PRODUCCIÓN DE SENTIDOS PARA LOS OBJETOS ALGEBRAICOS DE NÚMERO, VARIABLE Y FUNCIÓN AL RESOLVER PROBLEMAS DE VARIACIÓN CONTINUA. EVIDENCIAS EMPÍRICAS SOBRE NUEVOS SENTIDOS DE USO DEL NÚMERO NEGATIVO

Guillermo Rubio, Rafael del Valle y Alonso del Castillo
Universidad Nacional Autónoma de México. CCH Sur

Aurora Gallardo
CINVESTAV. México

RESUMEN

Este artículo trata sobre los distintos sentidos de uso que dan estudiantes de bachillerato a objetos algebraicos tales como número, variable y función. Se observó que el empleo de cantidades numéricas propicia el análisis de problemas de variación continua, provocando el desprendimiento del uso de incógnitas y el tránsito hacia la construcción del significado de variable. Además, la entrevista clínica mostró que al resolverse este tipo de problemas se produjeron sentidos de uso para los números negativos, uno de ellos hasta ahora no reportado.

ABSTRACT

This article deals with the different senses of use that high school students give to algebraic objects, such as number, variable and function. We observed that usage of numerical numbers fosters an ongoing analysis of variation problems, enabling subjects to detach themselves from the use of unknowns and to be on their way toward building the meaning of variable. Moreover during the clinical interviews, we found that upon solving this type of problem, senses of use were produced for negative numbers, one of them until now been unreported.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Guillermo Rubio, Rafael del Valle, Alonso del Castillo y Aurora Gallardo (2007). PRODUCCIÓN DE SENTIDOS PARA LOS OBJETOS ALGEBRAICOS DE NÚMERO, VARIABLE Y FUNCIÓN AL RESOLVER PROBLEMAS DE VARIACIÓN CONTINUA. EVIDENCIAS EMPÍRICAS SOBRE NUEVOS SENTIDOS DE USO DEL NÚMERO NEGATIVO, pp. 239-247.

La investigación que se reporta es parte de un proyecto de gran aliento sobre la producción de sentidos de uso de los objetos algebraicos de número, incógnita, variable, ecuación y función, con alumnos de bachillerato, al enfrentar problemas verbales que se modelan mediante una ecuación o una función, con el objeto de coadyuvar en el desarrollo de la competencia en el uso de algunos estratos del sistema algebraico de signos. Los estudiantes participantes en el montaje experimental recibieron una enseñanza previa en el aula, durante 14 semanas, sobre la resolución de problemas que se representan con ecuaciones, a través de una implementación didáctica que emplea: a) un acercamiento numérico que propicia el progreso en la capacidad analítica y en el pensamiento algebraico (ver p.e. Rubio, 2002; Rubio & Del Valle, 2004) y, b) un método para resolver familias de ecuaciones.

EL ESTUDIO

La investigación tomó como hilo conductor el marco teórico- metodológico de los modelos teóricos locales [ver p.e. Filloy y cols. 1999]. El montaje experimental consistió de un estudio clínico de casos con la finalidad de observar la producción de sentidos de uso para los objetos algebraicos de número, variable y función al resolver problemas de variación continua. Se hicieron entrevistas videograbadas a cuatro estudiantes, seleccionados y estratificados mediante dos cuestionarios sobre ecuaciones y funciones lineales. Para el análisis e interpretación de las producciones, verbales o escritas, que hacen los alumnos a través de los diálogos durante las entrevistas, se utilizan los trabajos de Filloy y cols., 1999, Puig, 1997, 2006; Gallardo, 2002 y Rubio, Del Valle, Del Castillo, 2006, adoptándose la jerga semiótica de “producción de sentidos de uso” para hablar de las evidencias que los estudiantes generan al enfrentar los problemas que se les plantean en una situación de enseñanza, como las que se presentan en las entrevistas.

Del análisis de las entrevistas realizadas por el profesor-investigador, se encontró que los alumnos logran establecer la relación entre dos variables debido a que ellos tienen una noción intuitiva de la *rapidez de cambio* (Blanton-Kaput, 2004 dan cuenta de un pensamiento covariacional en niños muy pequeños), mostrándose que ésta es necesaria para construir el significado de variable y la relación funcional lineal entre variables. Se observó que emplear cantidades numéricas para desencadenar el análisis de los problemas provoca el rompimiento con el uso de incógnitas y ecuaciones, así como el tránsito hacia la construcción del significado de variable y función. También se observó que se logra la construcción del significado de la representación algebraica de una función, en algunos casos, al dotar de sentido a las relaciones numéricas entre las variables, y en otros, después de haber organizado tales relaciones en una tabla.

Además, la comunicación aquí presentada, da cuenta de los sentidos de uso de los negativos que una de las estudiantes produce al enfrentar uno de los problemas de variación continua utilizados en la entrevista, con el objeto de mostrar como se extiende el dominio numérico de los naturales a los enteros. En los segmentos de la entrevista que mostraremos se pueden ver sentidos de uso de los negativos reportados en otros trabajos, así como uno nuevo encontrado durante el análisis de la misma. A continuación se describen brevemente:

1. Sustraendo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud (en $a-b$, $a>b$). Esta categoría se amplió en este estudio al caso en que $a<b$.
2. Número relativo, donde la idea de cantidades opuestas en relación a una cualidad surge en el dominio discreto y la idea de simetría aparece en el domino continuo.

3. Número aislado, como el resultado de una operación o como la solución a un problema o ecuación.
4. “Número ordenado”, se produce cuando se quiere saber si un número negativo es mayor o menor que cualquier otro número entero.

Varias de estas concepciones como la del número relativo ya han surgido en otros trabajos (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1996; González J.L. 1998) por mencionar sólo algunos. En este Estudio estas concepciones aparecen cohesionadas como sentidos de uso que adquirirán finalmente el significado de número entero si la interpretación del alumno es afortunada, consiguiéndose así la anhelada extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros.

Se reportan ahora los diferentes sentidos de uso de número, variable y función del *“problema de las verduras”* que dice:

“Una bolsa de verduras se saca del congelador de un refrigerador con una temperatura de 18°C bajo cero, y se mete a calentar en un horno de microondas cuyo reloj marca 0 segundos; si el horno provoca que la temperatura de la bolsa de las verduras aumente a un ritmo de 2°C cada segundo hasta llegar a una temperatura de 21° C: a) determina algunos instantes de tiempo en los que la bolsa de verduras esté a una temperatura mayor de 5 ºC bajo cero pero menor que 1ºC bajo cero; b) ¿si cambia el tiempo qué le pasa a la temperatura de la bolsa de verduras?; c) escribe una expresión algebraica que relacione la temperatura de la bolsa con el tiempo”.

Lee el problema y escribe –18ºC (emplea un número relativo) para representar la temperatura “bajo cero” e identifica la rapidez con que cambia la temperatura respecto al tiempo (2ºC/seg) anotando:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{\times 13} \\ 26^{\circ}\mathrm{C} \end{array}$$

E: Acuérdate…tus significados, es la única manera en que te puedo orientar…

Ella no considera el valor inicial, se centra en el incremento que produce la rapidez de cambio de la variable independiente y no en el valor final de la variable dependiente.

A: …es la temperatura final…o sea la temperatura de la bolsa…

E: ¿Segura…?

A: ¡No!…26 menos 18

Resta 18º C a los 26ºC que había obtenido:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{\times 13} \\ \_26^{\circ}\mathrm{C} \\ \underline{18\ } \\ 8^{\circ}\mathrm{C} \end{array}\quad \text{Temperatura final de la bolsa}$$

Nótese que transforma el sentido de uso de número relativo: –18ºC en sustraendo, al hacer la resta de 26 menos 18.

Una vez que relaciona las variables, trata de responder a lo que se pide en el problema: “*…determina algunos instantes de tiempo en los que la bolsa de verduras esté a una temperatura mayor de 5 ºC bajo cero pero menor que 1ºC bajo cero…”*.

$$\begin{array}{r} 2 \\ \underline{\times 10} \\ -20^{\circ}C \\ \underline{18} \\ 2^{\circ}C \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \underline{\times 5} \\ -10\ ^{\circ}C \\ \underline{18} \\ -8\ ^{\circ}C \end{array} \ ,$$

Se observa que obtiene un número negativo aislado (–8ºC) resultado de la operación 10–18 = –8. Esta sustracción muestra que ha extendido el sentido de uso de sustraendo para el caso a–b donde a<b.

La alumna lee en voz alta lo que se pide en el problema:

E: ¿Le entiendes?

A: No mucho

E: ¿Qué no entiendes?

A: Que sea mayor que 5º bajo cero y menor que un 1º bajo cero

E: Ve tu dato…¿qué tienes entre tus constantes?

A: Menos 18ºC

E: ¿Cuándo es más frío?...¿cuándo tienes 18ºC bajo cero ó cuando tienes 15ºC bajo cero u 8ºC bajo cero?

A: ¿Cuándo es más frío?

E: ¿O cuando es más caliente…?

A: Cuando tengo 8º ó 15º (Con esta respuesta se ve que la alumna empieza a percatarse de cualidades opuestas, es decir, de números relativos).

E: ¿Porqué no organizas eso en una tabla…y ves que le va pasando a tu bolsa..?

A: ¿Es temperatura y tiempo, no?...las variables…

Escribe la siguiente tabla:

Tiempo	Temperatura
13 seg	8ºC
10 seg	2ºC
5 seg	-8ºC

E: ¿Qué observas en la tabla?

A: Pues va de un tiempo mayor a uno menor

E: ¿Y así va el tiempo, o cómo va?

A: …va de menor a mayor…

E: ¡Eso!

Borra la tabla anterior y escribe de nuevo los valores de tiempo en secuencia creciente:

Tiempo	Temperatura
5 seg	-8ºC
10 seg	2ºC
13seg	8ºC

A: …pero…dice…mayor que 5 grados bajo cero …pero todavía no lo cumple…

E: ¿Qué pasó?

Ella realiza cálculos:

$$\begin{array}{rr} & 2\\ & \underline{\times 4}\\ - & 8^{\circ}C\\ & \underline{18}\\ & -10\ ^{\circ}C \end{array}$$

E: ¿Qué temperatura es más caliente?.

La alumna escribe el último cálculo en la tabla respetando la secuencia creciente del tiempo:

Tiempo	Temperatura
4s	–10ºC
5s	–8ºC
10s	2ºC
13s	8ºC

E: La… (temperatura)…qué te piden está… entre 4 y 5 (segundos)?

A: Es que podría ser entre 5 y 10…

E: ¡Claro!

Efectúa las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{rr} & 2\\ & \underline{\times\ 7}\\ - & 14^{\circ}C\\ & \underline{18}\\ & -\ 4^{\circ}C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 2\\ & \underline{\times\ 8}\\ - & 16\ ^{\circ}C\\ & \underline{18}\\ & -2\ ^{\circ}C \end{array}$$

Donde ella verifica que en 7 y 8 segundos la temperatura de la bolsa está dentro del rango que da solución al problema.

E: ¿ te ayudó la tabla o no te ayudó la tabla?

A: Sí…

Se puede observar que logró producir un sentido de uso de orden para los enteros negativos, una vez que organiza, en una de las columnas de la tabla, a los valores de la variable independiente “tiempo” en una secuencia ordenada creciente, y en la otra, a los valores de la variable dependiente “temperatura”, algunos de los cuales corresponden a temperaturas bajo cero. Esto implica que da un uso del negativo como *número relativo*.

E: …a ver si tu puedes ponerme ahora una ecuación en dos variables…

Ella escribe la siguiente tabla:

x	**y**
Tiempo	Temperatura
4s	–10ºC
5s	–8ºC
10s	2ºC
13s	8ºC

La alumna fija su atención en la siguiente operación, que es una de las operaciones numéricas realizadas previamente, y asocia las literales que acaba de introducir con sus respectivos valores numéricos:

$$\begin{array}{lrl} & 2 & \\ & \underline{\times 13} & \underline{\to x} \\ - & 26ºC & \to 2x \\ & \underline{18} & \\ 2x-18 \to & 8ºC & \text{Temperatura de la bolsa} \end{array}$$

Escribe:

y=2x-18

Se puede observar que la alumna logra dar significado a cada uno de los elementos y operaciones que conforman la ecuación, en donde al número negativo le da un sentido de uso de sustraendo.

Con el propósito de dar evidencias sobre los procesos de generalización vinculados con la variación de los parámetros “m” y “b”, de la relación funcional y=mx+b, se le presenta por segunda ocasión el problema de la bolsa de verduras. Ella asigna un valor a la variable “tiempo” de 10seg. y lo multiplica por la rapidez de cambio (2ºC/seg), para obtener el aumento de temperatura correspondiente a dicho tiempo, y al resultado (20ºC) le resta los 18ºC, es decir, identifica al “–18ºC” como el sustraendo de una operación binaria, esto es, no le da aún un sentido de uso como número relativo. Para que pueda producir este último sentido de uso, el entrevistador realiza la siguiente secuencia de enseñanza:

E: ¿será restarle?... ¿qué le pasa a la temperatura de la bolsa de verduras…se está restando?...¿qué temperatura tienes en el instante que pones tu cronómetro?

A: …menos 18º ….18º bajo cero…centígrados…

E: ¿qué va a pasar…cuando…la sacas…del congelador?

A: …¿cuándo la sacas del congelador?...

E: …sí…las verduras están a –18ºC cuando las sacas… ¿qué les va pasando conforme va transcurriendo el tiempo?...

A:…se va calentando…

E: ¿entonces porqué dices que le restas?

A: …porque…yo supuse que se le restaba la cantidad que tenía…

E: ¿porqué?

A: …no sé…

E: Supongamos que no está a…menos 18 grados centígrados…supongamos que está a 3ºCº…¿también le restarías?...

A: ¿ en 3 ó en –3..?

E: … en tres.

A: No…. le sumaría

E: ¿Y porqué a –18 …le restas?

A: No sé…a lo mejor pensé que…como tenía –18…pues se restaba…

E: Pero…¿porqué? …¿no se está calentando?...a ver en –18…está ahorita…se calienta…sube la temperatura…¿cierto, o no…?

A: Sí

E: Si está a 3ºC… se calienta…y sube la temperatura en 20ºC…¿en ese caso le sumarías o le restarías…?

A: …le sumaría…porque el 3 grados ya lo tiene…y con el tiempo toma el 20. Entonces…si…va recorriendo y pasa…. el 20 …y 3 que ya tenía…le sumo…

E: ¿ Hay alguna diferencia…en la operación que ahora harías… con el –18 ºC?

A: …supongo que tendría que hacer lo mismo…¿o sea …sumar,..no?

La alumna escribe:

  20 ºC
+ 18 ºC

E: … ¿pero quién está sumando….18ºC…?

A: …no…a menos 18 le estoy sumando 20…

E: …¿y adónde está lo de menos 18?...

Al decir el entrevistador esto, la alumna borra la suma anterior, y escribe:

–18
+20
–2

E: ¿estás segura? ¿–18 + 20 …es –2?

A: …No

Ella escribe entonces 2 en lugar de –2:

–18
+ 20
2ºC

Nótese que logra dar sentido de uso de número relativo al operar con el –18 para obtener la temperatura de la bolsa de verduras (–18+20 = 2ºC). Así ha podido pasar de un uso del signo menos como substraendo que empleaba para obtener la temperatura de la bolsa de verduras (20ºC–18ºC = 2ºC) a un uso en donde opera con el número relativo.

Cuando ella produce este sentido de uso, hace operaciones similares (7.5×2=15ºC y -8ºC + 15ºC = -3º) utilizando otros instantes de tiempo para determinar valores de la temperatura de la bolsa de verduras que cumplan con la condición especificada en el enunciado del problema. Finalmente representa la relación funcional entre la temperatura de la bolsa y el tiempo en una tabla:

Tiempo	Temperatura
0	-18ºC
6	-6ºC
6.5	-5ºC
7	-4ºC
7.5	-3ºC
8	-2ºC
10	2ºC

Se le pide ahora que obtenga la representación algebraica de la relación funcional entre temperatura y tiempo lo que realiza usando como referencia las operaciones numéricas para obtener los valores de temperatura de la tabla, corroborándose, posteriormente, el uso de la función lineal y=mx+b, cuando se le plantean problemas isomorfos. Veamos:

E: ¿podrías ponerme la expresión algebraica que determina…la relación entre temperatura y tiempo?

Anota "x" e "y", arriba de las columnas de la tabla, tiempo y temperatura, y escribe la función:

y= –18+2x

E: ¡muy bien!…ahí el 2 fue constante y el –18 fue el valor que me dijiste que tenía cuando el tiempo es cero…Ahora, supongamos que se calienta más rápido…si por ejemplo, la bolsa de verduras ahora se calienta a 4ºC por segundo,…¿cómo quedaría la expresión?

Escribe: y=4x–18

E: ¡exactamente!...ahora, supongamos una bolsa de verduras…que se mete a un congelador más potente…o sea…que se va a enfriar con una rapidez de 3ºC por segundo….¿cómo representarías eso?

A: …(no responde)

E: …Ahí se está calentando a 2ºC por segundo (E señala a la ecuación y=2x–18)…se está calentando a 4ºC (E señala a la ecuación y=4x–18)…pero ahora se va a enfriar…¿cómo podrías representar eso?

A: …sería… "y" igual a –3… "x" …(escribe y=–3x)

E: ¡Perfecto!...¿qué más? ….

A: …¿entonces se sumaría....no?

E: …¿qué en el instante cero está a –18?

La alumna agrega –18 al –3x que había escrito quedando la ecuación en dos variables:

y = –3x–18

E: ¿Y qué pasaría si se enfría con una mayor rapidez…por ejemplo a 5ºC cada segundo?

Escribe en forma inmediata:

y = –5x–18

E: Quiero que me encuentres una expresión …cuando se calienta a una rapidez de 2ºC cada segundo…pero su temperatura inicial es de 10ºC bajo cero.

La alumna anota sin ningún problema:

y = 2x–10

E: Si tu escribes la ecuación y=mx+b…¿podrías decirme cuánto vale la "m" y cuánto la "b"… en todos los casos particulares que hiciste?

La alumna puede relacionar los parámetros "m" y "b" con los valores numéricos que le corresponden en cada caso, tanto para números negativos ("parámetro negativo") como para los positivos, pudiéndose decir que ha iniciado la construcción del sentido de uso de una literal como parámetro. Estos nuevos sentidos de uso son indicios de que ha logrado una ampliación del dominio numérico de los enteros.

REFLEXIONES FINALES

En el estudio se observó que emplear cantidades numéricas para desencadenar el análisis de problemas verbales de variación continua, provoca el rompimiento con el uso de incógnitas y ecuaciones, así como el tránsito hacia la construcción del significado de variable y función.

La construcción del significado de la representación algebraica de una función se logró establecer, en algunos casos, al dotar de sentido a las relaciones numéricas entre las variables, y en otros, después de haber organizado tales relaciones en una tabla.

El hecho de plantear problemas de variación continua cuya solución requiere que se obtenga un conjunto de valores, propicia la producción de sentidos de uso para la variable y la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros. A través del proceso de resolución del problema se consolidaron los sentidos de uso del negativo como número: a) aislado, b) relativo, y c) ordenado. Además, se amplía el sentido de uso del negativo como sustraendo en a-b con a>b, al caso en que a<b y se observó el tránsito del negativo como sustraendo a número relativo.

Una vez que el alumno produce sentidos de uso para una literal como variable, está en condiciones de poder dar significado a los parámetros "m" y "b" de la función lineal expresada como y=mx+b. Aparece por primera vez en este estudio un nuevo sentido de uso para la rapidez de cambio m<0 y para las condiciones iniciales del problema b<0, esto es, el "parámetro negativo".

REFERENCIAS

Bell, (1982). Looking at children and directed numbers, Mathematics Teaching, 100, 66-72.

Bruno, A. y Martiñon, A. (1996). Números negativos: sumar = restar. Uno, 10, 123-133.

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students'capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the PME 28th Conference*. V-2 pp.135-142). Bergen, Norway

Filloy, E. y cols. (1999). "Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa". Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. Serie Investigación en Matemática Educativa. Edit. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. México.

González Marí, J.L. (1998). Números Naturales Relativos. Editorial Comares, Granada. España.

Puig, L. (1997). Notes on Semiotics and Mathematics Education. Presentado en el grupo de semiótica de las matemáticas en 21st Conference of PME, Finland.

Puig, L., (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Actas del X Simposio de la SEIEM. Instituto de Estudios Aragoneses (Diputación de Huesca). Universidad de Zaragoza. pp 107-126.

Gallardo, A. (2002). "The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra". Educational Studies in Matehmatics 49: 171-192. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Nederlands.

Rubio, G. (2002). "Solution of word problems through a numerical approach. Evidences on the detachment of the arithmetical use of the unknown and the construction of its algebraic sense by pre-university students". *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, Great Britain, Vol 4. pp. 145-152.

Rubio, G. & Del Valle, R. (2004). "The competent use of the analytical method in the solution of algebraic word problems. A didactical model based on a numerical approach with junior high students". *Proceedings of 28th PME Conference*. Bergen, Norway.

Rubio G., Del Valle, R & Del Castillo, A. (2006). Construction of meanings to the mathematical objects of variable and function through problems. *In proceedings of 28th annual meeting of PME-NA*. Merída. Yucatán,