mediante las secciones planas o reconociendo las circunstancias de aplicación de un teorema algebraico conjuntista.

Expresión – contenido (significante – significado)

La solución de la tarea requiere expresar las intersecciones de los túneles (objetos empíricos que aquí no son visibles) mediante un lenguaje (gráfico, secciones planas), conjuntista (solución experta), o con lenguaje ordinario. Esto permitirá determinar las medidas de tales intersecciones.

En el enunciado de la tarea la expresión "que atraviesan un cubo" tiene que ser interpretada por el lector con el apoyo parcial del dibujo, donde no se han representado "las salidas" de los túneles por las caras opuestas. Algunos sujetos a los que se ha propuesto esta tarea han pedido aclaración sobre si los túneles perforaban todo el cuerpo.

Personal-institucional

Esta tarea ha resultado difícil para este estudiante. La información que tenemos sobre el marco institucional en que realiza sus estudios nos permite afirmar que esta tarea es "atípica" entre las que habitualmente se proponen en las clases de geometría recibidas. Tampoco se han propuesto actividades que requieran hacer secciones planas de sólidos, o intersecciones entre conjuntos, por lo que estos procedimientos no forman parte de su práctica matemática habitual. En cuanto al uso, a nivel operatorio y no discursivo, del significado de medida y unidad de medida se puede decir que la tarea no lo requiere explícitamente. Es posible que el estudio de la aritmética no se haya conectado de manera explícita con el tema de magnitudes, de manera que el significado personal puede tener limitaciones sobre la noción de volumen y unidad de medida del volumen.

4. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos aplicado dos niveles de análisis a una tarea geométrica, tanto a la solución experta (epistémica o institucional de referencia) como a la solución personal de un estudiante. En el primer nivel, que podemos designar como semántico, se identifican y articulan las entidades primarias (tipo de situación-problema, lenguajes utilizados, procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentaciones) y un segundo nivel, de tipo pragmático, donde ponemos en juego los atributos o dualidades contextuales (extensivo – intensivo; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; personal – institucional).

La combinación de estos dos niveles de análisis aporta una herramienta potente para el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y su secuenciación en los procesos de instrucción matemática. La tradicional distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales queda ampliada con la introducción explícita de las entidades proposicionales y argumentativas, así como con los elementos lingüísticos y situacionales. Todas estas entidades quedan articuladas mediante la noción de configuración (epistémica y cognitiva) en la que se tiene en cuenta los diferentes roles o relaciones entre las mismas.

Desde el punto de vista cognitivo, la tradicional distinción entre representaciones internas (imágenes conceptuales, concepciones, etc.) y representaciones externas (gráficos, notaciones, símbolos, modelos concretos, etc.) se amplía con las dualidades contextuales. Lo interno y externo es sustituido por dos dualidades: ostensivo – no ostensivo y personal – institucional. Esto quiere decir que el pensamiento no queda constreñido al ámbito de lo mental, sino que las instituciones también "piensan" (faceta no ostensiva de los objetos institucionales); de este modo los conceptos tienen una realidad mental (subjetiva) y también una realidad institucional (objetividad relativa). Tales entidades están apoyadas, de manera constitutiva, en las entidades lingüísticas, que vienen a ser su faceta ostensiva. La introducción de la dualidad extensivo – intensivo, aplicada a la formulación de una tarea, nos lleva a pensar en sus potenciales generalizaciones y a explorar sus posibilidades generativas de nuevos conocimientos y conexiones matemáticas. El carácter sistémico y recursivo del conocimiento matemático puede ser descrito mediante la dualidad contextual que el EOS designa como *unitario – sistémico,* así mismo aplicable a los distintos tipos de entidades primarias.

Remitimos al lector a otros trabajos realizados en el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) donde se describen con más detalle otras aplicaciones de las herramientas teóricas introducidas.

REFERENCIAS

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11* (1), 7-16.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 161- 2004). Reston, VA: NCTM, Macmillan.

Fernández, T (2005). Incidencia de los conocimientos geométricos en la mejora de la percepción espacial. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores y M. Camacho (Eds.), *Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Santander: Servicio de Publicaciones de Cantabria. Universidad de Cantabria.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems, *Educational Studies in Mathematics 35*, 207-231.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Hershkowithz, R., Parzysz, B. y Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. En, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-201). Dordrech: Kluwer.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.