

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez
CINVESTAV, México

RESUMEN

En este reporte presentamos un estudio doctoral en el cual se desarrolló una enseñanza experimental que realizamos con un grupo de cuarto grado de primaria (con niños de 9 años de edad) de una escuela pública. El programa de enseñanza estuvo integrado por tareas vinculadas a la vida real de los niños. Dichas actividades fueron diseñadas para promover soluciones que favorecieran en el estudiante el desarrollo de ciertos significados (medida, cociente intuitivo y los rudimentos de operador multiplicativo) propiciando con ello la construcción de la noción de fracción. Asimismo, fueron aplicados dos cuestionarios, uno anterior y otro posterior al programa de enseñanza. Además, se efectuaron entrevistas individuales a tres niños que fueron previamente seleccionados para el estudio de casos, con el propósito de percibir de una manera más profunda los procesos que se manifestasen en cada uno de ellos, como resultado de la enseñanza impartida.

ABSTRACT

In this report we present a doctoral study in which an experimental teaching was developed in a fourth grade (which children were 9 years old) of an elementary public school. This teaching program was composed by several tasks related to the children's daily life. Those activities were designed to promote solutions that can support the construction of the notion of fraction and other meanings (measure, intuitive quotient and the rudiments of the multiplicative operator) in the student. Furthermore, one questionnaire was applied before and another after the teaching program. In addition, in order to have a deeper perception of the process evolved in each child as a result of this teaching strategy, three children were selected for individual interviews for the study of cases.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez (2007). PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA, pp. 209-218.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Investigadores como Kieren (1983, 1984, 1985, 1988, 1992, 1993), Freudenthal (1983), Figueras (1988, 1996), Valdemoros (1993, 1997, 2001), Pitkethly y Hunting (1996), Perera, P. y Valdemoros, M. (2002) entre otros, admiten que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y aprendizaje, principalmente, en los niveles básicos de educación. Uno de los factores que posiblemente inciden en este proceso es la didáctica tradicional empleada en la enseñanza (Freudenthal, 1983), la cual sería uno de los factores determinantes del ulterior aprendizaje del niño. Estando concientes de los escollos que deben superar los niños en la construcción de estos números, nos preguntamos:

¿Qué estrategias y situaciones de enseñanza debe implementar el maestro para facilitar un firme conocimiento de los números fraccionarios en los niños de cuarto grado de educación primaria?

Delimitamos nuestro problema de investigación en términos de cómo influye en el niño una enseñanza matemática realista y lúdica, desarrollada con un enfoque constructivista, en la adquisición de los significados de la fracción vinculados a medida, cociente intuitivo y el rudimento de operador multiplicativo. La selección de los mencionados contenidos semánticos se fundamenta en que la noción de medida y cociente están incluidos en el programa oficial de cuarto grado, en la República Mexicana, no así el de operador multiplicativo (contemplado en el programa de quinto grado, conjuntamente con el de razón), pese a esto último, decidimos explorar las ideas embrionarias de operador multiplicativo en nuestra investigación, por estimarlo accesible para los estudiantes del presente estudio, no así el significado de razón, por considerarlo demasiado complejo para que sea introducido en este grado. Procuramos con ello aportar una aproximación al aula en la que los problemas aritméticos a resolver se encuentran íntimamente relacionados entre sí, de manera que promuevan un aprendizaje sólido y bien integrado, en los alumnos.

A nivel del aprendizaje, prestamos especial atención a la comprensión de los significados de fracción que desarrollan los niños y a la correspondiente integración de los mismos. Con respecto al carácter realista de la enseñanza, estamos señalando nuestros acuerdos con el enfoque teórico sustentado por Streefland, en torno a la Matemática Realista, el cual documentamos en el marco teórico. En cuanto al aspecto lúdico de la enseñanza que aquí promovemos, nos referimos tanto al uso de juegos como al establecimiento de un ambiente de interacción entre los estudiantes que propicie actividades colectivas en las que prevalezcan las actitudes de recreación que acompañan al juego.

Hipótesis

Un programa de enseñanza constructivista, realista y lúdico favorecerá en el niño la consolidación de las nociones relativas a la fracción.

Objetivo General

Establecer si una enseñanza matemática realista y lúdica, realizada con un enfoque constructivista, propiciará en el niño de cuarto grado de educación primaria la elaboración de la noción de fracción y los significados de medida, cociente intuitivo y la idea embrionaria de operador multiplicativo.

MARCO TEÓRICO

Freudenthal (1983) basándose en su propuesta fenomenológica didáctica, critica la enseñanza impartida a través del desarrollo de conceptos, pues esta manera de instruir acentúa el aspecto formal de las definiciones. Asimismo, señala que esta forma de enseñar fragmenta las relaciones con otros contenidos matemáticos y no se fundamenta en la experiencia del estudiante, propiciando que los conceptos queden aislados en la mente del alumno, lo que impide que los aplique en la resolución de problemas asociados a la vida cotidiana. Este último aspecto se toma en cuenta en la presente investigación para diseñar problemas claramente vinculados a las experiencias vitales de los niños, en marcado contraste con las que son prácticas habituales a nivel escolar, en las que suelen prevalecer las mecanizaciones y las tareas estereotipadas.

Freudenthal (1983) da sugerencias amplias para la enseñanza de fracciones. Al referirse a la relación parte-todo, indica que enfocar dichos números con ese único significado es bastante limitado, tanto fenomenológica como matemáticamente, ya que este tipo de acercamiento sólo produce fracciones propias. Asimismo, este autor exhibe ejemplos didácticos para la enseñanza de las fracciones, sugiriendo tomar en cuenta las magnitudes de área y longitud como medios para visualizar las relaciones de equivalencia. Además, recomienda el uso de otros materiales como la balanza y el reloj para percibir las equivalencias en los pesos y tiempos respectivamente. El modelo que propone para el operador-razón es la amplificación o reducción de una figura. Estas aportaciones han respaldado la estructuración de varias tareas involucradas en los cuestionarios y la enseñanza que integra nuestro estudio.

Desde su enfoque particular, Goffree (2000) menciona el marco de una educación matemática realista, brindando numerosos fundamentos didácticos a la enseñanza, dentro de los cuales están: a) Diseñar situaciones problemáticas concretas para que el niño pueda dar sus propios significados. b) Crear un modelo de una situación real, permitiendo al alumno investigar la situación, induciéndolo a que use el modelo para solucionar otros problemas. c) Tomar en cuenta cualquier conflicto cognitivo que el niño haya pensado por sí mismo, para incluir la reflexión en la clase. d) Propiciar en el aula la interacción entre los niños de manera natural. e) Basar la enseñanza de las matemáticas en problemas del mundo real, como fuente de ideas y situaciones para poder aplicarlas. Hemos adoptado tales líneas de trabajo en nuestro programa de enseñanza y en su posterior aplicación, en el desarrollo de la presente investigación.

Streefland (1991), a través del diseño de un curso enriquece la enseñanza de las fracciones. Su objetivo es proporcionar una didáctica al manejo constructivo y productivo de materiales concretos eficaces. Las actividades del curso se centran en situaciones de la vida real. Emplea algunos acontecimientos que se desarrollan en espacios reales.

Streefland (1993) menciona que el maestro puede guiar a la luz los conocimientos que tienen los estudiantes sobre cierto contenido matemático, propiciando confrontaciones entre los alumnos en situaciones relevantes. Asimismo, Streefland (1991, 1993) señala que la enseñanza debe apegarse a la *realidad* para que dicho conocimiento tenga un significado para el niño. De nuestra parte, hemos adoptado el enfoque realista de este investigador en nuestro plan didáctico de intervención.

Otro investigador que ha realizado estudios acerca de la construcción de los números fraccionarios es Thomas Kieren. Su finalidad es establecer cuál es la génesis de dichos números, a la par que reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón) que sirven de base a la ulterior instauración de los conceptos relativos a la fracción.

Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro citados anteriormente (Kieren, 1983).

En cuanto a las definiciones que dicho investigador da a esos constructos intuitivos y con respecto a ellos, la relación parte-todo, Kieren (1980) la considera como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. La fracción como medida es reconocida por Kieren (1980) como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad. La fracción como cociente la refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes (Kieren, 1980, 1983, 1988, 1992). El papel de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande o a/b veces menor (Kieren, 1980). La fracción como razón es considerada por Kieren (1980) como la comparación numérica entre dos magnitudes. Hemos tratado en nuestro programa de enseñanza los significados de la fracción vinculados a medida, cociente intuitivo y operador multiplicativo propuestos por este investigador.

Kieren (1993) presenta un modelo recursivo para la comprensión de las matemáticas. Este modelo de comprensión es un proceso dinámico, en forma de espiral que conlleva involucrarse en sí mismo para crecer y extenderse. Dicho modelo está integrado por ocho niveles incrustados de conocimiento o acciones eficientes, los cuales son: *hacer primitivo*, *hacer imagen*, *tener imagen*, *notar propiedad*, *formalizar*, *observar*, *estructurar e inventar*. Consideramos apropiado destacar que en este estudio doctoral se tomaron en cuenta los tres primeros niveles que corresponden al pensamiento más intuitivo y elemental del sujeto, es decir; la partición como “actividad primitiva”, “hacer imagen” como los problemas de reparto que se anticipan en el uso de diferentes particiones y fracciones para representar la misma cantidad, “tener imagen” como fracciones equivalentes generadas a través de una fracción dada.

MÉTODO

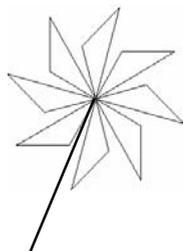
La enseñanza de las fracciones en la escuela mexicana se inicia oficialmente en tercer grado de primaria. Este estudio doctoral se llevó a cabo con un grupo de cuarto grado porque es en ese nivel donde se empieza a profundizar el trabajo con las fracciones, haciendo más complejo su uso a través de la resolución de problemas. Esta investigación doctoral es de carácter cualitativo, dado que se realizó el análisis de los avances de un grupo de niños de 9 años de edad dentro de su ambiente natural (aula), para conocer cuáles son los efectos que se producen en su pensamiento durante el desarrollo de un programa de enseñanza, en el cual elaboró experiencias de su propia vida. Además, se realizó el estudio de tres casos para percibir de una manera más profunda los procesos y fenómenos que se manifestaron en cada uno. En este reporte no presentamos ningún caso porque el análisis de cualquiera de ellos requeriría una comunicación de mayor extensión que la presente.

La investigación se inició con un cuestionario exploratorio aplicado a 30 estudiantes, con el propósito de obtener información sobre los conocimientos con que cuentan los niños acerca de las fracciones. Asimismo, el examen permitió seleccionar a tres alumnos para el estudio de casos. También facilitó la organización de la enseñanza. El examen inicial estuvo conformado por 13 tareas organizadas en tres bloques. En el primer bloque se presentan tareas relacionadas con el significado de medida. En el segundo bloque se incluyen situaciones

de reparto y el tercero, contiene actividades relacionadas con el significado de operador multiplicativo. Enseguida presentamos una actividad de dicho cuestionario, en el cuadro 1.

El segundo instrumento de esta investigación doctoral fue el programa de enseñanza desarrollado con un enfoque constructivista, con el fundamento de que los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que construyen significados apropiados en torno a los contenidos a estudiar (Solé y Coll, 1999). De acuerdo con lo anterior, el programa de enseñanza tuvo como propósito crear un ambiente favorable que posibilitara al niño el desarrollo adecuado de las actividades planteadas en las sesiones de trabajo y, además, le permitiera establecer los diferentes tipos de relaciones que le ayudaran a construir los significados de la fracción vinculados a la medida, cociente intuitivo y operador multiplicativo.

Rocío coloreó un cuarto de este rehilete de color rojo, un medio de color azul y un octavo de color amarillo.



¿Qué fracción del rehilete no coloreó Rocío? _____

Cuadro 1. El problema ilustra una de las actividades del bloque vinculado con el significado de medida (de acuerdo con Kieren, 1980), del cuestionario inicial.

Las actividades que integran el programa de enseñanza están relacionadas con situaciones de la vida real. Dichas tareas fueron diseñadas tomando como eje el currículum vigente de matemáticas de cuarto grado de primaria (1993) y los objetivos de nuestra investigación. La enseñanza experimental se realizó en un período de tres meses, se implementó en 18 sesiones, con una duración de una hora cada una, aplicándose dos veces por semana. Las actividades que se desarrollaron en las sesiones de trabajo fueron: a) Recortar e identificar del todo (continuo) la fracción representada por diversas figuras. b) Medir distancias para obtener partes fraccionarias de un todo. c) Reconocer la parte fraccionaria que se genera al cubrir figuras con un todo continuo, y escribir la fracción correspondiente a las partes indicadas de un todo continuo o discreto en las situaciones planteadas. d) Distinguir las partes fraccionarias de un todo continuo o discreto en las situaciones problemáticas que se desarrollan en una fiesta de cumpleaños. e) Solucionar situaciones de reparto de artículos adquiridos en un mercado. d) Completar la reducción de figuras relacionadas con la clase de educación física.

Dichas tareas fueron reunidas en torno a diversos “escenarios”, los que representaron distintos espacios o ámbitos de aplicación de las fracciones. Cada “escenario” supuso una modalidad particular de desarrollo de los mencionados números, en un terreno real determinado (a manera de ejemplo de esto, mencionamos el “escenario” de la fiesta escolar, o bien,

el “escenario” del festejo familiar). Enseguida presentamos una de las tareas del programa de enseñanza, en el cuadro 2. Esto es marcadamente diferente de las actividades didácticas contempladas en el libro de texto oficial, en donde los contenidos curriculares comunes no se encuentran secuenciados, sino son presentados de manera discontinua.

En dichas actividades, los niños trabajaron organizados en equipos, con la finalidad de fomentar el intercambio de ideas, la coordinación de puntos de vista y el trabajo colaborativo. Al término de cada actividad se realizaron confrontaciones grupales, donde los alumnos explicaban a sus compañeros las estrategias que habían desarrollado para resolver la tarea. Si un estudiante presentaba una estrategia incorrecta en la solución del problema, los demás niños intervenían, haciéndole ver el error cometido en su proceso de solución.

El maestro dividió el tablero del periódico mural de esta manera:

Para la Bandera Mexicana	Poesía
	Deportes
	Gráficas

Escribe qué fracción del periódico mural se le asignó a cada sección:

Para la Bandera Mexicana _____.

Deportes _____.

Gráficas y poesía juntas _____.

Explica a tus compañeros cómo resolviste la actividad.

Cuadro 2. Actividad del programa de enseñanza del escenario: El periódico mural “La voz del niño”.

Después de la realización del programa de enseñanza, se aplicó el *cuestionario final* al grupo que participó en el estudio de campo. El propósito fue valorar los avances que se alcanzaron durante las sesiones de trabajo. Las 13 tareas que conforman este cuestionario son análogas a las planteadas en el examen inicial y a las desarrolladas en las sesiones de enseñanza.

Para validar este estudio doctoral se realizó la triangulación de los métodos de esta investigación. En dicho análisis se confrontaron y compararon los datos recopilados en los cuestionarios (inicial y final), las observaciones del responsable de la investigación y de otro observador en las sesiones de enseñanza, así como las observaciones y los datos obtenidos en las entrevistas del estudio de casos.

RESULTADOS

* En el análisis de las tareas que corresponden al significado de fracción como *medida* del *cuestionario inicial*, observamos que los alumnos no tuvieron dificultad para calcular las veces que cabe $\frac{1}{2}$ de determinada magnitud en una longitud dada. Sin embargo, los niños tuvieron conflictos para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo continuo en dos partes iguales. Asimismo, no pudieron determinar qué parte de un todo continuo re-

presentan las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. Podemos afirmar que los conocimientos con que cuenta el escolar de este grupo con respecto a dichas fracciones, limitó sus habilidades para desarrollar estrategias apropiadas de partición. Además, la mayoría de los alumnos tuvieron problemas para representar en un todo discreto las fracciones un medio, un cuarto y un octavo. También evidenciaron el desconocimiento de un vocabulario apropiado para nombrar la parte fraccionaria obtenida en la partición de un todo continuo o discreto, lo cual indica que el conocimiento con que cuenta el niño en relación a este contenido matemático es reducido.

Con relación a las actividades vinculadas al significado de *cociente intuitivo* (reparto) de fracción, la mayoría de los niños tuvieron dificultad para resolver la distribución de un todo discreto entre un determinado número de personas. La tendencia de los alumnos en estas tareas fue la de partir en medios. De igual forma, los estudiantes manifestaron conflictos para establecer la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes. Un alumno consideró al todo continuo como indivisible. A este respecto, podemos decir que la poca experiencia con que cuentan los miembros de este grupo con respecto a la distribución de todos continuos fue determinante en las estrategias que desarrollaron en las situaciones de reparto.

En cuanto a las tareas vinculadas al significado de *operador multiplicativo* de la fracción, casi todo el grupo tuvo problemas para agrandar al doble los lados de una figura dada o para disminuirlos a la mitad. La mayoría de los niños, para resolver estas actividades, repitieron tan sólo la posición de los lados de la figura, ignorando las magnitudes que tenían que ampliar o disminuir. Algunos niños, para reducir los lados de la figura a la mitad, únicamente lo hicieron en una dimensión (ancho o largo).

*Al inicio del *programa de enseñanza*, los niños tuvieron dificultades para integrarse en un trabajo colectivo, ya que estaban acostumbrados a la producción individual; posteriormente, la problemática fue superada y pudieron avanzar en equipo, de tal manera que esta forma de resolver las actividades no únicamente favoreció en el niño el intercambio de ideas, la justificación de sus respuestas, el argumentar sus propias decisiones, sino además, propició la elaboración de respuestas correctas y la manifestación de anticipaciones con relación a la equivalencia de fracciones y la proporcionalidad entre dos figuras. En el cuadro 3 mostramos la actividad que favoreció en una alumna la anticipación de una relación proporcional.

A lo señalado en el cuadro 3, agregamos que Mayra dibujó en la cuadrícula una cancha de 6 cuadros de largo por 3 cuadros de ancho. A continuación reproducimos los comentarios de Mayra, parcialmente.

Mayra: La canchita cabe 4 veces en la cancha grande, dice señalando a una y otra cancha.

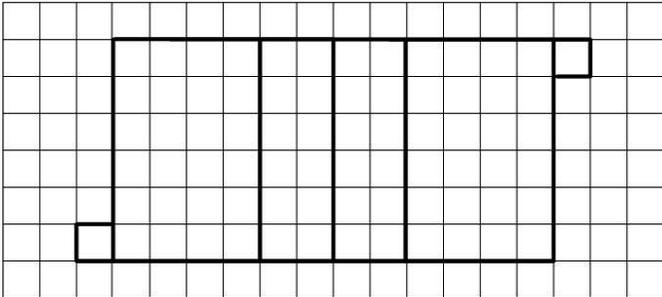
Porque de largo tiene 6 cuadritos y de ancho tiene 3, entonces $6 \times 3 = 18$, señala la canchita, después, divide la cancha en cuatro partes iguales...

Mayra: Cada parte tiene 18 cuadritos, expresa apuntando un cuarto de la cancha. Que es lo que le toca a la canchita, señala la canchita...

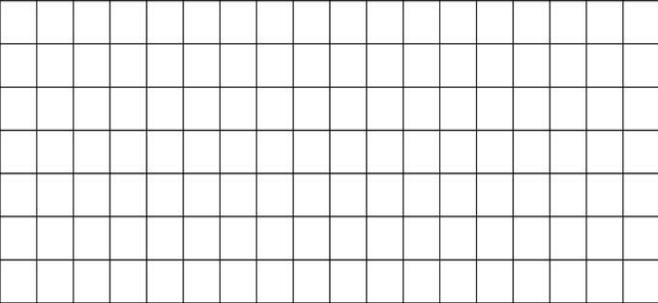
Mayra: Entonces, la canchita cabe 4 veces en la cancha grande...

Al resolver los problemas vinculados con el significado medida, los alumnos identificaron y escribieron las fracciones representadas en un todo. Asimismo, los niños lograron producir fracciones equivalentes dada una fracción. A través de los problemas de reparto, los estudiantes lograron manifestar expresiones simbólicas de fracción para nombrar la parte del todo repartido. Además, dichas tareas propiciaron en los pupilos la anticipación de la suma de fracciones con igual denominador. En cuanto a las actividades de operador multiplicativo, favoreció en los alumnos el reconocimiento de las dimensiones de las figuras (ancho y largo) como fundamental para realizar sus producciones.

Por último, el maestro de educación física presentó este dibujo de la cancha de voleibol.



En la cuadrícula de abajo, dibuja la cancha de voleibol reduciendo cada uno de sus lados a un medio.



Cuadro 3. Tarea del escenario “La clase de educación física”.

* Con respecto a las actividades relacionadas con el *significado de la fracción como medida en el cuestionario final*, observamos que la mayoría de los niños no tuvieron dificultades para realizar particiones en dos, tres, cuatro y seis partes iguales de todos continuos. De igual manera, percibimos que un gran número de los alumnos lograron efectuar particiones en sextos y novenos en un todo continuo. Además, utilizaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar la parte fraccionaria que obtuvieron como resultado en la estrategia desarrollada.

En las tareas que corresponden al significado de cociente intuitivo de la fracción, notamos que la mayoría de los niños no presentaron problemas para resolver las tareas vinculadas con situaciones de reparto. Asimismo, efectuaron procedimientos apropiados al repartir todos continuos o discretos entre un número determinado de personas. De igual forma, establecieron la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes.

En relación con el significado de operador multiplicativo de la fracción, nos percatamos que la mayoría de los niños no tuvieron dificultades para disminuir a la mitad los lados de una figura. Sin embargo, percibimos que medio grupo no logró reducir los lados de una figura a un tercio y tampoco pudieron disminuir los lados a la mitad, cuando la figura estaba formada por líneas inclinadas.

CONCLUSIONES

En este programa de enseñanza se promovió el desarrollo intelectual de los niños, habilitándolos a que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos, sobre las bases de sus experiencias cotidianas. Durante el proceso de enseñanza, los alumnos efectuaron diversas actividades que les permitieron realizar exitosamente repartos equitativos y exhaustivos de todos continuos y discretos. Además, los alumnos manifestaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar las partes de un todo continuo o discreto.

De acuerdo a lo planteado por Kieren (1992, 1993), observamos en el desarrollo del programa de enseñanza que la partición fue la actividad rudimentaria que los niños produjeron para resolver las tareas planteadas, así como las situaciones de reparto propiciaron en los alumnos la anticipación de tener una imagen mental de la acciones de la partición del todo. Asimismo, la percepción de patrones que los estudiantes construyeron en las situaciones de reparto, los ejemplificaron con diferentes fracciones para mostrar la misma cantidad.

De acuerdo a lo mencionado por Streefland (1993) podemos afirmar que los conocimientos previos que tienen los niños favorecieron la construcción de la noción de fracción en las sesiones de enseñanza. Además, las confrontaciones grupales propiciaron en los estudiantes la creación de un ambiente de confianza y respeto mutuo; en donde cada uno tuvo la oportunidad de expresar sus estrategias de resolución con libertad, así como el de aceptar sus equivocaciones. Con todo lo expresado anteriormente consideramos que lo planteado en la hipótesis de nuestra investigación se cumplió.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.
- Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En: F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa* (173-196). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Reidel Publishing Company. 28-33, 133-177.
- Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una «educación matemática realista» *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 9 (151-167). Barcelona: Graó.
- Kieren, T. (1980). The rational Number Constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (125-149) Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.
- Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education*. (187-194).
- Kieren, T. Nelson. D. y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical. Behavior*, 4. 25 – 36.
- Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2 (162-181). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

- Kieren, T. (1992). Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction. En: G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hatrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, 6, (323-369). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En: T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research*, 3 (49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Perera, P. y Valdemoros, M. (2002) Manipulative help in verbal sharing out continuous and discrete wholes problems solving. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4. 49-56.
- Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30 (1), 5-38.
- Solé, I. y Coll, C. (1999). Los profesores y la concepción constructivista. *El constructivismo en el aula*, (7-23). Barcelona: Graó.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. (46-134).
- Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25. (109-135).
- Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*. Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.
- Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: Estudio de caso. *Educación Matemática* 9, 3, (5-17). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de la unidad. Estudio de casos. *Educación Matemática* 13, 1 (51-67). México: Grupo Editorial Iberoamérica.