ALGUNOS PROCESOS MATEMÁTICOS MANIFESTADOS EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA ARGUMENTATIVA DE ALUMNOS DE SECUNDARIA

María del Carmen Fajardo Araujo, Víctor Larios Osorio, Ángel Homero Flores Samaniego
Universidad Autónoma de Querétaro, Universidad Nacional Autónoma de México. (México)
carmulita_@hotmail.com, vil@uaq.mx, ahfs@servidor.unam.mx

RESUMEN: El objetivo de este trabajo es mostrar algunos de los procesos matemáticos manifestados en la práctica argumentativa. El análisis de los argumentos tomó en cuenta una categorización de esquemas de argumentación y los procesos matemáticos se identificaron desde la clasificación propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática. El experimento de enseñanza se llevó a cabo con alumnos de tercer grado de tres secundarias públicas del estado de Querétaro. Los resultados indican que los alumnos recurrieron a procesos como: la particularización, representación, entre otros, en argumentos mayormente de tipos simbólicos y empíricos-perceptuales.

Palabras clave: práctica argumentativa, procesos matemáticos, argumentos.

ABSTRACT: The aim of this paper is to show some of the mathematical processes involved in argumentative practice. The analysis of the arguments took into account a categorization of argumentation schemes, and the mathematical processes were identified from the classification proposed by the Mathematical Education Onto-semiotic Approach. The teaching experiment was carried out with third- grade students from three public secondary schools in the state of Querétaro. The outcomes show that the students resorted to processes such as: particularization, representation, among others, in arguments mainly of symbolic and empirical-perceptual types.

Key words: argumentative practice, mathematical processes, argument.

Introducción

El campo de formación de pensamiento matemático para educación básica prioriza el uso del razonamiento como herramienta fundamental para la resolución de problemas, además enfatiza la formulación de argumentos para explicar resultados. La competencia matemática de validar procedimientos y resultados también resalta la importancia de que el alumno adquiera confianza para explicar y justificar procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten al razonamiento deductivo y la demostración formal (SEP, 2011). Los propósitos de las matemáticas para educación secundaria tendrán como resultado, entre otros, también el uso de la justificación para propiedades y fórmulas.

Dada la importancia mencionada que tiene el desarrollo del razonamiento deductivo y la elaboración de argumentos, este trabajo tiene la intencionalidad de mostrar algunos procesos matemáticos de alumnos de tercer grado de secundaria evidenciados en tipos de argumentos construidos en una “actividad de cierre” del tema Homotecia directa e inversa del eje Forma, Espacio y Medida.

Marco Teórico

Las respuestas (argumentos) de los alumnos se categorizaron, con base en la propuesta de esquemas de argumentación hecha por Flores (2007), quien define como *práctica argumentativa* al “conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema” (Flores, 2007, p. 48) los siguientes tipos de esquemas se proponen:

- *Autoritarios*, donde sus argumentaciones se apoyan de las afirmaciones hechas por una autoridad (profesor, libro de texto).
- *Simbólicos*, donde se utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente sin llegar realmente a las conclusiones deseadas, el sujeto puede mencionar conceptos poco claros o inventados.
- *Fácticos*, en los que se hace un recuento de lo que se hizo o se repiten hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado, como una serie de pasos que parecen un algoritmo.
- *Empíricos*, en los cuales el apoyo está en hechos particulares (*inductivos*) o en un dibujo (*perceptuales*), donde este constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar el argumento.
- *Analíticos*, donde se sigue una cadena deductiva, sin que por ello se llegue forzosamente a una conclusión válida.

Respecto a la identificación de los procesos matemáticos usados en la práctica argumentativa, se ha recurrido a algunos de los que propone el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS]. El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática [EOS] es un modelo teórico compuesto por cinco niveles que pretenden describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática (Font, Planas y Godino, 2010). El modelo tiene herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que ayuda a responder ¿qué ha sucedido y por qué?

Los cinco niveles para el proceso de instrucción son los enlistados a continuación, pero es precioso mencionar que este estudio sólo tomó en cuenta el primero y segundo nivel.

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer nivel pretende estudiar las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de estudio matemático, tomando en cuenta tanto al agente que realiza la práctica, como el contexto en que se ejecuta dicha práctica. Dado que el agente realiza acciones para la resolución de situaciones problema, hay que considerar otros aspectos como valores, intenciones, objetos y procesos matemáticos.

El segundo nivel de análisis se enfoca en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel de análisis describe la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos.

Los procesos según el EOS están relacionados entre sí, agrupados por familias que tienen características en común si se comparan dos a dos, pero no hay ninguna característica común a todos ellos (Rubio, 2012). Los procesos duales son los ilustrados en el decágono:

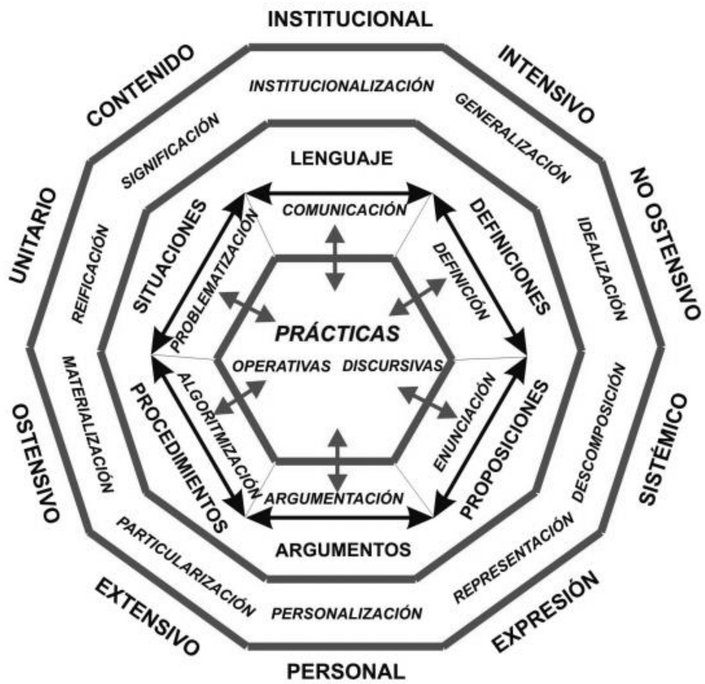


Figura1. Modelo ontosemiótico del conocimiento matemático

Los procesos que se tomaron en cuenta debido a las respuestas dadas por los alumnos son los siguientes:

- *Personalización,* significado que un sujeto atribuye a un objeto matemático y que difiere ya sea de un significado de otro sujeto o bien del significado del profesor.
- *Generalización,* abstracción que permite obtener una clase o conjunto de objetos.
- *Particularización,* objeto matemático individualizado.
- *Significación,* interpretación de todos los objetos matemáticos y de la situación problema general.
- *Representación,* expresiones gráficas o escritas de un objeto matemático.

Metodología

El experimento de enseñanza se realizó en tres secundarias públicas del estado de Querétaro en la modalidad de secundarias generales y telesecundarias, con 42 alumnos de tercer grado en el horario asignado para la clase de matemáticas, en computadoras con el software Geogebra. La información se recabó en hojas de trabajo, audios y se rescataron los archivos construidos en Geogebra por los alumnos.

El trabajo en la secundaria general se realizó de manera individual en una computadora de escritorio durante diez sesiones de 40 minutos en el horario de la clase de matemáticas en un laboratorio de cómputo. Estos alumnos no habían trabajado con algún software de matemáticas, por lo que desconocían el funcionamiento de Geogebra, así que el investigador les orientó en las construcciones requeridas en las actividades.

Los alumnos de telesecundaria del segundo grupo de aplicación habían trabajado con el software Geogebra, pero sólo para graficar funciones. El número de sesiones de trabajo fueron diez, durante el horario designado para la clase de matemáticas, en computadoras portátiles. Las construcciones de las actividades las orientó el investigador pues los alumnos manifestaron que usaban el software sólo para graficar, por lo que desconocían los elementos solicitados en las construcciones.

El tercer grupo de aplicación también fue de la modalidad de telesecundarias, donde los alumnos no habían trabajado con el software para matemáticas. Se formaron 14 parejas para elaborar las construcciones en computadoras portátiles, durante doce sesiones en el horario para la clase de matemáticas. A este grupo también se les orientó para la realización de las construcciones.

Las hojas de trabajo diseñadas, relacionaron temas del eje Forma, Espacio y Medida con la intencionalidad de que los alumnos paulatinamente fueran reforzando conocimientos para generar argumentos. Lo que se llamó “actividad de cierre” constó de dieciséis preguntas y abordó el tema de Homotecia, tanto directa como inversa, que reunió conceptos construidos en las actividades previas. Para el desarrollo de esta actividad se les proporcionó a los alumnos un archivo en Geogebra elaborado por el investigador, donde a través de movimientos y rastros dirigidos con preguntas, debían observar propiedades de figuras homotéticas cuando *k<0*, *k>0*, *k entre 0 y 1*, *k=1* y *k=0* para elaborar argumentos.

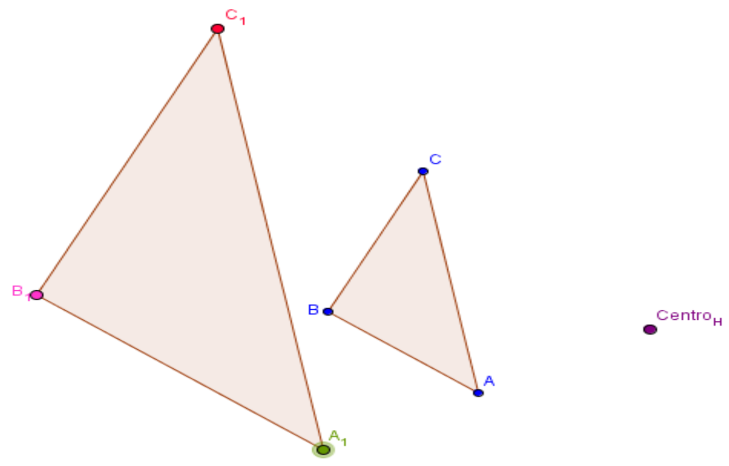


Figura 2. Construcción para actividad de Homotecia

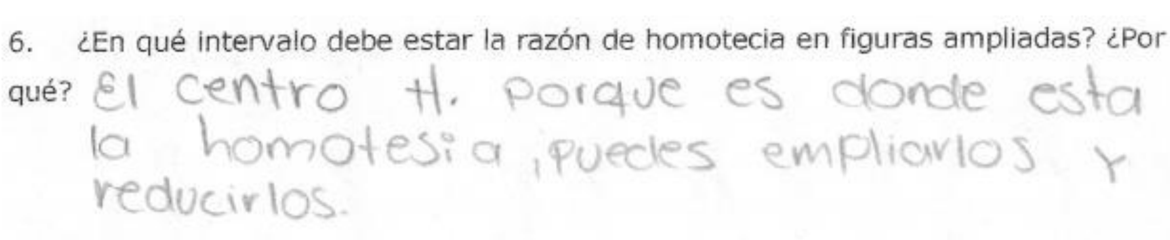
Resultados y Discusión

El análisis de los resultados sólo se hizo a quince de las dieciséis preguntas que conformaron la actividad. Una pregunta fue omitida del análisis debido a la regularidad con que se presentó la respuesta en los alumnos, por lo que se consideró intrascendente para ser presentada en los resultados.

Las tablas muestran la frecuencia de aparición de esquemas de argumentación y de procesos matemáticos en los argumentos elaborados por los alumnos. Es importante aclarar que el objetivo de la investigación no fue encontrar argumentos válidos, sino más bien identificar qué características tienen éstos, con base en las que descritas por Flores (2007).

Tabla 1. Frecuencia de Esquemas de Argumentación

Actividad	Esquema de Argumentación
Homotecia directa e inversa	Simbólico: 47% Empírico Perceptual : 24% Analítico: 21% Autoritario: 1% Sin esquema: 7%



6. ¿En qué intervalo debe estar la razón de homotecia en figuras ampliadas? ¿Por qué? El centro H. porque es donde esta la homotesia, puedes empliarlos y reducirlos.

Figura 3. Ejemplo de esquema simbólico

Las figuras 3 y 4 son un ejemplo de los argumentos de los alumnos, como la tabla lo indica, la mayoría de las respuestas fue clasificada como *esquema simbólico*, la respuesta que se esperaba diera el alumno era $k>1$, sin embargo la significación que el alumno le da a la palabra intervalo, lo remite a concluir de manera errónea que el *centro H*, es donde debe estar la razón de homotecia para que pueda haber una figura homotética ampliada. En la mayoría de los casos donde se categorizaron los argumentos de los alumnos en esquemas simbólicos se observa que hay inadecuadas concepciones de los objetos matemáticos, lo que los lleva a fracasar al momento de redactar su argumento.

8. Considera las observaciones anteriores para poder responder: ¿Qué propiedades geométricas se conservan en las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es mayor que cero? se van ampliando y no desaparecen

Figura 4. Ejemplo de esquema empírico-perceptual

La figura 4 representa un esquema empírico perceptual, porque alude a las características del archivo que se les proporcionó, ya que el triángulo homotético se movía por el vértice A_1. Las preguntas previas a la que se muestra en la figura, tenían la intención de que el alumno identificara las características de las figuras homotéticas para $k>1$ y k entre 0 y 1, entonces esa pregunta reunía esos dos casos y a su vez los distinguía. Sin embargo, el alumno toma como propiedades geométricas lo que ve en la construcción, así que ésta no cumple su función de apoyo para elaborar el argumento, sino que *es* el argumento.

Tabla 2. Frecuencia de Procesos Matemáticos

Actividad	Procesos Matemáticos
Homotecia directa e inversa	Generalización: 32% Personalización: 20% Particularización: 18% Significación: 15% Representación: 7% Sin proceso: 7% Descomposición: 1%

Para ejemplificar los procesos matemáticos se tomaron los casos de las figuras 4 y 5. El proceso de generalización predominó en las respuestas de los estudiantes, parece que el alumno después de discernir entre los casos de homotecia directa e inversa, puede identificar las características de la figura homotética con k=1, se puede apreciar que usa adecuadamente la terminología requerida para establecer el argumento. El caso descrito se podría catalogar como exitoso, sin embargo es importante mencionar que aunque predominó el proceso de generalización, no significa que los demás casos tengan todas las características de éste, hay algunos en donde se aprecian conceptos poco claros, como el emplear el término *igual* como sinónimo de *congruencia.*

16.Describe las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia es igual a 1. La figura homotetica es congruente con la original

Figura 5. Ejemplo de proceso matemático de generalización

El ejemplo de la siguiente figura corresponde al proceso de personalización, las preguntas que anteceden a ésta refieren a la observación de la figura homotética cuando cruza el centro de homotecia, entonces el alumno tenía que responder qué sucedía con la figura. Una vez mencionada la característica de *inversión*, debían establecer la razón de homotecia. En este caso aunque el alumno reconoce previamente que la figura se invierte y también pudo identificar las figuras homotéticas ampliadas, el significado que le da a la razón de homotecia para figuras invertidas no corresponde al que se establece como válido.

¿Cómo es la razón de homotecia cuando las figuras presentan esta característica? Es mayor que cero

Figura 6. Ejemplo de proceso matemático de personalización

A manera de resumen, los resultados obtenidos muestran que los alumnos mayormente recurren a argumentos simbólicos y empírico-perceptuales, donde los procesos de personalización y particularización juegan un papel importante en cómo responden. La significación y la representación dependen también de las interpretaciones que los alumnos tienen construidas. Los alumnos cuando generalizan, otros procesos como la personalización, la significación y la representación, influyen para la construcción de sus argumentos, es decir que un proceso matemático no está solo, sino que hay alrededor otros que determinan el éxito o el fracaso a la tarea. En la mayoría de los casos analizados, aunque aparecen esquemas analíticos y empíricos, que en términos de Flores (2007) es posible detectar el uso de un razonamiento deductivo en estos, ello no significó que el razonamiento fuera correcto.

Comentarios finales

El introducir una herramienta tecnológica como el software Geogebra, evidenció las dificultades de los alumnos para emplear éste como un apoyo que les ayude a construir el argumento, ya que los alumnos usaron elementos lingüísticos e icónicos propios de Geogebra, Sandoval (2009) señala que esos problemas se deben al uso de una sintaxis diferente a la del lápiz y papel, a esta afirmación se extiende también a la semántica del software. Esto quiere decir que los significados personales que aluden al uso del software dependen en buena medida del significado que las instituciones (en el sentido de Godino y Font, 2007) le otorgan, de manera que si los significados institucionales cambian, es muy probable que el significado de los alumnos se reoriente a otras aplicaciones del software, no sólo al de la graficación.

Los procesos matemáticos aquí mostrados no son los únicos que pueden aparecer en la práctica argumentativa, sin embargo son los que se manifestaron mayormente en las respuestas de los alumnos con los que se trabajó. El identificar ciertos procesos matemáticos pretende aportar elementos que ayuden a reforzar aquellos que sean útiles para desarrollar la argumentación de tal manera que también los esquemas de argumentación cambien. El objetivo sería avanzar hacia los argumentos analíticos, donde la deducción se hace presente para construir el argumento, enriqueciendo a su vez la apropiación del lenguaje matemático, de tal manera que aquellos procesos presentes en el alumno como la significación, personalización o representación del objeto matemático, se vayan modificando en el caso de que tengan concepciones erróneas de éstos o ampliando para ser aplicados a nuevos conjuntos de objetos.

Referencias bibliográficas

CIAEM, G. d. (Compositor). (Mayo, 2015). Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Lobo da Costa, N. M., Ando, R. d., & Magni, R. J. (2015). Universidade e Escola em Colaboração para Investigar Práticas Avaliativas sobre Funções no Ensino Médio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* .

Cury, H. N. (2015). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos* (2 ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística.* Buenos Aires.

Denzin, N. (1988). Triangulation in educational research. En J. Keeves, *Educational research, methodology and measurement: An International handbook* (págs. 318-322). Oxford: Pergamon Press.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical thinking and learning , 1* (2), 131–153.

Flores, Á. (2007). *Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del Bachillerato* . México.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. *Educación Matemática* , 63-98.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje* , 89-105.

Godino, J., & Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 13 de febrero de 2016, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

Greenwood, D. J., & Levin, M. (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. En N. Denzin, & Y. Lincoln (Edits.), *Handbook of qualitative research* (2ª ed., págs. 85-106). Thousand Oaks, California: Sage Publications Inc.

Haydt, R. C. (2008). *Avaliação do Processo Ensino-Aprendizagem* (6ª ed.). São Paulo: Ática.

Imbernón, F. (2000). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* São Paulo: Cortez.

Imbernón, F. (2009). *Formação Permanente do Professorado: novas tendências.* São Paulo: Cortez.

INEGI. (2015). *INEGI.* Recuperado el 2015

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación México. (30 de 04 de 2015). *INEE*. Obtenido de http://www.inee.edu.mx/index.php/acerca-del-inee

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education , 18* (1), págs. 3-14.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Relime , Número Especial*, 103–129.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de práticas, objetos y procesos matemáticos.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática , 21* (1), 5-27.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Programa Sectorial de Educación 2013-2018.* México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública. (Diciembre de 2013). *Secretaría de Educación Pública.* Obtenido de http://www.sep.gob.mx/es/sep1/programa_sectorial_de_educacion_13_18#.VUrnO_I_Oko

SEP. (2011). *Planes de Estudios 2011.* México D.F.: SEP.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).