LA CONSTRUCCIÓN DE CONTRAEJEMPLOS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Rodolfo Eliseo D´Andrea[(1),(2)], Mónica Adriana Real[(3)], Patricia Sastre Vázquez[(2)]
(1) Pontificia Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería.
(2) Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Agronomía
(3) Instituto Superior de Formación Docente N° 1 de la Provincia de Buenos Aires.
(República Argentina)
rodolfoedandrea@gmail.com, monireal@gmail.com, pasava2001@yahoo.com.ar

RESUMEN: El objetivo de este trabajo fue analizar el desempeño de estudiantes universitarios de Argentina que ingresan al ciclo básico de la Carrera de grado de Ingeniería, en procesos de validación de proposiciones con valor de verdad falso. Para la realización de esta investigación se diseñó una actividad cuyo objetivo fue que el estudiante determinara el valor de verdad de una serie de proposiciones y su justificación. La mayor parte de las proposiciones dadas a los estudiantes eran falsas y algunas, verdaderas. La presencia de proposiciones verdaderas permitió comparar los procedimientos utilizados por los estudiantes frente a ambos tipos, sin perder de vista el foco principal del estudio: la construcción del contraejemplo. Los resultados revelan que los estudiantes, en procesos de validación se desempeñan en ambos tipos de proposiciones, de formas muy similares. En ambos casos, sólo son capaces de generar ejemplos aleatorios con los que pretenden mostrar la validez de la proposición propuesta, lo que supone un vacío epistemológico no menor.

Palabras clave: : contraejemplo; procesos de validación y justificación

ABSTRACT: This work was aimed at analyzing university students' performance when entering to the basic level of the Engineering degree course in Argentine. The study was focused on proposition validation processes with a false truth value. For carrying out this research, an activity was designed, which objective was that the students determined the truth value of a set of propositions, and its justification. Most of the propositions given to the students were false and some of them were truth. The existence of truth proposals allowed comparing the procedures the students used in on both types, without forgetting the main purpose of the study: the making of an opposed example. The outcomes show that students, during the validation processes, similarly face both types of proposals. In both cases, they are able only to generate random examples to show the validity of their proposition which presupposes a no smaller epistemological gap

Key words: opposed example, validation and justification processes

Introducción

Considérese a un grupo de estudiantes universitarios de Argentina, durante la cursada de Álgebra y Geometría - una asignatura anual del currículum del primer año del ciclo común de la carrera de grado de Ingeniería – frente a la siguiente consigna: ‘Probar que la diferencia de conjuntos no es conmutativa’. Los procedimientos utilizados por los estudiantes indicarían que piensan en la conmutatividad y buscan un ejemplo consistente en dos conjuntos de manera tal que, al realizar su diferencia, en uno y otro orden, se puede observar que ambas operaciones ofrecen resultados diferentes. La elección de los conjuntos, por parte de los estudiantes, es una tarea de ensayo y error, buscando el par adecuado que permita obtener esos resultados distintos. El ejemplo citado es el disparador del problema de investigación que plantea este trabajo: la búsqueda y por ende, la construcción del contraejemplo en el ingresante universitario a carreras de grado de Ingeniería.

El objetivo de este trabajo es analizar el desempeño del estudiante universitario ingresante al ciclo básico de la carrera de grado de Ingeniería en la búsqueda de contraejemplos en el proceso de validación de proposiciones cuyo valor de verdad es falso.

Marco teórico

El principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001) describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos. En un primer nivel, las personas representan inicialmente mediante modelos, exhibiendo las posibilidades verdaderas, y dejando para hacer explícitas en un momento posterior, el resto de la información. Si las personas no suelen representar lo que es falso, es necesario explicar cómo hacen para imaginar situaciones falsas cuando les son requeridas.

Santamaría y Espino (2000) consideran que, en tales situaciones, se puede proponer un procedimiento que podría usarse en estas circunstancias y que recibe el nombre de *heurístico de negación*. Su funcionamiento es muy simple. Si se le pide a alguien que exprese el caso en que el valor de verdad de una proposición es falso, producirá la representación inicial de la situación en que el valor de verdad es verdadero y entonces lo negará. Como cualquier heurístico, el de negación es adecuado en la mayoría de los casos (de ahí su utilidad).

La búsqueda de contraejemplos adecuados no es una tarea simple, porque podría ocurrir que el individuo que hace la búsqueda pueda encontrar ciertos casos particulares que hacen a la proposición verdadera.

“Un contraejemplo es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado.” (Calvo Pesce, 2001, p.49)

Balacheff (1990) considera que las consecuencias de la exhibición de un contraejemplo, pueden generar diferenciaciones, según que éste recaiga sobre la conjetura, la prueba de la falsedad con su utilización, o sobre los conocimientos o fundamentos racionales implícitos de su estructura. Asume que la superación de la contradicción, generada propiamente por el contraejemplo, pueda atribuirse a la crítica o al rechazo de él.

Es de destacar que a veces ocurre que la verdad de ciertas proposiciones queda establecida, en el sentido en que son verdaderas salvo una pequeña cantidad de casos excepcionales, cuya exclusión explícita del dominio de aplicación del resultado las harían absolutamente verdaderas. Esta idea aparece también en la obra *Pruebas y Refutaciones* (Lakatos, 1978, p. 43) cuando se habla de "*tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas*"; este último tipo se puede mejorar convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula que enuncie las excepciones.

En general, en el proceso de validación de proposiciones verdaderas, en un estadío inicial, los estudiantes operan desde el *empirismo ingenuo*, según la clasificación de Balacheff (2000) acerca de los modos de demostrar. Lo realizan sustituyendo la ó las variables de la función proposicional implícita en la proposición por ejemplos elegidos aleatoriamente por los estudiantes, sin un criterio formado. En estadíos algo más avanzados, los estudiantes pueden ser capaces de realizar construcciones intelectuales originadas en una definición o propiedad y que se sustentan a través de la transformación de expresiones simbólicas formales. En tales casos, se dice que el estudiante realizó un *experimento crucial*. (Balacheff, 2000). Por ejemplo, supóngase que los estudiantes tienen que probar que la siguiente proposición es verdadera: $\forall a \in Z: a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$. Según la clasificación citada, un estudiante ha realizado un *experimento crucial* para este caso particular si, en una primera instancia escribe simbólicamente a un número par, y luego lo eleva al cuadrado. Posteriormente considera que la expresión obtenida es par porque consiste en la multiplicación de 4 por un entero. Luego, prueba la validez de la misma, evaluándola para diferentes valores de k enteros.

Una experiencia con un grupo de estudiantes

A los efectos de estudiar el desempeño de estudiantes de Ingeniería a la hora de validar proposiciones con valor de verdad falso, se diseñó una actividad que se puso a consideración de estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica Argentina, Campus Rosario. Se consideró un grupo mixto de 84 estudiantes ingresantes a Ingeniería provenientes de dos especialidades diferentes: Industrial y Ambiental. La convocatoria para la realización del trabajo de campo fue voluntaria, la única condición para presentarse era tener aprobado el curso propedéutico y no tener la carga adicional de un trabajo. En el grupo había igual número de varones que de mujeres. El momento elegido para llevar a cabo la experiencia fue una de las primeras clases al inicio de la cursada del primer cuatrimestre de la Carrera, en la asignatura: 'Álgebra y Geometría'. Las proposiciones fueron leídas lentamente y en voz alta por un docente, de manera de evitar cualquier ambigüedad en cuanto a la interpretación de signos y símbolos.

La consigna del trabajo consistió en determinar el valor de verdad de una serie de proposiciones y justificarlo. Dentro de ese conjunto de proposiciones, algunas resultaban verdaderas y la mayor parte de las mismas, falsas; algunas estaban referidas a un universal infinito y otras a un universal finito, posible de ser contado físicamente. Esto no constituyó un simple detalle, fue esencial a la hora del establecimiento de las conclusiones, porque el proceso de validación para proposiciones varía según el referencial. La confección de los ejercicios apuntó principalmente a proposiciones falsas, excepto tres. La presencia de las tres proposiciones verdaderas tuvo como objetivo comparar el desempeño del estudiante en el proceso de validación de los dos tipos de proposiciones. Entre las proposiciones verdaderas es esencial destacar el universal al que se remitía el cuantificador. Así, el universal de una de ellas era un conjunto finito, posible de ser contado físicamente. En los otros dos casos se consideraron conjuntos infinitos: el conjunto de los reales y el conjunto de los enteros. De forma análoga, se establecieron los referenciales de las proposiciones falsas. Las proposiciones verdaderas propuestas apuntaron a cuestiones simples de probar. En la proposición 3: $\forall x \in R{:}\, |x| \geq 0$, además de un contraejemplo, el valor de verdad se podía sostener por la definición de valor absoluto o la interpretación geométrica de este concepto, lo que no requería de una prueba con argumentación, ya que se trataba de una consecuencia inmediata de la definición. La proposición 7: $\forall a \in Z{:}\, a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$, en cambio, requiere una breve argumentación para sostener la verdad.

Se presentan, seguidamente, los ejercicios propuestos a los estudiantes.

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, y luego sostener (probar) en cada caso tal valor de verdad. Considerar para algunos casos que: $B = \{x \in N{:}\, 2 \leq x \leq 9\}$

$1. \forall x \in B{:}\, x + 5 < 12;\quad 2. \forall x \in B{:}\, x\ es\ primo;\quad 3. \forall x \in R{:}\, |x| \geq 0;$

$4. \forall x \in B{:}\, x^2 > 1;\quad 5. \forall x \in B{:}\, x\ es\ par;\quad 6. \forall x \in R{:}\, x^2 - x < 0;$

$7. \forall a \in Z{:}\, a\ es\ par\ entonces\ a^2\ es\ par$"

Resultados

En la Figura 1, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes en los ejercicios: 1, 2, 5 y 6. La particularidad de los mismos es que el valor de verdad de las proposiciones dadas es falso. Los resultados revelan que el 72% de la población analizada exhibió un ejemplo para sostener la falsedad de la proposición. El 9% exhibió varios ejemplos. El 12% se limitó únicamente a sostener que la proposición es falsa sin realizar acción alguna para sustentarlo. Mientras que el 7% no respondió a la consigna.

La figura 2 muestra el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 3. En este caso el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde al conjunto de los reales. El 65% justificó la verdad, pero no desde exhibición de ejemplos. Algunos lo hicieron desde la definición de valor absoluto y otros desde la interpretación geométrica de la misma definición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*, exhibiendo un ejemplo fortuito sin un criterio formado que lo sostenga. El 6 % exhibió varios ejemplos. El 11% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 7% no respondió a la consigna.

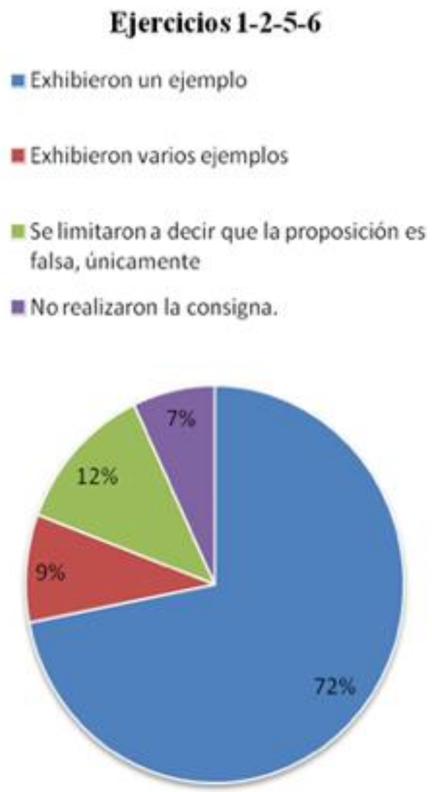

Figura 1

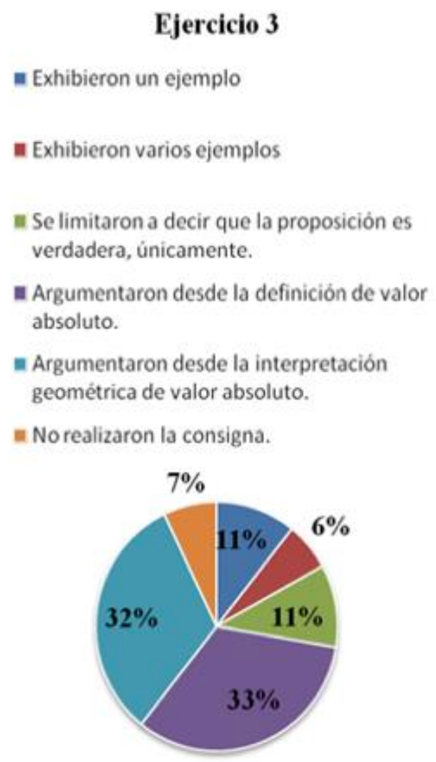

Figura 2

En la figura 3 se presenta el gráfico correspondiente a los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 4. Aquí, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial corresponde a un conjunto finito posible de ser contado físicamente. El 53% procedió chequeando uno por uno los valores del conjunto B, para sostener la verdad de la proposición. El 11% procedió según el *empirismo ingenuo*. Un porcentaje idéntico, de forma análoga a como hizo con la falsedad, exhibió varios ejemplos. Otro 11%, se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. Mientras que el 6%, sostuvo la verdad justificando coloquialmente. Particularmente, argumentaron que en virtud de que los elementos del conjunto superan a 2, su cuadrado supera a la unidad. El 8% no respondió a la consigna.

En la figura 4 se representan los resultados obtenidos por los estudiantes en el ejercicio 7. En este caso, el estudiante se encontró con una proposición verdadera donde el referencial es el conjunto numérico de los enteros. El 68 % procedió según el *empirismo ingenuo* para sostener la verdad de la proposición. El 11% también procedió según el *empirismo ingenuo* pero exhibiendo varios ejemplos como en ejercicios anteriores. El 15% se limitó a postular que la proposición propuesta es verdadera sin sostener este aserto. El 3 % no respondió a la consigna. Otro 3% realizó un intento de *experimento crucial*.

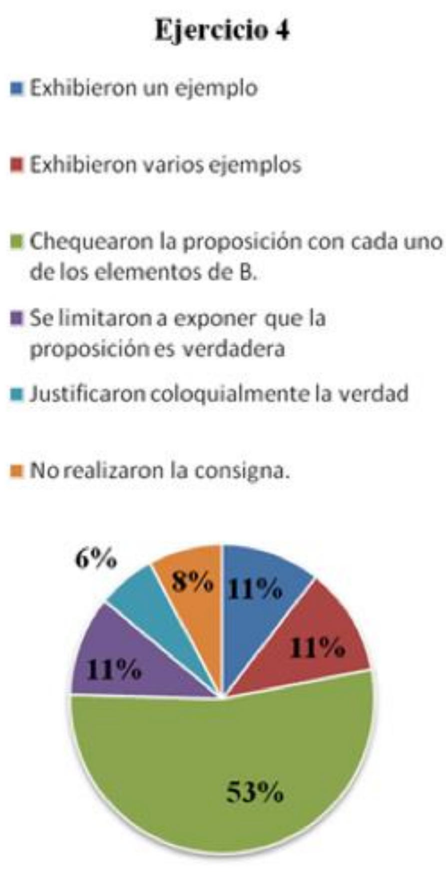

Figura 3

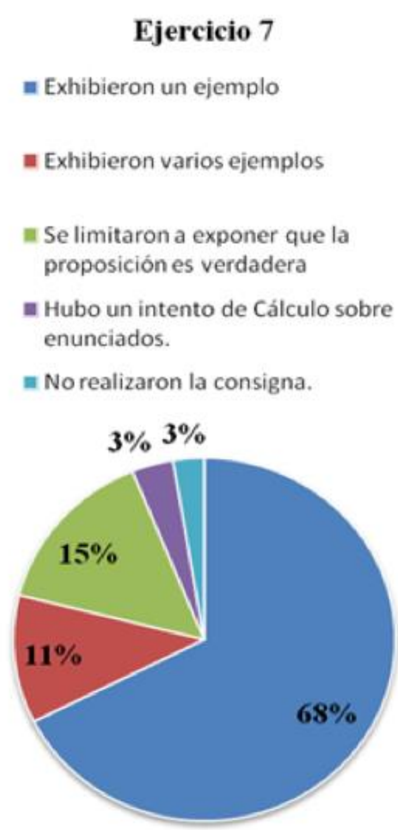

Figura 4

Los resultados muestran que los estudiantes al momento de validar proposiciones con valor de verdad falso, en un importante porcentaje exhibieron el contraejemplo que prueba la falsedad de la proposición propuesta. Asimismo, en situaciones de validación de proposiciones verdaderas, un porcentaje similar también exhibe un ejemplo para probar la validez de la proposición. Frente a proposiciones verdaderas con un referencial finito posible de ser contado físicamente, un importante porcentaje de estudiantes supo cómo operar analizando la verdad o falsedad de la proposición con cada uno de los elementos del conjunto. Pero frente a proposiciones verdaderas con un referencial infinito, un ínfimo porcentaje supo que el sostén de tal proposición necesitaba de una prueba. Esta reacción fue diferente frente a una proposición verdadera con referencial infinito. Un gran porcentaje supo sostener esa verdad justificando adecuadamente, pero a la hora de tener que sostener con una prueba la validez de una proposición verdadera, el estudiante no pudo abordarlo.

Conclusiones

Los estudiantes, en el proceso de justificación de una proposición falsa, operan de forma similar al utilizado para sostener el valor de verdad de una proposición verdadera. Exhiben ejemplos aleatorios, sin un criterio determinado. Para ambos casos, buscan un ejemplo que, al sustituirlo en la función proposicional implícita en la proposición, éste se adecúe al valor de verdad de ella. En algunos casos, los estudiantes suelen presentar varios ejemplos para ambos casos. Se conjetura que esta acción puede enmascarar la inseguridad del estudiante, que puede pensar ingenuamente que, con mayor cantidad de ejemplos, se refuerza la verdad o falsedad postulada por la proposición. Se presume que aparentemente no dilucidan la diferencia entre ambas acciones y concretamente el significado del ejemplo y la acción epistemológica de la verificación contenida implícitamente. Análogamente ocurre con el desconocimiento del significado del contraejemplo y la acción epistemológica de probar el valor de verdad de una proposición falsa, contenida también implícitamente. Asimismo, se puede observar como resultado del trabajo experimental, que los estudiantes en dos de los ejercicios propuestos que corresponde a una proposición verdadera sustentaron el resultado obtenido desde el lenguaje coloquial. No manifestaron esta acción para ninguna de las proposiciones con valor de verdad falso. Esto es compatible con el principio de la verdad postulado por Johnson–Laird (2001).

Estas diferentes apreciaciones permiten plantear los siguientes interrogantes: los estudiantes, frente a un contraejemplo, ¿no consideran que se trata de un caso excepcional?; ¿realmente tienen conciencia acerca de la acción que están llevando a cabo? o ¿proceden de manera similar a la exhibición de ejemplos como sostén de una proposición cuyo valor de verdad es verdadero, sin que medie la reflexión y el razonamiento?

Significa entonces que, para los estudiantes, la validación pasa simplemente por exhibir ejemplos aleatorios que ‘encajen’ o ‘funcionen’ en la estructura de la proposición. Este proceder es general, aunque hay algunos pocos casos particulares que se evidenciaron y describieron en el párrafo anterior de resultados.

De acuerdo a lo postulado por Santamaría y Espino (2000) el heurístico de negación es un procedimiento aparentemente natural y útil pero el estudiante de Argentina que ingresa a la Universidad no ha sido instruido en tales cuestiones durante el ciclo medio. Quizás no sea la palabra más adecuada, el decir, que no ha sido instruído sino que no ha sido entrenado en esas destrezas que requieren de una praxis cotidiana que necesita de la maduración intelectual. Es tarea del conductor del aprendizaje, inducir o guiar al estudiante en la búsqueda de contraejemplos, haciendo notar que esta exploración puede conducir en muchos casos a situaciones donde la demostración de la validez de la proposición no se alcance. Precisamente, éste es el momento crucial del proceso de validación de una proposición cuyo valor de verdad es falso. Comprender que cuando una proposición en matemática es falsa y verdadera, excepcionalmente, bajo ciertas condiciones, significa que no tiene validez universal y que su valor de verdad es definitivamente falso.

Según Balacheff (1990), la mostración de un contraejemplo permite establecer diferencias según donde este reincida. El estudiante recurre entonces a su memoria emotiva buscando estructuras ya asimiladas en el ciclo medio pero no las encuentra y acude a la acción de establecer el valor de verdad, pero no siempre puede sostenerlo porque se insiste que en este tipo de tareas no fue entrenado. De manera que en muchos casos se queda en el proceso de la determinación de tal valor de verdad pero esta acción es carente de un valor epistémico.

La educación matemática en el ciclo medio en Argentina, en general, se reduce a la realización de ejercicios repetitivos sostenidos en la aplicación de algoritmos sin que medie la reflexión y la conceptualización teórica. El conocimiento del lenguaje y la epistemología de esta Ciencia son inexistentes en este estadío de la formación. Ellos conciben a la Matemática, según expresión textual, como una disciplina que consiste en 'sentarse a hacer ejercicios'. Aquellos estudiantes que deciden estudiar una carrera universitaria de grado en Ingeniería tienen en su currículum varios cursos de Matemática. La realización de estos cursos requiere que los estudiantes tengan una sólida base de Álgebra elemental, Geometría euclidiana y Trigonometría además del conocimiento del lenguaje matemático y su epistemología. Esto lleva a pensar en la necesidad de generar una educación matemática que se sostenga en una formación basada en su lenguaje y la epistemología que le es propia. Por lo general, en Argentina, los cursos universitarios iniciales de Álgebra y Cálculo que integran el currículum de carreras de grado de Ingeniería que utilizan Matemática como herramienta, abordan los contenidos específicos y propios pero no se focalizan inicialmente en una instrucción, por lo menos, introductoria e informal, sobre las cuestiones inherentes al lenguaje y la epistemología matemática. Se enfatizó antes, que estas acciones se realicen en cursos universitarios iniciales, porque realizarlos en cursos avanzados no generará los mismos efectos que si se instruye al estudiante desde los comienzos. Esta propuesta no está reñida con lo que reza el Ministerio de Educación acerca de la necesidad de Matemática como Ciencia Básica de la Carrera, ya que éste propugna su importancia por dos grandes razones: "*desarrollar el pensamiento lógico deductivo y la* *capacidad heurística no traducida como una resolución de problemas sostenida en la aplicación de algoritmos sino como una praxis que esté sustentada en la conceptualización teórica*". (LEN 26410)

La puerta queda abierta para futuras investigaciones sobre la problemática desarrollada en este trabajo, ya que el estudio aquí presentado se centró sobre estudiantes universitarios ingresantes a Ingeniería en su primera semana de cursada. Habría que enfocarse en diferentes estadíos de la carrera y durante el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática y analizar qué tipo de educación debería ser la pertinente de esgrimirse en cada instancia.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática.* Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 2-8.

Calvo Pesce, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de las Ciències Experimentals. Bellaterra, Barcelona.

Johnson–Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. Trends in Cognitive Science, 5, 435 – 442.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

LEN 26410 (1996). Ley de Educación Nacional 26410/1996. República Argentina.

Santamaría, C. y Espino, O. (2000). Truth and falsity in propositional reasoning: the negation heuristic. En J. A. García-Madruga, N. Carriedo y M. J. González Labra. *Mental Model in reasoning.* Madrid: UNED.