

## COMPONENTE

# PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRÁICOS Y ANALÍTICOS:

*Reflexión sobre los estándares  
curriculares del área de  
Matemáticas*

## CAPÍTULO quinto

Gloria García - [gloriag@uni.pedagogica.edu.co](mailto:gloriag@uni.pedagogica.edu.co)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Edgar A. Guacaneme - [guacane@uniandes.edu.co](mailto:guacane@uniandes.edu.co)

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - UNA EMPRESA DOCENTE

Wilson J. Pinzón - [wipin52@hotmail.com](mailto:wipin52@hotmail.com)

UNIVERSIDAD DISTRITAL "FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS"

## Introducción

La comunidad colombiana de investigadores en Educación Matemática ha mostrado su interés en discutir en ámbitos académicos el documento Estándares para la excelencia en la educación (MEN, 2002), particularmente el contenido de los Estándares curriculares para matemáticas para la educación preescolar, básica y media (pp. 11-42) —que en adelante llamaremos Estándares. Con este fin, hasta la fecha, en Bogotá se desarrollaron dos reuniones en las que participaron algunos integrantes de la comunidad local. Como resultado de este par de reuniones se determinó configurar grupos que inicien reflexiones en torno al desarrollo en los Estándares de cada una de las componentes del currículo de matemáticas expresados en los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998)—que en adelante llamaremos Lineamientos.

En este breve documento presentamos algunas de las reflexiones iniciales surgidas de cotejar el contenido del componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en los Estándares, con la propuesta hecha en los Lineamientos acerca de este mismo componente. Consideramos que las reflexiones aquí presentadas constituyen solo una aproximación inicial al análisis de los Estándares y que es necesario continuar el proceso de estudio de éstos de tal suerte que luego podamos tener un nuevo documento que exprese con mayor amplitud y profundidad nuestra postura frente a los Estándares en el componente citado. Presentamos tales reflexiones organizadas en tres títulos, a saber: acerca de la aproximación a la variación y al álgebra, acerca de los contenidos propuestos y acerca de la contribución tecnológica.

## Acerca de la aproximación a la variación y al álgebra

El documento que presenta los Estándares (MEN, 2002) señala que el marco de referencia para establecer los contenidos y los procesos matemáticos son los Lineamientos (MEN, 1998). En la breve descripción que realiza del componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos señala que:

*... esta componente del currículo tiene en cuenta las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, por ello, el currículo debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones. (MEN, 2002, p. 16)*

Esta descripción hace pensar que las tres temáticas mencionadas (patrones, relaciones y funciones) ocuparán un lugar central en los estándares de los

diferentes grados y que los temas referidos a los sistemas algebraicos y analíticos presentarán un bajo perfil en éstos. Esta idea tiene sus fuentes también en el desarrollo que se hace, del componente del currículo que nos ocupa, en los Lineamientos. Allí, se presenta a la variación como idea matemática que cohesiona una gran variedad de temas y problemas de las matemáticas escolares que usualmente se han abordado de manera aislada, y como idea matemática ligada y determinante del pensamiento variacional.

Al examinar los estándares curriculares que describen el componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en los diferentes grados, identificamos que si bien éstos recogen algunos planteamientos hechos en los Lineamientos con respecto a la variación, parecen dar prioridad a aspectos relacionados con el álgebra.

## Aproximación a la variación

Observamos que en los dos primeros grados de la Básica se plantean estándares curriculares relacionados con la variación conjunta de variables; por ejemplo, para los grados primero y segundo se plantean, respectivamente los estándares “Observa y predice el cambio de ciertos atributos medibles de los objetos a través del tiempo” (MEN, 2002, p. 19) y “Reconoce, describe y extiende patrones geométricos y numéricos” (p. 21). Para el tercer grado no se plantea ningún estándar referido a la variación, en tanto que para los grados cuarto y quinto se presentan sendos estándares, a saber: “Investiga casos en los que el cambio de una cantidad variable se relaciona con el cambio en otra (ejemplo: el cambio de velocidad afecta la distancia recorrida)” (p. 25) y “Representa y analiza las relaciones entre dos cantidades variables (por ejemplo, la edad y la altura de una persona), mediante tablas, gráficas en el plano cartesiano, palabras o ecuaciones” (p. 27).

Al examinar los estándares para los grados sexto a once reconocimos que no existen estándares que se refieran a la variación conjunta para los grados pares, en tanto que para los grados impares sí. Específicamente se plantean los estándares “Distingue entre magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, y resuelve problemas relacionados con éstas” (MEN, 2002, p. 31) y “Representa en el plano cartesiano la relación entre dos variables” (p.31) para el grado séptimo. Para el grado noveno se presentan los estándares “Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones cuadráticas” (p. 36) e “Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante funciones y ecuaciones exponenciales o logarítmicas” (p. 37). Para el grado undécimo, el estándar “Comprende la derivada como la razón de cambio o como la pendiente de la recta tangente a una función continua en un punto dado” (p. 41).

Bajo la óptica ofrecida por tales estándares reconocemos que el estudio de la variación se inicia desde muy temprano en la escolaridad, pero que parece ser retomado de manera no continua con el transcurrir de los años escolares; de hecho, sorprende que en solo tres de los seis años de la Básica Secundaria y Media haya referencia a la variación conjunta y que éstos no sean consecutivos. También vale la pena resaltar el hecho de que solo en un grado aparece un señalamiento explícito al trabajo con patrones de variación.

De otra parte, queremos señalar que si bien en el grado undécimo reconocemos las funciones de variable real como temática central, en los Estándares no es explícito el tratamiento del carácter variacional de éstas en relación con su carácter de correspondencia, es decir, no se describe cuál de los dos será enfatizado o si debiese existir algún tipo de equilibrio entre éstos. Esta inquietud se acrecienta cuando advertimos que para el grado noveno se presenta un estándar<sup>1</sup> que indica que la función se trata como una clase especial de relación y que los estándares presentados para el grado sexto bajo el título del componente que nos ocupa, introducen contenidos de la Teoría de Conjuntos que en el grado noveno se constituyen como prerrequisitos para identificar la función como una relación y ésta como un producto cartesiano. Consideramos que un tratamiento de la función como clase especial de relación impone un carácter estático a la idea de función que le asocia la unicidad de la correspondencia como única invariante del concepto. Este tratamiento se contraponen al de la función vista como variación conjunta de variables relacionadas, en el cual la función modela fenómenos de cambio de variables dependientes e involucra no solo el reconocimiento de la función con su expresión algebraica correspondiente, sino con sus distintas representaciones asociadas (tabular, gráfica, algebraica y verbal), poniéndose así de relieve diferentes invariantes del concepto.

## Aproximación al álgebra

Observamos que para los primeros grados de la escolaridad se plantean estándares que propenden por una aproximación al álgebra como generalización de la aritmética; por ejemplo, para el primer año se plantea el estándar “Examina algunas propiedades de los números y hace generalizaciones a partir de sus observaciones.” (MEN, 2002, p. 19) y para el segundo año se propone el estándar “Reconoce y da ejemplos de algunas propiedades generales de los números tales como la conmutatividad de la adición y la multiplicación.” (p. 21). Igualmente, observamos que para los últimos grados de la Educación Básica Primaria, se propone una aproximación al álgebra centrada en los métodos para resolver ecuaciones aritméticas; los estándares “Encuentra el número que falta en una ecuación sencilla” (p. 23), “Resuelve ecuaciones sencillas mediante métodos tales como operaciones inversas,

<sup>1</sup> “Reconoce cuando una relación entre conjuntos es una función” (MEN, 2002, p. 36)

cálculo mental o ensayo y error.” (p. 25) y “Encuentra soluciones de una cantidad desconocida en una ecuación lineal sencilla” (p. 27)—planteados respectivamente para los grados tercero, cuarto y quinto— ilustran la anterior afirmación.

En el grado octavo de la Educación Básica secundaria —y no antes— se retoman temáticas del álgebra bajo dos aproximaciones. La primera —y al parecer la fundamental— identifica al álgebra con el estudio de las estructuras; en ésta específicamente se propone abordar el álgebra de las expresiones algebraicas y particularmente el álgebra de los polinomios y el álgebra de las fracciones algebraicas. La segunda, retoma el énfasis en los métodos de solución de ecuaciones, particularmente para las ecuaciones lineales con una y dos incógnitas, ecuaciones cuadráticas y ecuaciones trigonométricas, en los grados octavo a décimo, respectivamente.

Por otra parte, hemos podido identificar que algunos de los estándares propuestos para los grados de primaria, son los mismos que proponen los estándares curriculares norteamericanos (NCTM, 1989) para los mismos grados. La propuesta de la NCTM tiene como marco de referencia la amplia y profunda investigación que se ha desarrollado en torno a las diferentes perspectivas del álgebra escolar. Una de tales perspectivas propone construir el álgebra escolar como aritmética generalizada, sobre la base de la formulación, manipulación y generalización de relaciones y propiedades numéricas. La propuesta del NCTM se refiere al álgebra de números, es decir todas las variables se consideran numéricas y el cálculo algebraico nace como generalización del modelo numérico; las variables — particularmente las letras— indican números arbitrarios, por lo que el cálculo algebraico se entiende como cálculo con variables; la variabilidad se desarrolla ligada a lo que representa la letra (variación del número en un conjunto de valores). Por lo anterior el concepto de número generalizado es un concepto esencial para la noción de variable. Es de esta forma como el concepto de variable surge en contextos no funcionales. De igual manera se puede afirmar que esta aproximación al álgebra se interesa tanto por el conocimiento de reglas y métodos generales de solución de ecuaciones e inecuaciones, como por el estudio de las estructuras que formalizan explícitamente al álgebra.

Sin embargo, la aproximación al álgebra que se propone en los Lineamientos no se corresponde con la citada inmediatamente antes. En éstos se propone que el estudio de las relaciones funcionales se dé en contextos de variación entre magnitudes y la modelación matemática se realice por la extracción de relaciones funcionales que se expresan en dichos contextos. En los Lineamientos la representación de estas relaciones si bien incluye la algebraica, tabular, gráfica cartesiana, y verbal, también, inicialmente incluye otras que permitan establecer los aspectos cualitativos de tales relaciones funcionales. Por tal razón, en los Lineamientos se sugiere privilegiar la traducción entre representaciones, antes de precisar el lenguaje del álgebra

como el lenguaje esencial en la comunicación del concepto de función y sus modelos; allí, las representaciones aritméticas se convierten en uno de los hilos conductores para el proceso de generalización de la variable, al mismo tiempo que permiten establecer regularidades de variación en relaciones de dependencia.

Conviene señalar, que desde estos planteamientos se debe tener claro el paso hacia el aprendizaje de los aspectos propiamente del álgebra, como los descritos en el párrafo precedente, pues muchas de estas actividades son en realidad complementarias; pues si bien, el estudio inicial de las relaciones funcionales prioriza representaciones visuales o tabulares, distintas a la simbología verbal algebraica, el desarrollo histórico del álgebra ha mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental en la formulación de muchos argumentos y fórmulas algebraicas.

## Acerca de los contenidos propuestos

Si bien los estándares curriculares propuestos para el área de matemáticas no son un listado de contenidos o temas de matemáticas —como si lo fueron en su momento los programas curriculares de la década del 70 y parte de la del 80— su lectura permite reconocer con relativa facilidad temáticas específicas para cada uno de los grados. Particularmente los estándares para los grados de la educación básica secundaria y media, exhiben la distribución temática recapitulada en la siguiente tabla.

GRADO	TEMAS DE MATEMÁTICAS
Sexto	Conjuntos, relación de contención y operaciones entre conjuntos (unión intersección y producto cartesiano).
Séptimo	Razones, proporciones, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, y regla de tres simple y compuesta.
Octavo	Expresiones algebraicas, monomios, operaciones entre monomios (suma, diferencia, producto, cociente y potencia), polinomios, operaciones entre polinomios (suma, diferencia, producto, cociente), factorización de polinomios, fracciones algebraicas, operaciones entre fracciones algebraicas (suma, diferencia, multiplicación, división y simplificación), ecuación e identidad algebraica, solución de ecuaciones de primer grado en una variable, inecuaciones de primer grado en una variable, solución de inecuaciones de primer grado en una variable, ecuación de ecuaciones de primer grado en dos variables e inecuaciones lineales en dos variables.
Noveno	Relación como subconjunto del producto cartesiano, dominio y rango de una relación, función como tipo especial de relación, funciones reales, función lineal, recta en el plano cartesiano, función cuadrática, ecuación cuadrática, números complejos, función exponencial, función logarítmica y ecuaciones logarítmicas.

GRADO	TEMAS DE MATEMÁTICAS
Décimo	Función, función circular, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, expresiones trigonométricas, fórmulas trigonométricas y ecuaciones trigonométricas.
Once	Función real, dominio y rango de una función, operaciones entre funciones (suma, diferencia, producto, cociente, composición, inversión), límite de una sucesión y de una función, propiedades del límite de una función, sucesiones divergentes y convergentes, función continua, derivada como razón de cambio o como pendiente, antiderivada e integral indefinida, integral definida.

Esta distribución temática tiene una amplia coincidencia con el currículo de matemáticas de hace aproximadamente tres décadas. Recordemos que en aquel (MEN, 1975) se proponía:

- Iniciar el Curso I de matemáticas (para el actual grado sexto) con el estudio de las nociones sobre conjuntos.
- En el Curso II de matemáticas (para el actual grado séptimo) estudiar a través de una unidad temática, titulada La proporcionalidad y sus Aplicaciones, cada uno de los temas presentados para el grado séptimo en la anterior tabla.
- En el Curso III de matemáticas (para el actual grado octavo) dos unidades temáticas, tituladas Polinomios y Ecuaciones e inecuaciones de primer grado, a través de las cuales se estudiaba el álgebra de los polinomios enfatizando en los productos notables y la factorización y se solucionaban ecuaciones e inecuaciones de tal tipo.
- Una unidad temática, titulada Ecuaciones Cuadráticas, y una unidad temática, titulada Números complejos, como desarrollo del Curso IV de matemáticas (para el actual grado noveno).
- Una unidad temática que bajo el título Funciones trigonométricas, presentaba para el Curso V de matemáticas, un panorama de contenidos casi idéntico al recapitulado en la tabla para el denominado en la actualidad grado décimo.
- En el Curso VI de matemáticas (para el actual grado once) se desarrollaba en la unidad Relaciones y funciones, el estudio del álgebra de funciones y de la composición de funciones; también a través de la unidad titulada Sucesiones infinitas se estudiaban temas como el de sucesión, límite de una sucesión y de una función, propiedades de los límites, convergencia y divergencia, álgebra de límites y continuidad. En las unidades tituladas Cálculo diferencial y Cálculo integral se presentaban temas relativos a los conceptos de derivada e integral de funciones de variable real.

Esta vasta coincidencia temática contrasta con la exigua diferencia que se propone con la ubicación en los grados para el estudio de las funciones de variable real. En los Estándares, como se puede ver en la tabla, las funciones se estudian en los últimos tres grados de la escolaridad (noveneno, décimo y once), en tanto que en los programas de la década del 70 su estudio se centraba en los dos últimos cursos (V y VI) y fundamentalmente en el último.

Una comparación temática similar se puede establecer con la presentación temática exhibida en los cuadros de Contenidos Básicos para la Educación Básica Secundaria de la Propuesta de Programa Curricular de finales de la década del 80 y principios del 90 (MEN, 1988, 1989, 1990, 1991). En estos cuadros basta considerar los contenidos propuestos para las columnas tituladas Análisis real, Conjuntos y Relaciones y operaciones para reconocer las coincidencias y diferencias con la propuesta temática de los Estándares. Así, específicamente se reconoce que:

- Para el grado sexto las propuestas (MEN, 1988, 2002) coinciden en lo referente a los conjuntos.
- Para el grado séptimo las propuestas (MEN, 1989, 2002) coinciden en lo referente a las razones y las proporciones, y parcialmente a la proporcionalidad, aunque en la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1989) a través de la proporcionalidad se inicia el trabajo en torno a la linealidad y a las funciones lineales, temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para ser estudiados en noveno.
- Para el grado octavo la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1990), en la columna titulada Análisis real, propone algunos de los temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para el grado noveno.
- Para el grado noveno la Propuesta de Programa Curricular (MEN, 1990), en la columna titulada Análisis real, propone algunos de los temas que los Estándares (MEN, 2002) proponen para el grado octavo; en tanto que en la columna titulada Relaciones y operaciones reporta los títulos de un par de temas que en los Estándares (MEN, 2002) incluye para el grado once.

El estilo y contenido de los Lineamientos (MEN, 1998) no permite establecer una minuciosa comparación temática con los Estándares (MEN, 2002). El contenido de los Lineamientos (MEN, 1998) solo permite reconocer que temas como los patrones y las funciones deberán ser considerados como parte integral del componente denominado pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. De estos temas, en los Estándares (MEN, 2002) las funciones de variable real son temáticas matemáticas centrales para los grados noveno, décimo y once.

En suma, a través de estas comparaciones –en cuanto al contenido matemático sugerido como objeto de estudio en la escolaridad– con las propuestas curriculares colombianas de las últimas tres décadas, podemos establecer



que los Estándares (MEN, 2002), particularmente en lo referente al componente pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, parecen retomar buena parte de su estructura temática de la propuesta de la década del 70 (MEN, 1975), no consideran suficientemente las modificaciones temáticas sugeridas en las Propuestas de Programa Curricular (MEN, 1988, 1989, 1990, 1991) y consideran las funciones de variable real propuestas en los Lineamientos (MEN, 1998) como parte de su estructura temática.

## Acerca de la contribución tecnológica

Al examinar los Estándares reconocemos que muy pocos de ellos vinculan directamente a la tecnología como herramienta de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De hecho solo los estándares “Utiliza una calculadora científica, de manera creativa, para evaluar expresiones algebraicas y fórmulas, resolver ecuaciones e inecuaciones y, en general, para facilitar el trabajo computacional” (p. 34) y “Utiliza con propiedad una calculadora graficadora para trazar y analizar gráficas de funciones y sus diversas transformaciones” —presentados para los grados octavo y undécimo, respectivamente— hacen referencia al uso de las calculadoras en el desarrollo de los temas que se incluyen en este componente.

En este par de estándares reconocemos que la implantación de la calculadora en la actividad matemática escolar en el componente que nos ocupa, parece limitarse a considerar que la calculadora es tan solo una herramienta que facilita cálculos y la elaboración de gráficas cartesianas. Al parecer, para este componente, sus grandes potenciales como simuladores, procesadores matemáticos, procesadores geométricos y generadores de información, no han sido explorados.

En los documentos que al respecto del uso de la tecnología en las matemáticas escolares se establece que uno de los objetivos que se debe lograr con la utilización de estos recursos es desarrollar en el estudiante el pensamiento variacional, indispensable para atacar con posibilidades de éxito aquellos problemas que involucran el cambio. También se propone que la interacción con estos recursos tecnológicos “permite que de una manera rápida un alumno pueda realizar variaciones en el modelo sobre el cual trabaja, y de manera inmediata pueda constatar los resultados causados por dicha variación, al obtener la respuesta de la máquina” (MEN, 1999, p. 31). De esta manera se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad tanto de observación y así trascender la simple contemplación de los fenómenos, como para detectar parámetros característicos de un fenómeno, para establecer relaciones, para hacer conjeturas y para hacer inferencias inductivas y deductivas.

## Referencias

- Ministerio de Educación Nacional, 1975. *Programas de Matemáticas*. Resolución 277 (Feb. 4). Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1988. *Propuesta Programa Curricular. Sexto Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1989. *Propuesta Programa Curricular. Séptimo Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1990. *Propuesta Programa Curricular. Octavo Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1991. *Propuesta Programa Curricular. Noveno Grado de Educación Básica*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1998. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 1999. *Nuevas Tecnologías y currículo de matemáticas*. Bogotá, D.C.
- \_\_\_\_\_, 2002. *Estándares para la excelencia en la educación*. Bogotá, D.C.
- National Council of Teachers of Mathematics, 1989. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston (V.A): NCTM.