suma+
Artículos
Julio 2016
82
pp. 19-26

# Física y matemáticas experimentales en escenarios virtuales

Marcos Campos Nava
Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Se proponen algunas actividades de aprendizaje para cursos introductorios de Física y Matemáticas de nivel superior; tales actividades se sugiere sean desarrolladas con herramientas digitales como por ejemplo software de geometría dinámica y/o software de análisis de video. La idea es crear escenarios virtuales en los que el estudiante pueda concebir la matemática como una ciencia experimental, además de corroborar algunos principios de la física sin necesidad de experimentos sofisticados en laboratorios.

*Palabras clave:* Actividades de aprendizaje, Matemática experimental, Herramientas digitales, Geometría dinámica, Geogebra, Análisis de video, Tracker.

**Experimental Physics And Math In Virtual Enviroments**

We propose some learning task for introductory courses in physics and math undergraduate; it suggest these task are developed with digital tools such as dynamic geometry software and/or video analysis software. The idea is create virtual scenarios where students can conceive of math as an experimental science, additionally corroborate some principles of physics without sophisticated experiments in laboratories..

*Keywords:* Learning task, Experimental math, Digital tools, Dynamic geometry, Geogebra, Video analysis, Tracker.

Durante los primeros semestres de universidad, es frecuente que los estudiantes se enfrenten a cursos de matemáticas y física, que en el papel deberían resultar sin grandes complicaciones ya que los tópicos que en ellos se discuten son similares o, en muchos casos, son una extensión de los tópicos discutidos en cursos que llevaron en bachillerato. En la práctica sin embargo es común encontrarse con profesores de matemáticas y física de primeros semestres de licenciatura que se quejan del alto índice de reprobación que se presenta en sus cursos, lo cual parece inexplicable desde la perspectiva planteada. ¿A qué se debe que un estudiante que llevó cursos de álgebra, geometría, cálculo y física en bachillerato, repruebe estos cursos en sus primeros semestres de universidad? Se podría especular mucho al respecto y cuestionar algunas cosas que tal vez pasan en el nivel medio superior, sin embargo no es el objetivo de este trabajo.

Lo que se pretende en este artículo es presentar, a manera de ejemplo, cuatro actividades de aprendizaje diseñadas para desarrollarse con la ayuda de herramientas digitales, y en particular con dos aplicaciones de licencia libre a los que cualquier estudiante podría tener acceso con la ayuda de su equipo de cómputo. Además, por la naturaleza de dichas herramientas, estas pueden ser instaladas



Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2015 y aceptado en septiembre de 2015

en los laboratorios de cómputo de instituciones de nivel superior sin mayor problema.

Las herramientas digitales que se sugiere utilizar son el software de geometría dinámica *Geogebra* y el software para análisis de video *Tracker*; ambos disponibles en sus versiones completas y más recientes desde sus sitios oficiales:

http://www.geogebra.org/cms/es/
http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/

## Justificación

La sugerencia de utilizar recursos digitales responde a que los docentes deberían utilizar la tecnología con el fin de mejorar las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que aprovechen lo que la tecnología puede hacer bien y eficientemente (graficar, visualizar, calcular) (NCTM, 2008).

Otro de los objetivos que se pretende con este tipo de propuesta, es que los estudiantes conciban la matemática como una ciencia experimental, en el sentido de que la actividad les lleve a plantear algunas conjeturas sobre el problema, las cuales pueden tratar de corroborar con las herramientas digitales propuestas; además de que en el caso de los cursos de física —en particular para algunos tópicos de mecánica— el estudiante por medio de estos recursos tecnológicos, pueda verificar y/o validar algunos resultados que de otro modo parecería que solo se pueden corroborar con ayuda de un sofisticado laboratorio.

Un aspecto muy importante del uso de la tecnología como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, es que proporciona retroalimentación inmediata, lo que permite al alumno descubrir sus errores, analizarlos y corregirlos. En estos ambientes de aprendizaje el error ya no es algo que hay que esconder, se vuelve más bien un medio para profundizar en el aprendizaje (Ursini, 2006).

## Marco teórico

Durante los últimos años, muchas de las investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la física han descrito las serias dificultades de aprendizaje por parte de los estudiantes (Flores y otros, 2008), por ejemplo para desarrollar un entendimiento profundo de conceptos básicos de la física y su interacción con conceptos de matemáticas a los cuales están estrechamente relacionados.

Un ejemplo de estas dificultades es la falta de conexión entre diversas ideas y conceptos aprendidos de los cursos de mecánica newtoniana o clásica, que por lo general se refiere al primer curso universitario de física de los estudiantes de carreras de ingeniería y/o ciencias físico-matemáticas. Algunos autores han identificado que esta dificultad puede atajarse mediante una forma alternativa de representar los objetos de estudio, que vaya más allá de su representación analítica y verbal en una clase típica o tradicional. Esto guarda relación con la teoría de los registros de representación, dónde se establece que para conocer los objetos de estudio en matemáticas, se requiere obtener sus representaciones, esto es, mediante signos, palabras o dibujos. De acuerdo con Duval (1999), una representación es algo que sustituye o hace las veces del objeto, y el empleo de varios registros de representación permite un mayor desarrollo de la comprensión. Es entonces que las representaciones y la visualización tienen un papel preponderante en la comprensión de las matemáticas y en el desarrollo del pensamiento matemático (Barrera y Reyes, 2013).

Otro de los marcos teóricos que sustentan este trabajo es el referido al uso de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Autores como Arcavi (2000), Balacheff y Kaput (1996), así como Moreno (2002) y Santos Trigo (2010) entre otros, coinciden en que el empleo de las herramientas tecnológicas puede favorecer el proceso de comprensión de ideas y conceptos matemáticos.

En forma más profunda, Pea (1987) desarrolló la idea de que las herramientas tecnológicas pueden funcionar como instrumentos de mediación o tecnologías cognitivas, esto es, que ayudan a reorganizar y amplificar el conocimiento matemático. Moreno (2002) señala en este mismo sentido, que toda actividad cognitiva está estrechamente ligada con la mediación instrumental; en palabras más sencillas, que toda acción orientada al aprendizaje, constituye de hecho una acción instrumental.

Un tercer marco teórico lo constituye el aprendizaje en contexto o contextual. Este enfoque reconoce que el aprendizaje es un proceso complejo y multifacético, en el que el estudiante procesa la información y los conocimientos nuevos solo si le significan un sentido en su marco de referencia (CORD, 2003). Este enfoque de enseñanza y aprendizaje supone también que la mente busca, en forma natural, el significado en el contexto, y que lo hace buscando relaciones que tengan sentido y parezcan ser útiles.

En los Estados Unidos, desde el año 1985, este movimiento de *enseñanza contextual* demostró que aquellos alumnos que normalmente tenían bajo desempeño en cursos abstractos como matemáticas, podían lograr mejores resultados si se les enseñaba mediante el método contextual. Según investigaciones realizadas en el mismo país, pero aplicables a otros, solo el 25% de los estudiantes pueden aprender de forma abstracta, pero la mayoría requiere conectar los nuevos conceptos que va aprendiendo con el mundo real, a través de experiencias propias o de experiencias que puedan proporcionarles sus profesores. Se propone que se introduzcan actividades del mundo real con aplicaciones y problemas que mantengan ocupado al alumno en laboratorios, y usando equipamiento propio de ambientes laborales o de la vida cotidiana. Se ha corroborado que en esta forma se puede incrementar el interés y la participación de los estudiantes en las actividades del aula, y con ello conseguir un aprendizaje más eficaz.

El reto para el docente es crear un ambiente propicio para el aprendizaje, mediante la implementación de actividades en el aula que incorporen diferentes experiencias sociales, culturales, físicas y psicológicas, para de este modo potenciar el que los estudiantes descubran relaciones significativas entre ideas abstractas y aplicaciones prácticas en el contexto del mundo real. Con ello los conceptos pueden ser internalizados a través de procesos de descubrimiento, reforzamientos e interrelaciones.

En México, la teoría educativa denominada *matemática en el contexto de las ciencias*, nace en 1982, y tiene a Camarena (2009) como una de sus representantes. Esta teoría reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre las matemáticas y otras ciencias, entre la matemática y las situaciones de la vida cotidiana, así como entre la matemática y los problemas que pueden abordarse en la vida laboral y profesional.

En el caso particular de la enseñanza de la física y las matemáticas, un elemento clave dentro de este enfoque contextual es la experimentación (CORD, 2003), entendida esta como aprender en un contexto de exploración, descubrimiento e invención. Se ha identificado que algunas herramientas pedagógicas en este sentido son la manipulación de equipo y materiales, y últimamente se ha vislumbrado la potencialidad de los ambientes virtuales que pueden implementarse con la ayuda de software y equipos de cómputo.



## Actividades de aprendizaje

En el entendido de que una actividad de aprendizaje es más que un mero enunciado, y que por el contrario debe tener una estructura bien definida que inicia desde su diseño, continúa con la puesta en marcha y sigue con el análisis de las respuestas de los estudiantes; es un hecho sin embargo que la mayoría de las veces se presenta como un enunciado que expresa una situación problemática que se desea resolver.

En este sentido, lo que se presentará a continuación es el enunciado de la actividad que se puede plantear a un grupo de estudiantes, así como una guía no exhaustiva de cómo se puede conducir dicha actividad; en general lo que se desea es fomentar en los docentes su propia creatividad para explorar estas y otras actividades, que bien pueden surgir de los libros de texto o ser diseñadas por ellos mismos.

A continuación se describirá brevemente el enunciado de algunas actividades de aprendizaje que el profesor interesado puede tratar de implementar, teniendo en cuenta que la actividad es más que solo el enunciado y que el éxito o fracaso de la misma depende de diversos factores, algunos de los cuales, el profesor puede tratar de controlar.

Bajo esta perspectiva, una tarea de aprendizaje debe contar con los siguientes elementos:

— un objetivo de aprendizaje,
— elementos matemáticos que se estructurarán en torno al objetivo de aprendizaje,
— descripción del escenario para desarrollar la tarea, y
— consideración y análisis de un proceso inquisitivo, descrito mediante una trayectoria hipotética (Barrera, 2008).

### *Primera propuesta: Movimiento rectilineo uniforme con GeoGebra*

Cuando en un curso de física elemental se estudia el movimiento rectilíneo uniforme, pareciera que es tan simple como enunciar la ecuación que rige su cinemática:

$$x(t) = x_0 + vt \qquad [1]$$

En donde, como bien se sabe, la posición $x$ de una partícula con este tipo de movimiento, con velocidad $v$ constante, es función del tiempo y la magnitud del vector velocidad es la pendiente de la recta en la gráfica $x$–$t$.

Sin embargo con un poco de creatividad, se pueden plantear actividades que involucren el aparentemente *sencillo* concepto de movimiento rectilíneo uniforme, pero que demanden de los estudiantes altos niveles de demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), y que además les permitan plantear conjeturas sobre el comportamiento de dicho fenómeno físico desde una perspectiva de mayor entendimiento de ideas matemáticas.

Para ejemplificar, se propone el enunciado de la siguiente actividad:

> Dos partículas separadas una distancia *d* viajan a velocidades constantes y en línea recta en diferente dirección. ¿Qué ángulo θ medido entre ambas trayectorias permitirá que las partículas choquen?

Esta actividad se sugiere sea desarrollada con Geogebra y se utilice el comando *deslizador* para definir los parámetros involucrados; en este caso: las velocidades de cada partícula, la distancia que las separa, el tiempo y el ángulo para que colisionen, así como el comando *animación* que les permitirá ver en *tiempo real* si habrá colisión o no para determinados valores de los parámetros elegidos.

Se pueden plantear conjeturas preliminares como por ejemplo ¿la distancia que separa a ambas partículas influye en el ángulo o en el tiempo de colisión? ¿Cómo deben ser las velocidades de cada partícula para que la colisión ocurra cuando el ángulo es de 45°? Esto por mencionar solo algunas posibles conjeturas; posteriormente el profesor debería guiar a los estudiantes para que logren representar en Geogebra las condiciones del problema, lo cual deberá demandar de ellos entendimiento de los conceptos de movimiento rectilíneo uniforme y algunos de geometría analítica y trigonometría como pendiente de una recta y proyecciones de un vector.

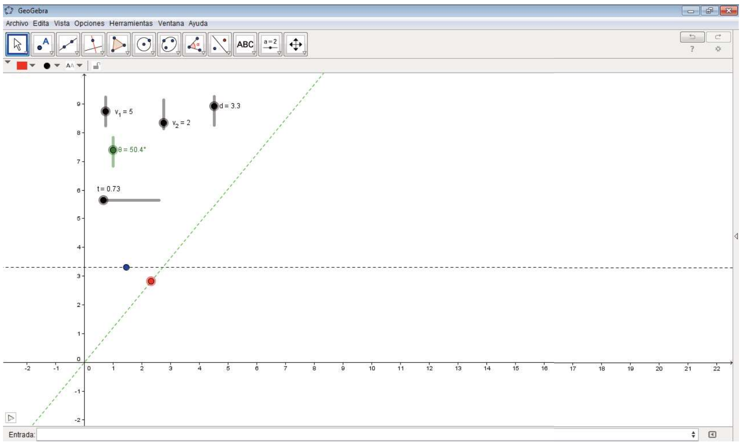

Figura1. Construcción en Geogebra del problema 1.
Se tuvieron que definir 5 parámetros y se usa el comando *animación*

### *Segunda propuesta: Mecanismo de manivela-deslizador*

El mecanismo manivela-deslizador o también conocido como mecanismo de pistón tiene innumerables aplicaciones. En general, su principio consiste en convertir movimiento circular a movimiento rectilíneo. Para muchos estudiantes de ingeniería, estudiar la cinemática de mecanismos puede tornarse complicado; sin embargo con conceptos básicos de física y matemáticas se podría hacer un estudio introductorio de la cinemática del pistón o deslizador, sin necesidad de esperar a un curso de cinemática de las máquinas o mecanismos.

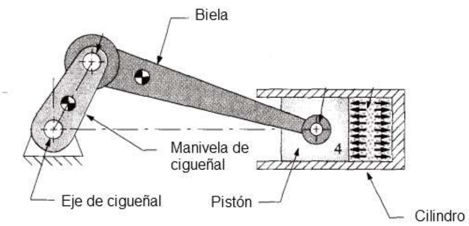


Figura 2. Esquema de un mecanismo tipo manivela-deslizador

Para esta actividad se sugiere que primero, con auxilio de conceptos básicos de geometría y trigonometría como el Teorema de Pitágoras, las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos y el Teorema del coseno, y de algunos conceptos de movimiento circular uniforme como el de velocidad angular constante, se trate de encontrar con lápiz y papel una expresión general que permita ubicar la posición del pistón como función del tiempo para cualquier valor de longitud de los eslabones manivela y biela, así como un valor de velocidad angular constante de la manivela. Cuando se piense que se tiene una expresión correcta, se procede a *modelar* el mecanismo con Geogebra y con ayuda de los comandos *deslizador* y *animación* se trata de corroborar los valores obtenidos con la expresión deducida; así, el uso de Geogebra en esta actividad tiene la finalidad de que el estudiante valide sus posibles soluciones con lápiz y papel.

## *Tercera propuesta: Medir la aceleración de la gravedad con mi teléfono celular*

Para esta actividad, más que plantear un problema, se pretende estimar experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad y relacionar algunos conceptos del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, pero sin usar un sofisticado equipo de laboratorio. Nos bastará un teléfono celular para grabar un video o en su defecto utilizar un video con que ya se cuente y analizarlo con el software de análisis de video Tracker.

Tracker, como su nombre indica, es un software que permite rastrear la posición de un objeto a través de un video por medio del reconocimiento de un grupo específico de píxeles. En este sentido bastará con grabar con el teléfono celular u otro dispositivo de captura de video, un objeto en caída libre; de otro modo, se puede utilizar un video que ya se tenga previamente o que se pueda encontrar en internet. Para este análisis conceptos como sistema de referencia, distancia y partícula son indispensables.

Se deben tener en cuenta algunos aspectos que ayudarán a mejorar el análisis y por ende los resultados, por ejemplo, mientras mayor velocidad de grabación de la cámara es mejor; las cámaras y teléfonos celulares convencionales graban a una velocidad de 30 fps (cuadros por segundo), sin embargo velocidades superiores como 60 fps o más serían deseables en algunos casos, sobre todo si el objeto se mueve cada vez a mayor velocidad. También es deseable que al grabar la cámara esté lo más estática posible, de preferencia montada en un trípode, y que no adopte un ángulo de perspectiva respecto al plano en el que se mueve el objeto a analizar; el tercer consejo es que dentro del video aparezca una referencia de medida conocida, puede ser muy útil colocar por ejemplo una cinta métrica, con la finalidad de calibrar las dimensiones de longitud en el video.

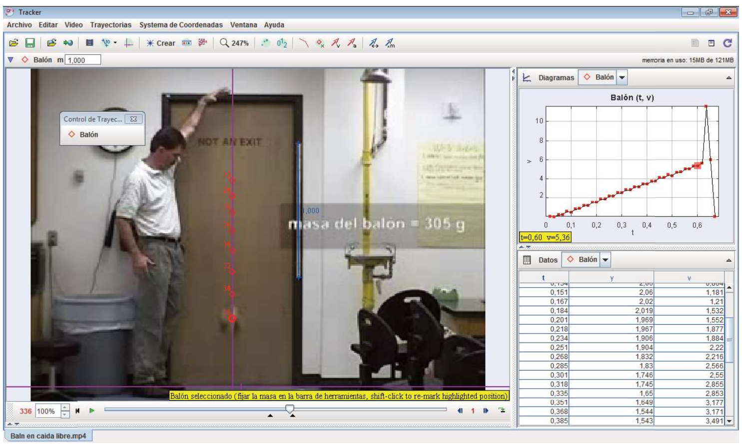


Figura 3. Análisis de la caída de un balón con Tracker

Ya que se cuenta con un video que se quiere analizar, por ejemplo de un objeto en caída libre, Tracker permite por medio del comando *rastreo,* que puede ser automático o manual, generar tablas de datos de posición, velocidad y aceleración respecto del tiempo; para esto se debe elegir y colocar un sistema de referencia, por defecto un sistema de ejes rectangulares.

Recordando que para la caída libre de un objeto en el vacío, se tiene que su posición en cualquier instante viene dada por la ecuación:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad [2]$$

donde $y_0$ es la posición inicial, $v_0$ es la velocidad inicial y $g$ es la aceleración de la gravedad, se deduce que la gráfica de la posición (altura) respecto del tiempo tiene que ser una parábola; además considerando que la derivada de [2] respecto del tiempo tiene que ser la velocidad instantánea:

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t) = v_0 + gt \qquad [3]$$

De [3] se deduce que la gráfica de la velocidad contra el tiempo tendría que ser una línea recta y que su pendiente tendría que ser el valor de la aceleración de la gravedad.

## *Cuarta propuesta: Fuerza, torque y distancia*

El enunciado del siguiente problema fue seleccionado de un clásico libro de texto de mecánica vectorial para nivel universitario (Beer y otros, 2013):

> Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de 960 N·m alrededor de *D* para tensar el cable al poste *CD*. Si la capacidad del malacate *AB* es de 2400 N, determine el valor mínimo de la distancia *d* para generar el momento especificado respecto a *D*.

En esta actividad se sugiere que el profesor utilice el software de geometría dinámica Geogebra para guiar a los estudiantes a una construcción geométrica que represente las condiciones del problema, en la cual se puedan variar de forma dinámica algunos parámetros de interés con la herramienta *deslizador*, por ejemplo el valor de la distancia *d,* además de poder calcular el

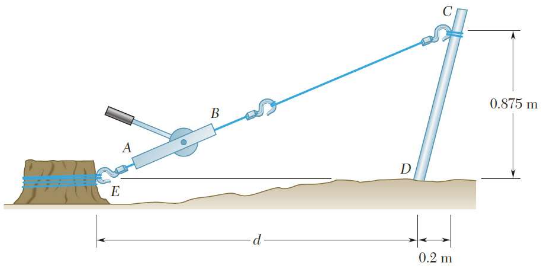


Figura 4. Esquema del problema sobre el malacate y el momento de torsión

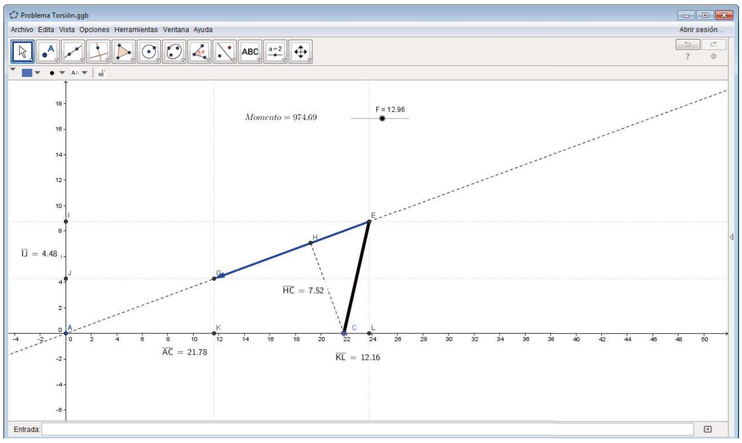


Figura 5. Construcción en GeoGebra del problema sobre torsión y distancia

valor del torque generado para fuerzas menores o iguales a la que puede provocar el malacate.

Aunque la solución con lápiz y papel no es complicada y se puede abordar de diferentes maneras, una solución que permite explorar GeoGebra es buscar la ecuación de la recta $AC$ y la distancia entre dicha recta y el punto $D$, para calcular el momento de torsión generado por el malacate respecto a la base del poste. De acuerdo a la definición de momento de torsión este se puede calcular como el producto de la magnitud del vector fuerza por la distancia perpendicular al punto respecto al cual se trata de rotar. De esta manera se puede observar, en el ambiente del software dinámico, que al variar el valor de la distancia *d* el valor del torque varía también, por lo cual la pregunta planteada tiene sentido.

## Conclusiones

Las actividades aquí sugeridas están lejos de ser una lista exhaustiva, son solo ejemplos que se podrían utilizar como referencia y aún así con ciertas reservas. Lo que consideramos relevante de estas propuestas radica en que los profesores se logren convencer de utilizar herramientas digitales como las que se sugieren, para diseñar sus propias actividades y traten de generar alta demanda cognitiva en sus estudiantes (Stein y Smith, 1998).

El éxito de actividades como las que se proponen dependerá en gran medida del perfil del profesor de matemáticas que ahora se debe involucrar en la creación de este tipo de escenarios virtuales. En la tabla 1 se enuncian algunas de las características deseables (Campos, 2011).

## Referencias

Arcavi, A. (2000), «Problem-driven Research in Mathematics Education», *Journal of Mathematical Behavior*, n.º 19, 141-173.

Balaheff, N., y J. Kaput (1996), «Computer-based learning enviroments in mathematics», en A. J. Bishop y otros (eds.). *International Handbookof Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 469-501.

Barrera, F. (2008), *Reporte de la primera etapa del Proyecto CONACYT: Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales*, México.

Barrera, F., y A. Reyes (2013), *Elementos Didácticos y Resolución de Problemas: Formación Docente en Matemáticas*, UAEH Ediciones, México.

Beer, F., E. Jhonston y E. Eisenberg (2013), *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática*, McGraw-Hill Interamericana, 10ª Edición, México.

Camarena, P. (2009), «La matemática en el Contexto de las Ciencias», *Innovación Educativa*, vol.9, n.º 46, 15-25.

Campos, M. (2011), «Espacios virtuales para el diseño de tareas de aprendizaje matemático», Memorias del Congreso Internacional EDUTEC 2011.

Duval, R. (1999), *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*, Grupo de Educación matemática-Instituto de Educación y Pedagogía, México.

Flores, S., J. E. Chávez, J. Luna, M. González, M. V. González y A. Hernández (2008), «El Aprendizaje de la Física y de las Matemáticas en Contexto», *Revista CULCYT*, año 5, n.º 24, 19-24.

Leading Change In Education [coord] (2003), *Enseñanza Contextual de Matemáticas: Piedra Angular del Cambio de Paradigmas*, CORD Communications, Inc, USA.

Moreno, L. (2002), «Instrumentos Matemáticos Computacionales», en Ministerio de Educación Nacional (ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Bogotá, Colombia, 81-86.

NCTM (2008), «The Role of the Teaching and Learning of mathematics: A Position of The National Council of the Teachers of Mathematics», recuperado el 26 de Octubre de 2009 de: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233.

Pea, R. D. (1987), «Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize mental Functioning», *Educational Psychologist*, n.º 20(4), 167-182.

Stein, M. K., y M. S. Smith (1998), «Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Re-

| *Conocimientos Matemáticos* | *Elementos de Educación Matemática* | *Uso de Tecnologías Digitales* |
|---|---|---|
| Conocimientos profundos de los tópicos que aparecen en el currículum de matemáticas. | Conocimiento sobre los aspectos centrales de las principales teorías, perspectivas o marcos teóricos sobre educación matemática. | Apertura para cambiar o modificar aspectos metodológicos de la forma en que imparte clase. |
| Entender aspectos de otras áreas del conocimiento como química, biología o física, que le permita establecer relaciones con los tópicos de matemáticas. | | Interés investigativo para buscar constantemente nuevas formas de presentar contenidos matemáticos con el uso de la tecnología digital. |

Tabla 1. Perfil deseable del profesor de matemáticas

search to Practice», *Mathematics Teaching in the Middle School,* n.º 3, 268-275.

Ursini, S. (2006), «Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología», en Rojano, T. (ed.), *Enseñanza de las Matemáticas y la Física con Tecnología: Modelo de Transformación de las Prácticas y la Interacción Social en el Aula*, D.F: SEP-CINVESTAV-IPN, México, 25-41.

Santos-Trigo, M. (2010), «A mathematical problem solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools», en J. Yamamoto y otros (eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective models*, Information Science Reference, Hershey, N.Y., 296-313.

Marcos Campos Nava
*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México*
<mcampos@uaeh.edu.mx>

Agustín Alfredo Torres Rodríguez
*Instituto Tecnológico Nacional de México Plantel Atitalaquia, México*
<aatr68@hotmail.com>