suma+
Artículos
Julio 2016
82
pp. 43-50

El Marqués de L'Hospital y la rectificación de la curva logarítmica[1]

Mónica Blanco Abellán

A finales de 1692, en su primera carta a Gottfried W. Leibniz (1646-1716), el Marqués de L'Hospital (1661-1704) determinaba la longitud de arco de la curva logarítmica. Ese mismo año, L'Hospital ya había discutido este problema en sus cartas a Christiaan Huygens (1629-1695). Partiendo de la correspondencia de L'Hospital con Huygens y Leibniz, el objetivo de esta contribución es estudiar el desarrollo histórico de la rectificación de la curva logarítmica, presentando así este problema matemático desde un enfoque dinámico y heurístico.

Palabras clave: Rectificación de la curva logarítmica, Marqués de L'Hospital, Gottfried W. Leibniz, Christiaan Huygens, Roger Cotes.

The Marquis de L'Hospital and the rectification of the logarithmic curve

Towards the end of 1692, in his first letter to Gottfried W. Leibniz (1646-1716), the Marquis de L'Hospital (1661-1704) determined the length of the arc of the logarithmic curve. Earlier that year, L'Hospital had already addressed this problem in his letters to Christiaan Huygens (1629-1695). From the correspondence of L'Hospital with Huygens and Leibniz, the aim of this contribution is to study the historical development of the rectification of the logarithmic curve and, thus, to present this mathematical problem from a dynamic and heuristic approach.

Keywords: rectification of the logarithmic curve, Marquis de L'Hospital, Gottfried W. Leibniz, Christiaan Huygens, Roger Cotes.

En cálculo diferencial se asocia el nombre de *L'Hôpital* principalmente con la conocida regla que permite evaluar el límite de funciones que presentan indeterminaciones del tipo 0 entre 0, o infinito entre infinito, mediante derivadas. Dicho resultado aparece en la sección IX del *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, el primer tratado sobre cálculo diferencial, publicado en 1696 por Guillaume F. A., Marqués de L'Hospital (1661-1704).[2] Este tratado presentaba los fundamentos del nuevo cálculo de Gottfried W. Leibniz (1646-1716), por el que el Marqués de L'Hospital, aficionado a la geometría, enseguida fue atraído. En 1684 Leibniz había publicado su primer artículo sobre cálculo diferencial en la revista *Acta Eruditorum*: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (*Un método nuevo para máximos y mínimos, así como para tangentes, que no se detiene ante las cantidades fraccionarias o irracionales, y es un género singular de cálculo para estos problemas*). Dos años más tarde Leibniz publicó otro artículo en la misma revista, esta vez centrado en el cálculo integral: *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (*Sobre una geometría extremadamente oculta y el análisis de los indivisibles e infinitos*). La lectura y discusión de estos artículos

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2016 y aceptado en mayo de 2016

fue el punto de partida de las lecciones que Johann Bernoulli (1667-1748) dio al Marqués entre 1691 y 1692 durante su estancia en París. Cuando Bernoulli abandona Francia las lecciones continúan por correspondencia, hasta 1701. Así, por ejemplo, el resultado conocido como *regla de L'Hôpital* se encuentra en la carta que Bernoulli escribió al Marqués el 22 julio de 1694. Cuando en 1922 Paul Schafheitlin publicó las *Lectiones de calculo differentialium* de Bernoulli y en 1955 Otto Spiess editó la correspondencia de Johann Bernoulli con el Marqués de L'Hospital, se hizo evidente que el *Analyse des infiniment petits* se basaba esencialmente en las lecciones y en las cartas de Bernoulli.[3]

Sin embargo, no es tan conocido el hecho de que L'Hospital explicó por primera vez la rectificación, o la determinación de la longitud de arco, de la curva logarítmica, tal como muestran algunas de sus cartas a Leibniz y, especialmente, a Christiaan Huygens (1629-1695). Porque el Marqués de L'Hospital también mantuvo correspondencia con Leibniz entre 1692 y 1701 (Gerhardt, 1849-1850) y con Huygens, entre 1692 y 1695 (Bosscha, 1905). En sus cartas, L'Hospital trataba diversos problemas matemáticos, en particular, problemas relacionados con el cálculo *leibniziano*. De hecho a veces discutía un mismo problema con Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli.

Son diversos los estudios, como Massa (2003) y Tzanakis y Arcavi (2000), que sostienen que el conocimiento de la génesis y la evolución de las ideas y de los conceptos matemáticos puede contribuir al enriquecimiento de la actividad docente. Entre otras aportaciones, la incorporación de la historia de las matemáticas a la enseñanza de las matemáticas permite conocer qué problemas se estudiaban en un determinado momento y cómo han evolucionado en forma y en contenido, hasta su formulación actual. De esta manera, se transmite la percepción de las matemáticas como una ciencia dinámica (Massa, 2003: 5; Tzanakis y Arcavi, 2000: 205). Por otro lado, tal como apunta Massa (2003), la historia de las matemáticas permite entender las matemáticas como una ciencia heurística, en el sentido de que un mismo problema puede abordarse, a través de su desarrollo histórico, mediante distintos métodos, lo cual hace de la formación matemática una actividad viva y motivadora. Teniendo en cuenta estos dos enfoques, el dinámico y el heurístico, el objetivo de esta contribución es presentar el problema de la rectificación de la curva logarítmica a partir del estudio de la correspondencia del Marqués de L'Hospital con Huygens y Leibniz.

La correspondencia del Marqués de L'Hospital

El 14 de diciembre de 1692 L'Hospital envía su primera carta a Leibniz, a través del filósofo, teólogo y padre oratoriano Nicolas Malebranche (1638-1715). Aunque no fue nombrado miembro honorífico de la Académie des Sciences de París hasta 1699, la implicación de Malebranche en los asuntos de la academia ejerció una profunda influencia en el desarrollo y difusión del cálculo diferencial en Francia, a través de su círculo de amigos, contactos y correspondientes. A este círculo pertenecían el Marqués de L'Hospital, Pierre Varignon (1654-1722), Charles R. Reyneau (1656-1728), Louis Carré (1663-1711) y Pierre R. de Montmort (1678-1719), entre otros (Robinet, 1960). Aunque formado en el *Cartesianismo*, en los años setenta del siglo XVII Malebranche se convirtió en seguidor de las teorías filosóficas y matemáticas de Leibniz, a quien conoció personalmente durante su visita a París (1672-1676). Como defensor de las ciencias matemáticas, Malebranche fomentó el estudio de los artículos de Leibniz antes mencionados. Sin embargo, aunque reconocía a Leibniz como el inventor del nuevo cálculo, le resultaba muy difícil entender sus artículos. Es precisamente por esa razón que Malebranche impulsó el estudio y difusión del cálculo *leibniziano*. El *Analyse des infiniment petits* de L'Hospital se puede entender como parte de dicho proyecto, como un vehículo pedagógico de difusión del cálculo *leibniziano* y, en particular, del cálculo diferencial. De hecho, es Malebranche quien pone en contacto al Marqués de L'Hospital con Johann Bernoulli durante la estancia de este en París.

En esa primera carta a Leibniz, L'Hospital expresaba su interés por el «inverso del cálculo diferencial», es decir, el cálculo integral:

> [...] l'usage de vostre calcul differentiel est merveilleux pour determiner tout d'un coup les tangentes, les plus grandes et les moindres quantités, les points d'inflexion, les evolvés de Mr. Hugens, les caustiques de Mr. de Tschirnhaus etc. et cela me paroist achevé: mais il me semble qu'il reste bien des choses a découvrir pour l'inverse de ce calcul [...] (I: L'Hospital a Leibniz, 14 diciembre 1692, Gerhardt, 1849-1850)

L'Hospital estaba especialmente interesado en saber si Leibniz había descubierto reglas generales para el método inverso de las tangentes. Son diversas las cuestiones tratadas en la correspondencia entre L'Hospital y Leibniz como, por ejemplo, la resolución de ecuaciones diferenciales, el problema de De Beaune, las trayectorias ortogonales, o la determinación de cuadraturas. En particular, en su primera carta a Leibniz, L'Hospital exponía una manera de rectificar la curva logarítmica, utilizando el cálculo *leibniziano*, que puede ser considerada como la primera rectificación de dicha curva. Como se verá más adelante, antes de enviar su propuesta a Leibniz, L'Hospital ya había discutido previamente la rectificación de esta curva en la correspondencia que mantuvo con Huygens entre el 26 de julio y el 23 de noviembre de 1692. Alrededor de 1660 surgió un interés especial por la rectificación de una serie de curvas, como la de la cicloide de Christopher Wren (1632-1723) en 1658, o la de la parábola semicúbica de William Neile (1637-1670) en 1657 (Boyer, 1959: 162-163; Baron, 1969: 223-228). Por otro lado, la curva logarítmica se convirtió en objeto de investigación en el siglo XVII. Así, Huygens dio a conocer propiedades interesantes de esta curva, en un apéndice de su tratado sobre la luz en 1690. El propio Huygens, Evangelista Torricelli (1608-1647) y John Craig (1663-1731) enunciaron teoremas sobre la cuadratura de la curva logarítmica (Cajori, 1913). Así pues, no es de extrañar que el Marqués de L'Hospital se interesara por un problema, el de la rectificación, y por una curva, la logarítmica, muy estudiados en su época.

La primera rectificación de la curva logarítmica

Como ya se ha mencionado anteriormente, en su primera carta a Leibniz, L'Hospital planteaba el problema de la determinación de la longitud del arco *CD* de la curva logarítmica (figura 1):

> *Probleme*. La logarithmique indefinie *ABCD* qui a pour soutangente la droite donnée *a*, et son asymptote *SL* etant données de position, trouver geometriquement une ligne droite egale a une portion quelconque ce cette courbe.
>
> *Solution*. Soit menée par un point quelconque *L* de l'asymptote *SL* la perpendiculaire *LG*, soit décrite la courbe algebraique *LKH* telle que (*LF* et *LG* = *x*, *FK* et *GH* = *y*) , de sorte qu'on peut determiner par le cercle et la ligne droite la grandeur des ordonnées *FK*, *GH* en supposant que les coupées *LF*, *LG* soient données et ayant mené *CFK*, *DGH* paralleles a l'asymptote, soient prises sur *LG* les parties *LM*, *LN* egales a *FK*, *GH* et sur l'asymptote la partie *LE* egale a la soutangente, et soient tirées les droites *EG*, *EF* et les paralleles *MA*, *NB*, je dis que la portion *CD* de la logarithmique = *EG* – *EF* + *MA* – *NB*. (I: L'Hospital a Leibniz, 14 diciembre 1692, Gerhardt, 1849-1850)

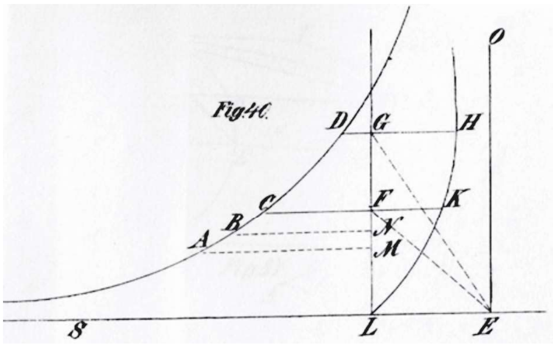

Figura 1. Reproducción de la figura 40, correspondiente a la primera carta de L'Hospital a Leibniz (Gerhardt, 1849-1850)

L'Hospital no incluía la demostración de su solución porque, según él, «comme elle est fondée sur vos principes, je ne doute pas que vous ne la trouviez aisement» (I: L'Hospital a Leibniz, 14 diciembre 1692, Gerhardt, 1849-1850). En su respuesta, a principios de 1693, Leibniz alababa la rectificación de la curva logarítmica propuesta por L'Hospital y aseguraba que intentaría demostrarla. Sin embargo, más adelante, reconocía no estar muy interesado en aquel momento en las propiedades de la curva logarítmica y dejaba aparcada la cuestión, al haber quedado resuelta por L'Hospital (VI: Leibniz a L'Hospital, 28 Abril 1693, Gerhardt, 1849-1850).

¿Cómo se relaciona la solución propuesta por L'Hospital con la formulación actual de longitud de un arco de esta curva? Hay que entender la curva logarítmica de la carta de L'Hospital como nuestra función exponencial, que, para simplificar, podemos considerar $f(x)=e^x$, tomando $a=LE=1$. Por tanto, la longitud del arco CD, es decir, el arco delimitado por sus correspondientes abscisas $x_C=CF$ y $x_D=DG$, viene dada por la integral definida:

$$\int_{x_C}^{x_D}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{x_C}^{x_D}\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\,dx$$

Aplicando primero, por ejemplo, el cambio de variable $t=e^x$ y, a continuación, la descomposición en fracciones parciales, se obtiene la expresión:

$$\left.\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\right|_{x_C}^{x_D}+\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}-1\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}+1\right)\right]\right|_{x_C}^{x_D}$$

O bien, de forma equivalente:

$$\left.\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1+\left(e^x\right)^2}\right)\right|_{x_C}^{x_D}$$

Los segmentos LF, LG de la figura 1 corresponden a la exponencial de x_C y de x_D, respectivamente, y el segmento LE es 1. Dado que FE y EG son las hipotenusas de los triángulos rectángulos FLE y GLE, es fácil comprobar que el primer miembro de la integral definida es igual a $EG-EF$. Por otro lado, y sin entrar en detalle en los cálculos, desarrollando el segundo miembro se llega a la expresión $MA-NB=\ln(LM)-\ln(LN)$, despejando LM, LN en la curva auxiliar y considerando únicamente la rama positiva de la raíz.

La demostración de la rectificación de la curva logarítmica se encuentra en las cartas que L'Hospital envió a Huygens durante la segunda mitad de 1692 (n.º 2760, 2765 y 2775, Bosscha, 1905). En su primera carta a Huygens (n.º 2760, 26 de julio de 1692), L'Hospital hacía referencia al tratado de la luz de Huygens, donde aparecían varias propiedades de la curva logarítmica o logística, y afirmaba haber encontrado una nueva propiedad, a saber, la rectificación de un arco de la curva logarítmica, que exponía a continuación. La demostración queda recogida en su siguiente carta a Huygens (n.º 2765, 10 de septiembre de 1692), tal como se resume a continuación. Dada la curva logarítmica $ABCD$ (figura 2), con asíntota TE, desde un punto cualquiera E de dicha asíntota se traza la perpendicular EL, y se describe la curva geométrica HI, que se puede expresar como:[4]

$$z=\frac{aa\sqrt{2}+a\sqrt{2aa+2yy}}{2y}$$

donde y representa EF o EG (sobre el eje vertical), z representa FI o GH (sobre el eje horizontal), y $a=TE$. Elevando al cuadrado, dicha expresión se puede reescribir como:

$$2yzz=aay+2aaz\sqrt{2}$$

Sean AFI, BGH dos paralelas a la asíntota TE. Tomando $EL=FI$, $EK=GH$, la longitud del arco AB es $TG-TF+LD-KC$.

L'Hospital empezaba por considerar el triángulo BMN para expresar el arco infinitamente pequeño BM en función de las diferencias infinitesimales $dy=BN=HP$ y de $dx=MN$, y de la propiedad de la curva logarítmica $dx=ady/y$ (es decir, subtangente constante). De esta manera obtenía la expresión:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{aady+yydy}{y\sqrt{aa+yy}}=\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}+\frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}}$$

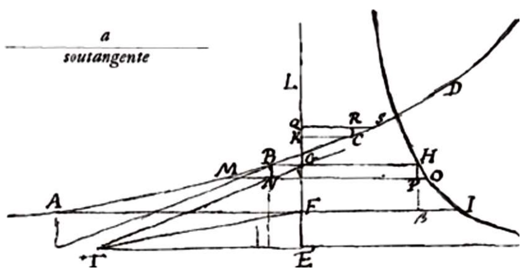

Figura 2. Reproducción de la figura que aparece en la carta n.º 2765 de L'Hospital a Huygens (Bosscha, 1905)

L'Hospital afirmaba que

$$\text{la suma de los } \frac{ydy}{\sqrt{aa+yy}}$$

en la porción AB es $TG-TE$, es decir, lo que nosotros llamaríamos la integral definida entre las abscisas correspondientes a los puntos A y B. Se determina como una integral semi-immediata, muy similar a la que aparece en la primera lección de cálculo integral de Johann Bernoulli (1742: primera lección, §6), teniendo en cuenta que TG, TF son las hipotenusas de los triángulos GTE, FTE, respectivamente.

Faltaría entonces demostrar que

$$\text{la suma de los } \frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$$

es igual a $LD-KC$. L'Hospital toma KQ igual a OP y traza QS. A partir de la ecuación de z obtiene dz, o KQ:

$$KQ=\frac{a^3dy\sqrt{2}+aady\sqrt{2aa+2yy}}{2yy\sqrt{aa+yy}}$$

Por la propiedad de la curva logarítmica, considerando $dx=RS$, $dy=KQ$, $y=EK$ y por construcción $EK=GH$, que es z, la ordenada de la curva HI, se tiene:

$$RS=\frac{a\times KQ}{EK}=\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$$

De manera que la suma de las partes RS, $LD-KC$, es la suma de los

$$\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$$

en la porción AB, es decir, la integral definida de

$$\frac{aady}{y\sqrt{aa+yy}}$$

entre las abscisas correspondientes a los puntos A y B, como diríamos hoy. En realidad, en notación matemática moderna, se trataría de determinar la integral aplicando el cambio de variable

$$z=\frac{aa\sqrt{2}+a\sqrt{2aa+2yy}}{2y}$$

que correspondería, salvo el signo, a la expresión:

$$\int\frac{-adz}{z}=\int\frac{a^2dy}{y\sqrt{a^2+y^2}}$$

Como Huygens no acababa de ver cómo L'Hospital había hallado dicho cambio (n.º 2768, 22 de octubre de 1692), en su respuesta L'Hospital indicaba que había aplicado el cambio

$$\frac{yz}{a}-a=\sqrt{aa+yy}$$

a la manera de Diofanto (n.º 2775, 23 de noviembre de 1692).[5] Elevando al cuadrado, se obtiene la expresión implícita $zzy-aay=2aaz$, cuya representación gráfica muestra la figura 3.[6] Dicha expresión presenta dos ramas, en azul y en rojo en la Figura 3. De hecho la substitución propuesta por L'Hospital en sus primeras cartas a Huygens en relación a la rectificación de la curva logatítmica, se corresponde con la rama en azul del primer cuadrante, tomando y sobre el eje horizontal y z sobre el vertical. L'Hospital se refiere a esta rama como al «valor verdadero» o a la «raíz verdadera» de z, mientras que la otra rama corresponde a la «raíz falsa», en rojo.[7]

A continuación, L'Hospital determina de nuevo la rectificación del logaritmo ($TG-TE+$ $+AK-BI$ en la figura 4), utilizando esta vez la substitución basada en la raíz falsa de $aay-yzz=$ $=2aaz$, es decir

$$\frac{yz}{a}+a=\sqrt{aa+yy}$$

(en rojo en la figura 3, rotando los ejes en el sentido de las agujas del reloj, es decir, tomando y

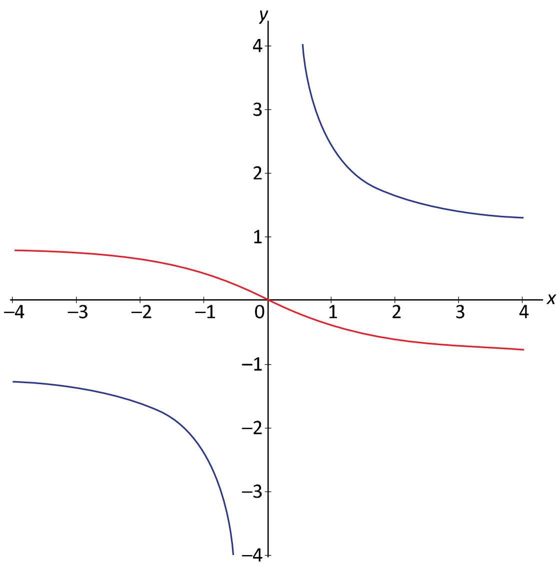

Figura 3. Representación gráfica de $zzy-aay=2aaz$

sobre el eje vertical y z sobre el eje horizontal). Dicha determinación coincide, de hecho, con la solución propuesta por L'Hospital en su carta a Leibniz el 14 de diciembre de 1692, descrita al principio de esta sección.

En resumen, el proceso que sigue L'Hospital para rectificar la curva logarítmica consiste en aplicar el cálculo de Leibniz para determinar la longitud de un arco infinitamente pequeño. A continuación, determina las sumas que resultan (o integrales, como diríamos actualmente) mediante dos curvas auxiliares que discute con Huygens, una de las cuales es la que enviará a Leibniz. Como hemos visto, se trata de un proceso aún bastante geométrico.

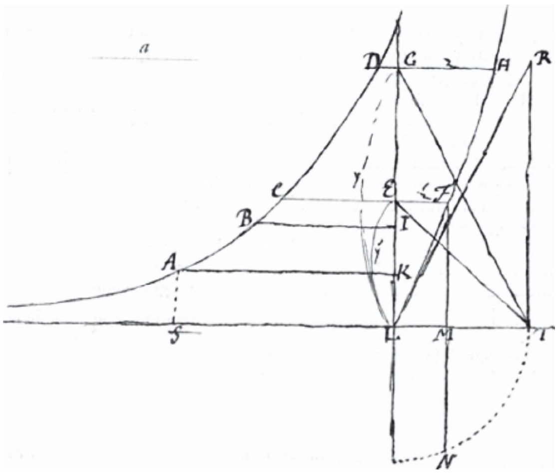

Figura 4. Reproducción de la primera figura que aparece en la carta n.° 2775 de L'Hospital a Huygens (Bosscha, 1905)

Otra manera de rectificar la curva logarítmica

Es generalmente aceptado que el cálculo, diferencial e integral, fue descubierto casi simultáneamente por Leibniz y por Isaac Newton (1643-1727). De manera independiente, ambos trabajaron desde enfoques muy distintos, cada uno desarrollando su propia notación y vocabulario. Así, mientras que Leibniz trabajaba con diferencias (dx), Newton hablaba de fluxiones ($\dot{x}$). A grandes rasgos, se podría definir la fluxión de una cantidad como la velocidad de generación de dicha cantidad. Hemos visto que L'Hospital aplicaba el cálculo de Leibniz para rectificar la curva logarítmica. Unos veinte años más tarde Roger Cotes (1682-1716) trataría el mismo problema aplicando el método de fluxiones de Newton. Cotes fue el primer Profesor Plumiano de Astronomía y Filosofía Experimental de la Universidad de Cambridge. Más conocido por ser el editor de la segunda edición (1713) de la obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton, Cotes publicó un único artículo, *Logometria*, en *Philosophical Transactions of the Royal Society* (Cotes, 1714), que luego sería incluido en su obra póstuma *Harmonia Mensurarum* (1722). En el *Scholium Generale* del mencionado artículo, Cotes presentaba la rectificación de dos pares de curvas, que de alguna forma estaban relacionadas: por un lado, la espiral de Arquímedes y la parábola; por otro lado, la espiral recíproca y la curva logarítmica. Cotes no revelaba sus métodos, ni demostraba sus resultados, ni determinaba las integrales implicadas, solo establecía las longitudes de arco de las curvas, también de manera geométrica. Aunque se aleje del alcance de esta contribución, merece la pena presentar brevemente la rectificación de la curva logarítmica, tal como aparece en el *Scholium Generale* de Cotes (1714) (figura 5):

> Imagine therefore that the logistic line *EMem* is given whose asymptote is *AFaf*: and that the length of any arc *Ee* is required. Drop perpendiculars *ELA*, *ela* to the asymptote and construct the tangents *EF*, *ef*, and let *AL* be taken as equal to the excess by which the tangent *EF* exceeds the subtangent *AF*, and similarly *al* equal to the excess by which the tangent *ef* exceeds the subtangent *af*: and when *LM*, *lm* are drawn parallel to the asymptote, if the

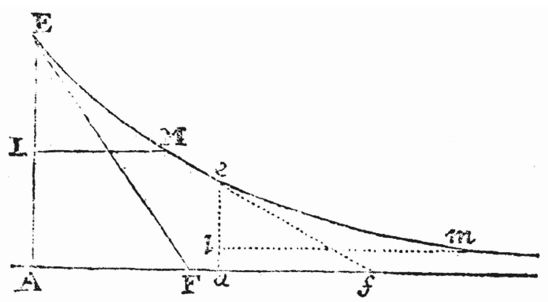

Figura 5. Reproducción de la figura 14 de *Logometria* de Cotes (1714)

difference $lm-LM$ of the parallels is added to the difference $EF-ef$ of the tangents, the aggregate will equal the arc Ee. (Gowing, 1983: 164)

Ya desde el planteamiento del problema se observan diferencias entre el desarrollo de Cotes y el de L'Hospital. Para empezar, Cotes no utilizaba ninguna curva auxiliar y trabajaba explícitamente con las tangentes a la curva. Tal como indica Gowing (1983, 1992), se puede tener una idea del procedimiento seguido por Cotes a partir del análisis realizado por Nicholas Saunderson (1682-1739), incluido en su obra póstuma *The Method of Fluxions* (1751: 162-206). Cotes consideraba el par de curvas espiral recíproca y curva logarítmica porque en ambos casos la subtangente era constante, es decir, $\dot{x}=a\dot{y}/y$, donde $\dot{x}$ e $\dot{y}$ designan la fluxión de x y de y, respectivamente. Así, la longitud del arco viene dada en términos *fluxionales* por la expresión $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$. Como la curva logarítmica es la evoluta de la espiral recíproca (Saunderson, 1751: 167), resulta que la fluxión del arco de las dos curvas es:

$$\frac{\dot{y}}{y}\sqrt{a^2+y^2}$$

Según Saunderson (1751: 166), habría que aplicar aquí la *forma fluxional* III de Cotes para obtener una expresión que, en términos modernos, sería la integral siguiente (Gowing, 1983: 48):

$$\int \frac{1}{y}\sqrt{a^2+y^2}\,dy=\sqrt{a^2+y^2}-$$
$$-a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{y}\right)$$

donde $AF=a$, $y=AE$. Tomando los límites de integración adecuados, como el triángulo AEF es rectángulo, el primer término se corresponde con $EF-ef$. En cuanto al segundo término, por construcción se tiene que:

$$AE^2=EF^2-AF^2$$

de donde se deduce que:

$$\frac{AE}{EF-AF}=\frac{EF+AF}{AE}$$

De nuevo siguiendo el comentario de Saunderson, Cotes define $AL=EF-AF$, siendo LM la medida de la razón de AE a AL, módulo $AF=a$, que, en términos modernos podríamos interpretar como:

$$LM=AF\cdot\ln\left(\frac{AE}{AL}\right)$$

Y de manera similar se obtiene lm. De esta forma, ya queda establecida la expresión $EF-ef+$ $+lm-LM$ que aparecía en el *Scholium Generale* de Cotes (1714).

Reflexiones finales

Partiendo de la correspondencia del Marqués de L'Hospital, el estudio de la rectificación de la curva logarítmica permite acercarnos a la génesis y evolución de este problema, dentro del contexto de la investigación sobre la rectificación de curvas en el siglo XVII. Los casos estudiados muestran cómo se resolvía el problema en el momento del nacimiento del cálculo, mediante planteamientos aún estrechamente relacionados con la geometría, que difieren del proceso analítico y algorítmico utilizado actualmente. El cambio de enfoque desde el origen del problema hasta su formulación actual puede aportar al profesorado de matemáticas la percepción de las matemáticas como una ciencia dinámica. Por otro lado, las propuestas de L'Hospital y de Cotes ofrecen además la oportunidad de discutir diversas maneras de resolver un mismo problema, contribuyendo así a la idea de las matemáticas como una ciencia heurística.

Referencias bibliográficas

Baron, M. E. (1969), *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford-Nueva York.

Bernoulli, J. (1742), «Lectiones mathematicae de calculo integralium», en J. Bernoulli, *Opera Omnia*, vol. III, Lausanne-Genève. [Editado y traducido al alemán por G. Kowalewski (1914), *Die erste Integralrechnung. Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes*, Wilhelm Engelmann, Leipzig-Berlín.]

— (1922). *Lectiones de calculo differentialium (1691-92)*. P. Schafheitlin [ed.], Basilea.

Blanco, M. (2001), «Análisis de la discusión L'Hôpital-Bernoulli», *Cronos*, n.º 4 (1-2), 81-113

Bosscha, J. Jr. [ed.] (1905), *Oeuvres complètes de Chistiaan Huygens. Tome X: Correspondance*, Martinus Nijhoff, Den Haag. <http://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv10_01> [Consulta: 8 de junio de 2016.]

Boyer, C. B. (1959), *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover, Nueva York.

Cajori, F. (1913), «History of the exponential and logarithmic concepts», *The American Mathematical Monthly*, n.º 20 (7), 205-210.

Cotes, R. (1714), «Logometria», *Philosophical Transactions of the Royal Society*, n.º 29, 5-45.

Descartes, R. (1637), *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*, Imprimerie de Jan Maire, Leyden.

Gerhardt, C. I. (1849-1850), «Briefwechsel zwischen Leibniz und dem Marquis de L'Hospital», en C. I. Gerhardt (ed.), *Leibnizens mathematische Schriften*, vol. ii, A. Asher & Comp., Berlín.

Gowing, R. (1983), *Roger Cotes – natural philosopher*, Cambridge University Press, Cambridge.

— (1992), «A study of spirals: Cotes and Varignon», en P. M. Harman y A. E. Shapiro (eds.), *The investigation of difficult things*, Cambridge University Press, Cambridge, 371-381.

L'Hospital, G. F. A. de (1696), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, París.

Massa, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemática a l'ensenyament de la matemática», *Biaix*, n.º 21, 4-9.

Robinet, A. (1960), «Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France», *Revue d'Histoire des Sciences*, n.º xiii, 287-308.

Saunderson, N. (1756), *The Method of Fluxions*, Londres.

Spiess, O. [ed.] (1955), *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli,* vol. i, Birkhäuser, Basilea.

Tzanakis, C., y A. Arcavi (2000), «Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey», en J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study*, Kluwer, Dordrecht, 201-240.

Ver Eecke, P. [ed.] (1959), *Diophante d'Alexandrie. Les Six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones; oeuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par P. Ver Eecke*, Albert Blanchard, París.

Mónica Blanco Abellán
Universitat Politècnica de Catalunya
<monica.blanco@upc.edu>

1 Este trabajo se basa, en parte, en la comunicación que presenté en el congreso *300 Anniversary Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716),* celebrado en Barcelona los días 21 y 22 de enero de 2016 y organizado por el Grup de Recerca d'Història de la Ciència i de la Tècnica y el Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Catalunya.

2 La familia también escribía su nombre Lhospital y, más tarde, L'Hôpital, que es la forma utilizada en la actualidad. Pero como en las cartas que se discuten en este artículo el Marqués firma como L'Hospital, será esta la forma que utilizaré.

3 Sin embargo, no se puede decir que los textos de L'Hospital y de Bernoulli sean idénticos. Así, por ejemplo, en Blanco (2001) se analizan y comparan algunos de los problemas que aparecen en ambos textos.

4 En sus cartas a Huygens, L'Hospital usa el símbolo ∞ para la igualdad, manteniendo así la notación utilizada por René Descartes (1596-1650) en *La Géométrie* (1637). Pero aquí, por razones prácticas, utilizaré el símbolo =, siguiendo la excelente edición de *La Géométrie,* traducida y anotada por J. Pla y P. Viader (1999).

5 Probablemente L'Hospital se está refiriendo al problema viii, del libro ii, de la *Aritmética* de Diofanto, donde se propone dividir un cuadrado en suma de dos cuadrados. Siguiendo la nota 1, página 54, de la edición de Ver Ecke (1959), adaptándolo a nuestro ejemplo, se trata de buscar m tal que $(my-a)^2=a^2+y^2$. Se deduce la ecuación $m^2y-y=2ma$, de donde es fácil ver que $m=z/a$.

6 Es la misma substitución que L'Hospital proponía en la carta anterior, pero multiplicada por la raíz cuadrada de 2.

7 Para una discusión más detallada sobre la substitución utilizada por L'Hospital, ver las notas de Bosscha (1905) correspondientes a las cartas n.º 2768 y 2775. Esa misma nomenclatura había sido utilizada por Descartes para clasificar las raíces en verdaderas y falsas, siendo estas últimas «moindres que rien» (Descartes, 1637: 372), es decir, negativas.