UN ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

Carmen Díaz
carmen.diaz@dpsi.uhu.es
Universidad de Huelva

Juan J. Ortiz y Luis Serrano
jortiz@ugr.es, lserrano@ugr.es
Universidad de Granada

RESUMEN

Realizamos un análisis teórico de los pasos necesarios en la aplicación del teorema de Bayes y presentamos un estudio empírico de errores en los citados pasos en una muestra de 414 estudiantes de Psicología, después de la enseñanza del tema. Concluimos con algunas recomendaciones para la enseñanza.

ABSTRACT

We present a theoretical analysis of the steps needed to apply the Bayes' theorem. Then, we present an empirical study of difficulties and errors in these steps in a sample of 414 psychology students, after instructions. We conclude with some recommendations for teaching.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Carmen Díaz, Juan J. Ortiz y Luis Serrano (2007). UN ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES , pp. 199-208.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades a posteriori mediante el teorema de Bayes tiene aplicaciones, tanto en estadística, como en la vida real, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Sin embargo, hay una tendencia a suprimir la enseñanza del teorema de Bayes en la educación secundaria y universitaria, debido a la influencia de las primeras investigaciones en psicología (Tversky y Kahneman, 1972a y b; Bar-Hillel, 1997; Teigen, Brun y Frydenlund, 1999) que sugirieron la dificultad del razonamiento relacionado (ver revisión en Koehler, 1996).

En este trabajo llevamos a cabo un análisis a priori de los pasos involucrados en la aplicación del teorema de Bayes y un estudio empírico en una muestra de 414 estudiantes de primer año de psicología que habían estudiado el teorema. La finalidad es guiar a los profesores en la enseñanza de estrategias adecuadas.

ANTECEDENTES

La aplicación del teorema de Bayes fue investigada por Tversky y Kahneman (1982), en su trabajo sobre la heurística de representatividad. Una regla fundamental en estadística es que la verosimilitud de que una evidencia se deba a una supuesta causa depende de la probabilidad a priori de la causa, pero esta regla se olvida. Los autores denominan *falacia de las tasa base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori de una supuesta causa en la valoración de una evidencia.

Trabajos posteriores (e.g. Totohasina, 1992; Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998) indican que el análisis realizado desde la psicología es incompleto, pues hay otros factores que afectan la capacidad de aplicar el teorema de Bayes. Según Totohasina (1992), la estrategia más frecuente al resolver un problema que involucra este teorema es cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace. En su estudio con 67 estudiantes de secundaria sólo el 25% dio una respuesta correcta antes de una instrucción explícita sobre el teorema. El autor realiza también un experimento de enseñanza con 65 alumnos, en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad condicional inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada. Aproximadamente la mitad llegan a obtener la probabilidad total; pero solo 9 alumnos llegan a la solución completa (probabilidad a posteriori).

Para explicar estas dificultades Totohashina analiza los procedimientos y representación usados. Indica que la representación en tabla de doble entrada dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de los problemas, porque queda más visible la intersección de los sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. El diagrama en árbol es el recurso más efectivo para determinar la probabilidad a posteriori cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo) (Gras y Totohasina, 1995). La dificultad también está influida por la confusión del papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional o falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1986; Lonjedo y Huerta, 2004, 2005; Batanero y Sánchez, 2005).

La investigación reciente sugiere que la aplicación del teorema de Bayes es más sencilla cuando la información se da en frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995). El cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural cuando los datos se dan en este formato, porque el sujeto sólo ha de tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad.

EL ESTUDIO

Nuestra hipótesis es que la aplicación del teorema de Bayes involucra un proceso complejo, en que los estudiantes deben recordar y aplicar varios conceptos y procedimientos probabilísticos, que a veces se olvidan causando errores. Esta hipótesis se generó en el estudio de Díaz y de la Fuente (2007), quienes no encuentran diferencia de dificultad en la aplicación del teorema en problemas matemáticamente equivalentes, cuando los datos son dados en frecuencias absolutas o en probabilidades/frecuencias relativas. Por otro lado, el formato de frecuencias absolutas es difícil de usar en caso de múltiples sucesos o múltiples experimentos, mientras que el formato probabilístico tiene una aplicación general. Es por eso que nos parece importante identificar las dificultades de los estudiantes para diseñar procesos educativos que las tengan en cuenta y permitan, a la vez, trabajar con formato probabilístico.

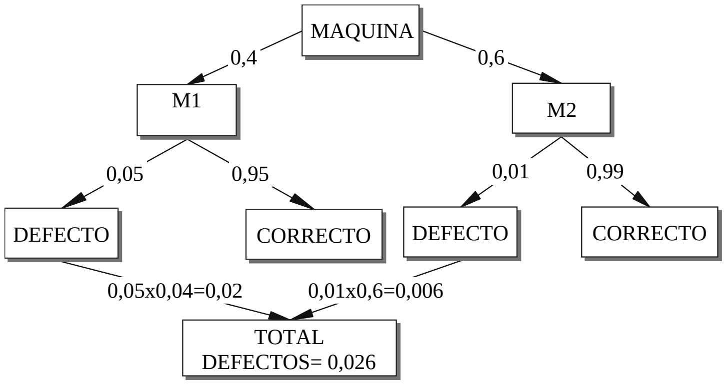
La muestra participante estuvo formada por 414 estudiantes de primer curso de psicología (entre 18 y 20 años) de las Universidades de Granada y Murcia (6 grupos), que seguían una asignatura de análisis de datos (12 créditos). La probabilidad condicional se enseñó al final del primer cuatrimestre, finalizada la estadística descriptiva y la probabilidad simple. Se dedicó una semana al tema (3 horas teóricas y 2 prácticas), incluyendo el teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Los estudiantes recibieron instrucción sobre el uso de diagramas de árbol y tablas de doble entrada y se les advirtió sobre la existencia de sesgos como la falacia de las tasas base o la confusión de una probabilidad condicional y su transpuesta. Se mostraron aplicaciones del teorema de Bayes al diagnóstico psicológico y médico, alarmas, pruebas de evaluación, predicción, y accidentes, entre otros en experimentos compuestos de dos o tres experimentos simples, con un pequeño número de sucesos en el espacio muestral.

Un mes después de la enseñanza, se dio a los estudiantes la tarea que reproducimos a continuación, que fue resuelta en forma individual, pidiéndoles que describiesen con detalle los razonamientos seguidos en la resolución y dando libertad respecto al procedimiento.

Tarea. *Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?*

Un diagrama en árbol como la Figura 1, incrementa las respuestas correctas (Martignon y Waisner, 2002), debido a la estrecha relación entre esta representación y la forma en que procesamos la información al aplicar el teorema de Bayes. En primer lugar dividimos la población (producción de las máquinas en ejemplo) en función de las probabilidades a priori (40 y 60 por ciento) obteniendo una división en dos grupos (piezas producidas respectivamente por M1 y M2). Cada división en el primer nivel del árbol produce otra división binaria (piezas con o sin defectos). Seguidamente incluimos la información dada por las verosimilitudes y llegamos al tercer nivel del árbol que produce cuatro sucesos intersección, cuyas probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas que llevan a ellos.

Figura 1. Representación mediante árbol de la tarea



A partir de aquí, sumamos las probabilidades de los sucesos que correspondan a la condición nueva (productos defectuosos) que se identifican fácilmente y obtenemos la cuarta rama con la probabilidad total de piezas defectuosas. Entonces el problema se resuelve simplemente aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, como cociente entre las probabilidades conjuntas (que corresponden a la intersección de piezas defectuosas producidas por M1) y totales (probabilidad de defectos en la población), esto es *P(M1/D)=P(M1ÇD)/P (D)*=0,02/0,026=0,76.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las repuestas escritas de los estudiantes fueron analizadas con detalle, comparándola con el proceso descrito con un análisis cualitativo y descriptivo. Con un proceso inductivo se clasificaron las respuestas semejantes, llegando a una categorización de las mismas, de acuerdo a si se completa o no los pasos que se describen a continuación. Además, se estudiaron los posibles errores en cada paso, utilizando tantas variables como posibles errores y analizando para cada una su presencia o ausencia en la respuesta de cada alumno.

a) Identificar los datos del problema.

El primer paso para resolver la tarea (Figura 2) es identificar todos los datos, lo que requiere diferenciar entre probabilidad a priori *P(M1), P(M2)* y verosimilitud *P(D/M1), P(D/M2);* diferenciar una probabilidad condicional *P(D/M1)* y su inversa *P(M1/D)* y determinar las probabilidades de sucesos contrarios *P(C/M1)*. El estudiante debe discriminar todos estos conceptos, realizar correctamente las sucesivas particiones del espacio muestral (Figura 1) e identificar todos estos datos en el enunciado del problema. Algunos estudiantes no se llegan a deducirlos o producen errores en su identificación, en la partición del espacio muestral (por ejemplo, no considerar la subdivisión de una de las partes) o bien hacen una restricción incorrecta del mismo (consideran sólo los productos fabricados por la máquina M1).

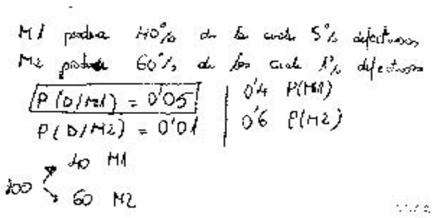


Figura 2. Identificación de los datos.

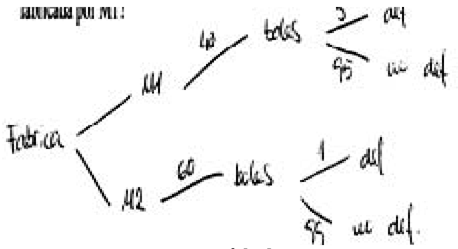


Figura 3. Diagrama en árbol correcto.

b) Construir una representación adecuada.

El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado (pocos estudiantes usaron una tabla) para representar el experimento y partición secuencial de la población (figura 3). Esta representación potencialmente debe servir al estudiante para reconocer que el conjunto de sucesos favorables (productos defectuosos) viene de dos subpoblaciones, la de los producidos por la máquina M1 y M2. En algunos casos los diagramas en árbol son incompletos o se consideran dos poblaciones separadas.

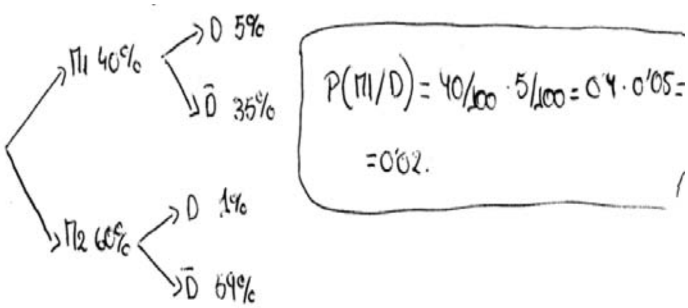


Figura 4. Identificar la probabilidad condicional

c) Identificar la probabilidad condicional que se piden

Para continuar, los estudiantes deben identificar qué probabilidad se pide en el problema, que es una probabilidad condicional inversa (probabilidad a posteriori). No es un sencillo, pues algunos estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad (fenómeno denominado falacia del eje de tiempos por Falk (1986) y concepción cronologista de la probabilidad condicional por Gras y Totohasina (1995)). Los estudiantes pueden confundir en la probabilidad condicional con su inversa, con una probabilidad simple o con una probabilidad conjunta (errores frecuentes en la investigación de Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987 y Ojeda, 1995). El estudiante de la figura 4 llega a este paso, utilizando una notación adecuada para la probabilidad condicional pedida.

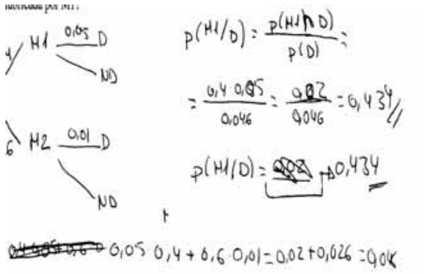


Figura 5. Calcular la probabilidad total

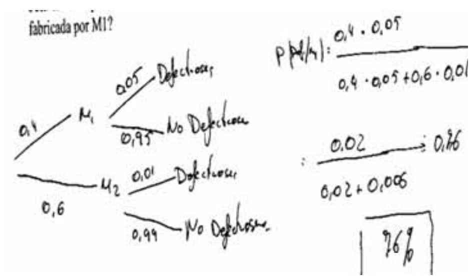


Figura 6. Alcanzar la solución final

d) Calcular el denominador de la fórmula de Bayes.

Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional, el estudiante debe calcular el numerador y denominador de la fórmula de Bayes. El denominador debe ser calculado con la regla de la probabilidad total (figura 5), esto es, multiplicando las probabilidades de cada rama del árbol y sumando cada una de esas probabilidades conjuntas. El alumno debe entender que se trata de sucesos dependientes, para aplicar correctamente la regla del producto en este caso. Algunos estudiantes comente errores al calcular la probabilidad total, ya que las probabilidades a priori en la población no son tenidas en cuenta, es decir, suman las proporciones de defectos en las máquinas M1 y M2 sin ponderar por la proporción de productos fabricados por cada máquina.

e) Calcular la probabilidad inversa (teorema de Bayes).

Finalmente, el estudiante debe sintetizar todos los pasos anteriores y calcular el numerador (probabilidad conjunta) y denominador (probabilidad total) para obtener la probabilidad inversa o a posteriori, es decir, aplicar el teorema de Bayes (figura 6). También en la fórmula de Bayes se producen errores, sustituyendo los productos por sumas o invirtiendo el numerador y denominador. En otros casos, el estudiante simplemente no la recuerda o no la desarrolla.

En la tabla 1 presentamos el porcentaje de estudiantes que han llegado a completar cada uno de los pasos descritos, donde el alumno que llega a completar correctamente hasta un paso completa también correctamente todos los anteriores. Un porcentaje alto de alumnos (casi la mitad) llega a completar satisfactoriamente todos los pasos, lo que indica que el uso de diagrama en árbol y hacer hincapié en la enseñanza sobre los posibles sesgos en el proceso de solución lleva a un aprendizaje razonable. Si se añaden los que llegan al menos a la probabilidad total se obtiene más de la mitad de los estudiantes

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas después de la instrucción (n=414)

	Frecuencia	Porcentaje
1. En blanco, no identifica los datos o diagrama árbol incorrecto	57	13,8
2. Identifica los datos y realiza el diagrama de árbol, pero no continúa	50	12,1
3. Datos y diagrama correcto e identifica la probabilidad condicional inversa a calcular	78	18,8
4. Calcula correctamente la probabilidad total	42	10,1
5. Solución completa correcta	187	45,2

Para completar el estudio, se realizó un análisis de los errores (tabla 2) en el proceso en los 227 alumnos que no llegaron a la solución final, tratando de explicar la dificultad de los problemas, donde un alumno puede presentar más de un error. Por ello la suma de errores es mayor que el tamaño de la muestra. Los porcentajes se calculan respecto a 227 (alumnos que hacen algún error).

La falacia de las tasas base (olvido de las probabilidades a priori) no se presentó de forma generalizada, al menos explícitamente. Fue mayor el número de alumnos que no consiguen identificar correctamente todos los datos o la pregunta. También hay errores en la partición incorrecta del espacio muestral, o la restricción del mismo (tomando sólo los objetos fabricados por la máquina M1); la confusión entre una probabilidad condicional y otra conjunta y entre una probabilidad condicional y su inversa y en menor medida de una probabilidad simple con la condicional y conjunta.

Tabla 2. Tipos de errores en el proceso de resolución (n=227)

	Frecuencia	Porcentaje
Blanco o no identifica los datos	49	21,6
Diagrama en árbol incorrecto	8	3,5
No identifica la pregunta	27	11,9
Restricción incorrecta del espacio muestral	22	9,7
Confunde probabilidad condicional y conjunta	77	33,9
Confunde probabilidad simple y condicional	7	3,1
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	14	6,2
Falacia de las tasas base	22	9,7
Error en la formula de Bayes	40	17,6
Confunde un suceso y su complementario	10	4,4
Error partición del espacio muestral	21	9,3
Fallos razonamiento proporcional y operación fracciones	26	11,5
Probabilidad mayor que 1	4	1,8
Total errores	321	

Llama la atención el número de errores en la fórmula de Bayes, que algunos alumnos no recuerdan, invirtiendo denominador y numerador, omitiendo algún término o cambiando las probabilidades que intervienen por otras, lo que de nuevo sugiere la confusión de probabilidad simple, condicional y conjunta señalada por varios autores citados con anterioridad.

Observamos también fallos en el razonamiento proporcional, por lo que algunos estudiantes no eran capaces de operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción. Por ejemplo, al obtener el 5 por ciento del cuarenta por ciento, algunos alumnos restan las fracciones, en lugar de multiplicarlas; multiplican incorrectamente las fracciones o aplican inadecuadamente una regla de tres. Finalmente algunos alumnos operan conjuntamente probabilidades y porcentajes o cambian el numerador y denominador en la fórmula, obteniendo como consecuencia, valores mayores que la unidad para la probabilidad de un suceso, sin ser conscientes del error que esto supone.

CONCLUSIONES

En este estudio se confirman los resultados obtenidos en Díaz y de la Fuente (2007) en un estudio exploratorio con un grupo reducido de estudiantes. Como en aquél estudio, los errores no se limitan a falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982), o a la dificultad de operar con probabilidades y fracciones. En nuestro caso la mayor frecuencia de error se da en la confusión de probabilidad condicional y conjunta.

Los errores se producen en los diferentes pasos del proceso de resolución, comenzando por la identificación correcta de los sucesos y sus probabilidades, y la correcta partición y subpartición del espacio muestral. A muchos estudiantes les fue difícil diferenciar entre probabilidades simples, compuestas y condicionales, o confundieron una probabilidad condicional *P(A/B)* con su inversa *P(B/A)*, dificultades ya señaladas en las investigaciones previas sobre probabilidad condicional. El olvido de la fórmula de Bayes también ocasionó un número importante de errores, pero su número es pequeño, en comparación con los causados por identificación de datos y errores en los conceptos que intervienen.

El teorema de Bayes se presenta, en consecuencia, como un objeto complejo, cuya comprensión involucra toda una serie de conceptos y propiedades previas como los de probabilidad simple compuesta y condicional, partición y complementario, axioma de la unión y regla del producto. La solución de la dificultad de los problemas de Bayes pasa por un mayor esfuerzo en la enseñanza de la probabilidad.

En consecuencia aportamos argumentos para continuar su enseñanza a los universitarios, pues además de su utilidad en la toma de decisiones, diagnóstico y evaluación es la base de la inferencia estadística. Por ello estamos de acuerdo con Rossman y Short (1995) que sugieren este tema puede enseñarse dentro del espirito de la reforma de la educación estadística, presentando a los estudiantes una variedad de aplicaciones en problemas reales, proponiendo situaciones interactivas y usando la tecnología para facilitar el aprendizaje.

Agradecimientos. Este trabajo está realizado con el proyecto SEJ2004-00789/EDUC, MEC, Madrid, España y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Bar – Hillel, M. (1987). The base rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty.* (pp 39 – 61) Amsterdam: North Holland.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability?, En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning,* (pp. 260-289), Dordrecht: Kluwer.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Diaz, C. y de la Fuente (2007). Dificultades en la resolución de problemas bayesianos: un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática.*

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probability. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education,* vol. 7, (pp. 175 – 184), Paris: UNESCO.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright & P. Ayton (Eds.). *Subjective probability* (pp. 129 – 161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review, 102,* 684 – 704.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences, 19*, 1-54.

Lonjedo, M. A. y Huerta, P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, E., y De la Torre, E. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp 229-238). Universidade da Coruña.

Lonjedo, M, A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. En M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Sant Feliu de Guissols : ERME. CD ROM. ISBN 84-611-3282-3

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. CD ROM.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes.* 40, 255 – 269.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-26.

Rossman, A. y Short, T. (1995). Conditional probability and education reform: Are they compatible? *Journal of Statistics Education*, 3(2), [On line], http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html.

Teigen, K. H., Brun, W. y Frydenlund, R. (1999). Judgments of risk and probability: the role of frequentist information. *Journal of Behavioral Decision Making*, *12(2)*, 123.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de concetpions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A, y Kahneman, D. (1982a). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160).. New York: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.