La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite

Alexander Betancur S.[78] Sergio A. Guarín [79]
Sandra E. Parada R[80] Jorge Fiallo[81]

Resumen

Presentamos resultados de un estudio cuyo objetivo fue, describir como contribuye la noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite en los estudiantes pertenecientes al programa de ASAE. El análisis se realiza con el apoyo del modelo de Comprensión Matemática de Pirie y Kieren [9]. La experimentación se realizó mediante actividades diseñadas en GeoGebra en las que se problematiza la noción de límite. Los resultados nos dejaron ver que una clara comprensión de la noción de aproximación óptima contribuye a precisar en el estudiante las ideas de tendencia en términos de distancias y además le facilita entender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

Palabras & frases claves: Límite, aproximación, tendencia, Modelo De Pirie y Kieren, GeoGebra.

Presentación del Problema

La enseñanza del Cálculo Diferencial constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, dentro del cual aparece el concepto de límite como uno de los más difíciles de enseñar y aprender [1]. Frente a estos desafíos en [2] se propone la definición de límite bajo los conceptos de aproximación y tendencia, entendida ésta como aproximación que mejora cualquier otra (aproximación óptima).
Desde un contexto local, en un estudio realizado por Vicerrectoría Académica [11] de la Universidad Industrial de Santander se encontró que la asignatura de Cálculo Diferencial es la de mayor fracaso académico. Asimismo Suárez, Rojas & Parada en [10] y Botello en [2] se reporta la existencia de dificultades relacionadas con los conceptos que subyacen en el Cálculo Diferencial, entre estos el concepto de límite. Frente a esta problemática, Parada en [3] plantea una serie de alternativas para tratarla. Una fue la implementación del programa de tutorías entre pares *ASAE*, en donde se presta Atención, Seguimiento y Acompañamiento a estudiantes que cursan asignaturas del área de matemáticas, entre estas la asignatura de Cálculo Diferencial [2]. EL estudio que aquí

[78]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga-Colombia, e-mail: alexanderbetancursanchez@gmail.com
[79]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga-Colombia, e-mail: sergio_che93@hotmail.com
[80]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga-Colombia, e-mail: sparada@matematicas.uis.edu.co
[81]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga-Colombia, e-mail: jfiallo@uis.edu.co

presentamos surge de sesiones tutoriales realizadas en el programa de tutorías *ASAE* de la Universidad Industrial de Santander, donde se identifican dificultades en la comprensión del concepto de límite en los estudiantes tutorados de Cálculo Diferencial. Esto nos lleva a formular el siguiente interrogante ¿Cómo contribuye la noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite en los estudiantes pertenecientes al programa de *ASAE*?

Marco de referencia

Para analizar la comprensión del concepto de límite adquirido por el estudiante se tendrá en cuenta *la teoría de la comprensión matemática* de los profesores norteamericanos Pirie & Kieren [9], quienes consideran que:

> *La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las forma y los procesos del mismo y además, se encuentra restringido por los que están fuera de él.* ([9, p.8]).

Esta teoría permite analizar la comprensión matemática mediante ocho niveles, los cuales son: i) conocimiento primitivo, ii) creación de la imagen, iii) comprensión de la imagen, iv) observación de la propiedad, v) formalización, vi) observación, vii) estructuración, viii) invención. En esta investigación se hace uso de los cuatro primeros; para esto fue necesario plantear los respectivos descriptores de nivel, en los cuales se tuvo en cuenta el objetivo de cada una de las actividades. Finalmente para identificar el nivel de comprensión que adquirió el estudiante, se analizaron tres categorías que emergieron en el transcurso de las actividades, en las cuales el estudiante mostraba que cumplía ciertos descriptores de nivel en cada una de ellas, lo anterior nos permitió hacer un análisis para ubicar el nivel de comprensión que tiene el estudiante del concepto de límite.

Niveles	Descripción	Descriptores de Nivel
1.CONOCIMIENTO	Se refiere al punto inicial de la comprensión donde el estudiante atrae información básica a la situación de aprendizaje.	• Comprende el concepto de función desde una expresión gráfica en un plano cartesiano. • Reconoce una función como una relación entre variables establecida por una regla. • Reconoce las razones trigonométricas en la circunferencia geométrica. • Establece relación entre una fracción y su representación decimal.
2.CREACION DE LA IMAGEN	En este nivel el estudiante es capaz de realizar distinciones con base a capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes no sólo son pictóricas sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental.	• Identifica la diferencia entre aproximación y tendencia. • Identifica la dependencia entre la aproximación óptima y distancia entre los valores que mejoran la aproximación. • Entiende la tendencia como una aproximación óptima.(aproximación que puede ser mejorada). • Reconoce que para un número en la recta real, es posible aproximarse a este por derecha y por izquierda. • Determina la tendencia de una sucesión numérica infinita.
3.COMPRENSION DE LA IMAGEN	Las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente, imágenes orientadas por un proceso mental libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares.	• Encuentra el límite de función en un punto, haciendo uso de un proceso de aproximación. • Usa la gráfica de una función para determinar el límite en un punto, sin tener en cuenta su expresión analítica. • Reconoce que el valor límite se puede alcanzar en un punto a través de un proceso de aproximación infinito.
4.OBSERVACION DE LA PROPIEDAD	El estudiante puede examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales.	• Establece que es posible encontrar el límite el de función $f(x)$ en el punto c. Si cuando la variable x tiende a c, entonces $f(x)$ tiende a l. • Plantea condiciones para la existencia del límite de una función en un punto. • Justifica las razones de la no existencia del límite de una función en un punto. • Comprende la no existencia del límite para una función en un punto c, si cuando x tiende a c $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Tabla 1 Descriptores de los cuatro primeros niveles del Modelo de comprensión Matemática de Pirie y Kieren (elaboración propia)

Metodología

La investigación que se desarrolló es de tipo cualitativo. Los datos y la información recolectada fueron analizados con el objetivo de dar respuesta a la pregunta planteada. La investigación se planteó en las siguientes etapas: i) reconocimiento de la situación, ii) diseño del instrumento, iii) recolección de datos: aplicación del instrumento, iv) selección del caso de estudio; v) análisis del caso y; vi) reporte de investigación. Para el diseño del instrumento se consideró los aportes que brindan las Tecnologías Digitales tal como se expresa en los NCTM [2] y Moreno [6], además, la elaboración y aplicación del instrumento se basó en las Fases de Aprendizaje del Modelo de Van Hiele; esta etapa se encuentra reportada por Betancur, Guarín & Fiallo [3].
La recolección de los datos se realizó a través de: hojas de trabajo, videos de las socializaciones y protocolo de observación. El tiempo de aplicación fue de 4 horas (duración de dos sesiones de una tutoría programada por el programa *ASAE*). En el cual se proporcionó a cada estudiante un computador y su respectiva hoja de trabajo. Al terminar

las actividades se realizaba la respectiva socialización (Las sesiones se realizaron durante los días 2 y 7 de Septiembre de 2015).

Resultados del análisis

Para el análisis se seleccionó una estudiante a la que llamamos Diana, perteneciente al programa de *ASAE* el cual es ofrecido a los estudiantes que están en el curso de Cálculo Diferencial de la Universidad Industrial de Santander. A partir de la revisión de los datos obtenidos por las tres fuentes, se identificaron las siguientes categorías: Fortalecimiento del concepto de aproximación óptima, el límite como lo que sucede cerca del punto y la tendencia entendida por distancias. A su vez la revisión permitió ubicar a la estudiante en uno de los niveles del modelo propuesto por Pirie y Kieren en [9] con base a descriptores establecidos para cada uno de ellos. Por cuestiones de espacio, se describirá el análisis para la categoría la tendencia entendida por distancias. En la actividad 4 del instrumento se buscaba que el estudiante identificara la no existencia del límite, para la función $\sin(\frac{1}{x})$ cuando x tiende a cero. De acuerdo a las transcripciones y el protocolo de observación se evidencia que la estudiante identifica que no hay tendencia en las imágenes de una función cuando la distancia entre los valores del rango de la función no se aproxima a cero y los valores del dominio se acercan a un punto (a cero en este caso). Leamos lo que sucedió en la socialización de la actividad:
Investigador: ¿El límite existe en cero?
Diana: La gráfica tiene muchas oscilaciones y cuando me trato de acercar a cero entonces ahí puedo mirar que intervalos a derecha e izquierda de cero, el límite tienden a valores distintos. Por eso el límite no existe, porque tiene muchas oscilaciones cuando me acerco a cero.
Investigador: Y, si genero una tabla ¿qué sucede?
Diana: Pues cuando miro la tabla, las imágenes de los puntos cuando me acerco a cero siguen oscilando (señala la hoja de cálculo, ver *Ilustración 1*) porque las distancias entre los valores a veces aumentan pero también disminuyen. Y pues para que el límite exista debe tender a un solo número, así como lo miramos en una de las actividades anteriores.

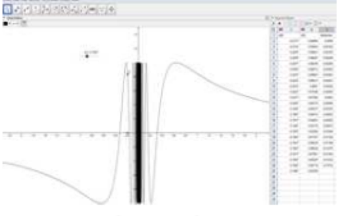

Ilustración 1.

En contrataste con la actividad 5 donde se proponía analizar la tendencia de la función $x\sin(\frac{1}{x})$ cuando x tiende a cero. La estudiante identificó la existencia del límite justificando que para este caso las distancias entre los valores del rango tendían a cero y los valores del dominio se acercan a un punto (a cero en este caso). Esta fue la socialización que se realizó durante la actividad:
Diana: Ahí creo que el límite de la función es cero, porque cuando tomo un intervalo muy muy pequeño donde se encuentre el punto donde se quiere verificar el límite.

Porque las oscilaciones son más pequeñas y más próximas a cero tanto por derecha como izquierda. Así el límite es cero.
Investigador: Sucede algo parecido en lo anterior.
Diana: Una oscilaba en la misma magnitud y esta las oscilaciones son cada vez más pequeñas (señalando las distancias entre las imágenes de la función, ver *Ilustración 2*) y próximas a cero.

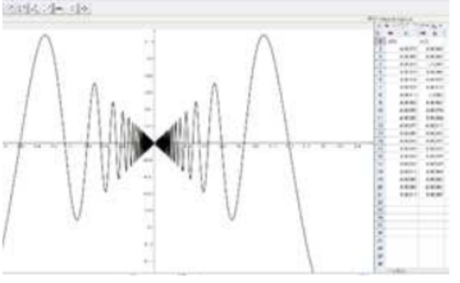

Ilustración 2.

Esta comparación permite ver una concepción de tendencia entendida por distancias, aunque la estudiante considera las distancias entre los valores del rango de la función. Consideramos que es necesario realizar trabajos sobre $|x - a|$ y $|f(x) - L|$ llevando a que el estudiante realice coordinación entre estas. Ya desde De Mira López, Valls & Llinares [5] se reporta que los estudiantes no coordinan las tendencias de los intervalos en el dominio y en el rango. Esta concepción permite potenciar la definición métrica de límite.

Reflexiones finales

Un acercamiento al concepto de límite mediante la aproximación óptima facilita al estudiante entender el límite como lo que sucede cerca del punto y no en el punto, ya que el tratamiento que envuelve la noción de aproximación óptima es sobre una vecindad de un punto y no en dicho punto. Una contribución importante que lleva la noción de aproximación óptima es, precisar las ideas que se tienen de aproximación por medio de distancias y tomar estas para entender la tendencia a través de distancias; donde desde Blázquez y Ortega [2] se consideran como errores absolutos. Además consideramos al igual que Zapata [12] la importancia que juegan las tecnologías computaciones; por ejemplo, el registro dinámico en la hoja de cálculo desde un Software matemático da las posibilidades para realizar trabajos previos sobre la coordinación de la tendencia en las distancias tomadas en el dominio y en el rango de una función, permitiendo dar un panorama dinámico de lo que se esconde detrás de la definición épsilon- delta que se plantea en la definición formal.

Referencias

[1] Blázquez, S., Ortega, T., *El concepto de límite en la educación secundaria*. El futuro del cálculo infinitesimal. (2000):331-354.

[2] Blázquez, S., Otega,T., *Nueva definición de límite funcional.* UNO. **30** (2002):67-82.

[3] Betancur, A., Guarín, S. Fiallo. J, *La idea de límite como una aproximación óptima*. Resumen del 16 Encuentro de matematica educativa (ECME) (2015). Recuperado en http://ocs.asocolme.org/index.php/ECME/ECME-16/paper/view/781.

[4] Botello, C., *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación*. (Tesis de maestría no publicada). (2013). Universidad Industrial de Santander. Colombia.

[5] Mira López, M., Valls González, J., Llinares Ciscar, S., *Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje.* (2013).

[6] Moreno, L., *Educación matemática: del signo al píxel.* División de publicaciones UIS. Bucaramanga. Colombia. (2014).

[7] NCTM, *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM. (2000).

[8] Parada, S. *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander*. (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas - Universidad Industrial de Santander). Bucaramanga, Colombia. (2012).

[9] Pirie, S., Kieren, T., *A recursive theory of mathematical understanding.* For the learning of mathematics, 9(3). (1989):7-11.

[10] Suárez, S., Rojas, S., Parada, S*Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad.* Revista Científica, (2013): 418-422.

[11] Vicerrectoría Académica. *Diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander.* Documento interno no publicado de la Vicerrectoría Académica de la UIS, Bucaramanga. (2011).

[12] Zapata Agudelo, J. G., Escobar Jiménez, J. F., Bernal Rodríguez, D. Y. *La comprensión intuitiva del concepto de límite en un grupo estudiantes de cálculo diferencial.* (2014).