PATRONES, GENERALIZACIÓN Y ESTRATEGIAS INDUCTIVAS DE ESTUDIANTES DE 3º Y 4º DE LA ESO EN EL PROBLEMA DE LAS BALDOSAS

María C. Cañadas
Universidad de Zaragoza

Encarnación Castro y Enrique Castro
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo describimos los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 3º y 4º de la ESO en la resolución del "problema de las baldosas". Prestamos especial atención a los tipos de patrones identificados, a la forma en que los estudiantes expresan la generalización y, mediante la descripción de las estrategias inductivas, presentamos algunas características de la generalización referentes a los elementos y a los sistemas de representación utilizados.

ABSTRACT

This paper concerns the patterns and the generalization developed by 359 2nd and 3rd Secondary students in the "tiles problem". We pay special attention to the kinds of patterns identified, to the written ways in which students express generalization and, using inductive strategies, we present some characteristics of the generalization relating to the elements and the representations used.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto del plan nacional de I+D+I *Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática*, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con referencia SEJ2006-09056.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo general es describir y caracterizar el razonamiento inductivo que emplean estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello hemos construido, como instrumento de recogida de información, una prueba escrita conformada por seis problemas, en los que aparecen patrones cuya generalización se puede expresar mediante progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2.

Presentamos parte de los resultados obtenidos del análisis de datos de las producciones de los estudiantes en uno de los seis problemas propuestos, el problema de las baldosas. Nos centramos en los resultados que se centran en la identificación de patrones y en la generalización expresada por los estudiantes.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Consideramos que el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso. Este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico a través del descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares (Neubert y Binko, 1992). Según esta concepción, defendida desde los matemáticos clásicos como Hermite (véase Polya, 1962-65), Poincaré (1902) o Pólya, 1945, 1962-1965, 1966), hasta asociaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (2003), la inducción es un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico.

Pasos del Razonamiento Inductivo

Pólya identifica unos *pasos*[1] en el proceso de razonamiento inductivo, los cuáles permiten la sistematización del trabajo relacionado con el mismo. El proceso se iniciaría con casos particulares, pasaría por la formulación de una conjetura, y se llegaría a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares. Consideramos estos pasos como una aproximación a un *modelo ideal* del razonamiento inductivo. Con base en este modelo, Cañadas y Castro (2007) proponen siete pasos para la descripción de este razonamiento:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Identificación de un patrón.
4. Formulación de conjetura.
5. Justificación de conjetura (basada en casos particulares).
6. Generalización.
7. Demostración.

En este trabajo nos centramos en dos de estos pasos: *identificación de un patrón* y *generalización*.

Patrones y Generalización

La importancia de los patrones en el estudio del proceso de generalización que llevan a cabo estudiantes ha sido puesta de manifiesto en diversas investigaciones como las de Fou-Lai y Kai-Lin (2004), Mason (1996) o Stacey (1989).

1 Damos el nombre de *pasos* a los diferentes elementos individuales que se pueden diferenciar en todo el proceso de razonamiento inductivo

Los problemas relacionados con la búsqueda de patrones y las secuencias numéricas han sido planteados, en ocasiones, en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las listas de números (Castro, 1995; García, 1998). Considerando que la componente visual puede jugar un papel crucial en el desarrollo del razonamiento, otras investigaciones como las de Orton, Orton y Roper (1999) y Radford (2000) muestran que el sistema de representación gráfico es una opción potente cuando se trata de identificar estrategias utilizadas por los estudiantes en tareas relacionadas con la generalización lineal. Sin embargo, la generalización no siempre encuentra un aliado en la visualización, como ponen de manifiesto Orton y Orton (1994).

Inducción como Estrategia de Resolución de Problemas

Las estrategias se pueden considerar como los métodos que conducen a la solución de problemas de cualquier tipo. Uno de los heurísticos que Pólya considera en la resolución de problemas es la inducción, que trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación (Pólya, 1945; 1966).

Desde la Educación Matemática, las estrategias se definen como las *formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados* (Rico, 1997a, p. 31).

Estrategias Inductivas

Para la descripción de las estrategias, partimos de las progresiones aritméticas como contenido matemático involucrado en el problema. La descripción del contenido matemático[2], nos lleva a considerar los términos k-ésimos de la progresión (casos particulares) y el término general de la misma, como elementos implicados en el proceso inductivo; los sistemas de representación en los que se pueden expresar éstos; así como las posibles transformaciones que los estudiantes pueden realizar (Cañadas, 2006). En este contexto, las *estrategias inductivas* son un tipo de estrategias que se pueden describir en problemas donde la inducción se puede utilizar como heurístico en el sentido que considera Pólya (1966). Estas estrategias tienen en cuenta las características específicas del contenido matemático concreto al que estamos haciendo referencia, así como el proceso inductivo que puede permitir la resolución del problema propuesto. Seguimos el procedimiento[3] descrito por Cañadas y Castro (2006), para identificar las estrategias inductivas que emplean los estudiantes.

Nuestro interés se centra en analizar el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas, mediante el análisis de sus producciones escritas (representaciones externas). En la Figura 1 recogemos algunas ideas que permiten ubicar este interés, las principales conexiones establecidas y el modo en que abordamos el trabajo en el contexto de la resolución de problemas.

2 Hacemos esta descripción con base en la estructura conceptual y los sistemas de representación, dos de los organizadores del currículo de matemáticas que considera Rico (1997b) y que Gómez (2007) utiliza en el análisis de contenido.

3 Este procedimiento tiene en cuenta los elementos de las progresiones que los estudiantes utilizan en la resolución del problema y las transformaciones entre los sistemas de representación que llevan a cabo.

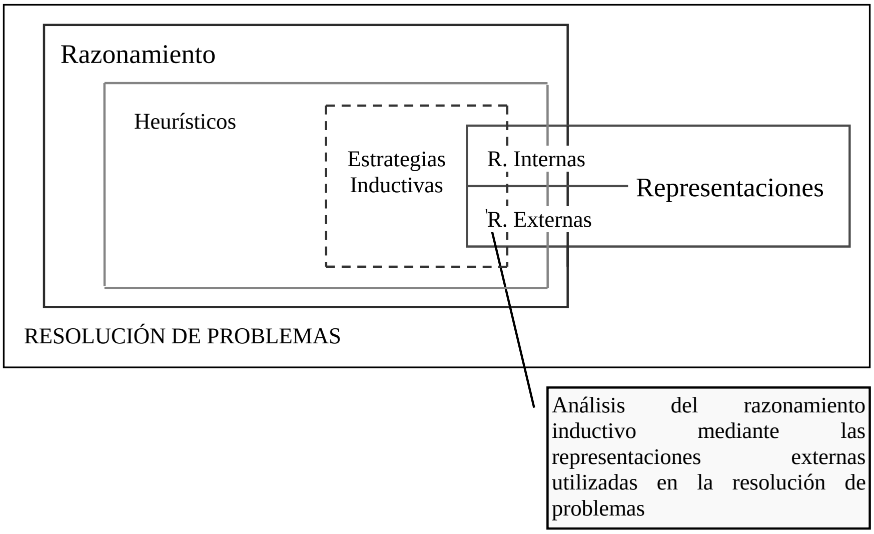


Figura 1. Inducción y resolución de problemas

METODOLOGÍA

En la investigación participaron 359 estudiantes de 3º y 4º de la ESO, seleccionados intencionalmente, de cuatro centros públicos de Cúllar-Vega, Granada, Madrid y Teruel.

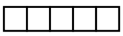
La prueba se aplica en el centro educativo y aula habituales de los alumnos, en una de sus horas de matemáticas. Los alumnos debían trabajar individualmente en los problemas que constituyen la prueba, sin interacción alguna.

En este trabajo presentamos los patrones identificados por los estudiantes, y un análisis cuantitativo con "Respuesta" (R), "Pasos de Razonamiento Inductivo" (Pasos) y "Estrategias Inductivas" (EI) como variables dependientes. Son variables cualitativas nominales. Respuesta es una variable dicotómica, a la que asignamos "1" si los estudiantes responden y "0" si no lo hacen. Pasos es una variable multidimensional cuyos valores son los pasos del modelo teórico de razonamiento inductivo. Cada uno de esos pasos es una variable dicotómica, con los valores "1" y "0", según si realizan o no el paso. Los valores de EI son todas las estrategias inductivas identificadas para el problema. A cada estudiante le corresponde una única estrategia inductiva.

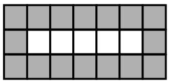
Problema de las Baldosas

El enunciado del problema de las baldosas presentado a los estudiantes es:

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- *¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?*
- *Justifica tu respuesta.*

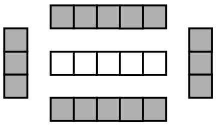
ANÁLISIS DE DATOS

Realizamos un análisis de frecuencias de las variables dependientes y un análisis de (in)dependencia de Patrones y Generalización como valores de la variable Pasos.

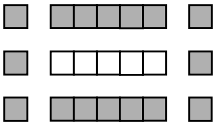
PATRONES

El análisis de datos indica que el 40,7% de los estudiantes que respondieron al problema, llegan a identificar un patrón (ver Tabla 1). La mayoría de estos alumnos, descomponen el número de baldosas grises (16) que necesitan en función del número de baldosas blancas (5). Presentamos el desarrollo numérico de 16 que han utilizado estos estudiantes y la representación gráfica correspondiente, así como la respuesta adecuada (expresada entre paréntesis) a la que pueden llevar los respectivos patrones:

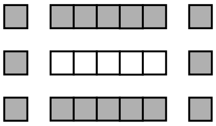
1) 5 x 2 + 6... (1320 x 2 + 6 = 2646)



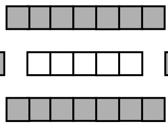
2) 5 + 5 + 1 + 1 + 4... (1320 + 1320 + 1 + 1 + 4 = 2646)



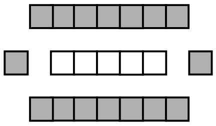
3) 5 x 2 + 2 + 4... (1320 x 2 + 2 + 4 = 2646)



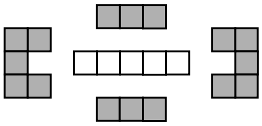
4) 7 + 7 + 1 + 1... (1322 + 1322 + 1 + 1 = 2646)



5) 7 x 2 + 2... (1322 x 2 + 2 = 2646)



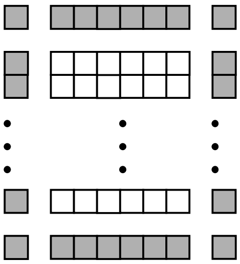
6) 3 x 2 + 10... (1318 x 2 + 10 = 2646)



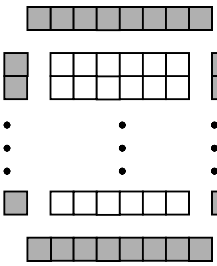
Estos seis patrones son equivalentes y expresan el número de baldosas grises en función del número de baldosas que se pongan en fila. Cada una de estas formas de descomponer el número 16 refleja un modo de visualizar un patrón a partir de la representación gráfica del enunciado. La representación gráfica de los patrones 2 y 3; y 4 y 5 son iguales respectivamente, aunque sus expresiones desarrolladas numéricamente sean diferentes.

Se han identificado otros dos patrones en los que el número de baldosas grises está escrito en función del número de filas de baldosas blancas que se formen, teniendo en cuenta que en cada fila de baldosas blancas debe haber cinco:

7) 264 + 264 + 5 + 5 + 4 (542)



8) 264 + 264 + 7 + 7 (542)



Los estudiantes han expresado otros patrones sólo numéricamente, a partir de los números presentes en el caso particular que se muestra en el enunciado y lo extrapolan para el caso de las 1320 baldosas:

9) 1320 x 2
10) 1320 x 5
11) 1320 x 16
12) 1320 + 3
13) 1323 + 3
14) 1326 + 10

GENERALIZACIÓN

La generalización, según el marco teórico presentado, puede ser un paso que empleen los estudiantes en la tarea de extrapolación propuesta.

Como se deduce de la Tabla 1, el 19,5% de los estudiantes que responden al problema de las baldosas, llegan a expresar la generalización (verbal o algebraicamente).

Tabla 1. Generalización-Patrón

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	182	0	182
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización	73,7%	,0%	59,3%
		% del total	59,3%	,0%	59,3%
	1	Frecuencia absoluta	65	60	125
		% de Patrón	52,0%	48,0%	100,0%
		% de Generalización	26,3%	100,0%	40,7%
		% del total	21,2%	19,5%	40,7%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste de chi-cuadrado de independencia estadística (0,000) a un nivel de significación del 95%, indica que la generalización depende de la identificación de un patrón. Además, tal y como indica la Gamma asociada (1,000), se trata de una dependencia significativa en el sentido de que los alumnos que no han identificado un patrón, no llegan a expresar la generalización.

En la Tabla 2, se observa que el 85% de los alumnos que generalizan, han detectado un patrón adecuado para el problema de las baldosas (uno de los ocho primeros patrones descritos anteriormente). El 15% restante de los estudiantes que generalizan, lo consiguen después de haber identificado un patrón no adecuado al problema.

Tabla 2. Generalización-Patrón Adecuado

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	199	9	208
		% de Patrón Adecuado	95,7%	4,3%	100,0%
		% de Generalización	80,6%	15,0%	67,8%
		% del total	64,8%	2,9%	67,8%
	1	Frecuencia absoluta	48	51	99
		% de Patrón Adecuado	48,5%	51,5%	100,0%
		% de Generalización	19,4%	85,0%	32,2%
		% del total	15,6%	16,6%	32,2%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón Adecuado	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste de Chi-cuadrado de independencia estadística (0,000), con un nivel de significación del 95%, indica que la expresión de la generalización depende de la identificación de un patrón adecuado. Dado que la Gamma asociada es 0,918, podemos concluir que existe una fuerte dependencia de la generalización con respecto a la identificación de un patrón adecuado en este problema.

EXPRESIÓN DE LA GENERALIZACIÓN

Únicamente 3 estudiantes expresan la generalización de forma algebraica. Teniendo en cuenta que la generalización se puede expresar verbal o algebraicamente, podemos concluir que el 95% de los estudiantes que generalizan, lo hacen verbalmente (57 de 60).

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

Cada estrategia inductiva queda determinada por una secuencia de transformaciones cuyo significado se puede descifrar según las tablas del Anexo A. Para el problema de las baldosas, tenemos en cuenta que el trabajo comienza con el término k-ésimo expresado gráficamente. Según las producciones de los estudiantes que generalizan, recogemos las estrategias inductivas que emplean en la resolución del problema de las baldosas en la Tabla 3.

Tabla 3. Estrategias inductivas

Estrategias Inductivas	Frecuencia	% de Generalizan	Elementos
T1-TSN-C1-TSA	1	1,7	Términos k-ésimos y Término general
T1-C4	9	15	
T1-TSN-C4	36	60	
TSG-C1-C1B-T5	1	1,7	
TSG-T1-C4	1	1,7	
TSG-T1-TSN-C4	7	11,7	
TSG-C4-C4B-TSN	2	3,3	
T6-C3-C3B-TSN	1	1,7	
C5-C4B-TSN	2	3,3	
Total Generalizan	60	100	
Responden al problema	307		

En cuanto al trabajo previo que realizan los 60 alumnos que expresan la generalización, hay 2 que generalizan directamente a partir del enunciado (C5-C4B-TSN).

De la Tabla 3 se puede deducir que el 90% de los alumnos que generalizan han trabajado previamente con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (T1 antes de C1 o C4) (54 de 60), el 5% ha trabajado previamente en el sistema de representación gráfico únicamente (TSG-C1-C1B-T5, TSG-C4-C4B-TSN) y el 5% restante ha hecho alguna transformación antes de generalizar, empleando únicamente el sistema de representación verbal antes de la generalización o han combinado varios sistemas de representación para los casos particulares con los que trabajan.

Destacamos el 13,4% de los alumnos que generalizan y que han combinado los sistemas de representación gráfico y numérico antes de expresar la generalización verbal (aparece TSG-T1 antes de C4).

USO DE LA GENERALIZACIÓN

Los tres alumnos que generalizan algebraicamente, muestran dos usos diferentes de la generalización: dos de ellos utilizan la expresión del término general para calcular el número de baldosas grises necesarias (emplean las estrategias inductivas TSG-C1-C1B-T5 y T6-C3-C3B); y un tercer estudiante llega a una expresión algebraica para el término general como última transformación en la resolución del problema.

De los 57 alumnos que generalizan verbalmente, cuatro la utilizan para calcular el término k-ésimo de la progresión que pregunta el problema. Esos alumnos son los que siguen las estrategias TSG-C4-C4B-TSN y C5-C4B-TSN.

CONCLUSIONES

Pese a la presencia del sistema de representación gráfico en el enunciado, la mayor parte de los alumnos que generalizan trabajan previamente en el sistema de representación numérico. Esto puede deberse a la mayor familiaridad de los estudiantes con las representaciones numéricas.

Las respuestas de los estudiantes han puesto de manifiesto la relevancia de la identificación de patrones en el proceso de generalización en el problema de las baldosas. La generalización depende, tanto de la detección de un patrón, como de la identificación de un patrón adecuado.

La mayoría de los patrones que identifican los estudiantes, son patrones adecuados al problema planteado (ver Tabla 2). Este dato, junto con la amplia variedad de patrones válidos detectados a partir de la representación gráfica que aparece en el problema, hace que podamos considerar la visualización (que llevan a cabo los estudiantes sobre el dibujo del enunciado) como un factor a tener en cuenta en las propuestas de trabajo que se planteen en la Educación Secundaria.

La predominancia de la generalización verbal hace cobrar importancia a otras formas de expresar la generalización diferentes a la algebraica. A la luz de los resultados, cabe pensar que la generalización verbal es una forma más accesible para estos estudiantes que la algebraica.

Se ha puesto de manifiesto que la generalización, ya sea verbal o algebraica, se utiliza sólo ocasionalmente para calcular el caso particular por el que pregunta el problema.

REFERENCIAS

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Fou-Lai, L. y Kai-Lin, Y. (2004). Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number pattern. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 457-464). Bergen: Bergen University College.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Autor y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. National Education Association: Washington D.C.

Orton, J. y Orton, A. (1994). Students´ perception and use of pattern and generalization´. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 407-414). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Orton, J., Orton, A. y Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Poincaré, H. (1902). *La ciencia y la hipótesis.* Madrid: Espasa-Calpe. [Traducción al castellano de Besio, A. B. y Banti, J. (1963).]

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. (Princeton University Press: Princeton, NJ) [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965)].

Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 147-164.

ANEXO A

Tabla A.1. Transformaciones entre representaciones de un término k-ésimo

Elemento		Término k-ésimo		
	S. Representación	Numérico.	Gráfico	Verbal
Término k-ésimo	Numérico	TSN	T3	T5
	Gráfico	T1	TSG	T6
	Verbal	T2	T4	TSV

Tabla A.2. Transformaciones entre representaciones del término general

Elemento		Término General	
	S. Representación	Algebraico	Verbal
Término general	Algebraico	TSA	T8
	Verbal	T7	TSV

Tabla A.3. Cambios del sistema de representación entre diferentes elementos

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Elemento</td><td colspan="4">Término General</td></tr>
<tr><td colspan="2">Algebraico</td><td colspan="2">Verbal</td></tr>
<tr><td></td><td>S. Representación</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Término k-ésimo</td><td>Numérico</td><td>C1</td><td>C1B</td><td>C4</td><td>C4B</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>C2</td><td>C2B</td><td>C5</td><td>C5B</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>C3</td><td>C3B</td><td>C6</td><td>C6B</td></tr>
</table>