



Capítulo 3

Caracterización de estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño en la solución de situaciones problema en el área de matemáticas, contrastadas con métodos heurísticos de George Polya y Allan Schoenfeld

María Elizabeth Mejía Muñoz
Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño
Docente área de matemáticas
Jhon Alexander Londoño Betancur
Institución Educativa Monseñor Francisco Cristóbal Toro
Docente área de matemáticas

Resumen

Este proyecto pretende caracterizar las estrategias y procedimientos que usan los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, del municipio de Medellín, ubicada

* Juan Carlos Arboleda Ariza, par académico por la Universidad Pontificia Bolivariana.



en la comuna 4 en el barrio Aranjuez, cuando se enfrentan a situaciones problema en el área de matemáticas, bien sea desde las mismas clases o en pruebas censales como el caso de las Saber 11^º. De las estrategias usadas depende, en gran medida, el resultado de un proceso de enseñanza-aprendizaje que redunde en los resultados de dichas pruebas en las que los antecedentes indican que los niveles de desempeño de la gran mayoría de las instituciones de carácter oficial de la ciudad se encuentran significativamente bajos hasta medio y pocas de ellas llegan a obtener desempeños altos o significativamente altos. Por estas razones, se intenta hacer una caracterización o categorización de las estrategias que usan los estudiantes del grado undécimo con niveles similares de desempeño para luego hacer una contrastación con las heurísticas propuestas por George Polya y Allan Schoenfeld.

Palabras clave

Estrategias. Modelo. Situación problema. Solución de problemas.

Introducción

El tema de este estudio supone un paso más en el análisis de los resultados de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos e irrumpe en la revisión de los modelos propuestos para este fin por los autores George Polya y Allan Schoenfeld, quienes han esbozado en sus libros estrategias metodológicas para mejorar en esta competencia matemática.

En este contexto, el desarrollo de competencias y habilidades para la deducción, representación, modelación de situaciones reales y toma de decisiones aportadas desde la matemática, se convierten en elemento primordial para investigaciones que apuntan a descubrir y describir las estrategias y procedimientos que usan los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño cuando se enfrentan a la solución de problemas planteados, las formas de analizar, deducir, creer, formular y plantear soluciones con los desarrollos cognitivos, procedimentales y axiológicos que intervienen. Al mismo tiempo, se contrastan con los modelos propuestos para determinar nuevos caminos que iluminen el quehacer pedagógico del maestro en el fortalecimiento y construcción de un pensamiento crítico y reflexivo con el objeto de transformar su entorno social y local.



Se realiza un recorrido histórico por los avances que se han llevado a cabo en los ámbitos internacional, local y regional, en materia de modelos y estrategias para la solución de problemas y que han contribuido sustancialmente al empoderamiento que este tema despliega en los círculos académicos en el área de matemáticas. Se suman a este recorrido, informes sobre el desempeño de los estudiantes colombianos en pruebas externas e internas que demuestran la prioridad de mejorar en este tema.

Para efectos de este estudio se decidió la metodología cualitativa con el estudio de casos múltiples de cinco participantes y un experto, a quienes se les aplicó el instrumento aportado por la psicología, análisis de tareas, instrumento que indaga por aprendizajes específicos y proporciona información sobre la comprensión, construcción, razonamiento y empleo del conocimiento y del lenguaje natural y formal, además de aspectos afectivos que, identificados y comparados, se convierten en el eje central del presente estudio.

Finalmente, se narran los hallazgos y las conclusiones que derivaron de la investigación.

Planteamiento del problema

En la cotidianidad escolar se aprecian con preocupación los bajos resultados que los estudiantes obtienen cuando presentan pruebas internas y externas como las censales PISA: (Programme for International Student Assessment), prueba internacional programada por la OECD y aplicada a los países de la OECD que voluntariamente quieren participar en el instrumento y las pruebas nacionales Saber, dispuestas por el Icfes, para los grados 3, 5, 9 y 11, en las que se evalúan diferentes áreas y competencias de los jóvenes, en especial, las competencias del área de matemáticas: interpretación y representación, formulación y ejecución, argumentación.

De acuerdo con un informe de la Revista Semana, en 2013, existe un consolidado de los años 2006, 2009 y 2012 en el área de matemáticas que expone altibajos en los desempeños de los estudiantes. De igual manera, los resultados obtenidos en la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño en las Pruebas Saber 11°, en los últimos tres años, 2011, 2012 y 2013, presentan disparidades que no favorecen los niveles superiores en el desempeño de las pruebas.



A partir de esta realidad surgen interrogantes como: ¿Por qué los jóvenes no logran responder acertadamente a las situaciones planteadas en las pruebas a las que se ven abocados? ¿Por qué el estudiante manifiesta dificultades en la resolución de problemas, pese a haber practicado en el aula de clase? ¿Por qué los estudiantes demuestran bloqueo cuando se enfrentan a una situación problema? ¿Por qué acuden a acciones no convencionales en su solución? ¿Por qué los jóvenes manifiestan la solución de los problemas, pero no argumentan sus respuestas? ¿Cuáles son las competencias que se están obviando en el quehacer docente para que los estudiantes mejoren el desempeño en la resolución de problemas? Todo ello conlleva la búsqueda de caminos que permitan realizar una enseñanza de la matemática que llegue cada vez más a un número mayor de estudiantes y que haya mayor motivación por el aprendizaje.

Es común que un estudiante, cuando resuelve una situación problema, escoja un método particular o recurra a lo enseñado por el profesor o simplemente utilice un poco de cada una de las diferentes formas que aprendió durante su formación académica. Esto se debe a que son varios los caminos que se pueden tomar para encontrar la solución a los problemas que afronta. Lo que se pretende con esta investigación es que, mediante el estudio de múltiples casos, se logre identificar cuáles son las estrategias que utilizan por cuanto no es posible determinar cuál es el mejor camino. Al respecto Marcelino (citado en Ortega, 2005). apunta que:

“No ha habido siempre un total acuerdo entre los matemáticos en cuanto a que los conceptos y procedimientos utilizados fuesen los más adecuados”

Para constatar las conjeturas que se debaten entre colegas sobre las posibles causas no validadas que demuestran los estudiantes en sus prácticas educativas, la identificación de las estrategias a las que recurren cuando desafían la resolución de problemas, por medio de las teorías del investigador húngaro, Polya y Allan Schoenfeld, pueden favorecer la visibilización de los aspectos por cuanto determinan pasos y procesos mentales para la resolución de los mismos.

Justificación

La globalización del mundo actual, con sus avances científicos, tecnológicos, políticos, sociales, entre otros, vislumbra la contribución de la matemática en estos procesos transformadores que permiten validar la búsqueda de mejoras en los procesos de enseñanza aprendizaje en la formación de los ciudadanos del futuro. Por ello, se considera que la competencia en la resolución de problemas es primordial en cualquier ámbito de un individuo y, sin ella, es complejo desenvolverse en el mundo actual. Atendiendo a esta necesidad y, como se sugiere, el área de matemáticas potencia el fortalecimiento de las habilidades que desarrollan esta competencia, esta investigación busca detallar las estrategias que los estudiantes usan en la solución de problemas matemáticos con el establecimiento de un comparativo con el modelo heurístico de George Polya y Allan Schoenfeld. El primero, como precursor y máximo exponente en esta línea, y, el segundo como quien ha tomado al primero como base para realizar nuevas propuestas

En este sentido, es primordial analizar las situaciones desde el área de matemáticas que favorezcan la transformación de realidades en el aula de clase, revisar las fortalezas y debilidades para determinar qué sucede con los estudiantes, indagar las formas utilizadas por los jóvenes al resolver las situaciones problema y que el docente busque estrategias para dotar al estudiante de herramientas suficientes para lograr mejores desempeños en esta competencia.

Como ya se esbozó, los estudiantes persisten en bajos resultados cuando presentan pruebas y dejan un sinsabor por no tener claridad sobre las posibles causas de tal situación, empero, esta investigación diseña estrategias para la comprensión del fenómeno y busca alternativas que, con la ayuda de modelos heurísticos, ilustren y faciliten los cambios necesarios para superar algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes.

Todo lo dicho hasta ahora, se concreta en este interrogante: ¿Cómo resuelven situaciones problema, en el área de matemáticas, los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, en contraste con modelos heurísticos de George Polya y Allan Schoenfeld?



Delimitación

La investigación se realiza en la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, de la jornada de la mañana, ubicada en la comuna 4 de la ciudad de Medellín, en el barrio Aranjuez y en el marco de la propuesta de la Secretaría de Educación: Maestros para la vida. Este estudio pretende indagar sobre las estrategias que cinco estudiantes y un experto utilizan en la solución de situaciones problema en contraste con modelos heurísticos de autores como George Polya y Allan Schoenfeld.

Pero resulta oportuno concluir que no se pretende profundizar en los modelos expuestos por estos autores sino en las etapas que plantean para su aplicación en la solución de problemas.

Se espera con esta investigación comprender cómo los estudiantes resuelven algunas situaciones problema en el área de matemáticas, esta información permitirá al docente realizar una revisión de sus estrategias de enseñanza, con el fin de determinar si su metodología ha sido adecuada a las necesidades actuales de los estudiantes o le permita, mediante una reflexión interna, implementar modificaciones enfocadas a mejorar su proceso de enseñanza.

En efecto, identificar algunas necesidades específicas en los estudiantes que presentan dificultad en el aprendizaje de la matemática y cómo logran hacerlo fácilmente quienes no presentan estas dificultades, es importante para generar cuestionamientos de fondo en la comunidad educativa y se ayude a generar estrategias pedagógicas de enseñanza y aprendizaje, que incrementen y potencialicen la resolución de problemas, como paso al fortalecimiento de las competencias matemáticas.

Objetivo general

Caracterizar las estrategias y procedimientos que utilizan los estudiantes del grado undécimo en la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, en la resolución de situaciones problema en el área de matemáticas, en contraste con la heurística planteada por autores como George Polya y Allan Schoenfeld.

Objetivos específicos

- Describir las estrategias y procedimientos que los estudiantes utilizan en la resolución de situaciones problema en el área de matemáticas.
- Establecer relaciones entre las estrategias y procedimientos que los estudiantes usan en la resolución de situaciones problema en el área de matemáticas y los modelos de George Polya y Allan Schoenfeld.

Marco de referencia

Uno de los principales pasos para llegar a los descubrimientos es partir de preguntas y cuestionamientos que permiten recorrer un largo camino, para ello se hace necesario concebir el problema, los procesos cognitivos, competencias y habilidades para la resolución de los mismos y favorecer la agudeza en la interpretación y la transferencia de saberes a la vida cotidiana para experimentar satisfacción y el goce del éxito. Al respecto, Polya (1984) manifiesta:

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un gran descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. (p. 7)

También encuentra que el hombre busca, incansablemente desde la antigüedad, responder a situaciones que se presentan como sin salida aparente, motivo por el cual se han realizado descubrimientos que han permitido una mayor comprensión del mundo circundante en el mundo matemático y en todas las áreas del conocimiento. Es así que, hasta nuestra época, se persiguen respuestas a los múltiples problemas de la vida cotidiana. La educación matemática no es la excepción y, por ello se observa que psicólogos, pedagogos, filósofos y maestros investigadores, realizan esfuerzos para ser parte de ese grupo que se considera como el transformador de la historia.

Autores como el húngaro George Polya (1887-1985), considerado precursor de la solución de problemas, en su libro *Cómo plantear y resol-*



ver problemas (Polya, 1965) plasma la heurística para la solución de problemas para tratar temas, términos, ejemplos, estrategias y sugerencias que acercan al docente a la comprensión de los análisis que los jóvenes demuestran a la hora de resolver situaciones problema: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan, examinar la solución.

Otros autores han estudiado y aplicado esta propuesta que a sigue vigente porque fundamenta a otras teorías. En el artículo: "En la resolución de problemas: un reto para la educación matemática contemporánea" (Triana, 2009). Este autor reseña algunos exponentes de teorías como: Schoenfeld, Bransford y Stein, Mason, L. Burton y K. Stacey, Miguel de Guzmán, quienes, apoyados en el método heurístico de Polya, han propuesto ideas innovadoras para la resolución de problemas en el campo de las matemáticas. De igual forma, Schoenfeld (1985) en su libro *Matemáticas problema solving*, precisa acciones en las aulas similares a las que desarrollan otros matemáticos en la solución de problemas en campos como la inteligencia artificial y la teoría psicológica en el procesamiento de la información con base en la observación de procesos con participantes reales y enunciar, dentro de la categoría de control, cuatro fases a seguir en la solución de problemas algebraicos y matemáticos: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Otros autores, como Bransford y Stein (1988) presentan el método Ideal, cuyas letras indican cada una de las etapas para la resolución de problemas: identificación de los problemas; definición y representación del problema; exploración de posibles estrategias; actuación fundada en una estrategia y logros obtenidos con una observación-evaluación de los efectos de las actividades. También se encuentran las propuestas de J. Mason, L. Burton y K. Stacey que aparecen publicadas en la obra *Pensar matemáticamente* (Mason, 1989) en la que se toman elementos como el paso de una fase a otra con altibajos; revisión del mismo y los aportes personales cuando se trasciende el pensamiento matemático a la vida cotidiana y se destacan los monitores internos y externos.

Miguel de Guzmán (1991) propone un modelo en el que se contempla el aspecto afectivo y el establecimiento de hábitos mentales, útiles, eficaces y creativos y, para ello, se debe familiarizar con el problema, búsqueda de estrategias para llevar adelante la estrategia y revisar el proceso y sacar consecuencias de él. En este orden de ideas, varios in-



investigadores cubanos, como Albarrán, J., Ballestero Pedroso, Sergio de Msc Reinaldo Sampedro Ruiz, Msc Ana Elena Fernández Álvarez, Msc Migdalia Fernández Perón, se han preocupado por esta problemática en mención: comprender las formas en las que los estudiantes afrontan situaciones problemas y cuáles son las estrategias usadas. Estos investigadores realizaron estudios, especialmente con niños de primaria, y concluyeron como hallazgo la importancia de revisar los modelos que ellos siguen a la hora de resolver problemas matemáticos como herramienta central en los cambios del docente en su práctica educativa.

La doctora Esther Rodríguez Quintana (2005) en su memoria para optar al título de Doctor: "Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico", invita a revisar y analizar la solución de problemas en matemáticas como un asunto de mayor trasfondo y propone no quedarse en la aplicación del método heurístico de Polya sino el de trasponer la actividad de resolver problemas como dinamizador del proceso educativo y no como un nivel temático.

En la tesis de Gloria Beatriz Agudelo Valencia, Vanessa Bedoya Quintero y Alejandra M Restrepo Morales sobre "Método heurístico en la resolución de problemas" (2008), realizada con estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Camilo Torres en la ciudad de Pereira, con quienes se realizaron unas pruebas integradoras para analizar el uso del modelo de Polya en la resolución de problemas, arrojaron resultados positivos y se evidencia mejor desempeño y un cambio de actitud hacia la reflexión del procedimiento para demostrar la importancia de detenerse a analizar cada paso y hallar nuevas rutas de solución. En este trabajo se recomienda adoptar esta estrategia desde niveles más bajos y anima a la implementación del modelo en las aulas de clase por parte de los maestros.

En este propósito, en las "Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza y aprendizaje", tesis para optar al título de Magíster (Bedoya y Ospina, 2014), los autores, en el estudio con un grupo de docentes del área de matemáticas, despliegan teorías como la de Fandiño, Bruno de A'more y otros autores retomados por éste en sus investigaciones, sobre la solución de problemas matemáticos, las convicciones de los maestros y su influencia en los procesos de aprendizaje, los ubican en modelos y concepciones del término problema, según



los autores rastreados. Allí se demuestra la urgencia de mirar hacia las prácticas educativas de los maestros como potenciadores para mejorar los desempeños en el área de matemáticas.

Como se ve, la preocupación por mejorar los procesos en la resolución de problemas ha ocupado a varios investigadores pero fue en la década de los 80 cuando La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) afirmó categóricamente en la (NTCM, 1980) que el más significativo cambio en la enseñanza de la matemática era tomar como foco principal la resolución de problemas en los procesos de enseñanza-aprendizaje propuesta que fue secundada en el informe Cockcroft del Reino Unido (Cockroft, 1982), momento desde el que se aúnan esfuerzos para pensar y repensar metodologías que apunten al fortalecimiento de estas competencias en los estudiantes del mundo.

Ser competente en matemáticas está asociado con: *el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo* MEN (2009), es decir, aplicar los conocimientos matemáticos en la formulación y resolución de situaciones problema de su contexto para modificar situaciones y apropiarse de nuevos conocimientos que cobren sentido y significado con la idea de favorecer un aprendizaje significativo. Se busca relacionar los conocimientos nuevos con lo que el joven ya sabe. Según Ausubel (1988): "Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto_o una proposición" (p. 18).

El aprendizaje significativo se relaciona directamente con el desarrollo de las competencias que, según Fernández (Barrantes, 2006) resume lo que el NCTM propone como competencias necesarias en el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: "el fin de la enseñanza de las matemáticas de ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad matemática; lo que los estudiantes aprenden está fundamentalmente conectado con el cómo lo aprenden; todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente porque la enseñanza es una práctica compleja y, por tanto, no reducible a recetas o prescripciones.

El país está determinando los lineamientos y los estándares de competencias emitidos por el Ministerio de Educación que convocan a los docentes a diseñar estrategias que fortalezcan las diferentes competencias como las contempladas en el área de matemáticas:



formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos agrupados, para 2015, en interpretación y representación, formulación y ejecución, argumentación pero, sin olvidar los pensamientos que definen los Lineamientos curriculares. Estos son: pensamiento numérico, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistema de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos para potenciar las competencias que apunten a este fin.

Como se expuso, la necesidad de favorecer el desarrollo de las competencias matemáticas es una preocupación nacional e internacional de larga data en el mundo entero, por lo tanto, es pertinente indagar las razones, estrategias, técnicas generales y específicas que los jóvenes expresan al requerir de la matemática para la solución de situaciones problema relacionados con sus vidas cotidianas.

Marco teórico

En este marco teórico se encuentran conceptos de problema, situación problema y resolución de problemas; se contempla el método heurístico de George Polya y el modelo de Allan Schonfeld para la solución de problemas.

Desde el Ministerio de Educación, como ente regulador en su Plan de desarrollo nacional, se apunta al mejoramiento de las competencias en la formación integral en los estudiantes de la Nación, en procura de jóvenes líderes, proactivos, autónomos, responsables, críticos, capaces de enfrentar y resolver los retos del mundo contemporáneo. Y es en esta medida que el desarrollo de las competencias matemáticas cobra valor y pertinencia.

Por ello, la resolución de problemas es una de las competencias fundamentales en el proceso educativo de los estudiantes durante su formación básica. Al respecto Pérez y Ramírez (2011) lo expresan en su artículo: "Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos". Entre los contenidos matemáticos desarrollados en la escuela, adquieren relevancia la resolución de problemas porque se constituye como una herramienta didáctica potente para desarrollar habilidades entre los estudiantes,



además de ser una estrategia de fácil transferencia para la vida puesto que permite al educando enfrentarse a situaciones y problemas que deberá resolver.

Al respecto, el MEN (2006) en los estándares básicos de competencias afirma:

Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas. (p. 51)

Bedoya y Ospina, en su tesis, citan la importancia de la solución de problemas desde una perspectiva internacional. La orden 10 de Andalucía establece:

La resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático y, en este sentido, ha de impregnar e inspirar todos los conocimientos que se vayan construyendo en esta etapa educativa, considerándose como eje vertebrador de todo el aprendizaje matemático y orientándose hacia la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea. Tanto en la vida cotidiana como respecto a los grandes problemas que afectan a la humanidad. (Andalucía, 2007, p. 19)

Otros autores, como Lesh y Zawojewski (2007), definen la resolución de problemas como:

proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpre-

taciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas. (p. 782)

Fandiño (2010) señala:

La resolución de problemas se da mediante lo que “podemos llamar por ahora “estrategias de resolución de problemas” esta serie de pasajes: exploración de reglas (normas, experiencias) conocidas y aplicadas; descarto de algunas de estas; análisis de la situación estudiándola desde puntos de vista diversos; confección de una regla nueva de comportamiento obtenida “dosificando” oportunamente reglas exitosas ya utilizadas en precedencia; verifica la posibilidad de resolución del problema con dicha nueva regla. (p. 85)

De acuerdo con estas posturas, es evidente la urgencia de potenciar, en la escuela, diferentes estrategias para la solución de problemas matemáticos. Por lo tanto, es necesario conceptualizar algunos términos. Según la RAE (Real Academia de la Lengua Española) estrategia es “un proceso regulable, conjunto de las reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento”. Y un problema es un “planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos” (Española, 1713). Para Poggioli (1999) “las estrategias para resolver problemas se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución” (p. 26).

En 1998 El Ministerio de Educación en los Lineamientos curriculares en matemáticas cita al reconocido George Polya:

(...) resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados (...). (p. 52)

Cuando un estudiante se enfrenta a la solución de problemas, implementa estrategias que le permiten lograr tal fin. Al respecto, Polya expone un método heurístico con cuatro etapas:



- **Paso 1: Entender el problema**

Este es el paso más importante porque, para solucionar una situación problema, se debe comprender. En este espacio se plantean preguntas como:

- ¿Entiendes todo lo que dice? ¿Puedes replantear el problema con tus propias palabras?
- ¿Distingues cuáles son los datos? ¿Sabes a qué quieres llegar? ¿Hay suficiente información?
- ¿Hay información extraña? ¿Este problema es similar a algún otro que hayas resuelto antes?

- **Paso 2: Configurar un plan**

En esta segunda etapa, el estudiante diseña una estrategia para la solución de la situación problema. En este espacio se plantean preguntas como:

- ¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final).

Entre las estrategias están: ensayo y error (conjeturar y probar la conjetura), usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, usar las propiedades de los números, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, usar casos, resolver una ecuación, buscar una fórmula, usar un modelo, usar análisis dimensional, identificar sub-metas, usar coordenadas, usar simetría.

- **Paso 3: Ejecutar el plan**

Consiste en implementar estrategias que se escogieron hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso.

Cualquier plan presume el establecimiento de unas tareas a realizar para que sea factible la solución, esto amerita unos conocimientos, entrenamiento perseverancia y disciplina, por ello el estudiante debe inspeccionar metódicamente cada paso o estrategia planteada, vigilando atentamente la exactitud, validez, eficacia y pertinencia del mismo.

Es necesario concederse un tiempo razonable para resolver el problema. Si no hay éxito, se solicita una sugerencia o puede dejar de



lado el problema por un momento y volver a empezar. Suele suceder que un descanso o una nueva estrategia conducen al éxito.

- **Paso 4: Mirar hacia atrás**

Este último paso se obvia, generalmente; sin embargo, es importante realizarlo. Algunas preguntas que orientan este paso son:

- ¿Tu solución es correcta?
- ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?
- ¿Adviertes una solución más sencilla?
- ¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?

En la Tabla 1 (siguiente página) se indican algunas preguntas que se plantean en el esquema.

En este mismo orden se encuentra Allan Schoenfeld, matemático norteamericano que se interesó en los libros del George Polya y se dedicó a investigar sobre sus planteamientos. En 1985 publica su libro *Mathematical Problem Solving* en el que expone que las estrategias para la solución de problemas, por sí solas, no son heurísticas eficaces porque se deben tener en cuenta otros factores y, sobre todo, porque emergen cuatro dimensiones o categorías de conocimiento:

Recursos cognitivos

Se trata de los conocimientos del estudiante, sus saberes previos, las fórmulas, algoritmos y conceptos generales que aluden a la cantidad y capacidad para utilizar estos conocimientos en la solución de situaciones problema. El autor hace referencia al inventario de recursos para que el estudiante conozca y use en determinados contextos y los defectuosos, es decir, los errores que pueda tener en sus conceptos o su aplicación por aprendizajes inapropiados o procedimientos equívocos. Entre tales conocimientos se encuentran: lingüísticos, semánticos, esquemáticos y estratégicos.

Heurísticas

Es el conjunto de técnicas y estrategias que se conocen y utilizan en la solución del problema. Este es el punto más complejo entre los autores porque Schoenfeld afirma que las estrategias planteadas por Polya



Tabla 1. Fases del modelo de George Polya

Fases	Preguntas orientadoras
Entender el problema. Comprensión de lo planteado.	¿Cuál es la incógnita? ¿Cuál es la condición a satisfacer? ¿Es posible satisfacer la condición? ¿La condición es suficiente para determinar la incógnita? ¿Es suficiente? ¿Es superflua? ¿Es contradictoria? ¿Dibuja la figura? ¿Introduce nociones adaptadas? ¿Separa las distintas partes de la condición? ¿Puedes escribir cuáles son?
Configurar un plan. Elección de la estrategia.	¿Lo has visto? ¿Has visto el mismo problema en una forma ligeramente distinta? ¿Conoces un problema similar? ¿Conoces un teorema que pudiera ser útil? Puede ser ¡Observa la incógnita!, tratar de pensar en un problema conocido que tenga la misma incógnita o parecida. He aquí un problema similar al tuyo y que ha sido resuelto anteriormente. ¿Podrías usar el resultado? ¿Podrías usar el método? ¿Tendrías que introducir algún otro elemento para poder usarlo? ¿Sabrías introducir algún otro elemento para poder usarlo? ¿Sabrías reformular el problema de forma distinta? ¿Sabrías reformularlo de otra forma? Vuelve a las definiciones. ¿Si no sabes resolver un problema propuesto, intenta resolver primero un problema similar? ¿Puedes imaginar un problema más fácil de afrontar, que tenga una relación con este? ¿Y un problema más general? ¿Y un problema análogo? ¿Sabrías resolver una parte del problema? ¿Cuánto dista la incógnita determinada así? ¿Cómo puede variar? ¿Puedes deducir algo útil de los datos? ¿Puedes pensar en otros datos útiles para encontrar la incógnita? ¿Puedes cambiar los datos o la incógnita, o ambos si es preciso, de forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más próximos entre sí? ¿Has tenido en cuenta todas las nociones esenciales contenidas en el problema?
Ejecutar el Plan. Implementación de la estrategia.	Mientras sigues tu plan de solución, controla todos los pasos. ¿Puedes ver con claridad si es exacto? ¿Puedes probar que es exacto?
Mirar hacia atrás. Verificación de la respuesta hallada.	¿Puedes controlar el resultado? ¿Puedes controlar el razonamiento? ¿Puedes obtener el resultado de forma distinta? ¿Puedes verlo a primera vista? ¿Puedes usar el resultado o el método para otro problema?

Fuente: Adaptado de D'Amore, 2010, p. 211.



no pueden ser generales y deben adecuarse a las necesidades para ser implementadas.

Control o metacognición

Es la capacidad para usar los conocimientos en una situación problema específico para lograr un objetivo. El estudiante debe tener la capacidad para reflexionar sobre los caminos elegidos y retroceder, si es necesario, para lograr la eficacia en su cometido y la conciencia que se tenga sobre su propia capacidad y habilidad en la resolución de los problemas.

Algunas de las tareas en esta dimensión son:

- Entendimiento: comprender el problema planteado.
- Hacer un diseño: revisar posibles opciones de solución y elegir una de ellas.
- Revisar la técnica elegida y disponer cuándo renunciar a una vía poco fiable y tomar otro camino.
- Ejecutar el modelo y cambiarlo, cuando sea necesario.
- Examinar la resolución.

Schoenfeld sugiere actividades que pueden servir para el control:

- El uso de medios audiovisuales que permitan mirar lo que se hizo.
- Resolución de problemas con fórmulas o procedimientos errados para su posterior análisis.
- Verificación del conocimiento y entendimiento del vocabulario empleado en los planteamientos de los estudiantes.
- El trabajo entre pares o colaborativo.

Componente afectivo

Se refiere a las creencias, actitudes y emociones que estudiante, docente y sociedad experimentan o tienen sobre la resolución de problemas y que afectan favorable o desfavorablemente y se incluye el concepto de matemática.

El autor acentúa especialmente el crédito que se da a la argumentación formal matemática y su validez en el momento de solucionar los problemas por cuanto puede incidir en cómo aprende matemática y en el tiempo que se tome para la resolución de problemas.



Hugo Barrantes (2006, p. 5) en su artículo acerca del trabajo de Alan Schoenfeld retoma una cita de Lampert para argumentar la importancia que tienen los estudiantes sobre las creencias y sentimientos hacia las matemáticas y que influyen en la resolución de problemas.

Comúnmente la Matemática está asociada con la certeza, conocerla es ser hábil para dar respuestas correctas rápidamente. Esta asunción cultural está condicionada por la experiencia escolar, en la cual hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor; conocer matemáticas significa recordar y aplicar correctamente las reglas cuando el profesor lo requiera y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias acerca de cómo hacer matemáticas y qué significa conocerla en la escuela se adquieren a través de años observando, escuchando y practicando. (p. 5)

Tabla 2. Fases del modelo de Alan Schonfeld

Categorías	Consideraciones
Recursos	Saberes previos, tiene en cuenta el inventario de recursos, las circunstancias estereotípicas y los recursos defectuosos y aprendizajes erróneos de los estudiantes.
Heurística	Conjunto de tácticas, técnicas utilizadas para la resolución de problemas no específicas para cada problema.
Control	Destreza para monitorear y valorar el proceso teniendo en cuenta unas subfases: Entendimiento. Creación de un diseño Monitoreo de la técnica Ejecución el diseño Revisión del diseño
Creencias	Visión que tienen discentes, docentes y sociedad en general acerca del conocimiento matemático de acuerdo con su experiencia.

Fuente: Construcción de los investigadores.

Adicionalmente, se hace necesario conceptualizar sobre el término de situaciones problema. De acuerdo con Orlando Mesa (1998):

Una situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el participante está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático (...). (p. 15)

En este sentido, una situación problema permite que los estudiantes movilicen el pensamiento para que haya una construcción de relaciones matemáticas. En esta investigación cobra sentido indagar por las estrategias que utilizan los estudiantes y dar solución a dichas situaciones.

Metodología

Este proyecto se enmarca en el paradigma cualitativo de investigación por cuanto pretende ver a la institución educativa y, en particular, al aula de clase, como una realidad compuesta por participantes y significados que son permeados por múltiples variables de distinta índole como son lo social, afectivo, económico y cognitivo.

Al respecto Sandoval afirma que:

Los acercamientos de tipo cualitativo reivindican el abordaje de las realidades subjetiva e intersubjetiva como objetos legítimos de conocimiento científico; el estudio de la vida cotidiana como el escenario básico de construcción, constitución y desarrollo de los distintos planos que configuran e integran las dimensiones específicas del mundo humano y, por último, ponen de relieve el carácter único, multifacético y dinámico de las realidades humanas. Por esta vía emerge entonces, la necesidad de ocuparse de problemas como la libertad, la moralidad y la significación de las acciones humanas, dentro de un proceso de construcción sociocultural e histórico, cuya comprensión es clave para acceder a un conocimiento pertinente y válido de lo humano. (Sandoval, 1996, p. 15)

La idea de este paradigma es interpretar esa realidad con la ayuda de unos métodos y unos instrumentos para indagar el fenómeno estudiado. No se asume que es preciso aludir a una interpretación objetiva



porque en el ámbito de lo social es muy complejo, pero, para este caso, es preciso determinar la manera en la que los estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño afrontan y resuelven las situaciones problema en el área de matemáticas. De allí que el nivel investigativo alcanzado es descriptivo y su intención es descubrir y analizar las estrategias y procedimientos que usan los estudiantes en la resolución de situaciones problemas.

A continuación, se describen los componentes del diseño metodológico: participantes, método e instrumentos de recolección de la información y su sistematización.

Población. Participantes

Tabla 3. Descripción de los participantes

Caso estudiante/ seudónimo	Característica
Participante 1: P1	Joven activo, extrovertido, motivado, dispuesto, seguro de sí mismo y de sus habilidades matemáticas. Además, paciente y cauto para realizar la tarea.
Participante 2: P2	Joven tranquila, callada, precisa y concreta en sus respuestas, demostró disposición pero se aceleró para terminar pronto la actividad.
Participante 3: P3	Joven intranquilo, nervioso, seguro de sus habilidades y capacidades pero denotó estrés y falta de concentración en la actividad.
Participante 4: P4	Joven muy seguro de sí mismo, tranquilo, sereno, reflexivo, motivado y constante en la realización de la tarea.
Participante 5: P5	Joven introvertido, nervioso pero dispuesto y persistente en su propósito de realizar la tarea.
Experto	Maestro en ejercicio, Magíster en la enseñanza de las ciencias exactas y naturales, destacado en la institución por su apertura y disponibilidad ante nuevas propuestas.

Fuente: Datos alcanzados en el estudio.

Para esta investigación se seleccionó un grupo de cinco estudiantes de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, del barrio Aranjuez, que cursan el grado undécimo y que realizaron un taller en el que re-

solvieron situaciones problema e hicieron un protocolo de análisis de tareas argumentativas y, además, los procedimientos que los llevaron a la respuesta, sus fortalezas y debilidades en la realización de los ejercicios propuestos.

Técnicas de análisis

El método

El método más pertinente para este tipo de investigación, ajustado a los propios intereses, es el estudio de caso definido por Yin (1989) como: "la descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas". En este caso, se trata de una situación particular (¿cómo resuelven los estudiantes las situaciones problema que se les proponen?). Cabe agregar que el estudio de caso tiene varias modalidades, de acuerdo con los objetivos que van desde explicativos, descriptivos y de metodología combinada y, en esta última se ubica la investigación en función del número de casos implicados puesto que se intenta analizar la situación expuesta con estudiantes de diferentes grupos de un mismo grado y con similares niveles de desempeño: cinco estudiantes del grado undécimo, en tres grupos diferentes, seleccionados por los docentes de matemáticas que acompañan el proceso formativo en este año. Cabe anotar que se realizó una prueba piloto con un estudiante del mismo grado para la validación del instrumento.

Los instrumentos

Los instrumentos seleccionados fueron los dispositivos de evaluación (Yin, 1994) que se usan cuando la observación no permite encontrar la información que se desea obtener, entre ellos, las pruebas, entrevistas y, para este caso, taller y protocolos de análisis de tareas, mecanismos que serán utilizados para la recolección de información para el análisis de los procedimientos, etapas que usaron los estudiantes y, posteriormente, compararlos con las fases expuestas por George Polya y Allan Schoenfeld y determinar las estrategias aplicadas, las similitudes y diferencias y categorizar los recursos y métodos empleados en la resolución de problemas.



Descripción de los instrumentos

Talleres o pruebas:

Se realizó un taller con cinco situaciones problema que tratan los diferentes tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional y que están estipulados en los Lineamientos curriculares del área de matemáticas y las competencias de: interpretación y representación, formulación, ejecución y argumentación, que son los que aparecen en las pruebas censales (Saber 11^o), que se suman a las competencias axiológicas.

Protocolo de análisis de tareas:

Es una herramienta neopiagetana para analizar información donde se aplican técnicas que buscan desglosar las estructuras de los problemas en componentes más simples que favorezcan una mayor depuración en los procedimientos.

Pascual Leone es el precursor de esta propuesta que ha tomado arraigo entre investigadores matemáticos para el diseño y análisis de tareas matemáticas, además de enfoques en otros campos como la Teoría de situaciones didácticas (TSD, Brousseau, 1998), la Teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999), el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007), o el marco de la "Educación matemática realista" (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005). El enfoque metodológico de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 2011), basada en la TSD y, de manera más general, las *investigaciones basadas en el diseño* (IBD, Kelly, Lesh y Baek, 2008), conceden un papel central a la selección y análisis de las situaciones-problemas/tareas como punto de partida de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La metodología de aprendizaje basado en proyectos (Batanero y Díaz, 2004; 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) constituye otra iniciativa en la misma dirección que el diseño y análisis de tareas, en este caso, para la educación estadística. (citados por Godino, 2013).

Continúa Godino: se entiende el diseño de tareas en el sentido amplio que proponen Watson y Mason (2007) la distinción entre este campo y la investigación basada en el diseño se diluye:

Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo cómo alteran la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimulados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea. (p. 206)

En esta investigación se presenta una adaptación al modelo de Pascal Leone, Mariela Orozco, Pascual-Leone y Johnson (1991), Pascual-Leone (1997) y Orozco (1997) unido a las necesidades particulares del propósito de esta investigación. Conviene agregar que el análisis de tareas admite examinar cualquier tarea y, como resultado de su análisis, describir un patrón de los métodos ideales que permiten solucionarla. "Estos modelos siempre son relativos a una estrategia específica en una situación específica" (Pascual-Leone y Johnson, 1991, p. 163).

Los niveles de análisis que se proponen para el método son: objetivo, subjetivo, metasubjetivo y metacognitivo.

En el análisis objetivo se describe detalladamente la tarea y el estudio de la disposición de la misma; características como las instrucciones, el formato, recursos y medios a utilizar.

Radica en detallar las particularidades de forma muy específica con el fin de entender y comprender la tarea. Para ello se puede acudir a interrogantes que orientan la efectividad de la tarea: ¿Qué? ¿Cómo? ¿Por qué? ¿Para qué? ¿Dónde?

En este análisis se examina la tarea mediante momentos donde se reconocen ordenadamente y en mayor detalle y precisión, los conocimientos, destrezas y las pericias asociados a cada paso en contexto.

El análisis subjetivo requiere la descripción minuciosa del desarrollo en la realización de la tarea y las exigencias que el resolutor desafía a la hora de resolverla. Contempla dos momentos: la caracterización y descripción del proceso de solución ideal y el análisis de las técnicas empleadas por los estudiantes. En este análisis se visualiza el reconocimiento de los requerimientos que emergen de la tarea para cualquier resolutor y permite observar las lógicas y relaciones entre los procedimientos de los estudiantes, los expertos y los supuestos matemáticos.

El análisis metasubjetivo y metacognitivo se refiere a la capacidad para repensar sobre las propias facultades y las formas de solucionar



situaciones de aprendizaje, dado que pone en evidencia los requerimientos que la tarea requiere del resolutor.

En este análisis las identificaciones de los pasos correctos permiten establecer la ruta secuencial óptima de solución para cualquier sujeto que realice la tarea; es decir se puede modelizar la solución correcta para evaluar las producciones de los sujetos participantes. Para ello se puede preguntar:

- ¿Qué tipo de acciones se deben realizar para ejecutar la tarea?
- ¿Qué haría cualquier individuo para realizar correctamente la tarea?
- ¿Qué semejanzas se encuentran entre lo realizado por el sujeto y el modelo ideal de solución?
- ¿Cuáles pasos presentan dificultad para el sujeto?
- ¿Cuál es la dificultad particular en el procedimiento?

El análisis subjetivo comprende tres aspectos: planeación, control y control y evaluación.

El análisis de la información

Para este apartado se perfilaron tres matrices en las que se pretende identificar las categorías de análisis y los elementos recurrentes o disímiles en la información y registrar los hallazgos, semejanzas o diferencias, que se encuentran en la solución de los estudiantes y el experto para los problemas propuestos en el taller y la manera de argumentar, desde la entrevista, los procesos elaborados en contraste con la heurística de Polya y Schoenfeld.

Las matrices se diseñaron para comparar la tarea y las justificaciones orales en dos categorías:

Participante a participante. Entre los participantes, incluido el experto y los elementos comparados están contemplados en el análisis subjetivo (identificación y descripción de la solución formal para el experto con análisis de las operaciones y actividades realizadas por los estudiantes). El análisis metasubjetivo y metacognoscitivo: planeación, control y control y evaluación.

La matriz diseñada para este fin muestra, en la fila vertical, el participante que va a ser comparado con los participantes que aparecen en la fila horizontal. Se realiza el registro de las semejanzas y diferencias

halladas participante a participante y, obviamente, se omite el registro del participante que se va a comparar y, por tanto, esta casilla se colorea para evitar confusión en la lectura de la información.

Por ejemplo: el participante uno fue comparado con las respuestas de los sujetos dos, tres, cuatro, cinco y el experto y finaliza con una conclusión sobre las respuestas.

Tabla 4. Matriz análisis sujeto a sujeto

Aspecto		P 2	P 3	P 4	P 5	Exp	Conclusión
¿Cuál es el objetivo de la actividad?	P1						
	SP2	■					
	P3	■	■				
	P4	■	■	■			
	P5	■	■	■	■		
¿Qué reglas debe seguir para desarrollar la actividad?	P1						
	P2	■					
	P3	■	■				
	P4	■	■	■			
	P5	■	■	■	■		
¿Qué problemas pueden presentarse?	P1						
	P2	■					
	P3	■	■				
	P4	■	■	■			
	P5	■	■	■	■		
¿Cómo puede resolver estos problemas?	P1						
	P2	■					
	P3	■	■				
	P4	■	■	■			
	P5	■	■	■	■		

Fuente: Datos alcanzados en el estudio.

Análisis objetivo con el análisis subjetivo de cada participante. Se determinaron relaciones de coincidencia y divergencia entre lo esbozado por los investigadores y los participantes. Así: en la fila vertical se observan los aspectos del análisis subjetivo que se comparan con los aspectos de la fila horizontal para las respuestas de cada uno de los participantes y las conclusiones emergentes.

Tabla 5. Matriz análisis objetivo con el análisis subjetivo de cada participante

Aspecto del a. subjetivo	Análisis objetivo	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	Exp	Conclusión
¿Cuáles son los objetivos?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso, en el problema 1?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso, en el problema 2?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso, en el problema 3?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso, en el problema 4?								
¿Cuál es el procedimiento a seguir, paso a paso, en el problema 5?								

Fuente: Datos alcanzados en el estudio.



Análisis comparativo experto-estudiante: se hizo un comparativo entre cada uno de los participantes y el experto en los criterios definidos en la investigación. A continuación, la matriz perfilada.

Tabla 6. Matriz análisis comparativo experto-estudiante

Aspecto	Experto				
	Participante 1	Participante 2	Participante 3	Participante 4	Participante 5
¿Cuál fue la diferencia entre el experto y el estudiante en cuanto al procedimiento, las estrategias, las operaciones cognitivas, las competencias previas y las competencias desarrolladas?					
¿Qué conocimientos y procedimientos necesita para diseñar la actividad?					
¿Qué conocimientos y procedimientos debe reforzar para mejorar la propuesta?					
¿Hay discrepancia entre sus objetivos, los objetivos planteados para la actividad y los de los estudiantes? ¿Cuáles son las diferencias y cómo se pueden replantear?					

Fuente: Datos alcanzados en el estudio.



Resultados

Cuando se realizó la aplicación del protocolo descrito, y su posterior análisis en los estudios de casos, se encontraron los siguientes aspectos contemplados en la observación metasubjetiva y metacognoscitiva en los elementos de planeación, control, control y evaluación, así como en el análisis objetivo para dar cuenta de lo propuesto en la pregunta de investigación y de los objetivos de la misma.

Planeación: objetivo, reglas, problemas formas de resolución y confianza en la solución de las tareas. **Control:** conceptos, procedimientos, identificación de distractores, errores o equivocaciones, trucos y formas de mejorar y corregir las equivocaciones. **Control y evaluación:** ambiente de aprendizaje, valoración de los textos, tiempos, emociones, habilidades y desempeños para la actividad propuesta.

Participante 1

Planeación

El estudiante identifica plenamente el objetivo de la tarea, expresa no tener ninguna regla para la solución de los problemas, pero refiere la importancia de leer las opciones de respuesta, considera que los problemas que se pueden presentar son el olvido de fórmulas y para solucionar esta situación sugiere leer muy bien toda la información que aporta el planteamiento. Es un joven confiado y seguro de sus habilidades y competencias matemáticas gracias a la preparación que ha tenido en diferentes escenarios: colegio, casa y universidad.

Control

El estudiante expone conceptos relevantes para la realización de la tarea como: porcentajes, probabilidad, operaciones básicas, lógica, geometría, área, volumen, ecuaciones. Los procedimientos que declara el estudiante se contemplan en dos momentos: generales y particulares, de acuerdo con el problema. La táctica es un buen análisis del problema que parte de la lectura y explicita los pasos para cada problema.

- **Problema 1.** Leer y comprender el problema, traducir el enunciado del lenguaje verbal al matemático, identificar el dominio conceptual como porcentajes y realiza un seguimiento del enunciado y representa en porcentaje cada dato, sustrae los porcentajes, revisa en las opciones de respuesta si el dato obtenido se encuentra en ellas. En este procedimiento se ubica el pensamiento numérico.
- **Problema 2.** Leer el problema y analizar los datos presentados en la tabla, realizar sumas para totalizar las columnas y encontrar el número de personas encuestadas, el número de personas que conocen el producto y no lo usan y la cantidad de personas que conocen el producto y lo usan, calcular porcentaje de la columna 3 para comparar con las opciones de respuesta y descartar las innecesarias. Los pensamientos reflejados son numérico y aleatorio.
- **Problema 3.** Leer el problema, realizar la gráfica y dividir las imágenes en triángulos para tomar como unidad de medida la figura tres, (triángulo), sumar los totales de los triángulos y comparar las respuestas. Se observan los pensamientos espacial y métrico.
- **Problema 4.** Realizar la lectura y analizar los datos, dividir el volumen del prisma entre tres, hallar el resultado y verificar en las opciones de respuesta. El pensamiento evidenciado es el métrico.
- **Problema 5.** Leer el enunciado, revisar las condiciones planteadas y, al mismo tiempo, aplicar operaciones básicas para satisfacer las condiciones del problema y verificar en las opciones de respuesta. Se refleja el pensamiento numérico.

El estudiante ubica como dato innecesario el número de personas que no conocía el producto puesto que no es relevante para la solución del problema dos. Al mismo tiempo, el olvido de un procedimiento para la solución del numeral dos y, la no lectura de las opciones de respuesta, las equivocaciones o errores que él identifica en su práctica y plantea como solución la lectura y el estudio de temas como porcentajes y ecuaciones.

También menciona como truco o clave iniciar de atrás para adelante en ejercicios largos y revisar siempre las opciones de respuesta; sugiere socializar y retroalimentar, para mejorar prácticas futuras con sus pares, los procesos individuales subyacentes en el ejercicio.

De igual manera, el participante enuncia actividades necesarias como la comprensión e interpretación del problema, búsqueda de pa-



trones para la solución, aplicación del método elegido y reflexión desde el propio conocimiento y desempeño y acompañar estrategias que secunden el éxito de la tarea, análisis de opciones de respuesta, partir de lo fácil a lo difícil, descomponer los problemas, utilizar notación adecuada, marcha atrás, realizar inferencias y gráficos, descartar opciones de respuesta y revelar las competencias:

- **Cognoscitivas.** Interpretación y representación de información presentada en tablas y gráficos, extracción de datos relevantes e identificación de patrones y relaciones matemáticas.
- **Procedimentales.** Ejecución de un proceso matemático que se verifica con las opciones de respuesta. La competencia argumentativa se demuestra en la escritura del paso a paso y la descripción verbal del mismo.
- **Axiológica.** Se demuestra en la actitud expresada en la entrevista sobre sus sentimientos al respecto de la tarea y el área.

Control y evaluación

Para el participante 1 el ambiente de aprendizaje tuvo condiciones óptimas gracias al silencio que permitió mayor concentración y tranquilidad para realizar la prueba, además de la claridad en los textos escritos, los tiempos designados y el acompañamiento de los facilitadores.

En cuanto a la inversión del tiempo se encontró la división entre los procesos matemáticos y el ejercicio escritural del mismo, lo que se interpreta como que fue un tiempo prudencial, pero para la resolución matemática fue demasiado tiempo y el argumento es que en otras pruebas su récord es de dos a tres minutos. Al lado de ello menciona posibles causas en la utilización del tiempo: el problema número 2 creó desconfianza por no encontrar la respuesta fácilmente en la descripción del paso a paso.

Para el estudiante no hubo circunstancia externa que afecte su desempeño, al contrario, refiere motivación por la actividad y facilidad en la realización de la tarea y considera que puede realizar pruebas semejantes e, incluso, con temas más complejos como inecuaciones, logaritmos y participar en actividades competitivas.

Realizar una afirmación sobre el modelo específico, seguido por el participante 1, sería una falacia porque el camino expuesto por George Polya es el más evidente en la mayoría de los problemas resueltos; sin

embargo, las etapas son similares a las de otros autores y su diferenciación no es muy marcada en este caso.

El modelo de George Polya se deja ver en el experto porque realiza todas las etapas en la solución de los problemas, incluida la validación de las respuestas. El participante 1 dista del experto en su nivel conceptual, sumado a la ejecución de procedimientos sin mayor validación que revisar en las opciones de respuesta.

Participante 2

Planeación

La estudiante describe el objetivo propuesto por la tarea y anexa la evaluación de conocimientos matemáticos implícitos en la misma, describe acciones semejantes a otros participantes a la hora de resolver los problemas.

Con respecto al uso de reglas específicas para realizar la actividad, resalta el uso y aplicación de fórmulas matemáticas que garantizan la efectividad en el procedimiento, además de una lectura comprensiva y la selección de un método apropiado.

Entre los problemas que pueden presentarse a la hora de resolver la tarea, menciona, igual que el participante 1, el olvido de fórmulas o conocimientos, sumado al desconocimiento de temas para lo que dice hacer consultas en diversos medios escritos o virtuales y acudir a un especialista o profesor para resolver sus inquietudes, aunque demuestra seguridad y confianza en sus logros y habilidades matemáticas, gracias a los docentes que la han acompañado en su trayecto escolar.

Para continuar, la estudiante formula como conceptos importantes para la tarea la probabilidad, los porcentajes, operaciones básicas, área, volumen, deducción y discrimina, para cada problema, el concepto:

Problema 1 probabilidad; problema 2 porcentaje y deducir con los datos obtenidos la respuesta correcta; problema 3 hallar el área; problema 4 hallar volumen; problema 5 no sé.

Sobre los temas hace referencia a los procedimientos más importantes para la resolución de la actividad propuesta en la tarea: la comprensión, la lectura, la identificación del tema, la elección de datos, la aplicación de la fórmula y la comprobación del resultado y describe así cada numeral de la prueba:



- **Problema 1:** representar el total de las personas en porcentajes separados por sexo y la primera condición del ejercicio, seguidamente, hallar los cocientes de esos porcentajes que se dividen entre dos. Pese a esto, la respuesta fue errada. Este procedimiento se ajusta al pensamiento numérico.
- **Problema 2:** sumar las personas encuestadas por columnas, luego, sacar el porcentaje de la mitad de la población, comparar el dato con la condición del problema para sacar conclusiones y encontrar el porcentaje de personas que están en los datos en una razón, simplificarla y comparar las respuestas con las opciones de respuesta. El pensamiento reflejado es el numérico.
- **Problema 3:** hallar el área de las figuras 2 y 1, respectivamente, con la fórmula $A=b*h$, luego, la de la figura 3 con, Sumar áreas 1 y 3 y comparar en las opciones de respuesta. Se identifica el pensamiento espacial y geométrico.
- **Problema 4:** identificar el dato principal que indica la fórmula y, el volumen dado, se divide entre 3 y se encuentra el volumen de la pirámide. El pensamiento desarrollado es el métrico.
- **Problema 5:** partir el enunciado en partes y buscar las condiciones, descartar posibilidades hasta encontrar los números pedidos y comprobar en las otras condiciones los resultados hallados. El pensamiento plasmado es el numérico.

En consecuencia, se reconoce como posible error en la tarea la inseguridad asumida al inicio en el punto dos por el olvido momentáneo de la temática e insta a superarlo con la práctica y retroalimentación del tema y, adicionalmente, estima como redundante el gráfico y la información del numeral 4 porque lo propone el enunciado. Cabe anotar que el truco o clave manifestado por el participante 2, en la realización de las acciones conducentes a la resolución de la actividad, tiene que ver con la determinación, uso de fórmulas matemáticas y el empleo del cálculo mental y sugiere mejorar el aprendizaje con la ejercitación y la praxis de problemas semejantes.

Se exponen las bondades del ambiente en el que se desarrolló la prueba, un espacio sosegado, aislado, la disposición de materiales, utensilios, los docentes acompañantes, los tiempos y el diseño de la prueba con textos claros, puntuales y precisos que favorecieron la concentración para la ejecución de la práctica; sin embargo, manifiesta que el tiem-

po usado fue mayor al que usualmente invierte en este tipo de pruebas y plantea que hubo condiciones externas adversas a la prueba, (trasnocho) que pudieron influir en el desempeño eficiente de la misma. Cabe agregar que esta apreciación se basa en el tiempo para el desarrollo matemático.

En general, el participante 2 se declara con habilidades matemáticas que le posibilitan evaluar la realización de tareas como fácil gracias a los temas y su trayectoria académica y la fortaleza de desarrollar tareas semejantes, más complejas o de mayor nivel, en las que se involucren temas como factorización, inecuaciones, trigonometría o más elaborados que no estén en su pensum académico. Cabe anotar, también, la dificultad para describir, en palabras, el paso a paso, procedimiento seguido en cada problema y su escritura.

Por estas razones, se puede deducir que las acciones visibilizadas por P2 en el desarrollo de la tarea fueron la interpretación, comprensión y análisis de la información, la aplicación de conceptos y procedimientos matemáticos, la reflexión sobre su propio hacer para valorar sus capacidades personales.

En este sentido, se tienen las siguientes competencias:

- **Cognoscitivas:** interpretación y representación de información presentada en tablas y gráficos, extracción de datos relevantes, aplicación de conceptos previos en la identificación de modelos y relaciones matemáticas.
- **Procedimentales:** la búsqueda de caminos para realizar la tarea relacionada con su inventario conceptual, efectuar procedimientos matemáticos y volver sobre las soluciones halladas con las opciones de respuesta. La competencia argumentativa se demuestra en la escritura y las formas de comunicación.
- **Axiológica:** lo expresado en la entrevista sobre sentimientos, fortalezas y debilidades respecto a la tarea y a sí misma.

Se puede afirmar que las estrategias particulares demostradas son reformulación de problemas, descomposición en partes, deducción de conclusiones, análisis de las opciones de respuesta, cálculos mentales, aplicación de algoritmos, ensayo error, notación adecuada y descarte de opciones de respuesta.

El participante 2 no se encuentra en un modelo particular, por el contrario, es eclético en su estilo, aunque valora el método de George Polya



y toma pasos de otros modelos expuestos y la etapa de comprobación se reduce a observar las opciones de respuesta y encontrar el resultado.

En cuanto al comparativo con el experto, el participante 2 realiza las etapas de aplicación que hace el experto, a diferencia de la validación, el tiempo empleado para la prueba fue considerado por ambos como demasiado para la parte matemática, aunque el experto agrega su inversión del tiempo en la escritura del paso a paso como dispendioso y complejo.

La seguridad y confianza en las habilidades matemáticas fue constante entre los participantes en mención; sin embargo, la mayor divergencia se encuentra en la fuerza del dominio conceptual que tiene el experto.

Participante 3

En el estudio del protocolo del P3 es necesario mencionar como situación relevante, su disposición condición emocional puesto que siempre refirió un estado de estrés, pero no desistió de la tarea.

En el objetivo el P3 reconoce ampliamente lo propuesto para la investigación, agrega el beneficio que se puede aportar para los compañeros. Además, considera que no tiene reglas específicas para resolver problemas, lo importante es leer detenidamente, analizar e iniciar desde lo fácil, tener paciencia e intentar solucionar los problemas, aunque no se conozca el procedimiento y pese a los obstáculos que puedan presentarse como desespero, impaciencia, elección de un camino equivocado, cometer errores en él. Se debe concentrar y despejar la mente, no rendirse, conservar la calma, revisar los procesos y corregir los errores para asegurar la eficacia en la solución. Al mismo tiempo, recalca la importancia de la tranquilidad porque puede afectar el buen desempeño y los factores externos obstaculizan la eficiencia en estas pruebas.

La revisión de los conceptos es fundamental para la realización de la tarea, pues si no se ubican en ellos el procedimiento puede ser errático. El P3 considera que los principales conceptos en la prueba son las operaciones básicas y el de área y ubica los siguientes procedimientos generales: análisis del problema, aplicación de un proceso matemático, comparación de la respuesta obtenida con las opciones de respuesta y descartar opciones y, por último, agregar los métodos particulares para cada problema.



- **Problema 1:** expresa dificultad para entender el problema, plantea el uso de regla de tres simple aunque no la usa, representa en porcentajes los datos del enunciado y deduce el porcentaje para cada persona, no concluye el ejercicio pero elige una opción de respuesta equivocada. En este procedimiento se observa el pensamiento numérico.
- **Problema 2:** se suman los datos de las columnas presentadas y se concluye que el número de total de personas no aparece en la tabla, se establece una razón entre los totales de la columna dos y tres, simplifica y halla la respuesta basado en la información del planteamiento. El pensamiento numérico es visible en este problema.
- **Problema 3:** es considerado el más sencillo, realiza una gráfica para comparar y acoplar las figuras, expresa: "lo que hice fue sumar el área de la figura uno con la figura tres, dependiendo de las formas que estaban ahí, juntando las dos daba la figura número dos y busqué en las opciones de respuesta". El pensamiento métrico y espacial es el observado en el ejercicio.
- **Problema 4:** leer en el problema la fórmula del volumen y, como dieron el volumen del prisma 810, se divide entre tres y da 270, ese sería el volumen de la pirámide. Aplicar la fórmula matemática dada. El pensamiento métrico se evidencia en este apartado.
- **Problema 5:** leer el problema y seguir las condiciones dadas, una división al principio, se divide el número 18 sobre 6 y la respuesta sería 3. El número inicial se suma con la respuesta y sería 21. El problema decía que ese resultado era tres veces, entonces 21 multiplicado por tres da 63 y busco en las opciones de respuesta. Se muestra el pensamiento numérico.

En cuanto a las equivocaciones o errores que pudieron desplegarse en la solución de la tarea relata su falta de atención, análisis, desinterés por circunstancias personales ajenas a la prueba que no son coherentes para los resultados recomendables de la misma y, no obstante, declara que la información de cada problema era suficiente y necesario para mejorar su aprendizaje pero debe controlar su estrés y dejar de lado las dificultades personales, concentrarse y revisar opciones para solucionar las actividades e iniciar por lo más fácil para evitar errores.

A pesar del entorno emocional que expresa el P3, valora el escenario de la prueba como apto y recomendable, el silencio permite la concentración, la atención y la tranquilidad, la disposición de materiales y



manifiesta que los textos claros y precisos son elementos útiles para mejorar la praxis.

El aspecto cognitivo es tan importante como el aspecto emocional en el proceso de enseñanza aprendizaje y las disposiciones internas de los individuos emergen sin querer, muchas veces, en este tipo de actividades. El P3 demostró nervios y desesperación, recalca que su desempeño y el tiempo usado en la tarea (demasiado) dependió de tales circunstancias y, pese a ello, estima sus habilidades para realizar estas pruebas y determina que puede realizar en otros momentos tareas semejantes más complejas en las que intervengan nociones de cálculo y agrega que encontró dificultad en la escritura del paso a paso.

Para los fines de este argumento es oportuno manifestar que las operaciones cognoscitivas y metacognoscitivas empleadas por el participante 3 en esta tarea son: la interpretación, comprensión y transformación, extracción de la información, establecimiento de relaciones matemáticas, búsqueda de procedimientos, ejecución de los mismos, así como la capacidad para reflexionar, razonar y valorar su propio aprendizaje y desempeño personal en la realización de la actividad, lo que lo instala parcialmente en el modelo teórico de Alan Schoenfeld, aunque no desarrolle todas las etapas planteadas por este autor y retome fases de otros autores en algunos ejercicios.

En cuanto a las competencias demostradas en la tarea se describen:

- **Cognoscitivas:** observación, comparación e interpretación de información presentada en tablas y gráficos, representación de los datos en notación matemática.
- **Procedimentales:** establecimiento de relaciones y métodos, deducción y comprobación de conjeturas.
- **Argumentativas:** revisión de procedimientos, reflexión, corrección de métodos errados.
- **Axiológicas:** reconocimiento de sus propias habilidades y capacidades para efectuar la tarea, toma de conciencia desde su hacer.

En las competencias cognoscitivas y procedimentales, se halla la diferencia entre el novato y el experto, mientras el experto denota dominio de técnicas y conceptos, el novato selecciona su método desde su recuerdo más próximo y, además, el experto modifica y adecua las condiciones en la marcha y en la validación de sus resultados; el estu-

dante se vuelve atrás, si y sólo si, su hallazgo no se encuentra en las opciones de respuesta.

Participante 4

Planeación

El estudiante advierte que el objetivo de la tarea es identificar las estrategias que usa en el momento de solucionar problemas, en concordancia con lo planteado en la investigación.

En relación con las reglas que se tienen para solucionar problemas, el estudiante plantea que, de acuerdo con el problema es el procedimiento que se ha de utilizar; sin embargo, siempre se inicia con una lectura comprensiva del problema, y luego se aplican los procedimientos matemáticos necesarios para solucionar el problema; considera que este análisis es un proceso muy general y que depende de la persona y del problema porque, así mismo, serán los procedimientos aplicados. Además, dice que se debe usar la lógica, entendida como el proceso de estar revisando el problema para abstraer datos importantes que guían la solución de tal problema.

El estudiante afirma que la mayor dificultad que se tiene en el momento de solucionar problemas, es olvidar los procedimientos matemáticos y tener que recurrir a procesos poco lógicos e incoherentes para hacer la tarea. A este recurso lo llama "el uso de machetazos".

Aunado a lo anterior el participante 4 reconoce que, por su formación matemática, ha adquirido una serie de conocimientos que le permiten solucionar más fácilmente estos problemas que a otros estudiantes de su clase.

Control

En la etapa de control se halló lo siguiente: los conceptos básicos que el estudiante identificó fueron: operaciones aditivas y multiplicativas en números reales, porcentaje, regla de tres (pensamiento numérico) y cálculo de áreas y volúmenes, figuras y cuerpos geométricos (pensamiento espacial y métrico). Sin embargo, en la tarea se debían aplicar conceptos de los cinco pensamientos.



En la realización de los procedimientos matemáticos, este estudiante emplea conceptos del pensamiento numérico en la solución de problemas del pensamiento aleatorio y variacional, soluciona la tarea adecuadamente, obtiene soluciones particulares que no permiten la generalización de estrategias de solución.

Sobre el tema del procedimiento aplicado para solucionar los problemas, el estudiante plantea que no hay una forma general, que depende de la persona que soluciona y del tipo de problema planteado. Sin embargo, cuando se analizan los procedimientos aplicados y la entrevista, se concluye que el proceso que aplica el estudiante cuando afronta la resolución de problemas es:

- Lectura y comprensión del problema.
- Aplicación de procedimientos matemáticos.
- Validación de la respuesta obtenida.

A continuación, se muestra cómo fue este proceso en cada uno de los problemas aplicados:

- **Problema 1:** la solución del problema vislumbra uso de porcentajes, razones, además de la aplicación de un ejemplo análogo con suma de fracciones en la que halla y equipara el valor pedido 50%, luego, por comprobación, divide el total por el número de elegidos y encuentra la respuesta A.
- **Problema 2:** en este problema el S4 demuestra sincronía en el procedimiento propuesto en el análisis objetivo porque totaliza las columnas después del estudio de la información, representa los datos de la tabla, incluido el dato que no aparece, calcula el porcentaje de las personas que usan y conocen el producto con respecto al total de los encuestados y, además, comprueba el porcentaje mencionado en la opción D. Concluye que la opción es B, por descarte.
- **Problema 3:** observar las figuras y hacer un gráfico. Realizar una traslación de la figura 3 en el plano: 2 cuadros hacia la izquierda y 4 hacia arriba. Acoplar la figura 3, luego de ser trasladada, busca encajar hasta formar un rectángulo. Comparar ambos rectángulos.
- **Problema 4:** el participante realiza el procedimiento sugerido en el protocolo, es decir, calcular $1/3$ de 810.



- **Problema 5:** inicia con una división del número dado, entre dos, el cociente lo descompone en factores primos y comprueba las condiciones del problema y las verifica en las opciones de respuesta.

De acuerdo con lo anterior, se observa que el primer paso es general, independiente del tipo de problema; sin embargo, el segundo paso depende de la situación planteada porque son las estrategias utilizadas por el participante y, entre las evidenciadas, están: aplicación de algoritmos matemáticos, realización de gráficos, inferencias, conjeturas, deducción y conclusiones, descomposición, reformulación del problema, comparación y búsqueda de semejanza con otros problemas, establecimiento de regularidades.

Además, en la última fase, el estudiante establece como estrategia de validación, el uso de las opciones de respuesta, es decir, si la solución encontrada está dentro de las opciones de respuesta el problema está bien resuelto.

Adicionalmente, el participante plantea que el estado de ánimo influye en el resultado de la tarea, en el caso particular, planteó que el cansancio, por el entrenamiento deportivo que realiza a diario, afectó el resultado de la tarea.

Control y evaluación

Para el participante 4, el ambiente fue conveniente y facilitó la solución de la tarea. Adicionalmente, las tareas propuestas las considera fáciles porque, por su formación, continuamente se enfrenta a este tipo de ejercicios.

En relación con el experto, se encuentran diferencias marcadas desde lo procedimental porque el experto, por su formación, continuamente aplica procedimientos matemáticos generales que lo llevan a una respuesta, independiente de las opciones. Los estudiantes aplican procedimientos particulares que, en ocasiones, son más cortos que el del experto, analiza los elementos del problema (enunciado, opciones de respuestas, gráficos) y llega a la solución del ejercicio planteado.



Participante 5

Planeación

El participante 5 afirma que el objetivo de la tarea es identificar las estrategias que se usan en el momento de solucionar problemas, en concordancia con lo planteado en la investigación. Sostiene que una estrategia para solucionar los problemas es leer y comprender el problema, adicionalmente, menciona que se deben: “acomodar los datos, ir, por ejemplo, descartando opciones de respuestas”; entendido como el proceso de revisar constantemente el enunciado, las condiciones del problema, descartar opciones de respuesta para llegar más fácil y rápido a la solución del problema planteado.

Por otro lado, el participante 5 plantea como dificultad, en el momento solucionar la tarea, el hecho de estar nervioso o estresado porque así no se concentra fácilmente en la solución de la problemática. Sin embargo, se muestra seguro de los conocimientos matemáticos adquiridos a lo largo de su formación académica.

Control

En la etapa de control, el estudiante demuestra la identificación conceptos básicos como:

Operaciones aditivas y multiplicativas en números reales, porcentaje, regla de tres (pensamiento numérico) y cálculo de áreas y volúmenes, figuras y cuerpos geométricos (pensamiento espacial y métrico).

Al igual que los otros participantes, en la realización de los procedimientos matemáticos, este estudiante aplica conceptos del pensamiento numérico en la solución de problemas del pensamiento aleatorio y variacional, soluciona la tarea adecuadamente, obtiene soluciones particulares que no permiten la generalización de estrategias de solución.

Sobre el procedimiento aplicado para solucionar los problemas, el estudiante plantea las siguientes etapas:

- Lectura y comprensión del problema.
- Aplicación de procedimientos matemáticos.
- Validación de la respuesta obtenida.

A continuación, se muestra cómo fue este proceso en cada uno de los problemas aplicados.

- **Problema 1:** establece porcentajes de acuerdo con las opciones de respuesta, suma porcentajes y compara.
- **Problema 2:** el P5 realiza un procedimiento en el que busca porcentajes para cada uno de los datos de las tablas y, por comparación con las opciones de respuesta, las descarta y argumenta su respuesta sin sentido.
- **Problema 3:** observar las figuras, hacer un gráfico, realizar una traslación de la figura 3 en el plano: 2 cuadros hacia la izquierda y 4 hacia arriba, acoplar la figura 3, luego de ser trasladada, busca acoplarla hasta formar un rectángulo y comparar ambos rectángulos.
- **Problema 4:** después de hallar el volumen de la pirámide por descarte con las opciones de respuesta, comprueba, por medio de una adición sucesiva, el enunciado de 3 veces el volumen del prisma.
- **Problema 5:** el P5 realiza su procedimiento y revisa las opciones de respuesta y comprueba, con operaciones básicas, las condiciones del problema.

Se evidencia que el análisis de la información es general, independiente del tipo de problema, y la aplicación de procedimientos matemáticos depende de la situación planteada. Entre la estrategia utilizada por el participante 5 se encuentran: aplicación de algoritmos matemáticos, reformulación del problema, gráficos, marcha atrás, lógica, regresar al problema para analizar información y descartar posibilidades de solución.

En la última fase, el estudiante establece, como estrategia de validación, la verificación de la existencia de la respuesta obtenida dentro de las opciones de respuesta planteadas en la situación problema.

Control y evaluación

Para el participante 5, el ambiente en el que se hizo la tarea fue adecuado porque únicamente estaban los cinco participantes, lo que evitó interferencias en la actividad. Adicionalmente, las tareas propuestas son consideradas como fáciles por su formación y porque, continuamente, realiza este tipo de ejercicios.



En relación con el experto, se encuentran diferencias marcadas desde lo procedimental. El experto, por su formación, continuamente aplica procedimientos matemáticos generales que lo llevan a una respuesta, independiente de las opciones dadas. Los estudiantes aplican procedimientos particulares que, en ocasiones, son más cortos que el del experto, analizan los elementos del problema (enunciado, opciones de respuestas, gráficos) y llega a la solución del ejercicio planteado.

Experto

Planeación

El experto identificó como objetivo la aplicación de conocimientos matemáticos en la solución de ejercicios y problemas matemáticos, alejado del propuesto en el protocolo. Plantea que la regla general para la solución de problemas es: lectura, varias veces, del problema para entenderlo, se lee primero de manera general y, luego, por partes, para hacer una abstracción de datos mientras se está leyendo; esos datos se escriben a un lado del problema para tener en cuenta hacia dónde se orientan los procedimientos matemáticos. Luego, se analizan los procedimientos que se van a aplicar, se aplican y, por último, cuando se halla una respuesta, se usa el contexto del problema para verificar si la respuesta obtenida con el procedimiento que se hizo cumple con las expectativas o con la pregunta realizada. Se hace una prueba o se devuelve en el problema para mirar si es lógica esa respuesta que se obtuvo. El experto se muestra confiado de las habilidades y conocimientos matemáticos adquiridos, gracias a su formación matemática.

Control

El experto identifica como conceptos importantes para la realización de la tarea los siguientes: combinatoria, probabilidad, porcentajes, población, regla de tres, razón, área, volumen, sistemas de ecuaciones.

El paso a paso planteado por el experto para la solución de la tarea, se divide en las siguientes etapas:

- Lectura y comprensión del problema.
- Abstracción de variables.

- Identificación y aplicación del procedimiento matemático para resolverlo.
- Responder de acuerdo con el contexto del problema.

A continuación, se muestra la aplicación de cada uno de estos pasos para la solución de los problemas del protocolo.

- **Problema 1:** el experto hizo lectura y análisis del problema, luego, realizó una representación de diagramas de árbol de los datos expuestos en el enunciado y las opciones de respuesta y comparó los resultados. Lo que permite concluir que no siguió el procedimiento sugerido en el protocolo.

- **Problema 2:** leer el problema y analizar los datos presentados en la tabla.

El experto utiliza dos procesos. En el primero, calcula el porcentaje y la proporción de uso en cada uno de los grupos dados en la tabla y, para el total de encuestados, compara con las opciones de respuesta. Y en el segundo proceso, totaliza las columnas 4 y 2, establece una razón entre sus resultados, simplifica y busca en las opciones de respuesta.

- **Problema 3:** leer el problema y luego aplicar los procedimientos descritos en el protocolo. Procedimiento 1: contabilizar los cuadrados que conforman las figuras. Figura 1: 10, figura 2: 12 y figura 3: 2, adicionar el número de cuadrados de la figura 1 y 3 ($10+2=12$), comparar el número de cuadrados obtenidos en la suma y los cuadrados de la figura dos. Procedimiento 2: observar las figuras, hacer un gráfico, realizar una traslación de la figura 3 en el plano: 2 cuadros hacia la izquierda y 4 hacia arriba. Acoplar la figura 3, luego de ser trasladada, acoplarla hasta formar un rectángulo, comparar ambos rectángulos, verificar la respuesta.

- **Problema 4:** el experto aplica el procedimiento 2 sugerido en el protocolo.

- **Problema 5:** lectura del enunciado, aplicación del procedimiento sugerido en el protocolo, es decir, leer el problema y analizar los datos. Se hace la traducción del lenguaje cotidiano al algebraico, es decir:

La suma de dos números se representa como $x+y$

El triple de la suma de dos números se representa como $3(x+y)$



El triple de la suma de dos números es 63 y se representa como:

$$3(x+y)=63.$$

Plantear la ecuación $3(x+y)=63$ (ecuación 1)

Identificar las variables: número mayor x , número menor y

$6y$ =seis veces el menor por lo tanto $X = 6Y$ (ecuación 2)

Se reemplaza la ecuación 2 en la ecuación 1 y se resuelven las operaciones indicadas, se calcula el valor de uno de los números.

$3(6y+y)=63 \therefore 18y+3y=63$, se suman términos semejantes $21y=63$,

se despeja la variable y se obtiene $y=63/21=3$ por lo tanto $y=3$

Reemplazo en la 2 el valor hallado.

$x=6y$, por lo tanto $x=6*3=18 \therefore x=18$

Se verifican los planteamientos del problema en las ecuaciones 1 para comprobar la igualdad.

$3(x+y)=63 \therefore 3(18+3)=6$ se multiplica $54+9=63$ y se suma para obtener $63=63$.

Dentro de las estrategias de solución, el experto plantea: gráficos, observación, comparación, buscar regularidades y pautas, escoger un lenguaje apropiado o notación adecuada, descomponer el problema, utilizar un método de notación adecuado (gráfico, numérico, verbal, algebraico), deducir y sacar conclusiones, conjeturar y comprobar las otras opciones de respuesta.

Control y evaluación

Para el experto, el ambiente de aprendizaje no fue adecuado por las múltiples ocupaciones que tenía en el momento de la aplicación del instrumento, además, el espacio delimitado para la escritura del procedimiento lo considera como limitante. El tiempo empleado en la solución de la tarea fue más o menos una hora y media y dedicó mucho tiempo para pensar qué escribir.

Sobre la base de estas consideraciones, es oportuno precisar los hallazgos develados en el análisis y, aunque no es el objetivo de esta investigación, se valida el instrumento aplicado como una herramienta que refleja el desarrollo explícito en este tipo de tarea puesto que favorece la visualización de situaciones que pueden caer en la subjetividad del investigador y terminar siendo como un obstáculo para la investigación.



Cuando se hacen estos análisis en relación con los modelos contemplados en la investigación se observó que las prácticas de los participantes y el experto, apuntan o visibilizan con mayor intensidad la propuesta de George Polya: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, mirar hacia atrás porque se equiparan con las tareas de sólo una de las dimensiones de la teoría de Allan Schoenfeld: control o metacognición: entendimiento, hacer un diseño, ejecutar el modelo, examinar, dejar de lado las otras dimensiones y acercarse a su última categoría y a las creencias en algunas de las apreciaciones expresadas en el análisis metasubjetivo y metacognoscitivo en el componente de control y evaluación.

No obstante, estas afirmaciones, los participantes de este estudio demuestran una aplicación parcial de las etapas, lo que deja entrever su mayor ruptura en la fase final, pues si bien los participantes enuncian la fase, sólo se detienen a corroborar las opciones de respuesta sin examinarlas con otros procesos o métodos que validen la misma, a excepción del experto, y se alejan de lo que propone el autor para este paso.

Lo curioso es que este procedimiento es considerado por los participantes como una de las principales estrategias para la resolución de problemas matemáticos y es el que orienta el paso a seguir en cuanto a la elección de un método o algoritmo.

Esto indica que el análisis de los participantes permanece en el aspecto procedimental, lo que devela un bajo nivel en el dominio de conceptos y teorías matemáticas porque se recurre a algoritmos básicos que no favorecen la ubicación de los procedimientos eficientes para resolver el problema.

En cuanto a los procedimientos generales usados, se encuentran: lectura y análisis del problema, selección de una técnica procedimental, aplicación de métodos matemáticos básicos y la validación del procedimiento a través de las opciones de respuesta.

Las estrategias explicadas y verificadas fueron: hacer esquemas, ensayo-error, extraer pautas o regularidades, descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar), utilizar un método de notación adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico, tablas, dibujos (representación), deducir y sacar conclusiones y marcha atrás, empezar por lo fácil, descartar opciones de respuesta.

No se encontró relación directa entre los modelos y las estrategias utilizadas; las primeras no dependen de las otras y viceversa. La veracidad de los resultados no depende de las estrategias sino del dominio conceptual.



Por otra parte, los participantes expresaron seguridad y confianza en sus habilidades gracias a las actividades similares que desarrollan en diferentes contextos y la importancia de ambientes propios, disponibilidad emocional y, especialmente, al ejercicio reflexivo (nuevo para ellos) como componentes relevantes a la hora de resolver esta tarea.

Para finalizar, es preciso mencionar, con respecto al experto, que no se evidencian estrategias particularizadas ni innovadoras, empero, el modelo de George Polya se visualiza en todas sus etapas y el dominio conceptual bien afinado.

En la tabla 7, se muestra un cuadro comparativo entre cada uno de los participantes de la investigación.

Conclusiones

La resolución de problemas ha sido catalogado como el corazón de la matemática, por tanto, ha sido inspiración para múltiples investigaciones y que, por ello, no habría más qué decir; sin embargo, por tomar el riesgo de realizar esta práctica se evidencia que falta mucho camino para recorrer en este vasto campo y que, sin lugar a dudas, germinan nuevas consideraciones para continuar en la búsqueda de demostrar la relevancia del uso de esta práctica en el área de matemáticas y el abanico de posibilidades en el mejoramiento continuo de los procesos de enseñanza aprendizaje.

Enseñar a resolver problemas matemáticos ha sido una tarea inagotable y, sin embargo, las diferentes concepciones y percepciones que se tienen acerca del tema han desdibujado el sentido y significado para este fin por la falta de claridad en los objetivos o las posiciones que se asumen. Al respecto, Gaulin (2000) afirma:

Es decir, cuando decía que hay una falta de consenso y una cierta confusión sobre lo que significa enfatizar la resolución de problemas, quiero decir que existen personas que piensan e interpretan de diferentes maneras. No es muy grave (...), lo importante es mejorar las cosas, pero, si un gobierno o una asociación quieren proponer un mensaje, difundirlo e implementar esas ideas, se necesita un mínimo de coherencia y, en este caso, falta la coherencia. Este es el problema. Resumiendo, podemos apreciar que estoy distinguiendo entre:

Tabla 7. Estrategias empleadas por los estudiantes

	Participante 1	Participante 2	Participante 3	Participante 4	Participante 5	Experto
Estrategias	Análisis de opciones de respuesta: partir de lo fácil a lo difícil, descomponer los problemas, utilizar notación adecuada, marcha atrás, realizar inferencias y gráficos, descartar opciones de respuesta.	Reformulación de problemas, descomposición en partes, deducción de conclusiones, análisis de las opciones de respuesta, cálculos mentales, aplicación de algoritmos, ensayo error, notación adecuada, descartar opciones de respuesta.	Marcha atrás, gráficos, iniciar de lo fácil a lo difícil, deducir y sacar conclusiones, descomposición, en partes, de los problemas, descarte de opciones de respuesta.	Aplicación de algoritmos matemáticos, realización de gráficos, inferencias, conjeturas, deducción y conclusiones, descomposición, reformular el problema, comparación y búsqueda de semejanza con otros problemas y establecimiento de regularidades.	Aplicación de algoritmos matemáticos, reformulación del problema, gráficos, marcha atrás, lógica, regresar al problema para analizar información, descartar posibilidades de solución.	Gráficos, observación, comparación, buscar regularidades y pautas, escoger un lenguaje apropiado o notación adecuada, descomponer el problema, utilizar un método de notación adecuado (gráfico, numérico, verbal, algebraico), deducir y sacar conclusiones, conjeturar y comprobar las otras opciones de respuesta.
Etapas		- Análisis: comprensión, lectura, identificación del tema, elección de datos. - Aplicación de la fórmula o procedimiento matemático. - La comprobación del resultado.	Análisis del problema, aplicación de un proceso matemático, comparación de la respuesta obtenida con las opciones de respuesta, descartar opciones.	Lectura y comprensión del problema. Aplicación de procedimientos matemáticos. Validación de la respuesta obtenida.	Lectura y comprensión del problema. Aplicación de procedimientos matemáticos. Validación de la respuesta obtenida.	- Lectura y comprensión del problema. -Abstracción de variables. - Identificación y aplicación del procedimiento matemático para resolverlo. - Responder de acuerdo con el contexto del problema.

Fuente: Datos alcanzados en el estudio



- 1º Enseñar "PARA" la resolución de problemas
- 2º Enseñar "SOBRE" la resolución de problemas
- 3º Enseñar "A TRAVÉS" de la resolución de problemas

Son tres perspectivas y, en realidad, las tres son importantes. En los dos primeros casos la resolución de problemas está considerada como un objetivo y, en el tercer caso, como vehículo para enseñar o desarrollar otras cosas. Se considera que esta falta de coherencia es el primer motivo por el que hay dificultades de implementación de estas buenas ideas sobre la resolución de problemas. (p. 9)

En este sentido, la consolidación de la propuesta requiere de modelos heurísticos y de la enseñanza temprana de estrategias enmarcadas en la suma de perspectivas claras sin privilegiar, de forma fraccionada, ninguna de ellas, como se evidencia en los participantes investigados, quienes demostraron ser resolutores procedimentales porque priorizaron la aplicación de algoritmos básicos que no dejan entrever la apropiación de tácticas mentales elaboradas.

Se puede preguntar por el mecanismo que se usa en la enseñanza de la matemática y las creencias que se han tenido sobre el estudio de esta disciplina, como lo expone Vilanova *et al.*, (2001):

Thompson (1992) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido. (p. 3)

Esta visión ha permeado las aulas y las prácticas educativas y, por ello, no es extraño encontrar en los participantes un dominio conceptual escaso reflejado en su praxis en la prueba porque recurren a un análisis superficial, los saberes previos se remiten a operaciones básicas y dejan de lado un razonamiento fundamentado en conceptos, propiedades y teorías matemáticas de mayor nivel.

Es menester pasar revista a las exigencias internacionales, nacionales y locales, que han volcado a las instituciones educativas, y a sus maestros, al entrenamiento de los estudiantes para responder pruebas censales y obtener resultados, lo que sacrifica las fases de construcción y deconstrucción del conocimiento para potenciar las reglas, la memorización y el procedimiento alejado, incluso, de su dominio conceptual, como se aprecia marcadamente en los participantes de este estudio porque dan legitimidad a la solución por la opción de respuesta y el descarte de las mismas.

Si bien esta estrategia puede llevar a los participantes a encontrar la solución, se puede inferir que la etapa de la comprobación en el proceso resolutor de problemas se presenta como el más omiso, puesto que los participantes no evidencian la aplicación de esta fase como lo propone Polya: examinar la solución, es decir, comprobar el resultado con otro método o preguntar si ¿puedo utilizar este resultado o este método para resolver otros problemas? Quizá por la facilidad que ofrece la técnica de opciones de respuesta y porque esta etapa ha sido tradicionalmente delegada al docente.

Por las relaciones entre los modelos contemplados en la investigación, se determinó la sincronía entre los autores y fundamento de la misma en la categoría de control, en la que Schoenfeld plantea actividades que son congruentes con lo que Polya denomina etapas o fases del proceso de resolución de problemas y que fueron tomados en este estudio como parámetros de comparación con los desarrollos de los participantes pero que, pese a estas congruencias, los participantes no se enmarcan en un modelo a la hora de resolver problemas y se mueven con etapas desde diferentes autores y no son fieles a ninguna propuesta.

Los modelos heurísticos distan de las estrategias utilizadas por los participantes en el momento de resolver la tarea y no hay una relación directa entre ellos. Las estrategias no dependen del modelo sino del participante, son diferenciadas de los modelos y pueden ser usadas indistintamente.

Tanto los modelos como la formación de destrezas, razonamientos y habilidades deben ser la plataforma para llevar a los estudiantes a redescubrir nuevas formas de aprender y desaprender con el objeto de reevaluar hallazgos y técnicas que posibiliten el objetivo común. Entre estas formas, se puede afirmar que los participantes de este estudio aplican como procedimiento general: lectura y análisis del problema,



selección de una técnica procedimental, aplicación de métodos matemáticos básicos y la validación del procedimiento realizado a través de las opciones de respuesta, unido a las estrategias verificadas en la aplicación de la prueba: ensayo-error, empezar por lo fácil, descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar), extraer pautas o regularidades, hacer esquemas, tablas, dibujos (representación), utilizar un método de notación adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico, deducir y sacar conclusiones y marcha atrás. Estrategias conocidas que no hacen parte de la lista de las mismas con invenciones nuevas para el proceso resolutor de problemas. Paul Ernest (1991) afirma:

En la educación se trata de potenciar la búsqueda de soluciones alternativas y razonamientos diferentes a la hora de enfrentar una situación matemática. Falibilidad y diversidad se invocan en la formación matemática. Y asumirlas genera cambios importantes en la educación más que un proceso de transmisión de información o de resultados cognoscitivos en la educación se trata de la formación en destrezas, razonamientos y capacidades. Aquí la ausencia de un redescubrimiento o reconstrucción impide la generación de esas capacidades. (p. 6)

Para despertar ese redescubrimiento en nuestros estudiantes el modelo heurístico de George Polya, pese a las modificaciones y críticas de otros autores, permanece como un proceso válido y usado actualmente por los estudiantes y expertos de esta investigación y procura herramientas legítimas, además de 10 mandamientos para maestros (Ángel Ruiz, 2006) que merecen ser revisados:

1. Interésese en su materia.
2. Conozca su materia.
3. Trate de leer las caras de sus estudiantes; trate de ver sus expectativas y dificultades; póngase usted mismo en el lugar de ellos.
4. Dese cuenta que la mejor manera de aprender algo es descubriéndolo por uno mismo.
5. Dé a sus estudiantes no sólo información, sino el conocimiento de cómo hacerlo, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.
6. Permítales aprender a conjeturar.
7. Permítales aprender a comprobar.

8. Advierta que los rasgos del problema que tiene a la mano pueden ser útiles en la solución de problemas futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente solución concreta.
9. No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.
10. Sugíérales; no haga que se lo traguen a la fuerza. (p. 6)

Al igual que George Polya, con sus etapas en la resolución de problemas y, aunque el método de Allan Schoenfeld no se evidenció en las tareas de los participantes investigados, es pertinente retomar las categorías propuestas por el autor en la enseñanza de la solución de problemas matemáticos, especialmente las creencias y el componente afectivo que se pudo evidenciar en el estudio con las afirmaciones que surgieron acerca de la influencia de aspectos axiológicos inmersos en la prueba.

El acto reflexivo de la prueba fue la piedra en el zapato de los participantes, en primera instancia, porque no están acostumbrados a tomar conciencia de su propia actividad y porque la enseñanza de la matemática se ha centrado en el saber hacer, en rutinizar procesos más que en razonar sobre las soluciones planteadas, es decir, se privilegia el producto ante el proceso y pese a no tener éxito en toda la prueba los participantes refieren confianza y seguridad en sus habilidades por el adiestramiento que han recibido en sus espacios académicos y dejan de lado la reflexión sobre esos desempeños óptimos.

Para finalizar, los maestros de matemáticas están llamados a reflexionar sobre sus métodos para diseñar estrategias que terminen con las prácticas castrantes de repetición y mecanización para que broten alternativas creativas y cargadas de imaginación, que le den vitalidad e interés a los procesos mentales de los estudiantes y agudicen los sentidos que ayuden en la motivación de los estudiantes ante experiencias y situaciones que potencien la originalidad, la reflexión, la pregunta, el argumento, la crítica y la invención para la resolución de problemas.

Las facultades de Educación y las Escuelas Normales son los llamados a tomar la rienda en la creación de comunidades de aprendizaje que fortalezcan la comunicación, el trabajo entre pares, relaciones, conectivos entre el proceso y el saber, la producción de tácticas pedagógicas, didácticas y cognoscitivas entrelazadas que visibilicen procesos



efectivos en el razonamiento y desarrollo de los estudiantes en el área de las matemáticas.

Estas consideraciones se pueden resumir en lo expuesto por Edgar Morin (1999):

La educación debe favorecer la aptitud natural de la mente para hacer y resolver preguntas esenciales y correlativamente estimular el empleo total de la inteligencia general. Este empleo máximo necesita el libre ejercicio de la facultad más expandida y más viva en la infancia y en la adolescencia: la curiosidad, la cual, muy a menudo, es extinguida por la instrucción, cuando se trata, por el contrario, de estimularla o, si está dormida, de despertarla. (p. 14)

Recomendaciones

Es preciso privilegiar el fortalecimiento de procesos reflexivos, conscientes, es decir, la metacognición debe ser relevante en nuestra práctica educativa para desarrollar la capacidad imitativa de repetir algoritmos matemáticos, pero, sobre todo, la habilidad para comprender, argumentar, expresar, tomar conciencia y reflexionar en la resolución de problemas, desde su ser, para relacionar, modificar y transformar entornos.

Para aprender es necesario desaprender y reconocer el papel que produce la praxis en los aprendizajes de los estudiantes, por lo tanto, cabe la pregunta: ¿Se están proveyendo estrategias reales a los estudiantes para resolver problemas o se repiten algoritmos que, generación tras generación, siguen inundando los tableros sin la realización de una transferencia real de aprendizajes matemáticos?

Consideraciones para futuras investigaciones

En el proceso investigativo se presentaron situaciones favorables y desfavorables a él mismo entre los que se puede mencionar la apertura, disposición, interés, voluntad y ofrecimiento de espacios de las directivas, colegas y estudiantes de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño, para participar en la investigación, primordialmente de los estudiantes y el experto, quienes se dispusieron en tiempo extra clase para realizar las tareas, mostrar motivación, responsabilidad y empeño.

Y, como obstáculo, es preciso decir que la falta de tiempo, su organización, especialmente en la etapa de ejecución por cuanto se aplazaron o no se pudieron llevar a cabo algunas actividades propuestas, lo que afecta la investigación. Así como los periodos prolongados de cese de las actividades que desmotivaron los grupos de investigadores formados al comienzo.

Alrededor de estas consideraciones con este estudio quedan abiertas importantes líneas de investigación relacionadas con:

- Potenciar las estrategias de los estudiantes en relación con un modelo en la toma de conciencia y comprensión sobre su hacer.
- Identificar la praxis de los maestros de matemáticas, con respecto a las estrategias utilizadas enseñadas en la solución de problemas.
- Retomar teorías como la enseñanza para la comprensión que fortalecen los procesos reflexivos en el área de matemáticas.

Adicionalmente, sería vital y necesario dar continuidad a esta investigación con otros participantes, en otros niveles y con tiempos más prolongados. Así como la socialización de los hallazgos de la misma en diferentes contextos porque se pone de manifiesto la responsabilidad que se adquiere en la inmersión de didácticas pedagógicas que permitan mejorar los procesos en la resolución de problemas cotidianos.

Al mismo tiempo, crear un colectivo de maestros que reflexione su quehacer pedagógico en las diferentes áreas, con proyectos interdisciplinarios en la solución de problemas.

Referencias

- Agudelo, G. (2008). *Método heurístico en la resolución de problemas*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Ángel, C. (2006). Conceptos, procedimientos y resolución de problemas. *Cuadernos en investigación y formación en educación matemática*. 6.
- Ausubel, P., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología evolutiva: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación matemática*, número 1.
- Bedoya, M. y Ospina, S. (2014). *Concepciones que poseen los profesores de matemáticas sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza y aprendizaje*. Medellín: Universidad de Medellín.



- Bransford, J. y Stein, B. (1988). *Solución ideal de problemas*. Barcelona: Labor.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-163). Zaragoza: ICE.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm
- Junta de Andalucía (2016). BOJA boletín oficial de la junta de Andalucía N°171. Recuperado de <http://www.juntadeandalucia.es/boja/2016/171/>
- Chacel, I. R. (s.f.). *George Polya: estrategias para la resolución de problemas*. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf
- D'Amore, B. (2010). *Problemas Pedagogía y psicología de la matemática en actividad de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- DRAE. (2013). *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*. Hampshire: The Falmer Press.
- Española, R. (1713). *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*. Madrid, España. Recuperado de: www.rae.es/.
- Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Gaulin, C. (2000). *Tendencias actuales de la resolución de problemas*. Bilbao.
- Godino, J. (2013). *Diseño de análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_2013_Dise%F1o_tareas.pdf
- Guzman, M. (1991). *Para Pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- Lesh, R. (2007). The second Handbook of Research on mathematics. En *Teaching and Learning. National Council of Teachers of National Council of Teachers of Problem solving and modeling* (pp. 763-804). NC: Information.
- Mason, J. (1989). *Pensar matemáticamente*. España: Labor.
- Ministerio de Educación Nacional –MEN– (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación Nacional –MEN– (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación
- Ministerio de Educación Nacional –MEN– (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Naturales*. Bogotá: MEN.
- Mesa, O. (1998). *Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas (Un ejemplo con los números para contar)*. Colombia: Instituto de Educación no Formal. Centro de pedagogía. Educación.
- Morin, E. (1999). *Los siete saberes de la educación del futuro*. Recuperado de Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Recuperado de http://www.pensamientocomplejo.org/docs/files/morin_7%20saberes-necesarios-para-la-educacion-del-futuro.pdf
- Ortega, M. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números*, 61, 19-40.
- Orozco, M. (1997). Las pedagogías constructivistas y el análisis de tareas. En *Memorias del I Encuentro Internacional y IV Encuentro Nacional de Pedagogías Constructivistas*



- tas, *Pedagogías Activas y Desarrollo Humano* (pp. 213-241). Manizales: Universidad de Manizales: RED, CINDE.
- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Caracas: Fundación Polar.
- Pascual-Leone, J. (1997). Metasubjective processes: The missing lingua franca of cognitive processes. En D.M. Johnson y C.E. Erneling (Eds.), *The future of cognitive revolution*. New York: Oxford University Press.
- Pascual-Leone, J. y Johnson, J. (1991) The psychological unit and its role in task analysis: A reinterpretation of object permanence. En M. Chandler y M. Chapman (Eds.), *Criteria for competence: Controversies in the conceptualization and assessment of chil*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Polya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Polya, G. (1984). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Universidad Computense de Madrid.
- Ruiz, Á., Carvajal, C. y Araya, R. (2003). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos procedimientos, lecciones y resolución de problemas. *Uniciencia*, 20(2), 285-296.
- Sandoval, C. (1996). *Investigación cualitativa*. Bogotá: Icfes.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problems solving*. Minnesota: Academic Press.
- Semana. (12 de julio, 2013). *Educación, a repetir el año*. Recuperado de <http://www.semana.com/nacion/articulo/resultados-pruebas-pisa-en-colombia/367355-3>
- Triana, I. (s.f.). www.bibliociencias.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/. Recuperado de www.bibliociencias.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/
- Vilanova, S. (2003). La resolución de problemas en la educación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 502-509.
- Yin, R. (1994). *Case Study Research. Design and Methods*. London: SAGE.

