

INTERDISCIPLINARIEDAD, UNA EXHORTACIÓN A LA FORMACIÓN DEL
PROFESOR DE MATEMÁTICAS

EDWIN FERNANDO PARADA PACHECO
WILSON PEÑA SAZA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2018

INTERDISCIPLINARIEDAD, UNA EXHORTACIÓN A LA FORMACIÓN DEL
PROFESOR DE MATEMÁTICAS

EDWIN FERNANDO PARADA PACHECO
CÓDIGO: 2016185026
C.C. 80820189

WILSON PEÑA SAZA
CÓDIGO: 2016185012
C.C. 80384008

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de Magister en
Docencia de la Matemática

Director: Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Doctor en Educación – Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2018

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría: en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos”. (Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

*A Sofía, Juan y Ana, son el sur al que apunta mi brújula sin norte, el amor que me
conforta.*

A mis padres, porque sin vida, nada de esto sería realidad.

A Vale, porque la muerte también es realidad.

Fernando Parada

*A Carmen, con cariño y gratitud, por darme la oportunidad de compartir la vida y
tener la paciencia para soportar mis proyectos.*

*A Wilson, David, Jorge, Daniel y Amelia porque la vida me permitió mostrarles el
camino y ahora seguirlos. Además porque me enseñaron que el primer obstáculo era
yo mismo.*

*A toda mi familia que asumen mis retos y logros como suyos. Sin su apoyo
incondicional el camino era imposible recorrerlo.*

*A los eternos José y Ana que me dieron las mejores lecciones de vida, los valores desde
el ejemplo, los amo mucho.*

Wilson Peña S



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN
DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **Interdisciplinariedad, una exhortación a la formación del profesor de Matemáticas**, presentado por el estudiante:

Wilson Peña Saza, Cód. 2016185012, C.C. 80.384.008
Edwin Fernando Parada Pacheco, Cód. 2016185026, C.C. 80.820.189

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 43 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 31 días del mes de julio de 2018.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: Edgar A. Guacaneme S.
ÉDGAR ALBERTO GUACANEME S. (UPN)

Jurados: Profesora: Jorge Pérez Ortección
JORGE PÉREZ ORTECCIÓN (UPN)

Profesora: Judith A. Hernández
JUDITH HERNÁNDEZ (UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE ZACATECAS)

Agradecimientos

Al finalizar estos años de maestría, es muy importante para nosotros, agradecer a las personas que nos apoyaron desde sus realidades para que llegáramos a feliz término.

En primer lugar, a nuestro asesor de tesis Edgar Alberto Guacaneme quien confió en nuestras ideas poco ortodoxas frente a la educación matemática y, además, encaminó nuestro trabajo de grado para que fuera un proceso de aprendizaje complejo pero satisfactorio. Sumado a esto, nos orientó varios seminarios donde develaba la importancia de ser un verdadero maestro de las Matemáticas, con lecturas, charlas, pero más importante aún, con su valioso ejemplo.

Agradecemos también a los profesores Juan Ávila, Cecilia Agudelo y Gloria García quienes nos mostraron diferentes facetas de la educación Matemática, algunas de ellas ni siquiera las sospechábamos y hoy se nos hacen transcendentales como profesionales.

De igual manera, agradecemos a todas y cada una de las personas que conforman los diferentes estamentos de la Universidad Pedagógica Nacional, porque gracias a ellos logramos superar los pasos necesarios para finalizar el programa de Maestría.

No queremos dejar desapercibido, un especial sentido de gratitud para con la Educación Pública, que nos permitió formarnos desde los estudios de la básica primaria, secundaria, pregrado y de maestría. Ampliando nuestro campo de conocimiento y crecimiento personal con una formación luchadora, comprometida y revolucionaria, que esperamos retribuir con compromiso a nuestros estudiantes y a la sociedad en general.

De forma especial, reconocemos a los profesores, compañeros y amigos que hicieron parte de este trabajo. Sus aportes, visiones e ideas contagiaron de forma implícita las palabras de este estudio.

Finamente, y no menos importante, agradecemos a nuestras familias quienes nos apoyaron y comprendieron incondicionalmente, acompañándonos con paciencia y amor en esta exigente rutina de estudio.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página ix de 107	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Interdisciplinariedad, una exhortación a la Formación del Profesor de Matemáticas.
Autor(es)	Edwin Fernando Parada Pacheco y Wilson Peña Saza
Director	Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. 2018
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Interdisciplinariedad, Representaciones Semióticas, Robótica Educativa, Formación del Profesor de Matemáticas, Metodología de diseño.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado exhibe un análisis de cómo se promueve y exige el conocimiento del profesor de Matemáticas cuando debe resolver tareas propuestas de carácter interdisciplinario mediadas por la Robótica Educativa. Para ello, se realiza un rastreo teórico y práctico dentro del marco de la investigación de diseño, en el cual, se realizan dos iteraciones con sus respectivas fases, en las que los profesores de Matemáticas resuelven las tareas propuestas y nos permiten ver como la interdisciplinariedad está dada por la posibilidad de identificar los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas en otras disciplinas. Los pilares principales de la investigación son la Interdisciplinariedad, la Robótica Educativa, las Representaciones Semióticas y la Investigación de Diseño.</p> <p>Los ciclos de la investigación de diseño se realizaron en dos grupos de profesores de Matemáticas en ejercicio. En este mismo marco, fue necesario diseñar, construir y corroborar la caracterización de las variables del marco referencial dentro de los siguientes campos disciplinares: las Matemáticas con variables visuales y simbólicas, la Física dentro de las variables cinemáticas del movimiento rectilíneo uniforme, la Robótica dentro de la programación y la Factual como simulación y movimiento físico del robot.</p>

3. Fuentes

En el desarrollo de este trabajo de grado consultamos diferentes fuentes bibliográficas; a continuación, relacionamos aquellas primordiales para el estudio:

- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., ... Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. In *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)* (pp. 5063–5069).
- Blasco, C. M. (2002). Interdisciplinarietà y currículo: Construcción de proyectos escuela-universidad: Memorias del V Seminario Internacional: Bogotá, junio 19 al 23 de 2000. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Programa RED.
- Bosch, H., Di Blasi, M., Pelem, M., Bergero, M., Carvajal, L., & Geromini, N. (2011). Nuevo paradigma pedagógico para enseñanza de ciencias y new pedagogical paradigm for sciences and mathematics teaching. *Avances en Ciencias e Ingeniería ACI*, 2(3), 131–140.
- Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235–253.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 9, 143–168. Retrieved from http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La_habilidad_para_cambiar_el_registro_de_representacion.pdf
- Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M., & Liñan, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 30 (54), 204–221.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas, *Revista Iberoamericana de educación Matemática*, 20, 13–31. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_Union_020_2009.pdf
- Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). Investigación La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación. *Revista Papeles*, 4(0123–0670), 102–109.
- Lombana, N. (2013). La Robótica Educativa como estrategia para el aprendizaje del lenguaje de las matemáticas. In *Congreso de Investigación y pedagogía* (pp. 1–10).
- López, P., & Sosa, H. (2013). Aprendizaje con Robótica, algunas experiencias. *Revista Educación*, 37, 43–63.
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. E. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Molina, M., Martínez, E. C., González, J. L. M., & Martínez, E. C. (2011). Un acercamiento a la

investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29(1). 75-88. <https://doi.org/10.5565/REV/EC/V29N1.435>

Oviedo, L., & Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29–36.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5, 129–145. Retrieved from <http://cicataleg-publications.ipn.mx:8080/handle/123456789/1355>

Uribe Mallarino, C. (2012). Interdisciplinariedad en investigación: ¿colaboración, cruce o superación de las disciplinas? *Universitas Humanística*, 73, 147–172. [https://doi.org/SICI:0120-4807\(201206\)41:73<147:IEICCS>2.0.TX;2-5](https://doi.org/SICI:0120-4807(201206)41:73<147:IEICCS>2.0.TX;2-5)

4. Contenidos

Este trabajo está desarrollado en seis capítulos, los cuales trabajan lo siguiente:

Capítulo 1, El problema de estudio: En este capítulo abordamos la justificación del estudio. Presentamos las motivaciones que nos llevaron a él: primero de índole personal, luego desde el campo de investigación de la Formación del Profesor de Matemáticas, seguido de esto, la relación con el campo de la Interdisciplinariedad, destacando entre ellas la metodología STEAM. Finalmente, se expone la Robótica Educativa como campo interdisciplinario que media los procesos de enseñanza con otras disciplinas. Con este panorama, planteamos el problema y los objetivos del estudio.

Capítulo 2, Antecedentes de investigación: En este capítulo exponemos los pilares teóricos de nuestro estudio: el conocimiento del profesor de Matemáticas, la Interdisciplinariedad, la Robótica Educativa y el modelo de los registros semióticos de representación. De cada uno de ellos, se exponen algunas posturas que la literatura especializada muestra y cómo fundamentan epistemológicamente la futura solución del problema de estudio.

Capítulo 3, Metodología del estudio: En concordancia con uno de nuestros objetivos específicos y apoyados en los seminarios de Investigación de la Maestría, optamos por la metodología de Investigación de diseño. Exponemos la estructura general y cómo esta se adapta al estudio en cuestión. Hacemos énfasis en los dos ciclos o iteraciones diseñadas, con cada una de sus fases, que se dieron dentro del proceso de solución del problema de estudio.

Capítulo 4, Marco referencial: Presentamos la construcción del marco referencial de análisis de nuestro estudio. Para ello, exponemos la definición de la caracterización de las variables del ambiente disciplinar de las Matemáticas, del ambiente Factual, del ambiente de Programación y de la Cinemática. Finalmente, se plantea la congruencia y correspondencia de las transformaciones de los registros de representación.

Capítulo 5, Análisis de datos: En esta sección, se presenta la transcripción de varios episodios

extraídos del video realizado en la intervención del grupo B, en el momento de la solución las tareas por parte de los profesores. En ellos se analizan las formas como se presentan las correspondencias y congruencias semióticas entre los diferentes ambientes disciplinares: las Matemáticas, la Robótica y la Física. De acuerdo con esto, los episodios son observados y analizados en función de las cuatro categorías de análisis: las variables de representación semiótica Matemáticas (visuales y simbólicas), factuales, icónicas y cinemáticas.

Capítulo 6, Conclusiones: Presentamos en este apartado dos tipos de conclusiones, primero de orden investigativo en las cuales triangulamos el problema, el marco referencial y los datos obtenidos, y segundo de tipo formativas donde expresamos aprendizajes de este proceso de Maestría y de estudio en Educación Matemática.

5. Metodología

Este trabajo de grado es de tipo cualitativo-descriptivo, desarrollado bajo la estrategia de estudio de caso, en la línea de investigación Formación del Profesor de Matemáticas. El estudio se enmarca en la metodología de diseño a través de los experimentos de enseñanza, de los cuales, se aplicaron dos en grupos A y B de distintos profesores de Matemáticas en ejercicio, de nivel escolar de Básica y Media. Estos grupos, se caracterizaron por tener edades, formación y experiencias docentes heterogéneas. Los ciclos propuestos dentro de este marco, incluyeron, en primer lugar, un trabajo con el grupo A; a partir de esta intervención y de un primer análisis, a través del cual se monitoreó la tarea de carácter interdisciplinar, se creó otra tarea más. Estas dos tareas, en conjunto, serían las que se propondrían al grupo B. A partir de esas iteraciones, se hizo evidente la necesidad de un marco referencial propio, el cual es creado para el análisis posterior a los datos. Estos datos son tomados de los episodios más relevantes de dos intervenciones en las que se tomó registro videográfico de aproximadamente seis horas.

6. Conclusiones

Una propuesta interdisciplinar ofrece la oportunidad de complementar los conocimientos del profesor de Matemáticas, por medio de la transformación de las representaciones usuales de los objetos matemáticos a representaciones en otras disciplinas.

La imposibilidad del profesor de Matemáticas de tratar y transformar los objetos matemáticos en sistemas de representación de otras ciencias refleja la ausencia de estas situaciones en su formación y en su ejercicio docente.

Un elemento faltante en el esquema de Formación del Profesor de Matemáticas es un espacio donde otras disciplinas intersequen a las Matemáticas en el diseño y solución de situaciones problémicas. Un profesor que se expone a ciertas tareas en su formación, en su ejercicio

profesional muy probablemente llevará esas mismas tareas (a algunas similares) al aula.

En una tarea interdisciplinar se realizan transformaciones entre sistemas de representación semiótica de distintas disciplinas y se amplía el marco de significación de los objetos matemáticos, incorporando significados de otras disciplinas en el conocimiento mismo del objeto matemático y poniendo en evidencia las diferentes formas implícitas en las que está en el mundo sensorial.

La tarea interdisciplinar pone al profesor a pensar diferente, a relacionar mundos de disciplinas aparentemente disyuntas, pero en esa relación, aparece el elemento matemático. Es decir, saca al profesor del confort de la disciplina y lo pone frente a heurísticas no habituales, lo cual potencia su profesión.

La tarea de programar el robot no tiene valor pedagógico en sí mismo para el profesor de Matemáticas, pero si se acompaña con una reflexión y tiene la experiencia de conversión entre registros, se pueden dar dos sucesos. Primero, tiene la posibilidad de entender las dificultades de sus estudiantes, así como él las presentó en el desarrollo de la tarea interdisciplinar. Segundo, aporta ideas de cómo gestionar una clase y hacer evidentes las conversiones entre registros.

La Robótica Educativa es un buen mediador en el diseño de tareas interdisciplinarias, para poner en evidencia la presencia del asunto semiótico en el ejercicio de la enseñanza – aprendizaje. La semiótica es consustancial a las actividades propuestas en la tarea y genera un ambiente de manera natural en el cual surgen y se propician los cambios de representación entre registros.

Elaborado por:	Edwin Fernando Parada Pacheco y Wilson Peña Saza
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Fecha de elaboración del Resumen:	20	06	2018
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1 CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE ESTUDIO.....	3
1.1 Motivación y justificación del estudio	3
1.1.1 Motivación personal	3
1.1.2 Motivación y justificación desde la investigación en la Formación del Profesor de Matemáticas	4
1.1.3 Motivación y justificación desde la investigación en la Interdisciplinariedad	6
1.1.4 Motivación y justificación desde la investigación en la Robótica Educativa	7
1.2 Problema de estudio	8
1.3 Objetivos del estudio	9
1.3.1 Objetivo general	9
1.3.2 Objetivos específicos	9
2 CAPÍTULO II. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN.....	11
2.1 El conocimiento del profesor de Matemáticas	11
2.1.1 Modelos del Conocimiento del Profesor de Matemáticas	11
2.2 Interdisciplinariedad.....	15
2.2.1 Concepto de interdisciplinariedad	15
2.2.2 Antecedentes de investigación asociados a la interdisciplinariedad	18
2.3 Robótica Educativa.....	25
2.4 Modelo de registro de representación semiótica	26
3 CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN	30
3.1 Marco metodológico de la Investigación de diseño	30
3.2 Características de la investigación de diseño	31
3.3 Fases 32	
3.3.1 Preparación	32
3.3.2 Experimentación.....	34
3.3.3 Retrospectivo	34
3.3.4 Análisis de la tarea.....	37

3.4	Ciclo 2	39
4	CAPÍTULO IV. MARCO REFERENCIAL	41
4.1	Construcción del marco de análisis, definición de variables.....	41
4.2	Variables de las Matemáticas	42
4.2.1	Variables Matemáticas visuales.....	42
4.2.2	Variables Matemáticas simbólicas	44
4.3	Variables factuales	46
4.4	Variables icónicas.....	47
4.5	Variables cinemáticas.....	52
4.6	Congruencia y correspondencia de las transformaciones de los registros de representación.....	55
4.7	Discusión	58
5	CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE DATOS	62
5.1	Descripción de los episodios del Grupo B	62
5.2	Transcripción de episodios significativos	63
5.2.1	Episodio I:	64
5.2.2	Episodio II	69
5.2.3	Episodio III.....	72
5.2.4	Episodio final.....	73
6	CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES	81
6.1	Conclusiones del estudio	81
6.2	Conclusiones de la experiencia formativa-investigativa	85
7	REFERENCIAS	87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Fase de preparación de la investigación de diseño.....	32
Tabla 2: Fase de experimentación en la investigación de diseño.....	34
Tabla 3: Fase retrospectiva de la investigación de diseño.....	34
Tabla 4: Descripción de la fase 2.....	39
Tabla 5: Valores de las variables Matemáticas visuales generales	42
Tabla 6: Variables Matemáticas visuales particulares y valores.	44
Tabla 7: Variables Matemáticas simbólicas y valores.....	45
Tabla 8: Variables factuales y valores.....	47
Tabla 9: Variables icónicas de programación.....	51
Tabla 10: Variables cinemáticas.....	54
Tabla 11: Síntesis de la congruencia entre las variables y sus valores.....	60
Tabla 12: Descripción de los profesores del grupo B.....	62

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1: Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377).....	14
Gráfica 2 Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)	15
Gráfica 3 Estructura general de una investigación de diseño.....	31
Gráfica 4 Estructura de la investigación de diseño adaptada a nuestra investigación.....	32
Gráfica 5 Entorno de programación	35
Gráfica 6 Tarea propuesta y modelo de simulación	36
Gráfica 7 Profesores programando el robot.....	36
Gráfica 8 Muestra de la programación de la velocidad en el robot.....	37
Gráfica 9 Profesor realizando la explicación de la solución de la tarea.....	38
Gráfica 10 Tarea 1	43
Gráfica 11 Entorno de programación del robot.....	48
Gráfica 12 Muestra de la variable icónica de tracción	48
Gráfica 13 Tomado del entorno de programación, variable icónica de tracción, sección de velocidad.....	49
Gráfica 14 Variable icónica de pausa (tiempo de duración de la última acción).....	50
Gráfica 15 Código QR de enlace del video de la variable factual. https://youtu.be/X3vyxBb1SJw	52
Gráfica 16 variables de representación.....	55
Gráfica 17 Gráfica de tiempo versus distancia de la tarea propuesta a los profesores.....	61
Gráfica 18 Gráfica propuesta para la tarea 1	66
Gráfica 19 Muestra de una representación de un profesor	67
Gráfica 20 Muestra de la representación realizada por el profesor	67
Gráfica 21 Representación propia de la tarea.....	68
Gráfica 22 Movimiento del esfero en la representación propia.....	68
Gráfica 23 Gráfica realizada por F para describir el fenómeno	68
Gráfica 24 Trabajo de los dos profesores en la representación gráfica de la tarea.....	70
Gráfica 25 Muestra de la tarea.....	71
Gráfica 26 Muestra de la gráfica de solución de la tarea.....	72
Gráfica 27 Las distintas representaciones y sus transformaciones en un área del conocimiento	83
Gráfica 28 Transformación de representaciones ente disciplinas	84

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado es de tipo cualitativo-descriptivo, desarrollado bajo la estrategia de estudio de caso, en la línea de investigación “Formación del Profesor de Matemáticas”. El estudio se enmarca en la metodología de diseño a través de los experimentos de enseñanza, de los cuales, se aplicaron dos en grupos A y B de distintos profesores de Matemáticas en ejercicio, de nivel escolar de Básica y Media. Estos grupos, se caracterizaron por tener edades, formación y experiencias docentes heterogéneas.

El problema de estudio indaga cómo el conocimiento del profesor de Matemáticas se exige en tareas de carácter interdisciplinar y cambia la significación de los objetos matemáticos desde los registros de representación semiótica de los ambientes disciplinares de las Matemáticas y Robótica. Surge de una motivación personal nacida de las experiencias de proyectos con otras disciplinas. Sumado a esto, evidenciamos que existe una comunidad interesada en la investigación de la formación de los profesores de Matemáticas desde dos miradas, la primera interesada en qué tipo de conocimiento¹ debe tener, y la segunda cómo se promueve ese conocimiento.

Es por ello, que nuestro objetivo general es establecer cómo, a través de tareas interdisciplinarias ambientadas en la Robótica Educativa, se amplía el campo de los registros de representación semiótica de los objetos matemáticos y su re significación en el conocimiento del profesor de Matemáticas.

Desarrollamos nuestra propuesta de estudio en seis capítulos, descritos a continuación:

Capítulo 1, El problema de estudio: En este capítulo abordamos la justificación del estudio. Presentamos las motivaciones que nos llevaron al mismo: primero de índole personal, luego desde el campo de investigación de la Formación del Profesor de Matemáticas, seguido de esto, la relación con el campo de la Interdisciplinariedad, destacando entre ellas la metodología STEAM. Finalmente, se expone la Robótica Educativa como campo

¹ Entendiendo conocimiento del profesor de Matemáticas como el conjunto de habilidades, competencias, saberes disciplinares, entre otros. El concepto de conocimiento es abordado con profundidad en el capítulo del marco referencial.

interdisciplinario que media los procesos de enseñanza con otras disciplinas. Con este panorama, planteamos el problema y los objetivos del estudio.

Capítulo 2, Antecedentes de investigación: En este capítulo exponemos los pilares teóricos de nuestro estudio: el conocimiento del profesor de Matemáticas, la Interdisciplinariedad, la Robótica Educativa y el modelo de los registros semióticos de representación. De cada uno de ellos, se exponen algunas posturas que la literatura especializada muestra y cómo fundamentan epistemológicamente la futura solución del problema de estudio.

Capítulo 3, Metodología de investigación: En concordancia con uno de nuestros objetivos específicos y apoyados en los seminarios de Investigación de la Maestría, optamos por la metodología de Investigación de diseño. Exponemos la estructura general y cómo esta, se adapta al estudio de este trabajo. Hacemos énfasis en los dos ciclos o iteraciones diseñadas, con cada una de sus fases, que se dieron dentro del proceso de solución del problema de estudio.

Capítulo 4, Marco referencial: A continuación, presentamos la construcción del marco referencial de análisis de nuestro estudio. Para ello, exponemos la definición de la caracterización de las variables del ambiente disciplinar de las Matemáticas, del ambiente Factual, del ambiente de Programación y de la Cinemática. Finalmente, se plantea la congruencia y correspondencia de las transformaciones de los registros de representación.

Capítulo 5, Análisis de datos: En esta sección, se presenta la transcripción de varios episodios extraídos del video realizado en la intervención del grupo B, en el momento de la solución las tareas por parte de los profesores. En ellos se analizan las formas como se presentan las correspondencias y congruencias semióticas entre los diferentes ambientes disciplinares: las Matemáticas, la Robótica y la Física. De acuerdo con esto, los episodios son observados en función de las cuatro categorías de análisis: las variables Matemáticas (visuales y simbólicas), las variables factuales, las variables icónicas y las variables cinemáticas.

Capítulo 6, Conclusiones: Presentamos en este apartado dos tipos de conclusiones, primero de orden investigativo en las cuales triangulamos el problema, el marco referencial y los datos obtenidos, y segundo de tipo formativas donde expresamos aprendizajes de este proceso de Maestría y de investigación en Educación Matemática.

1 CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE ESTUDIO

En este capítulo abordamos la justificación del estudio. Presentamos las motivaciones que nos llevaron al estudio: primero de índole personal, luego desde el campo de investigación de la Formación del Profesor de Matemáticas, seguido de esto, la relación con el campo de la Interdisciplinariedad, destacando entre ellas la metodología STEAM. Finalmente, se expone la Robótica Educativa como campo interdisciplinario que media los procesos de enseñanza con otras disciplinas. Con este panorama, planteamos el problema y los objetivos del estudio.

1.1 Motivación y justificación del estudio

1.1.1 Motivación personal

La interdisciplinariedad ha inspirado la experiencia personal del profesor Fernando Parada (uno de los autores del estudio acá reportado) durante el ejercicio de la carrera docente en los últimos 11 años; la creación de una estación meteorológica, la medición y análisis de datos ecológicos y simulaciones del sistema nervioso, son ejemplos de sus prácticas pedagógicas a través de las cuales vincula las áreas de ciencias y Matemáticas. Así, el trabajo y la participación en proyectos de propuestas interdisciplinarias que arrojan resultados pedagógicos, didácticos y evaluativos altamente valorados por los estudiantes y, en general, por la comunidad educativa específica en el que se desarrollaron, han sido una constante en su búsqueda por enlazar las Matemáticas con otras áreas del conocimiento.

Es precisamente ese trabajo el que se constituye en uno de los acicates para procurar, en el marco de los estudios en la Maestría en Docencia de la Matemática, una profundización teórica sobre la idea de interdisciplinariedad, fundamentando los propósitos planteados inicialmente de manera intuitiva.

Por otra parte, la experiencia del profesor Wilson Peña (coautor del presente estudio) en su ejercicio de la carrera docente a precedido las áreas de Matemáticas y Física en los cursos de la Media vocacional; planteando ejercicios interdisciplinarios como estrategia pedagógica y mediante los cuales, buscaba de manera empírica que los estudiantes identificaran los objetos matemáticos en las representaciones físicas y viceversa. El presente estudio responde a la necesidad personal del profesor para respaldar estas relaciones desde un sustento teórico pertinente y aplicable en el aula.

1.1.2 Motivación y justificación desde la investigación en la Formación del Profesor de Matemáticas

Las consideraciones realizadas en el ámbito propio de la Educación Matemática [EM] por la comunidad interesada en darle un estatus de ciencia, han cambiado paulatinamente la forma de ver el propio objeto de análisis y el objeto mismo; así, paulatinamente dicha comunidad forjó un nicho de investigación en el cual el objeto de la investigación es la Educación del Profesor de Matemáticas [EPM] (Guacaneme & Mora, 2012).

El objeto de estudio de la EPM, centra el proceso investigativo en la formación del profesor, como respuesta, entre otras, a las preguntas: ¿qué conocimiento necesita un profesor?, ¿cuáles estrategias aplicar en su proceso de formación?, ¿cuál debe ser el perfil del formador de profesores?, ¿qué actividades, talleres y prácticas debe realizar un profesor en formación?, etc. Todas estas preguntas han estado enfocadas en asumir como objeto de estudio y de investigación los procesos de formación y educación en los programas de formación inicial, continua o avanzada, dirigidos a formar profesores de Matemáticas.

Este interés de la comunidad académica, trae inmerso los dilemas de ¿qué buscar?, ¿hasta dónde mirar?, ¿en dónde buscar?, entre otros, que permiten generar como respuesta cuatro focos para la investigación en la EPM: El conocimiento del formador de profesores de Matemáticas, la formación de los profesores de Matemáticas, los conocimientos del profesor de Matemáticas y las prácticas profesionales del profesor de Matemáticas (Sánchez, 2011).

Si nos detenemos un poco en la línea de investigación de los conocimientos del profesor de Matemáticas y reflexionamos sobre las diferentes categorías propuestas para la formación del docente, encaminadas a fortalecer el conocimiento y las competencias del profesor de Matemáticas, encontramos en los diferentes modelos del conocimiento del profesor, una preocupación por asuntos disciplinares matemáticos, reflexiones sobre el conocimiento didáctico, el conocimiento pedagógico e incluso el estudiante y su entorno como objeto de estudio (Godino, 2009).

Con todo lo anterior, no encontramos explícitamente un enfoque del conocimiento matemático en relación con otras disciplinas y las posibilidades de potencializar las competencias y habilidades del profesor de Matemáticas, respaldado por estrategias de trabajo interdisciplinario, que se proponga para ser utilizado como medio para generar,

fomentar y reforzar las competencias y habilidades propias de la disciplina y el conocimiento del profesor de Matemáticas, que le garanticen el desempeño profesional.²

Podemos referenciar a (Guacaneme & Mora, 2012) “Algunos objetos de estudio del campo de investigación, entre ellos, los conocimientos y competencias que los profesores de Matemáticas deben aprender y desarrollar para el ejercicio profesional docente...” (p,107), desde esta línea de investigación planteamos tareas con una estrategia sustentada en actividades interdisciplinarias, para aplicar a profesores en ejercicio, y así, documentar las experiencias mediante una reflexión intencionada. Logrando de alguna manera, tensionar el concepto de formación en el cual fueron preparados, propio de una organización curricular que organiza el conocimiento mediante disciplinas disgregadas y núcleos separados, inclusive en un mismo campo ya sea disciplinar, didáctico o pedagógico (Ruiz Morón & Peña, 2006).

Por lo anterior, y consultando documentos normativos de la formación de los profesores, encontramos en el documento de Sistema colombiano de formación de educadores (Ministerio de Educación Nacional, 2013) la exposición de los objetivos del subsistema de formación e incluye para nivel posterior al pregrado:

Motivar la conformación y consolidación de vínculos de los estudios de posgrado con la comunidad científica nacional e internacional a través de redes nacionales de investigadores y de programas de investigación interdisciplinarios en materia educativa.

Crear condiciones y estrategias para la generación y consolidación de grupos y programas de investigación interdisciplinaria que apunten a la construcción desarrollo y evaluación de propuestas educativas hacia el mejoramiento de la calidad de la educación.

Proporcionar condiciones para la formación avanzada de alto nivel académico que favorezca la calidad de la investigación y la construcción de propuestas educativas coherentes con las necesidades de desarrollo local, regional y nacional.

Asegurar el contenido de la educación desde la perspectiva de la diversidad e interculturalidad propias de Colombia para desarrollar identidad cultural. (Ministerio de Educación Nacional, 2013)p. 113

Sumado a esto, la Ley 30 de 1992, define los programas de posgrados así:

Los programas de maestría, doctorado y posdoctorado tienen en la investigación el fundamento y ámbito necesarios de su actividad. Las maestrías buscan ampliar y desarrollar los conocimientos para la solución de problemas disciplinarios, interdisciplinarios o profesionales del subsistema de formación en servicio, con el fin de proporcionar a los educadores los conocimientos e instrumentos básicos que la habilitan como investigador en un área específica

² Consideramos que este estudio puede abonar al conocimiento especializado del profesor del modelo de Devora Ball.

de las ciencias o de las tecnologías o que le permitan profundizar teórica y conceptualmente en un campo de la filosofía, de las humanidades y de las artes.

En resumen, podemos evidenciar que existe una comunidad científica preocupada por la formación de los profesores, también encontramos referencias en la normatividad de una necesidad de formar propendiendo por la generación de redes, grupos o diferentes medios que permitan una visión holística de las situaciones de enseñanza en el aula, es por ello que encontramos suficientes evidencias desde este campo de investigación y de la normatividad para darle pertinencia a nuestro estudio.

1.1.3 Motivación y justificación desde la investigación en la Interdisciplinariedad

Proponer tareas a los profesores donde las diferentes áreas se relacionen, no es una idea nueva, podemos encontrar que el conocimiento interdisciplinario ha existido desde los griegos, pensadores que abordaban grandes retos del pensamiento humano sin necesariamente diferenciar áreas o campos indistintos del conocimiento. En el contexto de la Educación Básica y Media también se podrían retrotraer las propuestas interdisciplinarias hasta los sofistas griegos, con su *enkuklios paideia*, enseñanza circular que debía hacer cumplir al alumno un examen general de las disciplinas constitutivas del orden intelectual, afirmó Gusdorf (citado en Blasco, 2002).

El término “disciplina” aparece en Francia a finales del siglo XIX para referirse a un conjunto de saberes que posteriormente darían forma al sistema educativo; antes de ello, un profesor podría hacerse cargo de varias asignaturas, especialmente en dos conjuntos: humanidades y ciencias.

El resurgir del discurso interdisciplinario se da en los 50, cuando se evidencia la necesidad de “unificar” las ciencias en la escuela (Blasco, 2002), pero este proceso puede tener muchas aristas que los diferencian, entre las cuales se pueden establecer cuatro, cada uno de ellos con unas implicaciones prácticas y teóricas que definirán las características del trabajo de grado, a saber:

- Correlación entre dos campos de estudio
- Integración al interior de un amplio campo de estudio
- Estudios interdisciplinarios
- Programas transdisciplinarios

Los modelos de investigación educativa del siglo XXI consolidan la integración de disciplinas científicas; una de estas alternativas se realiza en una propuesta llamada STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics*) que nos sitúa ante un

nuevo marco de aprendizaje en el cual, a partir de problemas planteados, la curiosidad y el interés personal se convierten en motor y guía del conocimiento, o en un punto de partida para la exploración de diferentes soluciones a problemas reales, empoderando la imaginación y prestando especial atención al proceso de experimentación colaborativa (Cilleruelo & Zubiaga, 2014).

En Colombia el proceso de integración curricular, se da en espacios aislados o como prácticas fugaces que reflejan una necesidad imperativa pero poco trabajada. En diálogos informales con profesores de Matemáticas, identificamos que el término “STEAM” no es ampliamente conocido, se desestiman sus características y objetivos. En cierta medida eso refleja las prácticas que se llevan a cabo en el ejercicio profesional docente.

Atendiendo a esa evidencia empírica, la formación de los docentes es el primer e inmediato paso hacia una escuela que busque fortalecer habilidades científicas que propendan por el desarrollo del país. Es necesario establecer los aspectos disciplinares y didácticos en la Formación del Profesor de Matemáticas que lo consoliden como eje central de sus pares de las ciencias exactas y aplicadas en la formación STEAM, promueva en él un espíritu propositivo e innovador que reflejará en el aula un ambiente propicio para el modelamiento matemático y la resolución y formulación de problemas, unas Matemáticas interdisciplinares (Bosch et al., 2011).

1.1.4 Motivación y justificación desde la investigación en la Robótica Educativa

El mundo actual gira de forma vertiginosa en torno a la tecnología; una de sus ramas, la Robótica, llama especialmente la atención por la forma como se ha mostrado a este. En un principio, la ciencia ficción mostró a la sociedad artefactos que resolvían sus quehaceres domésticos, bélicos y de otras índoles, con una cantidad inimaginable de habilidades que un humano, de forma natural, jamás tendría.

Sin lugar a duda, esta visión posiciona a los robots como elementos complejos y exclusivos para algunas personas, ya sea por su costo o difícil construcción. La imagen de robot que evoca una persona que ha construido su concepto por medio de la ficción o las noticias, es la de arquetipos que van a otros planetas, drones que realizan oficios de mensajería o militares, humanoides cercanos a imitar cada vez más características propias de nuestra especie, mascotas o juguetes complejos, etc., todos estos elaborados por empresas propias de países desarrollados, entre otros imaginarios. Es precisamente esa representación de robot lo que ha permitido que se den dos fenómenos en el aula: una minoría de estudiantes que lo interpretan como un reto y aquellos que piensan que es muy complejo y jamás lograrán realizar un prototipo que funcione.

Es por todo lo anterior que en la educación el fenómeno de la robótica no debe ser ajeno. Por ello, es tarea de las aulas, formar a los estudiantes a manejar, construir o interpretar estos avances tecnológicos, y encarar las responsabilidades y conductas propias de su uso dentro de un marco axiológico adecuado para una sociedad que se destaca por el consumo y no por la creación.

Ciertamente, la robótica es interdisciplinar por naturaleza; Física, Matemáticas, Informática, entre otras disciplinas, se encuentran involucradas en la construcción de un robot. Pero la construcción no es el único fin; también la utilización de los prototipos en la enseñanza de conceptos físicos o matemáticos como cinemática, pendiente, algoritmos etc., son una herramienta muy poderosa que atrae a los estudiantes y dinamiza los proceso en el aula. Es por esto que López Ramírez & Andrade Sosa, (2013) diferencian el aprendizaje *de* la robótica y el aprendizaje *con* la robótica:

El aprendizaje de la robótica se concibe en una dinámica de diseño, construcción y explicación de tecnofactos (Gallego-Badillo, 1998), es decir, en un ejercicio de creación y construcción de conocimiento. El aprendizaje con robótica se asume como el proceso de creación de un contexto (Robótica – Informática) que dinamiza y da significado al aprendizaje colaborativo en las diferentes áreas del conocimiento escolar. p. 46.

De la anterior cita, reconocemos en la robótica una herramienta pedagógica adecuada para la creación de proyectos de aula, que nos han servido para desarrollar habilidades matemáticas, de la informática y físicas por lo que muestra un campo adecuado para el trabajo interdisciplinario. Además de los cognoscitivos, se han dado otro tipo de aprendizajes, por ejemplo, la resiliencia cuando los prototipos fallan en las primeras pruebas, perseverancia, trabajo en equipo, y también, habilidades de tipo estético y de presentación. Es por ello que presentamos la robótica como elemento motivador e integrador del conocimiento de las diferentes áreas (López Ramírez & Andrade Sosa, 2013).

1.2 Problema de estudio

Por lo expuesto anteriormente, existe una motivación personal nacida de las experiencias de proyectos con otras disciplinas. Sumado a esto, evidenciamos que existe una comunidad interesada en la investigación de la formación de los profesores de Matemáticas desde dos miradas, la primera interesada en qué tipo de conocimiento debe tener, y la segunda cómo se promueve ese conocimiento. Encontramos también, que algunos lineamientos de tipo legislativo esbozan e invitan al profesor a promover tareas que involucren más de un campo del conocimiento en el aula, pero no dan orientaciones explícitas de cómo hacerlo.

Además, la interdisciplinaria a lo largo de la historia ha sido natural para el pensamiento humano, aunque no se desconoce el gran avance de todas y cada una de las disciplinas gracias a su separación axiomática y epistemológica, es en la escuela dónde el discurso de integrar saberes vuela a tener protagonismo; un ejemplo de ello es STEAM, una metodología de trabajo interdisciplinar dónde las Matemáticas toman un rol de herramienta de otras ciencias, pero no evidencia cómo se promueve ese conocimiento interdisciplinar en la formación del profesor de Matemáticas.

Dentro de estos escenarios escolares de proyectos, aparece la Robótica Educativa como una disciplina integradora por la naturaleza de sus objetivos; aun así, es relegada por algunos educadores, dada la escasa formación o los imaginarios que frente a ella se han construido.

Para promover el conocimiento interdisciplinar en el profesor de Matemáticas, identificamos como un problema que su formación restringe su acción a las Matemáticas sin conexión con otras disciplinas. Es por esto, que analizaremos cómo el conocimiento del profesor de Matemáticas se exige en tareas interdisciplinarias y cambia la significación de los objetos matemáticos, desde los registros de representación semiótica de los ambientes disciplinares de las Matemáticas y la Robótica.

1.3 Objetivos del estudio

1.3.1 Objetivo general

En el presente estudio nos interesa disponer de información acerca de cómo puede promoverse un conocimiento en el profesor que pueda propiciar la interdisciplinaria en su quehacer pedagógico.

1.3.2 Objetivos específicos

Realizar al menos un ciclo dentro del marco de la investigación de diseño para evaluar los instrumentos y comparar los resultados obtenidos.

Diseñar tareas de carácter interdisciplinar para reconocer los límites y acciones de los profesores de Matemáticas frente a ellas.

Analizar el reconocimiento de los objetos matemáticos en otros campos disciplinares por medio de la caracterización de variables y su significancia desde las representaciones semióticas.

Establecer, a través de tareas interdisciplinarias ambientadas en la Robótica Educativa, cómo se amplía el campo de los registros de representación semiótica de los objetos matemáticos y su re significación en el conocimiento del profesor de Matemáticas.

2 CAPÍTULO II. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo exponemos los pilares teóricos de nuestro estudio: el conocimiento del profesor de Matemáticas, la interdisciplinariedad, la Robótica Educativa y el modelo de los registros semióticos de representación. De cada uno de ellos, se presentan algunas posturas que la literatura especializada muestra y cómo fundamentan epistemológicamente la futura solución del problema de estudio.

2.1 El conocimiento del profesor de Matemáticas

En los últimos años el conocimiento del profesor y las habilidades que necesita para la enseñanza de las Matemáticas, se han convertido en un centro de interés de la comunidad científica del campo de la educación. Este interés se da desde, al menos, dos puntos de vista: el primero, sobre qué tipo de conocimientos necesita el profesor de Matemáticas y, el segundo, sobre cómo adquiere dichos conocimientos. Este afán e interés de la comunidad educativa es evidente, entre otros hechos, cuando aparece como tema en la mayoría de los congresos de Educación Matemática, o con la creación de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* en 1998, que publica artículos relacionados con el tema (Aguilar et al., 2013).

Es así como diferentes grupos de investigación proponen modelos sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas, que con el transcurso del tiempo se han ido cualificando y mejorando. A continuación, presentamos de manera sucinta las características de algunos modelos que se han formulado en este campo de investigación.

2.1.1 Modelos del Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Los diversos modelos teóricos sobre el tipo de conocimiento que los profesores de Matemáticas deben tener para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes, suelen reconocer que no es suficiente el conocimiento disciplinar; además de este, se debe tener conocimiento sobre como aprende el estudiante, sobre los contenidos matemáticos escolares y su organización durante el proceso educativo. La manera como se abordan estos conceptos, delimita los siguientes modelos fundamentados en el conocimiento didáctico del profesor (Godino, 2009).

2.1.1.1 Modelo del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza (PCK)

El trabajo propuesto por Lee Shulman (1986) enfatiza en que no es suficiente dominar el conocimiento de la disciplina por parte del profesor y plantea las siguientes componentes descriptivas del conocimiento del profesor: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico general (PCK)³, conocimiento curricular, conocimiento sobre los alumnos, conocimiento de los contextos educativos, conocimiento de fines y valores educativos y conocimiento didáctico del contenido.

El trabajo de Shulman es considerado como el precursor en el campo del conocimiento para la enseñanza y el aporte más valioso tiene que ver con la asignación de un lugar destacado para el Conocimiento Pedagógico del Contenido (Flores-Medrano et al., 2016; Godino, 2009). En este trabajo también se abordan las fuentes del conocimiento para la enseñanza, entre las cuales destaca:

- La formación académica en la disciplina a enseñar.
- Los materiales y el contexto del proceso educativo.
- La investigación sobre los fenómenos socioculturales que influyen en el que hacer de los profesores.
- La práctica misma del ejercicio docente.

2.1.1.2 Modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)

El modelo del “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT)⁴ es propuesto por Ball, Thames y Phelps en diversos trabajos. En este, desde el modelo de Shulman, se da énfasis a dos categorías: el conocimiento de la materia (SMK)⁵ y el conocimiento didáctico del contenido (PCK)⁶; en cada una de ellas se establecen otra subcategorías. Veamos:

El Conocimiento del Contenido Matemático (SMK), contempla el saber matemático y los componentes propios del quehacer profesional del profesor de Matemáticas. Se subcategoriza en:

- Común (CCK)⁷: hace referencia al saber básico de la matemática que se debe conocer y enseñar a nivel educativo escolar.

³ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Pedagogical Content Knowledge*.

⁴ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Mathematical Knowledge for Teaching*.

⁵ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Subject Matter Knowledge*.

⁶ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Pedagogical Content Knowledge*.

⁷ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Common Content Knowledge*.

- Especializado (SCK)⁸: es el conocimiento que involucra el saber de la procedencia de los contenidos matemáticos, es superior al saber común y específico del profesor de Matemáticas.
- En el horizonte (HCK)⁹: es el conocimiento que permite relacionar los contenidos de enseñanza con los contenidos y temáticas de la Matemática Superior.

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK): También llamado Conocimiento Didáctico del Contenido, hace referencia al conocimiento sobre la forma como aprenden los estudiantes, los errores que cometen, las estrategias utilizadas en la enseñanza y la relación entre los contenidos, el currículo y la enseñanza. Sus subcategorías son:

- Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT)¹⁰: se refiere a las decisiones que toma el docente sobre las actividades y tareas, la secuencia y la dependencia de los contenidos para la enseñanza asertiva.
- Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)¹¹: en él se combinan los saberes acerca de los estudiantes y los saberes de las Matemáticas, las estrategias de la enseñanza y los errores frecuentemente cometidos durante el aprendizaje.
- Conocimiento del Contenido y del Currículo (KCC)¹²: se refiere al conjunto de contenidos organizados para la enseñanza de acuerdo al nivel, así como los materiales, textos y demás ayudas educativas.

El principal aporte de las investigaciones y la propuesta del equipo de Deborah Ball es la inclusión de la subcategoría del “Conocimiento Especializado del contenido Matemático” como único y exclusivo de la labor del profesor de Matemáticas, es decir, no identificable en profesores de otras áreas o en profesionales con otros aprendizajes de la Matemáticas (Aguilar et al., 2013).

La siguiente ilustración es una representación visual del modelo propuesto por Ball y sus colaboradores.

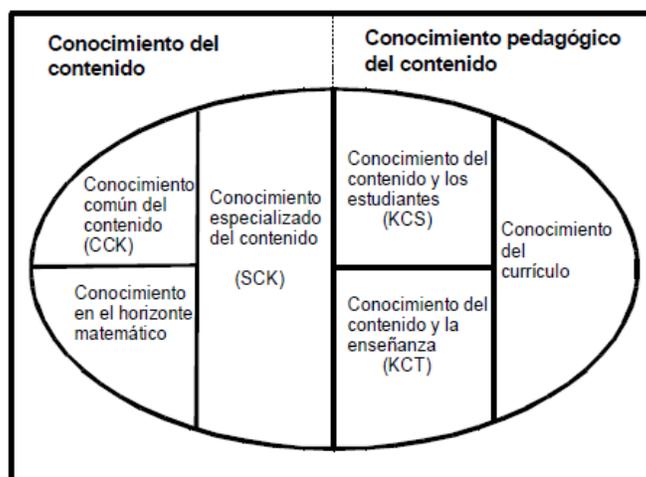
⁸ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Specialized Content Knowledge*.

⁹ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Horizon Content Knowledge*.

¹⁰ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Content and Teaching*.

¹¹ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Content and the Student*.

¹² Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Content and Curriculum*.



Gráfica 1: Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377).

2.1.1.3 Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Este modelo propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, el cual nombran con la sigla MTSK¹³, es un modelo analítico de tipo descriptivo, adecuado para elaborar una interpretación del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas desde el punto de vista integral. En el modelo se entiende que la especialización afecta a todos los subdominios, y no exclusivamente a las Matemáticas, como en el del modelo de Ball.

Acá también el Conocimiento Matemático (MK)¹⁴ tiene tres subdominios, así como el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Sin embargo, aparece un nuevo componente en el modelo y es precisamente las concepciones y creencias sobre la Matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como una dimensión que permea todo el conocimiento del profesor. (Aguilar et al., 2013).

Los subdominios del Conocimiento Matemático son: conocimientos de los temas (KoT)¹⁵, conocimientos de la estructura matemática (KSM)¹⁶, conocimiento de la práctica matemática (KPM)¹⁷. En el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se consideran las subcategorías: conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)¹⁸, conocimiento de

¹³ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Mathematics Teacher's Specialiced Knowledge*.

¹⁴ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Mathematics Knowledge*.

¹⁵ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Topics*.

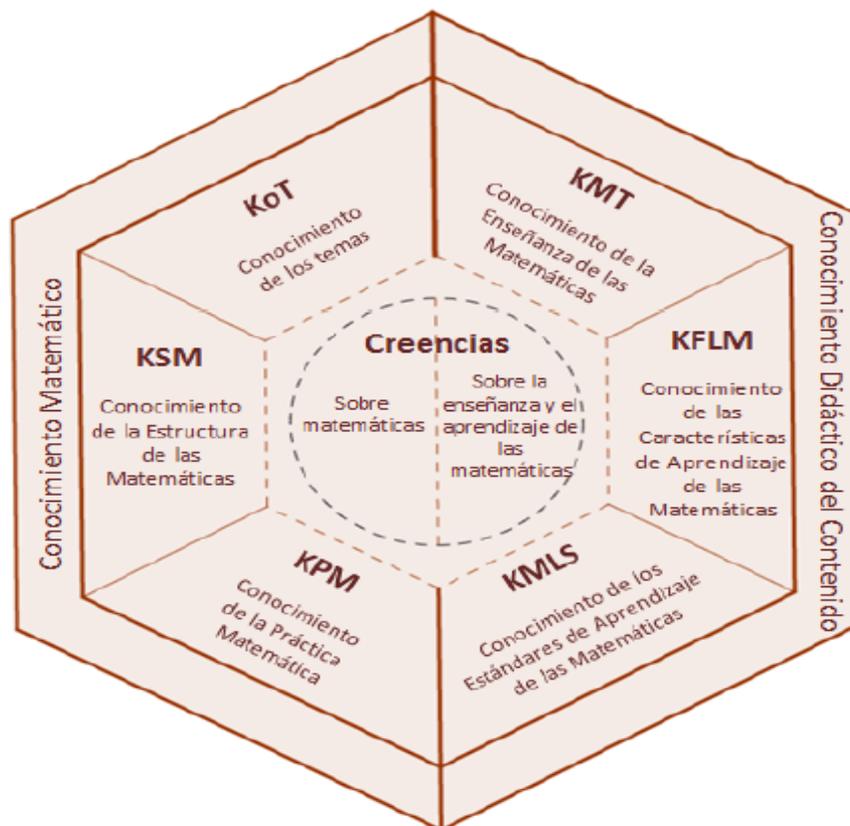
¹⁶ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of the Structure of Mathematics*.

¹⁷ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of the Practices in Mathematics*.

¹⁸ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Mathematics Teaching*.

las características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)¹⁹, Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)²⁰.

Los dominios y subdominios los podemos identificar en la siguiente ilustración del modelo.



Gráfica 2 Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013, p. 5065)

2.2 Interdisciplinariedad

2.2.1 Concepto de interdisciplinariedad

La interdisciplinariedad es un concepto que, en principio, en el ámbito educativo toma vigencia como alternativa a la estructuración bajo un modelo atomizado en diferentes disciplinas, que propende por un diseño curricular basado en el principio didáctico y metodológico de la convergencia de las diferentes disciplinas sobre un objeto de enseñanza

¹⁹ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Factures of Learning Mathematics*.

²⁰ Siglas correspondientes a la expresión inglesa *Knowledge of Mathematics Learning Standards*.

común, que permita recrear ambientes pedagógicos adecuados y asertivos para los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, el trabajo interdisciplinar se enfrenta a unas barreras naturales que debe superar para empezar a ganar campo como alternativa curricular, entre otros: la estructura mono disciplinar de los programas curriculares universitarios, el cambio estructural universitario de departamentos disciplinares por centros e institutos de trabajo interdisciplinar, la identificación de objetos de estudio interdisciplinares de interés común, el rompimiento de barreras y paradigmas mentales y culturales de la educación y formación tradicional, el abuso de la interdisciplinariedad so pena de relegar y olvidar la importancia de la formación disciplinar (Uribe Mallarino, 2012).

No obstante lo anterior, es pertinente delimitar el término “interdisciplinariedad” y lograr una aproximación a su origen y campo de acción.

El concepto de interdisciplinariedad es utilizado en el campo de la educación y particularmente en la enseñanza y formación docente (Lenoir & Hasni, 2004). Tiene, al menos, tres acepciones de acuerdo con su origen y funcionalidad; estas se pueden sintetizar de acuerdo a su lugar de origen en la acepción francesa, norteamericana y brasileña (latinoamericana).

La perspectiva filosófica y epistemológica, de origen francés, fomenta interacciones internas e interdisciplinariedad académica en la búsqueda de una síntesis conceptual; es una interdisciplinariedad reflexiva y crítica que unifica el saber científico y tiene una estructura jerárquica de las disciplinas basadas en una reflexión epistemológica sobre los saberes disciplinares en interacción, que funciona como una super-ciencia o meta-disciplina fundamentada en la lógica racional, esto tiene lugar en carreras modernas como la ingeniería biomédica. La segunda concepción es la perspectiva instrumental que usa interacciones externas en búsqueda de respuestas operacionales a preguntas hechas dentro de la sociedad; este enfoque norteamericano utiliza la interdisciplinariedad por proyectos para llegar a un saber útil inmediato y funcional sustentado por la lógica instrumental, por ejemplo, los proyectos de competencias de robots basados en STEAM. Finalmente, la perspectiva afectiva o de interacciones internas al sujeto, promulgada en Brasil, busca respuestas operacionales, pero a preguntas personales y recae en una interdisciplinariedad introspectiva cuyo pilar es el yo integrador y la realización del sujeto humano. Este tipo de enfoque se da en los proyectos que propenden por el equilibrio entre el desarrollo de la ciencia y la tecnología con el cuidado del medio ambiente.

En el dinamismo del mundo actual, lejos de disgregar los enfoques, se busca que la interdisciplinariedad recurra a ellos en forma complementaria entre la mente (la razón y el

pensamiento crítico), la mano (acciones productivas, prácticas y útiles) y el corazón (considerar las dimensiones y satisfacciones humanas), con el fin de fortalecer un innovador enfoque interdisciplinario propicio para la enseñanza y formación docente (Lenoir & Hasni, 2004).

Ahora bien, es posible que en la cotidianidad se confunda el trabajo interdisciplinar con otros términos, por tal razón es importante aclarar las diferentes modalidades de la transversalidad disciplinar que, de acuerdo a la forma de integración de dos o más campos de formación disciplinar, acuña los términos “multidisciplinariedad”, “pluridisciplinariedad”, “interdisciplinariedad” y “transdisciplinariedad” (Ruiz Ruiz, Castaño Pombo, & Boronat Mundina, 1999), que definimos muy sucintamente a continuación:

- **Multidisciplinariedad:** Es la yuxtaposición de diferentes disciplinas, ensambladas mediante un currículo; consiste en el estudio de un objeto, en principio propio de una disciplina, desde la perspectiva convergente de varias disciplinas.
- **Pluridisciplinariedad:** También se da la yuxtaposición de disciplinas pero más o menos cercanas a un área de conocimiento; tanto en la pluridisciplinariedad como en la multidisciplinariedad el aporte y resultado sigue al servicio exclusivo de la disciplina generadora del estudio inicial.
- **Interdisciplinariedad:** Integración de dos o más disciplinas, desde la comunicación de ideas hasta los conceptos fundamentales y la metodología; el estudio se realiza con la cooperación de varias disciplinas y el aporte adicional está en la transferencia de métodos y resultados de una disciplina a otra. Se pueden distinguir tres grados de interdisciplinariedad (Martín, 2004) :
 - De aplicación: cuando los métodos de una disciplina se transfieren a otra para producir nuevos resultados.
 - Epistemológico: cuando los métodos transferidos generan análisis interesantes en el campo epistemológico de otra disciplina.
 - De concepción: genera nuevas disciplinas a partir de otras más simples.
- **Transdisciplinariedad:** Implica un planteamiento de principios axiomáticos comunes a un conjunto de disciplinas; es la unidad de conocimiento para percibir la realidad desde múltiples niveles y dimensiones.

En nuestro trabajo asumimos la interdisciplinariedad como la interacción entre dos o más disciplinas desde la misma comunicación de ideas y conceptos (mediación semiótica de las representaciones en las diferentes disciplinas) hasta la integración recíproca de conceptos fundamentales y de metodología (Ruiz Ruiz et al., 1999). Sin embargo, no ubicamos la

interdisciplinariedad en el terreno curricular de la Educación Básica o Media, sino en el ámbito de la educación del profesor de Matemáticas y, específicamente, de su conocimiento.

Desde esta definición y ubicación, buscamos un acercamiento a la interdisciplinariedad como un primer contacto a una formación que permita acceder al conocimiento de diferentes disciplinas y sus formas de conocer. Nuestra intención es reconocer las ventajas de una propuesta integradora disciplinar en la formación de los profesores, entre las que destacamos fomentar el trabajo en equipo, delimitar objetos de estudio de varias áreas del conocimiento y utilizarlos para el trabajo interdisciplinar, crear hábitos de pensar y actuar en forma interdisciplinar y llevarlo a las aulas de clase en todos los niveles de educación, propiciar un mayor acercamiento a la realidad del entorno y del tiempo en el que viven los profesores en ejercicio y formación.

Así, buscamos mediante el uso de las tareas propuestas a los profesores, desde un enfoque interdisciplinario, analizar el desarrollo de las habilidades cognitivas y comunicativas que implica la interacción entre distintos saberes, basado en el desarrollo del pensamiento interdisciplinar, como actividad cognitiva compleja que se potencia desde la integración de los conocimientos particulares y las habilidades comunicativas entre diferentes campos del saber. (RED INNOVA CESAL, 2014)

2.2.2 Antecedentes de investigación asociados a la interdisciplinariedad

En general, los antecedentes investigativos acuñan el término interdisciplinariedad, esto implica que independientemente del matiz y área del conocimiento en la cual se centra su temática de estudio, los conceptos son extrapolables a todos los campos e implica necesariamente la educación en formación matemática.

Después de la lectura sobre varias investigaciones, destacamos los aspectos más relevantes de las siguientes:

2.2.2.1 Investigación interdisciplinar: una experiencia de posgrado universitario

Esta investigación llevada a cabo de 2009 a 2013 en la Universidad de Barcelona plantea, en medio de la propuesta de la Facultad de Formación del Profesorado, ofrecer un programa de formación que toma la interdisciplinariedad como punto metodológico, conceptual, teórico y organizativo, y que entiende la interdisciplinariedad como una característica relevante de la cultura contemporánea y un objetivo muy destacable en la innovación pedagógica actual (J. Gustems, L. Sánchez, J. Duran & Burset, 2013). El problema de investigación busca responder si es posible el trabajo interdisciplinar en el marco académico de una universidad organizada y estructurada mayoritariamente en forma

disciplinar. El marco teórico aborda un vistazo histórico del concepto y la sustentación de cómo y por qué puede ser visto como un principio metodológico, de organización docente e investigativo, una herramienta eficaz para la educación de valores y una estrategia pertinente para la conceptualización científica.

La metodología de este trabajo fue de tipo cualitativo descriptivo, a partir de la observación de los propios participantes del curso de maestría; se sirvió del modelo de la matriz D.A.F.O. (debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades) que permitió llevar un registro de lo observado y además se aplicó un cuestionario para recoger *expost-facto* las opiniones de los alumnos que finalizaban el máster. Entre los resultados se puede destacar que es viable implementar esta metodología y sus resultados son muy favorables, pero requiere disposición y apertura al cambio de la parte administrativa porque implica mayores costos y esfuerzos en la capacitación de los formadores de profesores; además implica mayor número de reuniones y tiempo para el trabajo en equipo que es solventado con las plataformas digitales y herramientas virtuales.

2.2.2.2 La creación de asociaciones entre los profesores y estudiantes universitarios interesados en Matemáticas y Ciencias de la Educación secundaria²¹

La investigación realizada desde el año 2013, auspiciada por el Departamento de Educación de California y el Consejo de Investigación Nacional de Estados Unidos, y aplicada en el Instituto de Verano, promueve el trabajo interdisciplinario como excusa del trabajo de formación de equipos de estudio de Ciencias y Matemáticas, para apoyar el aprendizaje de los contenidos disciplinares de las áreas mencionadas (Swanson & Coddington, 2016); tiene como finalidad investigativa identificar si el aprendizaje en comunidades de práctica entre posibles aspirantes a estudios de formación docente y profesores de formación en pregrado, sirve para mejorar los resultados de la práctica docente y al mismo tiempo incide en la decisión de forma más asertiva en la decisión de estudiar docencia de Matemáticas o Ciencias Naturales. La información del marco teórico fundamenta los antecedentes del trabajo en equipo, la importancia previa de la formación disciplinar, y las características y el perfil de los participantes en este tipo de proyectos. La metodología utilizada fue de investigación acción en la cual los participantes de los grupos pertenecientes a los cursos de pregrados sistematizan la información de procedimientos y resultados encontrados en el desarrollo del proyecto; utilizaron estrategias como el seguimiento y observación de sesiones, seminarios de educación universitaria, interacción en el aula de clase y entrevistas de reflexión de los participantes. Los resultados sistematizados reflejan que al final de la intervención los participantes utilizan una propuesta de trabajo con un discurso compartido,

²¹ Traducción personal del título original en Inglés *Creating partnerships between teachers and undergraduates interested in secondary math science education.*

co-liderazgo en las acciones, intercambio de recursos y planificación de las lecciones y ruta de trabajo; un resultado importante es que las personas se identifican como un recurso muy importante así como lo es la comunicación adecuada entre los aspirantes, los maestros en formación y los formadores de maestros.

2.2.2.3 Preparación para un futuro interdisciplinario: una perspectiva desde investigadores que inician su carrera²²

La investigación realizada en el 2013, focaliza la atención en las características que deben tener los encuentros diseñados para ayudar a fomentar la investigación interdisciplinaria (Bridle, Vrieling, Cardillo, Araya, & Hinojosa, 2013). Teoriza las características principales que deben tener un grupo y los criterios para su formación en actividades académicas interdisciplinarias, y las sustenta sobre las diversas lógicas de la interdisciplinariedad y la importancia de aspectos relevantes como: el tema de discusión, el tamaño del grupo, los antecedentes y el perfil de los integrantes, el semestre que cursan en sus respectivas carreras, el lugar y el tiempo del encuentro. En esta investigación, de naturaleza descriptiva, el investigador realiza una evaluación crítica de los encuentros interdisciplinarios, el desarrollo práctico y los resultados de los mismos; además, se clasifican dos tipos de encuentro, el primero llamado “de cultivo”, que busca crear conciencia de lo que ofrece la interdisciplinariedad y los desafíos que implica, el segundo, “de desarrollo” que busca generar ideas conjuntas y resultados concretos. Los encuentros se llevan a cabo durante cuatro días, luego se realiza una encuesta posterior al evento; posterior a esto, se procede a la revisión de las observaciones de las experiencias comparadas con otras similares, para finalmente sistematizar la información. La investigación tuvo como hipótesis que los encuentros interdisciplinarios son un medio para fomentar la investigación y la formación con la metodología interdisciplinaria. A este respecto, la investigación finalmente arrojó resultados que indican que este tipo de encuentros son eficaces para motivar el trabajo en equipo, porque promueven el propósito de aprender e interactuar con otros, es por esto que la propuesta se amplía para formación de pregrado.

2.2.2.4 La transdisciplinariedad: la ventaja de un enfoque holístico a la vida²³

Sustenta los estudios interdisciplinarios y toma como punto de partida la naturaleza humana, que permite el enfoque holístico de la transdisciplinariedad sobre la dinámica fragmentada de la educación impuesta hasta el momento (Jeder, 2014). La investigación pretende recolectar la información sobre el desarrollo natural holístico de la vida del ser humano, que hace pertinente la propuesta de las ventajas de un plan de estudios integrador de varias disciplinas. El marco teórico muestra diferentes modelos de transversalidad en la

²² Traducción personal del título original en Inglés.

²³ Traducción personal del título original en Inglés.

escuela y los propósitos de la educación para la integración de la vida social y en un mundo plural que requiere de la creatividad y flexibilidad de pensamiento, propios de un trabajo multidisciplinar. Como conclusión se establece que la visión integradora de los fenómenos, objetos, y procesos en la formación docente, permite al profesor ser consecuente con las leyes de la naturaleza, humanas, ciencias exactas, personas y cultura que se encuentran holísticamente en la vida del ser humano.

2.2.2.5 Interdisciplinaridad en la investigación educativa. Transferencia de la matemática educativa a otras didácticas específicas

Esta investigación busca recuperar la experiencia del diseño de estrategias materiales educativos en las Ciencias, las Matemáticas y la cultura financiera, en módulos transversales con experiencias didácticas de las diferentes disciplinas (Suárez, 2012). La pregunta de investigación recae sobre las actividades transversales de aprendizaje y su diseño, la metodología, los contenidos, la implementación. El marco referencial realiza un análisis de los antecedentes sobre el diseño de actividades y talleres de aula en las diferentes áreas del conocimiento. La metodología de investigación plantea un plan de cuatro etapas: intercambio de experiencias y conformación de un marco común de diseño de materiales, diseño de estrategias y materiales educativos, pilotaje de los materiales con los profesores y estudiantes y, finalmente, el reporte de resultados; además, es una investigación de carácter cualitativo que busca dejar como resultado, un material transversal de aplicación didáctica.

2.2.2.6 En busca de una manera conectada del saber: El caso de una profesora de Matemáticas

Es una investigación que propone un análisis interdisciplinar para la enseñanza de los conceptos de densidad y pendiente de una recta, utilizando como apoyo equipos de trabajo formados por profesores de Matemáticas y Ciencias (Agudelo-Valderrama & Martínez, 2015). El problema se plantea desde la necesidad de buscar una estrategia para explicar el concepto de pendiente y correlacionarlo con el de densidad. En el marco teórico se sustenta la metodología de la enseñanza para la comprensión, las diferentes acepciones de la pendiente y el marco legal nacional de la educación interdisciplinar. La metodología utilizada en esta investigación cualitativa es un estudio de caso, que utilizó grabaciones, entrevistas, observaciones de clase y talleres. El resultado de la investigación refleja que la profesora, a partir del trabajo interdisciplinario, mejoró sus conocimientos para fortalecer su desempeño profesional.

2.2.2.7 Formación del profesorado universitario y de secundaria: una propuesta globalizadora desde la práctica

Esta investigación toma la figura de Leonardo Da Vinci, como hilo conductor para desarrollar un proyecto educativo interdisciplinario desde la práctica en el aula de clase

(Igea, Rodríguez, Rosa, & Tena, 2008). Con el proyecto, llamado “La Cocina de Leonardo”, se busca responder la pregunta sobre si la organización de equipos de profesores de diferentes áreas favorece el funcionamiento de los centros educativos. En el marco teórico aparecen los conceptos disciplinares tratados por Da Vinci en su obra y en la aplicación en el proyecto; también se aclaran los términos asociados a la multidisciplinariedad y sus diferentes facetas. En la parte metodológica se realiza una investigación-acción de tipo cualitativo descriptivo. Se espera como producto final la publicación de un libro con las actividades y reflexiones sobre la experiencia de la ejecución del proyecto, el cual concluyó que el primer obstáculo de los trabajos interdisciplinarios es la disposición de los participantes al cambiar de paradigma, y, en segundo lugar, los problemas administrativos para los cambios de infraestructura escolar.

2.2.2.8 Interdisciplinariedad, los problemas causados por la falta de mercadeo efectivo

En esta investigación se plantea la inquietud de por qué la resistencia a la implementación del trabajo interdisciplinar y se busca responder si el concepto de interdisciplinariedad se entiende bien y si la falta de claridad impacta su reputación dentro de la industria y la sociedad en general (Wardley & Bé Langer, 2015). En el respaldo teórico se definen los conceptos de disciplinar como “comunidades reconocidas de académicos”, cuya conducta se rige por las convenciones, lenguaje técnico, objetivos particulares y métodos de análisis y normas, clasificando a los académicos en grupos acordes a los temas de estudio.

Además, definen interdisciplinariedad como una combinación e integración de las perspectivas y metodologías, una cuestión compleja que excede los límites de una sola disciplina. Por lo tanto, el avance cognitivo no sería posible a través de la lente de una sola disciplina, plantea que existe un consenso de comprensión del concepto “interdisciplinariedad”, lo que no excluye que sea incluido en las filas de las disciplinas establecidas.

La falta de claridad en el mensaje y no enfocarlo en el mercadeo no pueden representar pérdidas de oportunidades y poca penetración en problemas prácticos. Saber enviar el mensaje y vender la idea de la interdisciplinariedad es importante para las universidades porque les permiten encontrar financiación por parte de los gobiernos y las empresas y amplían los resultados y las habilidades de los involucrados.

La investigación es descriptiva exploratoria que busca una visión general y aproximada al tema. La investigación logra explicar la manera en la que la interdisciplinariedad y el trabajo disciplinar han sido definidos teóricamente, e intenta posicionar ambos conceptos en el ámbito académico y discute si la interdisciplinariedad está en condiciones de convertirse en una disciplina. Afirma que las universidades deben estar en condiciones de identificar audiencias potenciales, diseñar estrategias de comunicación y seleccionar los

canales adecuados para transmitir un mensaje claro sobre lo que es el trabajo interdisciplinario, como si fuera una estrategia de mercadeo similar a la de cualquier empresa. Se prevé que el trabajo interdisciplinario logre desarrollar nuevas disciplinas productos de una amplia gama de investigaciones, acogiendo áreas de conocimiento débiles e integrándolas para establecer los cimientos de nuevas disciplinas.

2.2.2.9 La formación docente: entre la indiferencia y la seducción

Esta investigación realiza una revisión literaria sobre las ventajas de la formación interdisciplinar de los profesores para mejorar su desempeño profesional; busca argumentar sobre la fundamentación epistemológica que sustenta una organización curricular, y plantea la posibilidad y viabilidad de diseñar currículos interdisciplinarios (Morón, Peña, & Trujillo, 2006). Finalmente enfatiza que la indiferencia del profesor es el primer y gran obstáculo para llevar adelante cualquier estrategia de innovación y romper el paradigma disciplinar en el cual hemos sido educados. Se espera que el trabajo transversal de las disciplinas en la universidad comience a generar una nueva era en la educación y paso a paso se transforme el trabajo en el salón de clases.

2.2.2.10 Cómo y por qué enseñar interdisciplinariamente: Práctica de investigación

La investigación propone como pregunta problema ¿por qué es realmente importante enseñar a los estudiantes desde la interdisciplinariedad y por qué esto tendría ventajas en la comunicación con dichos estudiantes? (Szostak, 2007). A partir de un análisis del desarrollo histórico de la interdisciplinariedad aplicada al ambiente educativo y de investigación, se buscan los fundamentos que defienden la idea de que la enseñanza interdisciplinaria es más apropiada para cumplir los objetivos propuestos. Se identifica que la literatura permite explorar la relación "simbiótica" que existe entre los procesos integrados de la interdisciplinariedad y la precisión con la que se puede indagar y aprender algún concepto desde el estudio disciplinar; al seguir de cerca la evolución y la manera cómo la interdisciplinariedad se abre caminos en los procesos de enseñanza, es claro que esta va formando relaciones con otras corrientes intelectuales, y que es fenómeno de interés para comprender si habría o no un método efectivo para "aplicar" la interdisciplinariedad. También muestra las desventajas de la interdisciplinariedad, sobre todo en la mezcla con programas y prácticas dadas para la enseñanza disciplinar. Para comprender más, el autor explora qué y cómo aplicar la interdisciplinariedad sin que ello suponga desventajas en la formación de los estudiantes.

Al comprender tanto la visión de los autores que defienden y ejercen el enfoque disciplinario y darle una mirada actual a la implementación de currículos interdisciplinarios en la academia, este artículo brinda una mirada crítica sobre cómo no ceñirse solo a uno de estos métodos, sino que es cuestión de saber cuál enfoque aplicar dependiendo de si se requiere la integración que ofrece uno, o el análisis específico del otro. Por último, es

importante señalar que la revisión bibliográfica constituye un breve estado del arte de acuerdo al criterio que él tuvo en su participación con la Asociación de Estudios Integradores. Además, se realizó una revisión de literatura sobre interdisciplinariedad, el trabajo disciplinar y las co-relaciones que se establecen en el marco de la práctica investigativa. Finalmente se puede concluir de la investigación que:

- Tanto el enfoque interdisciplinario como el disciplinario tienen ventajas y desventajas en los procesos de educación. A partir de los procesos de investigación llevados a cabo, con los cuales se pretende entender la naturaleza de ambos enfoques, es posible identificar cómo la interdisciplinariedad pueda tener una mejor relación con las actuales corrientes que se expresan en las experiencias de enseñanza, tales como el posmodernismo, los análisis complejos y el feminismo.
- Se hace necesario comprender las mejores prácticas desde la interdisciplinariedad para no confundir a los estudiantes con mucha información; los cursos, la planeación y los materiales deben servir de motivadores para que ellos mismos sean quienes establezcan conexiones entre lo que se enseña.
- Supone ventajas conocer a fondo cómo y cuándo utilizar alguno de las dos orientaciones; en ocasiones, de acuerdo con la edad, lo que se quiera enseñar, comunicar y la relación que se desee establecer con los alumnos será más apropiado y efectivo guiarse por lo especializado de la enseñanza disciplinar, mientras que, en otros momentos convendrá el carácter integrador de la interdisciplinariedad.

2.2.2.11 STEAM

STEM²⁴ es uno de los proyectos en los que se relacionan varias disciplinas, desarrollado en diferentes ámbitos escolares de países anglosajones, fundamentado en la información que suministran los principios y estándares curriculares para la educación Matemática del NCTM y principios didácticos del aprendizaje por proyectos (Guerrero, 2015).

Dentro de este marco, se busca lograr la transdisciplinariedad (Blasco, 2002) rompiendo las barreras que separan cada área y trabajando por proyectos como, por ejemplo, proyectos de robótica, modelos de energía eólica, entre otros, y que integren curricularmente sus contenidos. (Cilleruelo & Zubiaga, 2014).

Cabe resaltar que la iniciativa inicia desde dos importantes problemáticas. Primero, la poca vinculación de las mujeres en carreras de Ciencia y Tecnología por connotaciones sociales frente al estudio de las Matemáticas (Oliveros, Valdez Salas, & Wiener, 2016). Segundo, la escasa cantidad de graduados de ingenierías versus otras ramas humanas del conocimiento,

²⁴ Es un acrónimo en Inglés para designar las disciplinas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas.

fundamentando que carreras como la Ingeniería están directamente relacionadas con el desarrollo de un país (Ruth, 2017).

En el rastreo sobre la formación con interdisciplinariedad encontramos el manifiesto de varias investigaciones sobre el tema. También evidenciamos que no hay investigaciones centradas en la formación del profesor de Matemáticas a partir de ambientes interdisciplinarios. Esto nos permite ver la pertinencia de nuestro estudio dado que existe el antecedente de una comunidad investigando en este campo. Además, las dificultades que se esbozaron en las investigaciones anteriormente descritas, como lo son la disposición administrativa, adecuaciones físicas, la oposición al cambio de paradigma, permiten proponer un planteamiento que busca otro camino para la comprensión frente al conocimiento del profesor de Matemáticas desde sus tensiones en la solución de tareas interdisciplinarias.

2.3 Robótica Educativa

La necesidad educativa del mundo actual, demanda de las nuevas generaciones una preparación tecnológica y en comunicaciones para poder estar inmersas en los nuevos ambientes de producción y laborales acorde al devenir de los nuevos avances científicos y tecnológicos. Este fenómeno obliga un nuevo tipo de docente preparado para iniciar a sus estudiantes en ese tipo de conocimiento y capaz de despertar el interés en el conocimiento científico y tecnológico.

La RE es una disciplina que tiene por objeto la concepción, creación y puesta en funcionamiento de prototipos robóticos y programas especializados con fines pedagógicos (Ruiz-Velasco, 2007). Es un sistema de enseñanza interdisciplinar que potencia las habilidades y competencias científicas y de innovación. La interdisciplinariedad se debe a que abarca conceptos relacionados con las áreas de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas. Un ejemplo actual de trabajos y de formación en diferentes campos del conocimiento, incluida la educación, que utiliza la RE, es la metodología STEM. (*Science, Technology, Engineering, Mathematics*).

La RE se da desde dos perspectivas diferentes: “aprendizaje de la Robótica”, en la cual ella es el objeto de aprendizaje, y “aprendizaje con Robótica” que la utiliza en el aprendizaje de temáticas en diversas áreas del conocimiento.

De otra parte, la RE genera un entorno y un ambiente pedagógico capaz de potenciar al máximo los objetos de aprendizaje soportados en las distintas maneras de comunicación y

la puesta en acción de los sistemas de representación. La RE posibilita el tratamiento y traducción de diferentes sistemas de representación propios del conocimiento y en particular del conocimiento matemático (López & Sosa, 2013; Lamoyi, 2012).

La RE incorpora la Robótica y automatización de procesos como un elemento mediador para el logro de aprendizajes en los procesos formativos. Propicia ambientes interdisciplinarios y la puesta en acción de los sistemas de representación semiótica. Genera un efecto en la motivación e interés en las actividades académicas. Promueve el interés por las carreras de las Matemáticas y Ciencias. Desarrolla las competencias científicas y Matemáticas a través de la experimentación. Fomenta el trabajo cooperativo, las competencias ciudadanas y la disposición ante la contingencia. Además puede ser utilizada como medio pertinente para el aprendizaje (Reyes- González & García- Cartagena, 2014; Posada & Sepúlveda, 1999).

Las razones expuestas anteriormente nos permiten recurrir a la RE como elemento mediador en el diseño de las tareas propuestas a los profesores en nuestra investigación. De ellas, resaltamos que la RE favorece la interdisciplinariedad y el trabajo con los registros de representación semiótica de los objetos matemáticos entre diferentes ambientes disciplinares. Por tanto, asumimos como hipótesis de trabajo que las actividades planteadas desde la RE favorecen el conocimiento del profesor de Matemáticas.

2.4 Modelo de registro de representación semiótica

El trabajo necesario para solucionar una tarea interdisciplinaria requiere una reflexión sobre el conocimiento y dominio de los conceptos de varios campos del conocimiento humano y su relación con las representaciones semióticas, que invita a precisar conceptos y terminología en el campo de la semiótica (Lupiáñez & Moreno, 2001).

La Didáctica de la Matemática, presenta como uno de sus enfoques el semiótico, para explicar, plantear y analizar las prácticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas desde el lenguaje, en general, y desde los sistemas de representación de los objetos matemáticos, en particular. En este enfoque Raymon Duval plantea la Teoría de los Registros de Representación Semiótica fundamentada en el hecho que el acceso y la comprensión de los objetos matemáticos se da a partir de sus representaciones.

Duval manifiesta que la actividad cognitiva requerida en Matemáticas presenta dos características importantes, la importancia primordial de las representaciones semióticas y la variedad considerable de los tipos de representación movilizados. Los objetos matemáticos a diferencia de otras ciencias no son tangibles y son las representaciones las

que permiten el acceso a ellos, es decir “la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación” (Duval, 2006).

Las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos. Un registro es:

un sistema semiótico con reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido. Las posibilidades de combinación son las que dan a un sistema semiótico inventiva y la permiten efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación. Estas reglas determinan el funcionamiento del sistema y su sintaxis en sentido amplio. (L. Oviedo & Kanashiro, 2012).

A continuación, presentamos los aspectos básicos de la Teoría de las Representaciones Semióticas y un primer acercamiento a los conceptos que son de interés para nuestro estudio.

Con referencia a los sistemas semióticos de representación Duval distingue dos tipos de registros:

- Los registros mono-funcionales creados explícitamente para su uso en la comunidad matemática y en los procesos que toman la forma de algoritmo. Son artificiales, abstractos y buscan una sola función cognoscitiva el procesamiento matemático en general.
- Los registros multifuncionales que llenan una amplia gama de funciones cognoscitivas: comunicación, procesamiento de información, concientización, imaginación, etc.

No todos los sistemas semióticos son registros, solo los que permiten una transformación de representación. Una transformación de representación es el cambio de un registro de representación cuando se realizan los diferentes procesos matemáticos. Hay dos tipos de transformación de representaciones semióticas que son diferentes y dependen del tipo de registro que estemos utilizando, a saber:

- Tratamientos: son las transformaciones propias de cada registro, de acuerdo con las únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de estas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Los tratamientos son importantes desde el punto de vista matemático, su uso indica destreza en el manejo algorítmico y desarrollo del procesamiento matemático.
- Conversiones: son transformaciones que muestran la habilidad para el cambio de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un

sistema de representación a otro, sin modificar los objetos que se indican, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. Implica diferentes funciones cognoscitivas y es básicamente el factor decisivo para el aprendizaje, porque ayuda a discriminar en una representación dada lo que es matemáticamente relevante y lo que no.

En la enseñanza actual generalmente se da más énfasis al tratamiento que a la conversión, y cuando se realizan conversiones se enfatiza más la conversión en una dirección que en otra. Las dificultades más importantes y las más decisivas de cambio de registro, de acuerdo a Duval, no se dan entre dos registros de tipo mono-funcional sino entre un registro de tipo mono-funcional y uno de tipo multifuncional.

Pensamos que la competencia docente para afrontar una actividad de tipo interdisciplinar, como las diseñadas y empleadas en este trabajo, está en el manejo de los conceptos matemáticos ligados al ejercicio planteado, pero también en el conocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre los registros de las representaciones gráficas, simbólico algebraica, el movimiento del robot, y el lenguaje de programación del objeto matemático implicado en la tarea. Esta idea es tomada y adaptada al conocimiento y competencia de los profesores en ejercicio, del artículo de Raymond Duval (Duval, 1988)

La congruencia entre registros de representación se da cuando las unidades significativas de un registro al ser modificadas reflejan cambios correspondientes en otro registro dado. Cuando estos cambios se hacen en forma deliberada para obtener un efecto deseado, se maneja la congruencia entre el significado representado en el objeto matemático y sus diferentes representaciones.

En general se plantea que el “Análisis de congruencia, exige la discriminación de unidades significativas propias a cada registro de representación, así como el examen de las transformaciones implícitas eventuales requeridas para cambiar el registro” (Duval, 1988). La toma de conciencia de las transformaciones y la destreza en lograr la congruencia de las diferentes transformaciones promueve el desarrollo cognitivo de las competencias Matemáticas, permite reconocer los objetos matemáticos en el ambiente disciplinar matemático y en otros ambientes interdisciplinares, así como el desarrollo de las funciones cognitivas de la comunicación, procesamiento de la información, etc.

En nuestro estudio desde la Teoría de las Representaciones Semióticas partimos para organizar las categorías de análisis de la tarea propuesta a los profesores en la intervención y reconocemos en ella un sustento para indagar sobre cómo se da la formación del conocimiento del profesor de Matemáticas.

3 CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En concordancia con uno de nuestros objetivos específicos y apoyados en los seminarios de Investigación de la Maestría, optamos por la metodología de Investigación de diseño. Exponemos la estructura general y cómo esta se adapta a la investigación de este trabajo. Hacemos énfasis en los dos ciclos o iteraciones diseñadas, con cada una de sus fases, que se dieron dentro del proceso de solución del problema de investigación.

3.1 Marco metodológico de la Investigación de diseño

Para abordar el problema planteado, se decide utilizar un paradigma relativamente joven de naturaleza cualitativo conocido como Metodología de Diseño, que ha sido desarrollada por un campo multidisciplinar de las ciencias del aprendizaje (Molina, Martínez, González, & Martínez, 2011). Es una metodología que está pensada para las situaciones de enseñanza aprendizaje del aula y tiene como objetivo principal analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza y de la evaluación.

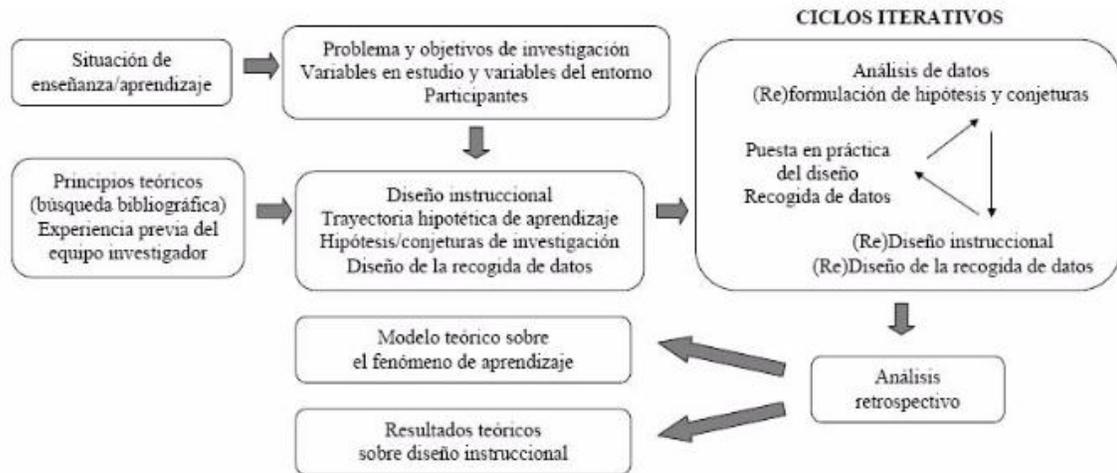
En esta metodología existe interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación. Permite estudiar el proceso de aprendizaje y los modos que lo sustentan y organizan. Existen diferentes tipos de experimentos de diseño entre los que se destaca los Experimentos de Enseñanza. Uno de los contextos en que es aplicable los Experimentos de Enseñanza es en la formación de profesores y el foco de atención el desarrollo de un grupo docente (González, Martínez, González, & Martínez, 2011).

El paradigma del Estudio de Diseño relaciona en forma directa el proceso de aprendizaje con el modo en que ha sido promovido y provee de informes situados. Además, esta metodología identifica cuatro áreas en las que se puede generar aportes de investigación a saber:

- Exploración de posibilidades para ambientes noveles de enseñanza y aprendizaje.
- Desarrollo de teorías contextualizadas sobre enseñanza y aprendizaje.
- Construcción de conocimiento acumulativo de diseño.

- Desarrollo de la capacidad humana para la innovación.

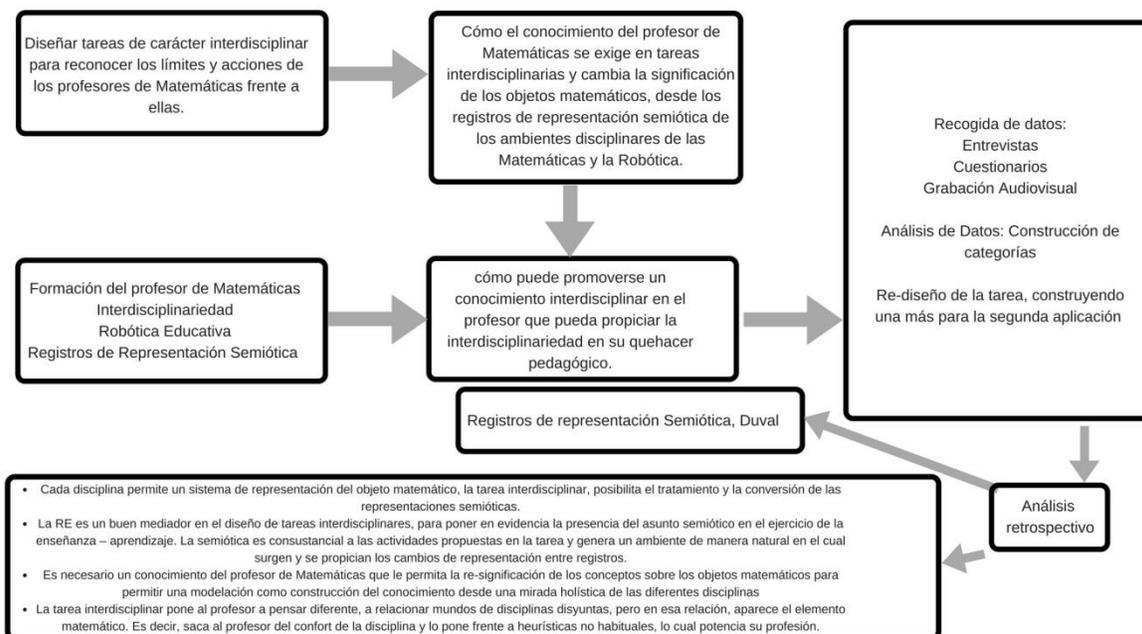
Dentro del paradigma de investigación de diseño, propone un proceso cíclico para establecer los resultados teóricos de modelo y diseño, como muestra en la gráfica siguiente.



Gráfica 3 Estructura general de una investigación de diseño

3.2 Características de la investigación de diseño

Para la solución del problema se establece un diagrama en el cual se evidencia la estructura de la investigación.



Gráfica 4 Estructura de la investigación de diseño adaptada a nuestra investigación

Los Experimentos de Enseñanza se enmarcan en el paradigma de la Investigación de Diseño, en forma general consiste en una serie de episodios de enseñanza en los que se vincula a un profesor-investigador, uno o varios alumnos, un investigador observador. Los experimentos de Enseñanza pueden ser de diferente tipo de duración y tiene la facilidad de poder ejecutarse en cualquier tipo de espacio y ambiente académico.

3.3 Fases

La ejecución de la investigación basada en el diseño de experimentos de enseñanza se fundamenta en tres fases: preparación, experimentación y análisis.

La siguiente tabla relaciona las actividades a realizar en cada fase.

3.3.1 Preparación

Tabla 1: Fase de preparación de la investigación de diseño

FASE	ACCIONES	ACCIONES DE LA INVESTIGACIÓN
Preparación del experimento	Definir el problema y los objetivos de investigación	Delimitando el problema a los profesores de Matemáticas del colegio Cambridge, aplicando Robótica Educativa y buscando la formación en Interdisciplinariedad

	<p>Evaluar el conocimiento inicial de los profesores</p> <p>Identificar metodologías adecuadas y Diseñar la secuencia de intervenciones</p> <p>Diseñar la recogida de datos.</p> <p>Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje</p> <p>Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.</p>	<p>Realizada por medio de una entrevista antes de la implementación.</p> <p>La propuesta está centrada en la modelación que los profesores deben realizar con Robótica Educativa, es una propuesta constructivista donde los participantes identifiquen elementos del conocimiento matemático que se relacione con la Robótica y posteriormente puedan llevarlo a cabo en el aula con sus estudiantes.</p> <p>Durante la intervención se realizará una grabación y un diario de campo.</p> <p>El problema está centrado en la modelación de una función lineal en el movimiento y programación del robot. El profesor de Matemáticas debe identificar, aplicar y resolver basado en sus conocimientos. El investigador orientará los pasos de la programación del robot de ser necesario.</p> <p>El trabajo interdisciplinar exige tres etapas fundamentales en su estudio: la creación de un equipo de trabajo, la unificación de lenguaje y el estudio de un Problema común. (Japiassu, 1976) La creación del grupo está determinada por el conjunto de profesores del colegio Cambrige, la unificación del lenguaje hace parte del preámbulo y la intervención del investigador, el problema será el estipulado por los investigadores.</p> <p>Teoría de Interdisciplinariedad.</p> <p>Marco STEAM (Bosch et al., 2011)Marco STEAM (Bosch et al., 2011) Robótica Educativa(Lombana, 2013). Robótica Educativa(Lombana, 2013). Educación del profesor de Matemáticas (Guacaneme Suárez & Mora Mendieta, 2012).Educación del profesor de Matemáticas (Guacaneme & Mora, 2012).</p>
--	--	---

3.3.2 Experimentación

Tabla 2: Fase de experimentación en la investigación de diseño

FASE	ACCIONES	ACCIONES DE LA INVESTIGACIÓN
Experimentación	<p>Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</p> <p>Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</p> <p>Analizar los datos recogidos en la intervención.</p> <p>Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.</p>	<p>Dentro de la intervención el profesor: Analiza el problema propuesto Crea un plan para solucionarlo Implementa la solución Evalúa si el trabajo realizado realmente soluciona el problema propuesto Identifica los elementos del conocimiento del profesor de Matemáticas que intervienen en su solución Diseña una propuesta similar para llevar a su aula</p> <p>Durante la intervención estarán dos investigadores, uno de ellos consignará en el diario de campo aquellos elementos que complementen la grabación, el otro dirigirá el trabajo de los profesores del colegio Cambridge.</p> <p>Terminada la sesión, se realizará una entrevista para recoger las impresiones del trabajo</p> <p>Por medio de las categorías diseñadas se analizará las grabaciones, el diario de campo, las entrevistas y el producto final (i.e., robot construido por los profesores)</p> <p>De ser necesario, y por la naturaleza de la investigación de diseño, puede replantear las hipótesis y planear una nueva intervención.</p>

3.3.3 Retrospectivo

Tabla 3: Fase retrospectiva de la investigación de diseño

FASE	ACCIONES	ACCIONES DE LA INVESTIGACIÓN
Análisis retrospectivo de los datos	<p>Recopilar y organizar toda la información recogida.</p> <p>Analizar el conjunto de los datos, lo que implica:</p>	<p>a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.</p>

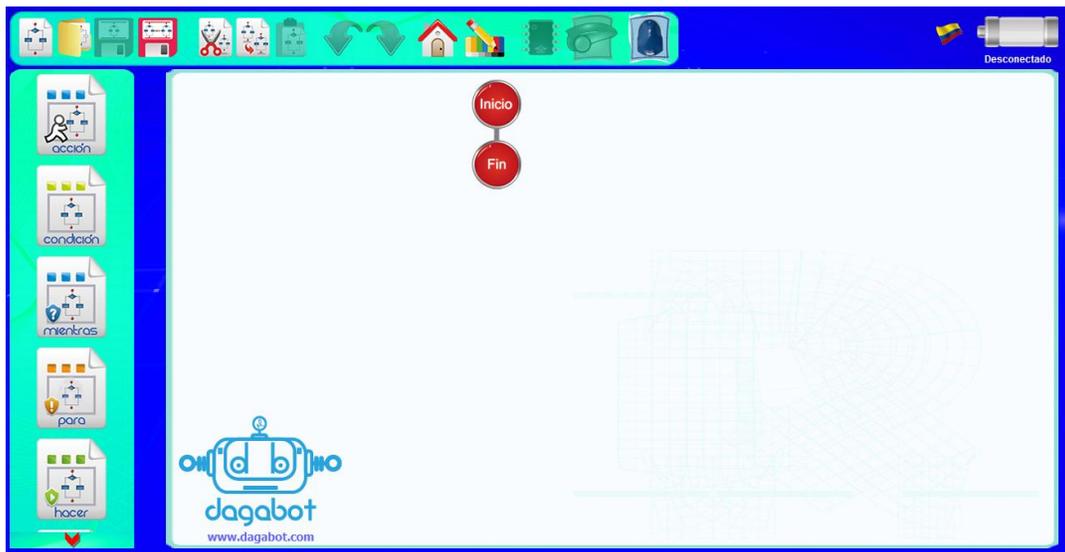
		b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador-docente que contribuyeron a dichos cambios.
--	--	--

En el marco de la metodología de diseño y atendiendo a su forma de investigación por fases, R, la primera fase tiene lugar en el colegio NN con un grupo de seis profesores de Matemáticas, en el cual, se propone la siguiente tarea:

- a. Dada una gráfica de tiempo (s) Vs distancia (cm) en la que se describía un movimiento rectilíneo uniforme, el profesor debía programar un robot para que realizara ese mismo movimiento cumpliendo con los detalles de la misma.

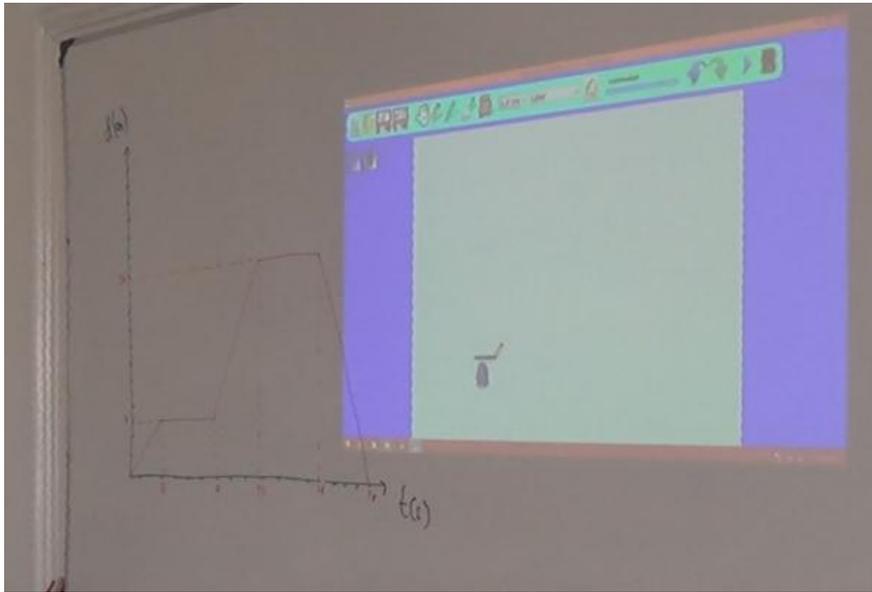
La actividad utilizaba como elementos únicos para desarrollarse, el robot²⁵ y su propio software de programación.

Luego de la instrucción, se procede a explicar el funcionamiento del robot. Este momento es de importancia dado que ninguno de los participantes ha tenido un acercamiento a este tipo de arquetipos, ni a este en particular ni a alguno de características similares. Paso seguido, la explicación del software también es de importancia por ser un programa único para este tipo de robot. Los profesores expresaban que habían manejado algunos programas de computación, pero no de programación de robots o de programación propiamente dicha.



Gráfica 5 Entorno de programación

²⁵ Robi, el robot utilizado, es de la empresa DAGABOT de manufactura colombiana. El arquetipo y su software son de su autoría. <http://dagabot.com/home/>



Gráfica 6 Tarea propuesta y modelo de simulación

Los profesores iniciaron la programación del robot, y por medio del ensayo, prueba y error, fueron generando soluciones parciales a la tarea propuesta.



Gráfica 7 Profesores programando el robot

En el trabajo realizado por los profesores, solo un profesor logró culminar la tarea de forma satisfactoria. En la socialización que se realiza al final de la sesión, el profesor realiza la explicación de cómo entendió la tarea y su estrategia de solución.

3.3.4 Análisis de la tarea

Frente a la novedad del robot y de la programación, existe por parte de los profesores entusiasmo, pero también recelo al estar en un contexto muy diferente al habitualmente frecuentado en sus clases.

Algunos profesores culparon al robot o su software por no ser lo suficientemente sencillos para manejarse.

Otros, culparon a la novedad del software y el poco tiempo que les fue dado (una hora y 30 minutos) para aprender a manejarlo.

El objeto matemático OM en el que se centraba la tarea, era la pendiente, la cual se enlazaba con el concepto de velocidad en una gráfica de estas características. El robot para ser programado debía dársele un valor de 0 – 100 en la potencia de los motores, siendo 100 la velocidad máxima alcanzada por el robot en esas condiciones²⁶.

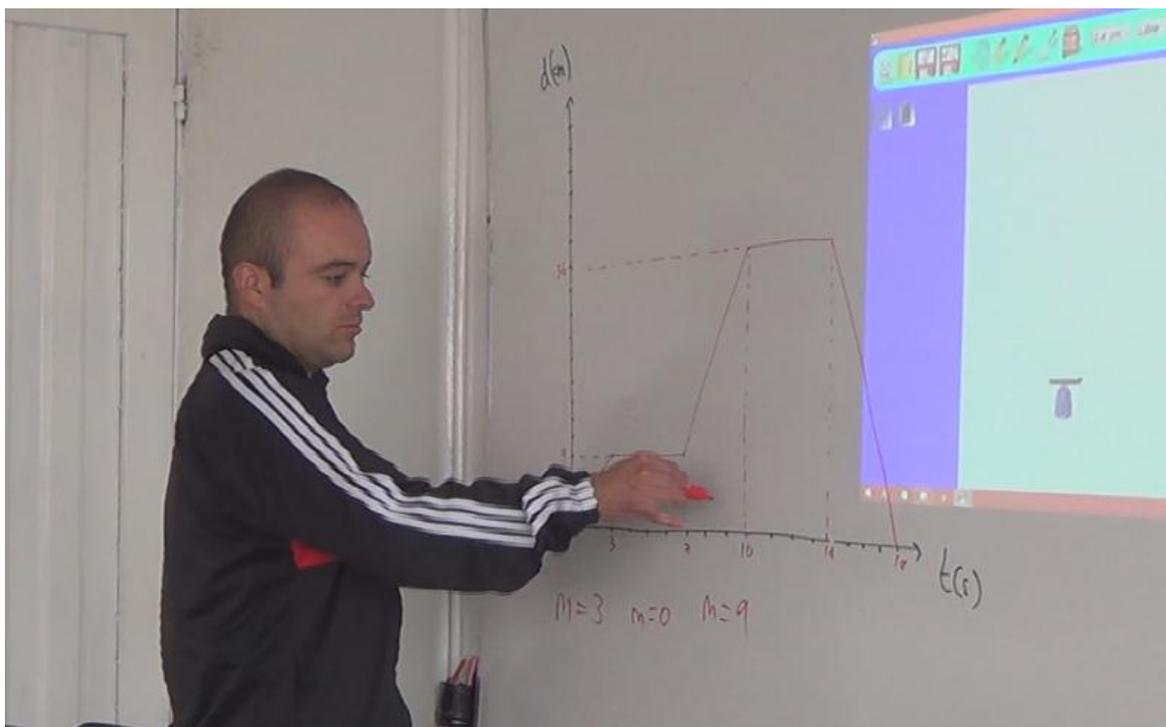


Gráfica 8 Muestra de la programación de la velocidad en el robot

En ese sentido, la pendiente de la gráfica es la velocidad del robot en ese intervalo de tiempo, y siendo 100 la máxima posibilidad, por medio de una regla de tres el profesor encontró la potencia en cada intervalo de la gráfica.

²⁶ El robot varía su velocidad máxima dependiendo del nivel de carga de la batería.

Al realizar la prueba con el robot, las distancias y los recorridos no eran muy precisos, esto se debe a las condiciones físicas del robot. Por ende, se tomó la decisión de simular el movimiento del robot, por medio de la interfaz que el mismo software permite, encontrando que la solución planteada por el profesor es correcta. Es de resaltar, que el profesor quien soluciona la tarea estudió ingeniería en su pregrado.



Gráfica 9 Profesor realizando la explicación de la solución de la tarea

Según lo anterior, la Formación del Profesor de Matemáticas fue determinante frente la solución de la tarea propuesta. Al ser ingeniero, poseía una ventaja frente a sus compañeros quienes nunca se habían acercado a este tipo de herramientas, tanto el robot como de programación.

Por otra parte, todos reconocieron un potencial de la tarea en sus clases de Matemáticas, especulaban de las posibilidades que un robot, como el utilizado en esta actividad, tenía en la enseñanza de algunos OM y en el posible aprendizaje de los mismos. A pesar de estar en la segunda década del siglo XXI, es una novedad este tipo de herramientas.

Finalmente, este primer acercamiento a una actividad interdisciplinaria evidenció que los profesores de Matemáticas no relacionan fácilmente los OM con contextos diferentes a los usuales. Es indudable que todos manejaban las nociones de pendiente de la recta, pero hallar este concepto en el marco de un movimiento de un robot no se da de forma espontánea. Es evidente, que el RRS de la pendiente dado en la gráfica coincide con el dado

por el movimiento del robot, es decir, evidenciar un OM en un RRS de un contexto fuera de las Matemáticas, permitiría al profesor de Matemáticas generar vínculos interdisciplinarios que salen de su formación, pero que potenciarían su discurso de enseñanza complementando su conocimiento de las Matemáticas.

3.4 Ciclo 2

Como parte de la metodología de diseño, se da lugar al ciclo 2 o trabajo con el grupo B como lo llamaremos en adelante. Esta intervención estará descrita con mayor detalle en el capítulo de análisis puesto que nos brinda una importancia sustancial frente al objetivo de investigación propuesto. En este apartado, se expondrá las fases para evidenciar la estructura de diseño.

Tabla 4: Descripción de la fase 2

<p>Antes</p>	<p>Al observar la gráfica de distancia contra tiempo, los profesores contestarán las siguientes preguntas.</p>  <p>Actividad 1</p> <p>Cada uno de los profesores contestará unas preguntas a partir de la gráfica propuesta.</p> <ol style="list-style-type: none"> Qué tipo de información da esta gráfica Qué objetos matemáticos están involucrados en la comprensión de la gráfica Qué conceptos NO matemáticos (de otras disciplinas) están involucrados en la comprensión de la gráfica Existe otro tipo de representación para la misma información que nos brinda la gráfica? Qué tipo de fenómenos de nuestro entorno se ajustarían a esa información De qué forma ha trabajado los conceptos math (del numeral a y b) dentro de su formación De qué forma ha trabajado los conceptos math (del numeral a y b) dentro de sus procesos de enseñanza? Ha involucrado los conceptos no matemáticos es su formación?
<p>Durante</p>	<p>En este momento, los profesores tendrán una familiarización con el software y el hardware del robot. Por medio de un ejemplo de cómo se debe realizar la programación y la puesta en marcha del programa. Luego damos paso al objetivo de la tarea, el cual es, programar un robot para que realice</p>

	<p>un movimiento descrito en una gráfica y realizar una gráfica a partir del movimiento del robot</p> <p>En este caso, agregamos del ciclo 1, una tarea nueva y es que a partir de un movimiento rectilíneo uniforme de un robot, se realice un gráfica de distancia versus tiempo. Esto nos permitirá ver que existe una correspondencia bidireccional entre las tareas y los elementos interdisciplinarios a identificar. Dentro de los cuales, están los registros de representación semiótica.</p>
Después	<p>Luego de programar el robot y realizar la grafica, trabajo que se realizó con la división del grupo en dos, los profesores contestarán las siguientes preguntas.</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Por qué Coincide (o no) el movimiento del robot con la información de la gráfica b. Los conceptos matemáticos descritos anteriormente, siguen siendo pertinentes en la programación del robot. Aparecen nuevos conceptos? c. Los conceptos NO matemáticos descritos anteriormente, siguen siendo pertinentes en la programación del robot. Aparecen nuevos conceptos? d. Dentro de las representaciones de la misma información, cuáles son las más pertinentes para la programación del robot e. Encuentra algún uso cotidiano de esta programación del robot específicamente f. Comparando esta actividad con la forma como ha trabajado estos conceptos anteriormente (formación) qué características resalta y cuales considera pueden cambiar g. Comparando esta actividad con la forma como ha trabajado estos conceptos anteriormente (procesos de enseñanza) qué características resalta y cuales considera pueden cambiar <p>Finalmente, se propone una puesta en común a los profesores participantes.</p>

Finalmente en este capítulo se encuentra un bosquejo general de cómo abordamos los experimentos de enseñanza para nuestra investigación. En la cual, realizamos dos ciclos con los grupos A y B respectivamente, además, las tareas presentaron cambios para encontrar ese elemento interdisciplinario que permitiría resolverla. Es por esto y luego de un análisis preliminar que determinamos que ese vínculo se efectúa por medio de los cambios en los registros de representación semiótica, principalmente como lo expone el autor Duval. A continuación, presentamos el marco referencial que permite el análisis de los episodios obtenidos de esta metodología de investigación.

4 CAPÍTULO IV. MARCO REFERENCIAL

A continuación, presentamos la construcción del marco referencial de análisis de nuestra investigación. Para ello, exponemos la definición de la caracterización de las variables del ambiente disciplinar de las Matemáticas, del ambiente Factual, del ambiente de Programación y de la Cinemática. Finalmente, se plantea la congruencia y correspondencia de las transformaciones de los registros de representación.

4.1 Construcción del marco de análisis, definición de variables

Bajo la hipótesis que el confrontar a los profesores en ejercicio a tareas de carácter interdisciplinario, se promueve el Conocimiento del profesor de Matemáticas, utilizamos la RE por sus potencialidades como estrategia pedagógica en el diseño de ambientes interdisciplinarios. En la actividad propuesta identificamos el ambiente natural de las Matemáticas, los fenómenos Factuales inmersos en la observación del movimiento del robot, el ambiente de Programación y finalmente el ambiente disciplinar de la física en particular lo relativo al campo de la Cinemática. En la tarea asignada a los profesores, observamos diferentes ambientes disciplinares y sus respectivos registros de representación vinculados a la solución.

Con el ánimo de indagar la forma como se construye el Conocimiento del Profesor de Matemáticas, usamos las Representaciones Semióticas de los objetos matemáticos y las respectivas transformaciones que debe hacer el profesor; para reconocerlos en contextos diferentes al matemático. Caracterizamos las variables de representación semiótica²⁷ y sus posibles valores en cada uno de los ambientes disciplinares que identificamos interactúan en la actividad propuesta.

²⁷ Una variable de representación semiótica es aquello que toma diferentes valores dentro de un sistema de representación y refleja cambios en otro sistema.

4.2 Variables de las Matemáticas

4.2.1 Variables Matemáticas visuales

En primer lugar, *las Matemáticas* con **la representación gráfica** del movimiento del robot, en un sistema cartesiano distancia vs tiempo. La forma de la imagen de la gráfica nos permite evocar una función definida a tramos, en ella podemos identificar las variables visuales generales, que generan modificaciones internas en la imagen, como son:

- *La implantación de la tarea* hace referencia en lo que queremos centrar la atención de la imagen, en el trazo o en la región delimitada por él.
- *La forma de la tarea* se refiere a las características del trazo, es formado por un solo trazo, una composición de otras formas - línea quebrada poligonal o línea mixta - segmentos de línea rectos o curvos, continuos o discontinuos, es abierto o cerrado.
- También podemos identificar en el trazo la *denominación de los ejes*, si representa magnitudes homogéneas o heterogéneas; están graduados con divisiones uniformes o no; las longitudes de las divisiones de los ejes representan la misma unidad.

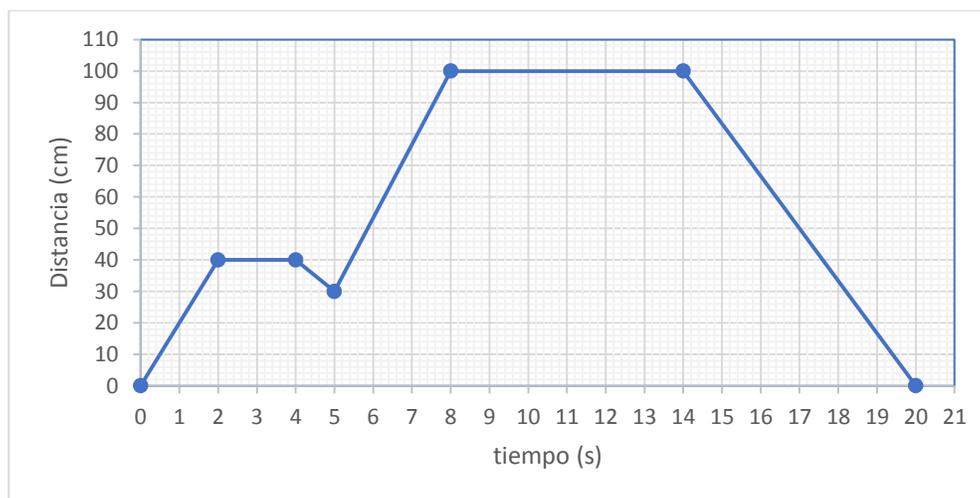
Otra característica visual es el inicio del trazo, si parte del origen del plano o de un punto diferente.

Tabla 5: Valores de las variables Matemáticas visuales generales

Variabales visuales generales	Valores
Implantación de la tarea	Trazo de línea
	Región delimitada por el trazo
Forma de la tarea	Trazo único
	Línea mixta
	Línea quebrada poligonal
	Línea continua
	Línea cerrada
	Línea abierta
Denominación de los ejes	Magnitudes homogéneas
	Magnitudes heterogéneas

En particular, en la actividad propuesta, la finalidad es identificar lo representado del movimiento del robot mediante el trazo de la línea quebrada poligonal que define una función a tramos; la implantación nos permite identificar una línea poligonal quebrada formada por segmentos rectilíneos, continua que parte del origen del plano cartesiano y finaliza con una intersección del eje horizontal; los ejes están denominados con magnitudes heterogéneas, distancia (d) en el eje vertical y tiempo (t) en el eje horizontal. La grafica está representada en el primer cuadrante del plano.

Podemos identificar las variables y sus respectivos valores en la gráfica número 10.



Gráfica 10 Tarea 1

Es importante resaltar que en la actividad propuesta a los profesores se enfoca en el trazo de la línea poligonal superior y no en la forma de la región, definida por la línea quebrada y el eje t; sin embargo, una de las dificultades es la tendencia natural de ver la región poligonal y centrar la atención en la región²⁸ y no en su frontera superior.

La escuela de pensamiento de origen alemán a comienzos del siglo XX de la Gestalt, afirma que la mente configura a través de ciertas leyes, los elementos que llegan a ella por medio de los sentidos y la memoria. Este fenómeno se explica con la ley de la buena forma, lo que se percibe con mayor rapidez y exactitud son las formas completas pero simples; la ley de cierre: toda información que contribuya a la conformación del concepto de contorno es privilegiada por sobre aquella que no contribuye a darle bordes o límites definidos a los objetos., una forma se percibe mejor cuanto más cerrada este su contorno; la ley de completación, una forma abierta tiende a verse cerrada (G. L. Oviedo, 2004).

Desde la tipificación de la gráfica podemos definir las *siguientes variables Matemáticas visuales particulares*, propias de la tarea, que corresponden a las modificaciones de la configuración trazo y al mismo tiempo generan cambios en las Representaciones Semióticas de los demás ambientes disciplinares:

- Primero tenemos *la inclinación del tramo*, si el segmento es ascendente, descendente u horizontal en diferentes intervalos del eje t horizontal.

²⁸ Nicolás Oresme, en la Edad Media analizó fenómenos que cambian a partir de aproximaciones geométricas, uso figuras de rectángulos y triángulos para el estudio de variación de manera independiente al desarrollo analítico de función (Arias Hernandez, Leal, & Organista Rodríguez, 2011).

Observación: entendemos un tramo ascendente cuando al trazarlo o recorrerlo visualmente de izquierda a derecha sube, si por el contrario baja es descendente, si no sube ni baja es horizontal.

- *Los vértices del trazo*, puntos que evidencian un cambio en la inclinación del tramo e identifican la continuidad del trazo, además definen los intervalos para el análisis del comportamiento de la gráfica. Ubicuidad.
- *El ángulo entre dos tramos (β)*, nos permite visualizar un cambio de inclinación entre un tramo y el siguiente, si es tenue, grande o abrupto²⁹, si es mayor o menor con respecto al segmento anterior o al que le sigue, si es positivo o negativo.

El ángulo β entre segmentos sucesivos está acotado, limitación que la impone el robot y su funcionamiento.

- El ángulo de orientación de cada segmento (α), si es un ángulo positivo, negativo o nulo, además si es mayor o menor con respecto al segmento anterior o al que le sigue, o si no tiene inclinación.

Observación: Para tomar la referencia de la medida del ángulo α , basta con desplazar el eje horizontal t hasta la intersección con el segmento referenciado, se asume la medida del ángulo en posición normal y es el menor ángulo formado por el segmento y el eje horizontal.

Tabla 6: Variables Matemáticas visuales particulares y valores.

VARIABLES VISUALES PARTICULARES	VALORES
Inclinación del tramo	Ascendente
	Descendente
	Horizontal
Vértices del trazo	Puntos del cuadrante I, incluyendo los semiejes positivos d y t
Ángulo entre dos tramos consecutivos β	$0 \leq \beta < 180$
Ángulo de orientación del segmento α	$0 \leq \alpha < \tan^{-1} 30$

4.2.2 Variables Matemáticas simbólicas

En el mismo ambiente disciplinar de las *Matemáticas* la variable visual del ángulo de orientación de los segmentos α se puede asociar a la *representación simbólica algebraica*, y sus respectivas *unidades simbólicas*, a partir de los cambios que presentan las variables de

²⁹ El cambio de este ángulo representa la variación de la velocidad del robot; esta variable no fue usada en la solución esperada de la tarea propuesta a los profesores.

los ejes coordenados a través de los cálculos de diferencias y la covariancia entre ellas, de esta manera identificamos qué cambia, cuánto cambia y a qué razón cambia, esto lo logramos calculando y coordinando la cantidad de cambio de una variable (t) con los cambios de la otra (d), si en el eje t identificamos un cambio $\Delta t = t_f - t_o$, hay un cambio $\Delta d = d_f - d_o$, de modo que para cada Δt corresponde un Δd .

Estas *diferencias de variación de la distancia y el tiempo*, nos permiten observar cómo cambian la una con respecto a la otra, así para los $\Delta t > 0$, podemos ver en los diferentes intervalos una de las siguientes posibilidades: Si $\Delta d > 0$ crece (segmento ascendente), para $\Delta d < 0$ decrece (segmento descendente) y con $\Delta d = 0$ se mantiene constante (segmento horizontal).

Con las diferencias de variación podemos hallar la *razón de cambio promedio* $m = \frac{\Delta d}{\Delta t}$, en términos gráficos es la pendiente de un lado rectilíneo de la poligonal en un intervalo determinado de tiempo, en cuyo caso tiene tres unidades simbólicas, asociadas al objeto matemático de la pendiente (m): Pendiente > 0 , Pendiente < 0 , Pendiente $= 0$.

Tabla 7: Variables Matemáticas simbólicas y valores.

VARIABLES SIMBÓLICAS	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS
Diferencia de variación Δd	$\Delta d < 0$	Valor numérico y signo -
	$\Delta d = 0$	Valor cero
	$\Delta d > 0$	Valor numérico y signo +
Diferencia de variación Δt	$\Delta t > 0^a$	Valor numérico y signo +
La pendiente m	$m > 0$	Valor numérico y signo +
	$m < 0$	Valor numérico y signo -
	$m = 0$	Valor cero

a: En la fenomenología del movimiento no tiene sentido variaciones del tiempo negativas.

En la tarea planteada a los profesores, el valor de la pendiente (razón de cambio de la distancia en el tiempo) está acotado entre $0 < m < 30$, esta limitación la impone el hardware y estructura propias del robot utilizado en la intervención, ya que el uso del robot a su máxima potencia genera una velocidad de $30 \frac{cm}{s}$; de igual manera la decodificación de la gráfica se apoya en el hecho de hacer explícitos los elementos visuales particulares de la misma, en particular la gráfica proporciona los puntos que determinan los valores de cada intervalo de diferencias, solo hay que leerlos, pero en general estos valores no necesariamente deben recaer sobre números enteros y estar resaltados con la cuadrícula de fondo.

Las alternativas de variaciones como mover los vértices a coordenadas con valores no enteros, dejar el fondo de papel en blanco, cambiar los puntos de referencia de donde

empieza y termina la representación gráfica, usar el IV cuadrante, centrar la atención en el ángulo formado por dos segmentos consecutivos (β) que nos presenta la cantidad de cambio de las velocidades, en general cambiar los parámetros de la forma de la tarea o de la finalidad de la misma genera actividades de índole distinta a las que nos ocupa, redimensiona la tarea desde lo que representa el movimiento y lo que se representa del movimiento y abre la posibilidad desde la metodología de investigación, para plantear nuevas tareas con potencial generativo en intervenciones futuras.

4.3 Variables factuales

El segundo ambiente se refiere al mismo *hecho del movimiento del robot*, también consideramos el movimiento realizado en la simulación, nos genera **las unidades factuales**, a saber:

- *El sentido del movimiento del robot*: avanza (se mueve hacia adelante), retrocede (se mueve hacia atrás), se mantiene inmóvil (no se mueve).

Observación: El sentido del movimiento toma como referencia el punto de partida del robot desde el comienzo del movimiento y el frente del observador.

- *La dirección de la trayectoria*: el camino que sigue es recto, hace giros, es una curva suave conocida, es una curva aleatoria.
- *La distancia*³⁰: las medidas de cuánto avanza o retrocede en los diferentes movimientos.
- *El tiempo*: la duración de los intervalos en los cuales realiza los diferentes movimientos, con respecto al momento inicial y final de cada uno de los diferentes tramos de movimiento.
- *La rapidez*: en los diferentes intervalos del movimiento lo hace con una rapidez altamente constante o variable.

Observación: Utilizamos el concepto *altamente constante* para referirnos a la rapidez del robot en cada intervalo de tiempo, como movimiento ideal con rapidez constante, aunque no dejamos pasar desapercibidamente que el fenómeno propio del movimiento no pasa en forma instantánea de un estado de rapidez u otro.

³⁰ No estamos pensando en desplazamientos totales ni para cada trayecto; pensamos en la distancia del robot desde el punto de origen.

Tabla 8: Variables factuales y valores.

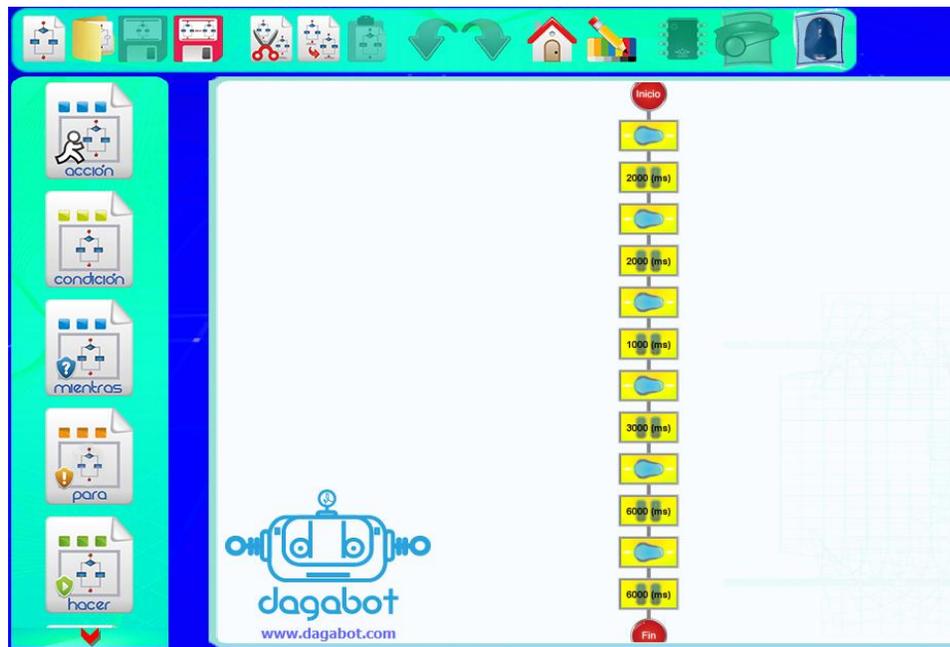
Variables factuales	Valores
Sentido de movimiento del robot	Avanza
	Retrocede
	Se mantiene inmóvil
Dirección de la trayectoria	Recta
	Hace giros
	Curva suave conocida
	Curva no conocida
	Camino aleatorio
Distancia	$\Delta d \geq 0$
Tiempo	$\Delta t > 0$
Rapidez	$0 < V \leq 30^a$

a: La rapidez es la razón $V = \frac{\Delta d}{\Delta t}$.

4.4 Variables icónicas

Como tercer campo disciplinar tenemos el de **la programación del robot**, por lo cual definimos **las variables icónicas** y sus respectivas unidades, debido a que utiliza un lenguaje de programación con un ambiente icónico, por medio de diagramas de flujo. La programación es estructurada y ejecuta las instrucciones en el orden que aparecen, es decir, hace una ejecución secuencial.

En este entorno visual, existe un menú en la parte izquierda que nos da la posibilidad de utilizar diferentes iconos de programación; centramos la atención en el primero “acción” y en dos de sus submenús para caracterizar las *variables icónicas de programación* con sus respectivos valores y *unidades*:



Gráfica 11 Entorno de programación del robot

Imagen del ambiente de programación y de un ejemplo de programa a través del diagrama de flujo.

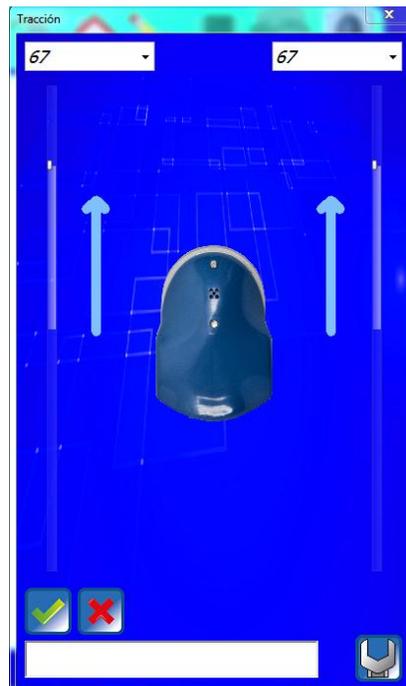


Gráfica 12 Muestra de la variable icónica de tracción

- *Variable icono de acción:* Es el primer icono del entorno del programa en el menú de la parte izquierda, encontramos entre su submenú, dos valores: Los íconos

llamados \downarrow tracción y \downarrow pausa. Por medio de ellos se puede ordenar al robot hacer los movimientos implicados en la tarea propuesta a los profesores.

- **Acción \downarrow tracción (movimiento):** Presenta dos tipos de unidades icónicas en su entorno de programación: El primero corresponde al diagrama de flujo, es un rectángulo con la silueta del robot centrada en su interior, representa el conjunto de acciones e instrucciones que se ejecutan con los datos de entrada, al picar en él, se puede programar las instrucciones que controlan el movimiento del robot (y el simulador) como son el sentido, la trayectoria, la rapidez y los giros. Tan pronto ingresa ese icono al diagrama de flujo aparece la segunda unidad icónica es un ventana, para ingresar los datos, con la imagen del robot en medio de dos flechas laterales, variables en longitud y sentido, y sus respectivos deslizadores de control; en la parte superior dos cajas de entrada a izquierda y derecha, para relacionar el valor referente a la potencia de cada uno de los motores del robot.



Gráfica 13 Tomado del entorno de programación, variable icónica de tracción, sección de velocidad

Al ingresar el ícono anterior al diagrama de flujo, aparece una ventana con la imagen del robot y dos flechas laterales.

Observación: Estas flechas se controlan a través de dos deslizadores, el tamaño y la dirección de las flechas indican la potencia, dirección y sentido del movimiento; si en la imagen no hay flechas sino por el contrario un par de puntos indica la ausencia del movimiento del robot. La potencia P asociada a cada uno de los motores del robot puede tomar valores entre $0 \leq P \leq 100$. La potencia se programa en forma sincrónica con los

cambios por medio de los deslizadores o con los cambios de los valores numéricos en las cajas de entrada. Tanto los deslizadores como la caja de entrada donde se asigna un número controlan la potencia del motor. El valor de 100 es la máxima potencia alcanzada por el motor con el nivel de batería de ese instante. Esa potencia máxima (número 100) tiene una limitación física de la velocidad del robot que es 30 centímetros per segundo.

- *Acción ↓ pausa (tiempo)*: Es un rectángulo, en el diagrama de flujo, con el símbolo de pausa en su interior, representa el lapso de tiempo que duran las acciones que le anteceden. Al ingresar el ícono, se despliega la unidad icónica de una ventana, con dos cajas de entrada una para el valor numérico del tiempo y la otra para la unidad de medida (segundos o milisegundos) usada. En la parte inferior hay una caja de dialogo para comentarios.



Gráfica 14 Variable icónica de pausa (tiempo de duración de la última acción)

Observación: El icono pausa no hace referencia a detener el movimiento, sino al lapso o pausa de tiempo que dura las acciones programadas en la secuencia anterior. En el diagrama de flujo una secuencia de imágenes rectángulo-tracción y rectángulo pausa corresponde a un movimiento del robot.

Los demás iconos del menú principal de la columna izquierda representan los conectores lógicos para programar, no fueron considerados como la primera variable de programación en forma deliberada, por lo tanto no son explícitamente explicados, la razón de esto es que

para la tarea de la intervención no es necesario su uso. La actividad propuesta buscaba permitir el acceso a la programación con instrucciones sucintas y delimitadas, evitando información densa y de mayor dificultad de ejecución, para facilitar el uso por parte del profesor y centrar su atención en la tarea y no en el aprendizaje de programación. El manejo de más iconos y ventanas de programación permiten generar mayores posibilidades de acciones, movimientos y variantes en las tareas de tal forma que pueden generar también, como se referencio anteriormente, más y nuevas tareas con potencial generativo.

Tabla 9: Variables icónicas de programación

Variables icónicas de programación			Valores				Unidades simbólicas de programación	
Variable acción	icono	de	Acción	↓	tracción	Rectángulo-acción	Flechas: longitud, sentido.	
			(movimiento)				Cajas de entrada: $0 \leq P \leq 100$	
			Acción	↓	pausa	Rectángulo-tiempo	Cajas de entrada: Magnitud: número > 0 Unidad de medida: Segundos, milisegundos.	
			(tiempo)					

El ambiente de programación permite realizar una simulación y visualiza un video con la imagen del robot ejecutando los movimientos programados, inicialmente pensamos en otro ambiente disciplinar definido por la simulación pero finalmente cuando pretendimos caracterizar las variables de esta representación observamos que coincidían con las mismas del propio fenómeno del movimiento del prototipo, en ese sentido se tomó la decisión de dejar la simulación como parte del análisis de las variables factuales y su caracterización.

La simulación permite mediante un video simple, observar la secuencia de acciones de movimientos del robot, con la facilidad de repetir cada movimiento tantas veces como sea necesario, aunque con el prototipo del robot también se puede repetir el fenómeno ya que el programa controla tanto las acciones del prototipo como del simulador.

De esta manera entendemos el simulador como parte de lo factual, que nos permite ver el movimiento ideal sin el ruido de los factores externos que aparecen con el movimiento del robot como son: el desgaste natural de los engranajes que accionan los motores, el rozamiento, el consumo de la carga de la batería del robot y por ende el cambio en la potencia del motor.

Debido a la riqueza que proporciona el video de simulación de la tarea propuesta, dejamos el enlace para que el lector tenga acceso al mismo.



Gráfica 15 Código QR de enlace del video de la variable factual. <https://youtu.be/X3vyxBb1SJw>

4.5 Variables cinemáticas

El cuarto campo disciplinar es la ciencia natural de la física, *específicamente el ambiente de la cinemática*, parte de la rama de la mecánica, que da el primer paso para el estudio y la descripción del movimiento en términos del espacio (distancia recorrida) y el tiempo, sin tomar en cuenta otros agentes presentes que lo producen. En este ambiente caracterizamos las *variables cinemáticas* y sus unidades.

Comenzamos por reconocer algunos conceptos fundamentales y básicos propios de la ciencia física, para poder familiarizarnos en los estudios cinemáticos, atendemos y respondemos a la necesidad natural expuesta por Galileo:

La filosofía natural se escribe en ese gran libro que nunca miente ante nuestra asombrosa mirada – me refiero al Universo- pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos con los cuales está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin la ayuda de las cuales es imposible concebir una sola palabra de él, y sin las cuales uno vaga inútilmente por un oscuro laberinto.

Galileo Galilei
(GALILEO, IL SAGGIATORE, 1623)³¹

La cinemática como parte de la física utiliza conceptos, ecuaciones y suposiciones fundamentales para sustentar las leyes empleadas en el desarrollo de las teorías que se expresan en el lenguaje de las Matemáticas, herramienta que brinda el puente entre la teoría y la experiencia bajo unas condiciones limitadas o ideales.

Los siguientes son algunos de los conceptos básicos asociados al lenguaje propio de la cinemática:

³¹ “El ensayador” es un libro publicado por Galileo Galilei en octubre de 1623. Este libro causó sensación en Roma, sobre todo por su calidad literaria. Publicado en octubre de 1623.

- Sistema de referencia: Punto fijo con respecto al cual se describe el movimiento de un objeto. Se pueden definir sistemas de referencia unidimensional (línea recta), bidimensional (plano) y tridimensional (espacio).
- Posición: lugar en el que se encuentra un objeto con respecto al sistema de referencia acordado. Se denota por una coordenada x , una pareja ordenada (x, y) o una triada ordenada (x, y, z) de acuerdo al caso.
- Movimiento: Un cuerpo se encuentra en movimiento con relación a un punto fijo, el sistema de referencia, si a medida que transcurre el tiempo, la posición relativa respecto a ese punto varía.
- Trayectoria: Es el conjunto de puntos en el espacio que ocupa a través del tiempo.
- Desplazamiento: Es el cambio de posición que sufre un cuerpo.
- Espacio recorrido (distancia): Es la medida de la trayectoria. El desplazamiento no debe confundirse con la distancia recorrida.
- Velocidad media: En un intervalo de tiempo dado, se define como la razón entre el desplazamiento y la unidad de tiempo.
- Rapidez media: Se define como el espacio recorrido en la unidad de tiempo. No debe confundirse la velocidad media con la rapidez media.
- Aceleración media: Es la variación de la velocidad en la unidad de tiempo.
- Movimiento uniforme: Cuando el cuerpo recorre espacios iguales en tiempos iguales.
- Movimiento uniformemente variado: Cuando el cuerpo cambia velocidades iguales en tiempos iguales.

Con estos conceptos podemos definir las siguientes *variables cinemáticas*:

- *El tipo de cambio de la velocidad*: Si la velocidad no cambia en un lapso de tiempo dado es uniforme o cuando cambia la velocidad en forma constante es uniformemente variado.
- *La dimensión del movimiento*: Nos indica si el análisis cinemático se hace en una, dos o tres dimensiones.
- *El sistema de referencia*: Toma tres valores diferentes dependiendo si el análisis del movimiento se realiza en línea recta como eje coordenado, el plano cartesiano o en el espacio cartesiano. En todos los casos el origen del sistema coordenado es el punto de referencia.
- *La trayectoria*: El camino que toma el objeto en movimiento puede ser una línea recta, si es en una dimensión, o una curva si es dos dimensiones, el plano, como por ejemplo una circunferencia, una parábola, una semi - parábola.
- *El tipo de movimiento*: si es translacional, rotacional o vibratorio.

- *El desplazamiento:* Se representa simbólicamente como $\Delta\vec{x} = x_f - x_o$ puede darse tres posibilidades: valores para $\Delta\vec{x} > 0$ cuando x_f es mayor que x_o , $\Delta\vec{x} < 0$ cuando x_o es mayor que x_f y $\Delta\vec{x} = 0$ cuando x_o es igual a x_f .
- *La distancia recorrida:* Toma diferentes valores numéricos dependiendo de las medidas de la trayectoria. Siempre se considera un valor ≥ 0 .
- *La velocidad media,* $\vec{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$ puede tomar valores, entre posibles intervalos, cuando se estudia en una dimensión, dependiendo del desplazamiento, $\vec{v} > 0$ si $\Delta\vec{x} > 0$, $\vec{v} = 0$ si $\Delta\vec{x} = 0$ y $\vec{v} < 0$ si $\Delta\vec{x} < 0$, es importante tener presente que $\Delta t > 0$ siempre es mayor a 0.

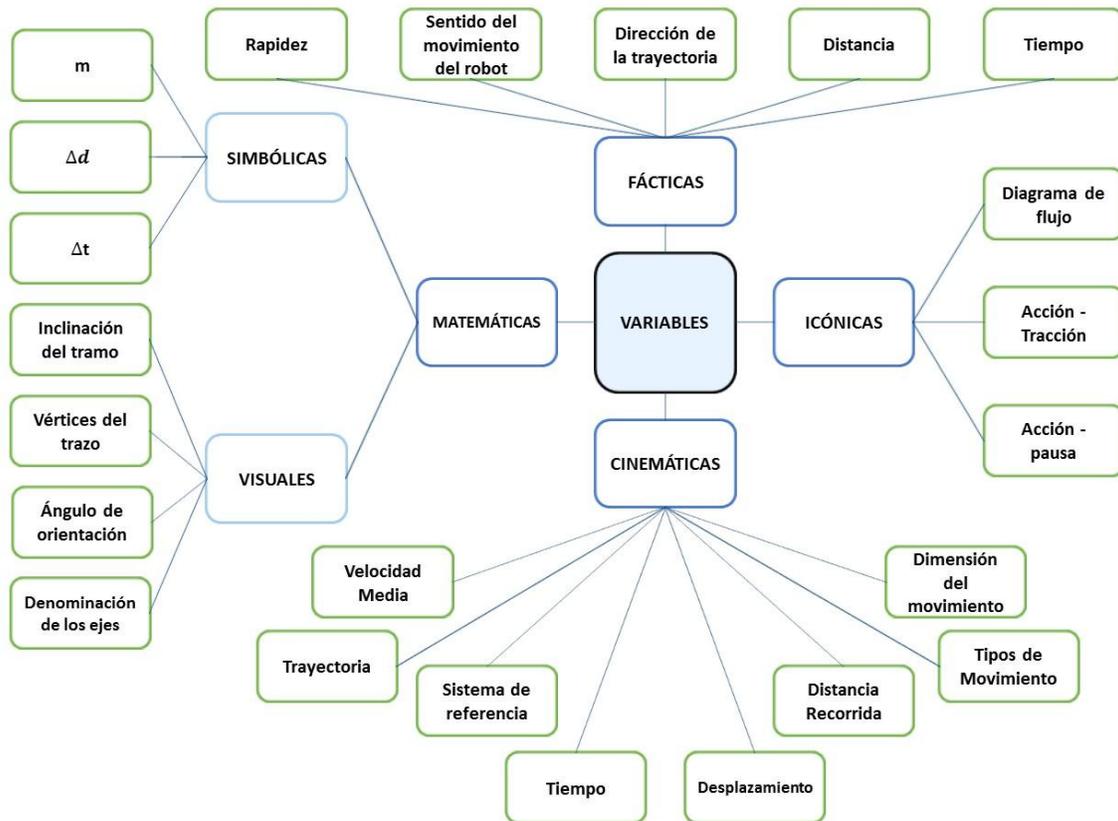
Observación: los sub índices o y f, se refiere a los valores inicial y final tomados para cada uno de los diferentes intervalos de tiempo y de posición del robot con respecto al punto de referencia.

Tabla 10: Variables cinemáticas

Variables cinemáticas	Valores
La dimensión del movimiento	Una dimensión Dos dimensiones.
Sistema de referencia	Un eje coordenado El plano coordenado(cartesiano) El espacio coordenado
La trayectoria	Una línea recta Una circunferencia Una parábola Una semi parábola
El desplazamiento	$\Delta\vec{x} > 0$, signo + $\Delta\vec{x} = 0$ $\Delta\vec{x} < 0$, signo -
La distancia recorrida	Valores numéricos > 0
La velocidad media	$\vec{v} > 0$ $\vec{v} = 0$ $\vec{v} < 0$
El tiempo	$\Delta t > 0$
La rapidez media	$v \geq 0$
Tipo de cambio de velocidad	Movimiento uniforme Movimiento uniformemente variado.

Desde el análisis cinemático de la tarea propuesta nos centramos en una dimensión, el movimiento se da sobre una línea recta como trayectoria y con el cero como punto de referencia, idealmente la velocidad es constante y la aceleración cero; un movimiento con estas características es llamado movimiento rectilíneo uniforme MRU.

Finalmente, para la tarea propuesta a los profesores, las variables de cada uno de los ambientes disciplinares y los valores implicados, se resumen en el siguiente mapa mental:



Gráfica 16 variables de representación

4.6 Congruencia y correspondencia de las transformaciones de los registros de representación.

La tarea propuesta tiene dos vías de ejecución, la primera a partir de la gráfica de distancia-tiempo programar el robot para que realice el movimiento representado en ella; la segunda busca que, dado el robot programado para realizar una secuencia de movimientos, se represente en una gráfica de distancia-tiempo. En juntos casos la consigna implícita es centrar la atención en las formas de representar las velocidades, sus cambios y plasmar la congruencia con las representaciones del ambiente matemático y lo que se puede representar del movimiento en la gráfica.

El desarrollo de la actividad implica el análisis de congruencia entre las unidades significativas de cada registro de representación y la identificación de las transformaciones dadas para el cambio de registro, en nuestro caso implica un análisis cruzado de las categorías y las variables para los cuatro ambientes disciplinares vinculados al planteamiento y solución de la tarea.

Entre los registros de representación de los diferentes ambientes encontramos las siguientes relaciones y transformaciones de las variables caracterizadas y sus valores pertinentes a las condiciones de la tarea propuesta.

Tomamos como referente la vía de interpretación global de las propiedades visuales de la gráfica, que considera el conjunto trazo-ejes, en este caso heterogéneos, como parte de la imagen que forma la representación del objeto de estudio (Duval, 1988), e incluyendo la implantación y la forma de la tarea para comenzar a identificar las mutuas relaciones significativas entre los registros de representación que hacemos extensivo a los diferentes ambientes disciplinares planteados en la tarea.

Los valores que toman las variables Matemáticas visuales generales en la tarea, a saber: La implantación de la tarea (trazo de línea), la forma de la tarea (línea quebrada poligonal) y la denominación de los ejes (magnitudes heterogéneas distancia d y el tiempo t), permite establecer las siguientes relaciones mutuas de congruencia:

En el campo matemático, modela el trazo como una función definida a tramos continua y formada por segmentos rectilíneos, cada uno de ellos con sus respectivas pendientes, que muestra la dependencia funcional de la distancia con respecto al tiempo.

De otra parte, cada tramo es una forma de representar precisamente el fenómeno del movimiento del robot, lo factual, para diferentes lapsos de tiempo en donde cada segmento plasma intervalos de movimientos con características particulares diferentes.

Desde el ambiente cinemático permite relacionar el desplazamiento total del robot, como una composición de desplazamientos en el que cada segmento indica precisamente un movimiento rectilíneo uniforme en el que difiere la velocidad de un intervalo de tiempo a otro.

Por último, cada segmento de la línea poligonal de la gráfica en el ambiente de programación, explícitamente en el diagrama de flujo, se asocia a una secuencia icónica rectángulo-acción y rectángulo-pausa.

A partir de las variables visuales generales de la gráfica, planteamos en forma general un primer acercamiento con la correspondencia y congruencia de los diferentes sistemas de

representación. Siguiendo la misma línea de acción, desde las variables visuales particulares realizamos un análisis más detallado de la correspondencia de cada variable y el respectivo valor que toma en la actividad de la intervención propuesta.

La variable visual de la inclinación del tramo presenta congruencia con la representación simbólica de la pendiente del mismo de tal manera que cuando es ascendente se vincula con una pendiente positiva, para un tramo descendente la pendiente es negativa y en el caso de ser horizontal su valor es cero. Desde lo factual la congruencia se manifiesta de la siguiente manera: La inclinación ascendente representa un valor en el sentido del movimiento de avance, una inclinación descendente corresponde a un sentido de movimiento donde el robot retrocede y es horizontal esta inmóvil.

En el campo cinemático la variable visual inclinación del tramo correspondiente a cada uno de los segmentos, indica la velocidad del robot en los diferentes intervalos de tiempo, una inclinación ascendente representa una velocidad positiva, descendente la velocidad es negativa y horizontal el móvil se encuentra en reposo, es decir, velocidad cero.

Para la programación una inclinación ascendente se manifiesta en el icono de la ventana de programación con el sentido de las flechas hacia adelante y valores de potencia positivos en las cajas de entrada de los motores.

Los vértices del trazo visualmente permiten identificar los puntos en los cuales ocurre un cambio de inclinación y manifiestan la continuidad del tramo, delimita cada uno de los segmentos poligonales de la gráfica. En la representación simbólica define los tramos para calcular las diferencias de la distancia Δd y las diferencias del tiempo Δt y la pendiente de cada segmento $V = \frac{\Delta d}{\Delta t}$.

En el campo factual definen los momentos, lapsos de tiempo, en los que ocurre las diferentes formas de movimiento que ejecuta el robot, delimita las distancias y los tiempos en el que ocurre cada uno. En la cinemática los vértices definen diferentes posiciones en el transcurso del tiempo del móvil, con respecto al punto de inicio del movimiento.

En la programación la correspondencia la asociamos a las ventanas de programación del icono acción-pausa y acción-tracción, los vértices no tienen directamente un icono para correspondencia en la congruencia, pero si definen cada uno de los Δt que corresponde al tiempo de la ventana acción-pausa y la razón $\frac{\Delta d}{\Delta t}$, que define la potencia de la ventana acción-tracción, valores que se definen y reconocen en los extremos de cada segmento.

La siguiente variable visual es el ángulo de inclinación α , un cambio en el valor de su la medida, implica un cambio en la rapidez del robot. Cuando no se realiza la mirada global

de la gráfica y se repara en la denominación heterogénea de los ejes; se confunde la representación gráfica con la trayectoria del movimiento del robot.

De acuerdo a Duval , la vía de interpretación global de las propiedades visuales de la gráfica, que considera el conjunto trazo-ejes, como parte de la imagen que forma la representación del objeto de estudio (Duval, 1988); permite desde las Representaciones Semióticas de los objetos matemáticos el desarrollo de las actividades cognitivas del aprendizaje.

Tomamos este concepto como punto de partida y desde el tratamiento global de la gráfica propuesta en la tarea, identificamos los elementos de la imagen de la gráfica que al ser modificados definen las variables visuales. Luego identificamos los cambios en las Representaciones Semióticas de los diferentes ambientes disciplinares relacionados en la actividad, de esta manera tenemos un marco de análisis para estudiar la congruencia entre las variables visuales de la representación gráfica y las unidades significativas de los diferentes registros de representación en cada uno de los ambientes disciplinares.

4.7 Discusión

Para buscar la razón de la dificultad, en el desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica planteamos cuatro ambientes disciplinares: las Matemáticas, la cinemática, la programación y el simulador del robot, así como el mundo perceptible visual del movimiento del robot.

La articulación entre el registro de representaciones gráficas, de una situación de la cinemática física, la percepción visual del movimiento del robot, el lenguaje de programación del mismo y el manejo del simulador; presenta dificultades entre la relación de los objetos matemáticos como la pendiente y la dirección de la recta en el plano, que vincula graficas con magnitudes heterogéneas en los ejes, espacio y tiempo, confusiones entre pendiente y altura, y la posibilidad de encontrar la ecuación que representa el fenómeno físico partiendo de su representación gráfica.

Identificar los mismos conceptos y objetos matemáticos en el movimiento del robot, en las herramientas de programación y en la situación cinemática del ejercicio planteado. Presupone la capacidad de discriminar las variables pertinentes y la percepción de su manifestación y variaciones en los demás registros vinculados. Pensamos que la competencia docente para afrontar estos desafíos no está en el manejo de los conceptos matemáticos ligados al ejercicio planteado, sino al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de las representaciones gráficas, la escritura

algebraica, la percepción visual del movimiento del robot, el lenguaje y la simulación de la programación.

Esta idea es tomada y adaptada al conocimiento y competencia de los profesores en ejercicio, del artículo de Raymond Duval “El análisis de congruencia, exige la discriminación de unidades significativas propias a cada registro de representación así como el examen de las transformaciones implícitas eventuales requeridas para cambiar el registro”.(Duval, 1988).

Cuando hay congruencia semántica en la expresión discursiva, la representación gráfica, la escritura algebraica del objeto matemático y las diferentes Representaciones Semióticas de los diferentes ambientes disciplinares. La actividad cognitiva requerida presenta dos características importantes, la importancia primordial de las Representaciones Semióticas y la variedad considerable de los tipos de representación movilizadas.

Reconocer de manera explícita las variables visuales de la representación gráfica y encontrar la congruencia con los objetos matemáticos identificados en el problema planteado, además de identificar las variables pertinentes de cada uno de los ambientes disciplinares que correspondan a las características significativas de cada representación; se hace necesario para hacer el análisis de las representaciones en los diferentes ambientes disciplinares en juego.

Primero se identifican las variables con una visión global de tal manera que una modificación en un sistema de representación, entraña y ocasiona una modificación en las unidades significativas de otro medio. Esto nos permite realizar el análisis de congruencia entre los registros de representación en el medio matemático y en los ambientes de las diferentes disciplinas implicadas.

En esta parte de la actividad se pretende y atiende a la pregunta, adaptada para nuestro estudio, ¿Cómo discriminar las características visuales de la gráfica que son matemáticamente importantes para la conversión? En otras palabras ¿Cómo ver las características semánticas de los ambientes disciplinares de las Matemáticas, la cinemática, la percepción visual del movimiento del robot, la programación y simulación del robot? (Duval, 2006).

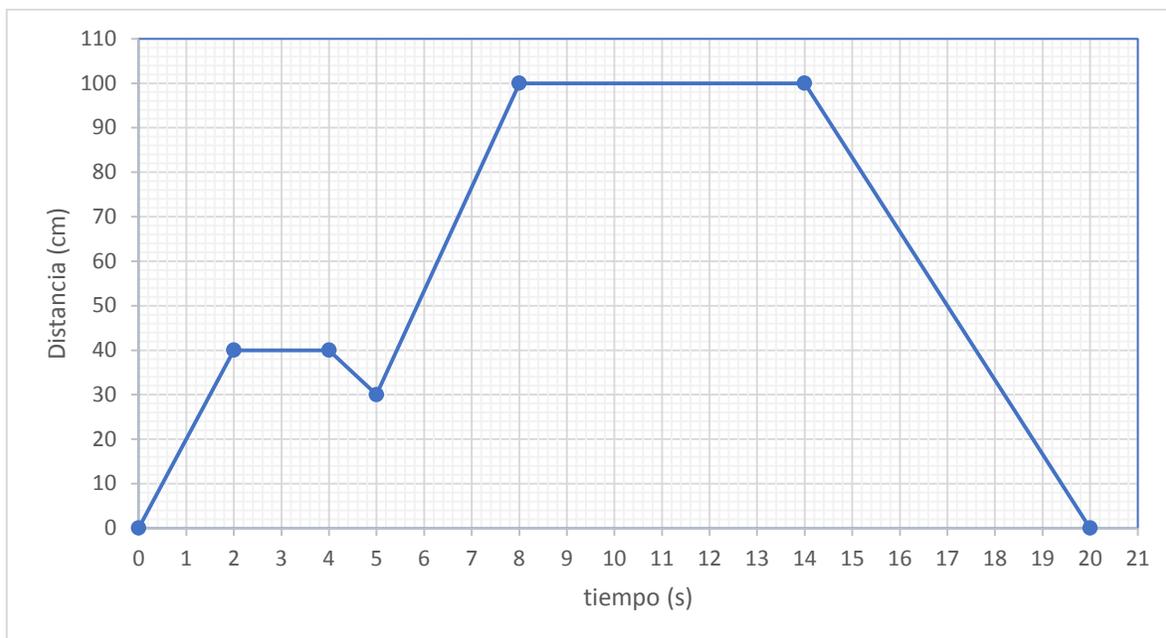
En la tabla 15, presentamos una síntesis de las variables y los respectivos valores que se tienen en cuenta en la actividad propuesta a los profesores. La lectura en las filas nos muestra la correspondencia entre las Representaciones Semióticas de los diferentes ambientes disciplinares vinculados.

Tabla 11: Síntesis de la congruencia entre las variables y sus valores

Variables visuales particulares	Valores	Simbólico Matemático	- Factual	Cinemática	Icónicas	
Forma del tramo	Segmentos rectos	Pendiente constante	velocidad constante	M. R. U; tramos con velocidad constante	Potencia constante en los dos motores	
	Segmentos curvos	Pendiente variable	velocidad variable	M.U. A; tramos con cambios en la velocidad del robot	NA	
Sentido de inclinación del tramo	Tramo ascendente	Pendiente > 0	El robot avanza	Velocidad positiva	•	
	Tramo descendente	Pendiente < 0	El robot retrocede	Velocidad negativa		
	Tramo horizontal	Pendiente $= 0$	El robot no se mueve	Velocidad cero		
Ángulo con el eje horizontal	ángulo menor ángulo mayor	a mayor ángulo mayor pendiente	Cambios en la rapidez del movimiento del robot	Tramos que comparados con otros presentan mayor o menor rapidez	•	
Puntos de referencia en la gráfica	valores de tiempo valores de distancia	valores de cambio de pendiente	donde la que se dan los cambios de rapidez	Lugares en los que se dan los cambios de rapidez	Diferentes posiciones del robot que definen desplazamientos concretos.	•

La correspondencia se manifiesta entre la unidad simbólica de las representaciones Matemáticas y los ambientes disciplinares de la percepción física del movimiento del robot, la cinemática y la programación y simulación del robot.

A continuación, mostramos la gráfica propuesta en la tarea de programar el robot dada la gráfica, acompañada de una tabla donde están las variables con los valores esperados en la solución de la misma. Los exponemos con el objetivo de proporcionar al lector una comparación frente a los resultados que los profesores obtuvieron en las intervenciones del capítulo siguiente.



Gráfica 17 Gráfica de tiempo versus distancia de la tarea propuesta a los profesores

Tabla 16: desarrollo de la tarea

	Descripción del movimiento del robot	Matemáticas del simbólica	- Física	Vel máx cm/s	Potencia de los motores	programación y simulación
tramo 1	movimiento adelante	$y = 20x$	MRU	20,0	67%	potencia de 67
tramo2	estático	$y=40$	MRU	0,0	0%	potencia de 0
tramo 3	atrás	$y= -10x+80$	MRU	-10,0	-33%	potencia de -33
tramo 4	adelante	$y= 23,3x-86,5$	MRU	23,3	78%	potencia de 78
tramo 5	estático	$y=100$	MRU	0,0	0%	potencia de 0
tramo 6	atrás	$y= -16,7x + 333,18$	MRU	-16,7	-56%	potencia de -56

5 CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE DATOS

En esta sección, se presenta la transcripción de varios episodios extraídos del video realizado en la intervención del grupo B, en el momento de la solución las tareas por parte de los profesores. En ellos se analiza las formas como se presentan las correspondencias y congruencias semióticas entre los diferentes ambientes disciplinares: las Matemáticas, la Robótica y la Física.

De acuerdo con esto, los episodios son observados en función de las cuatro categorías de análisis: las variables Matemáticas (visuales y simbólicas), las variables factuales, las variables icónicas y las variables cinemáticas.

5.1 Descripción de los episodios del Grupo B

La implementación consta de dos tareas, la primera invita a los profesores a programar el movimiento del robot dada una gráfica de distancia versus tiempo. La segunda tarea consistía en obtener una gráfica de distancia versus tiempo de un movimiento factual³² del robot. El grupo constaba de siete profesores de Matemáticas cuyas características de formación, años de experiencia y cursos que orienta se relaciona en la siguiente tabla

Tabla 12: Descripción de los profesores del grupo B

Nombre	Profesión Postgrados	Cursos a cargo	Experiencia (años) aprox
X	Lic. Matemáticas UD	Quinto	2
C	Estadística UN	Décimo IB	16
N	Lic. Matemáticas UPN	Tercero	4
M	Lic. Preescolar	Primero	15
D	Lic. Matemáticas Grancolombia Magister en Matemáticas UN	Noveno	25

³² Entendiendo “factual” como el movimiento simulado y físico.

F	Lic. Matemáticas UPN	Octavo	4
Y	Lic. En básica con énfasis en Matemáticas	Cuarto	8

El grupo es heterogéneo en su formación y esto es de carácter fundamental para la investigación porque podemos evidenciar diferentes vertientes de educación matemática, facultades, y experiencias profesionales y personales. Dentro de los instrumentos escritos que se ejecutaron en la prueba, resalta que todos ubicaban en su pregrado procesos donde trabajaron conceptos de pendiente, análisis de gráficas de funciones lineales y situaciones problema donde aplicaban estos conceptos.

Los años en la profesión docente muestran en su mayoría un grupo experimentado que ha trabajado en diferentes niveles de escolaridad, infiriendo, que han enseñado en algún momento los objetos matemáticos dispuestos en las tareas.

En particular, en la actividad propuesta, la finalidad es identificar lo representado del movimiento del robot mediante el trazo de la línea quebrada poligonal que define una función a tramos; la implantación nos permite identificar una línea poligonal quebrada formada por segmentos rectilíneos, continua que parte del origen del plano cartesiano y finaliza con una intersección del eje horizontal; los ejes están denominados con magnitudes heterogéneas, distancia (d) en el eje vertical y tiempo (t) en el eje horizontal. La grafica está representada en el primer cuadrante del plano.

Es importante resaltar que en la actividad propuesta a los profesores se enfoca en el trazo de la línea poligonal superior y no en la forma de la región, definida por la línea quebrada y el eje t; sin embargo, una de las dificultades es la tendencia natural de ver la región poligonal y centrar la atención en la región

De acuerdo con esto, los episodios son observados en función de las cuatro categorías de análisis: las variables Matemáticas (visuales y simbólicas), las variables factuales, las variables icónicas y las variables cinemáticas.

5.2 Transcripción de episodios significativos

Los siguientes episodios corresponden a momentos claves en los cuales se evidencia de alguna manera la forma como se da la correspondencia y congruencia entre las diferentes Representaciones Semióticas.

5.2.1 Episodio I:

En el diálogo de los profesores del siguiente episodio se evidencia que no hay consenso en la interpretación de lo representado en la gráfica, dado que es asumida desde dos puntos de vista diferentes. En el primer caso, se interpreta como la representación de la trayectoria del movimiento que se desea realice el robot. En el segundo, se interpreta como la relación entre la distancia y el tiempo y por tanto cada uno de los segmentos captura esa relación en sendos lapsos del movimiento.

Este diálogo se desarrolla en un ambiente físico en donde justo al frente de los profesores está el tablero. En la parte izquierda está la representación gráfica del movimiento del robot que se desea programar, para que lo ejecute; a la derecha se proyecta el ambiente de programación para ver el diagrama de flujo y las ventanas de los íconos de programación.

M se acerca al lugar donde se encuentra F, con el ánimo de que le explique qué está realizando en la programación. F ya programó una secuencia de acciones y está interesado en realizar la simulación, para ver el movimiento que ejecuta el robot; sin embargo Y le manifiesta que no puede hacerlo hasta no tener conectado el robot al ordenador. En ese momento comienza la discusión sobre la interpretación de lo que representa la gráfica. M alterna la mirada constantemente entre el diagrama de flujo y la gráfica, observa en especial el primer tramo representado y dice:

M: *¿Entonces dónde vas?*

F: *Mira esta primera que está acá.* [Miran el icono acción-tracción, señalado mediante el cursor por F, con la intención de explicarle a M].

Entonces estoy diciendo póngalo solamente hacia adelante. [Se refiere a la secuencia programada]

M reacciona e inmediatamente señala el primer tramo con la mano.

Y: *¡Pero no hacia adelante!*

M: *Pero no es adelante, es en diagonal.* [Traza en el aire una diagonal con la mano].

F: *Yo quiero que **haga** esto.* [F se levanta del pupitre en dirección a la gráfica dibujada en el tablero y la señala con el índice].

Y: *Pero es que supuestamente tenemos que hacer que **haga** lo de la gráfica.*

F: *Por eso, pero no necesariamente tiene que **seguir** la gráfica.³³*

Es evidente que no se logra definir, en común acuerdo, si el movimiento se da en dos dimensiones (el plano) o por el contrario es en una dimensión (en línea recta). Y y M interpretan que el robot debe moverse en dos dimensiones y la gráfica es la trayectoria que el robot debe reproducir; para F la gráfica es una composición de la relación distancia y tiempo para movimientos rectilíneos.

³³ Las palabras en negrilla buscan centrar la atención en los verbos; no representan un énfasis hecho por el locutor.

Las dos interpretaciones se manifiestan en el episodio en varias ocasiones.

Y: *¿Hay que seguir la gráfica?* [Miran el ícono acción-tracción].

M: *¿Hay que seguir la gráfica o inventamos?* [M y Y preguntan a quien dirige la actividad].

F: *¿O hay que hacer que cumpla la gráfica?*

I: *No, que cumpla la gráfica; esta gráfica tal cual como está.* [Señala la gráfica en el tablero].

C: *¿Y cómo así que, si seguir la gráfica o cumpla la gráfica?*

En este momento del episodio, sigue la discusión frente a qué debe hacer el robot, y entra en conflicto la interpretación de la variable matemática visual del ángulo β (que muestra la variación de las velocidades en los movimientos del robot).

F: *Si sigue la gráfica es que yo ponga el carrito y que haga este recorrido.* [Indica el trazo de la gráfica y lo sigue con el dedo índice].

I: *Pero es...*

F: *Si yo entiendo que no, yo lo que entiendo es, yo voy a poner un punto de referencia. Bueno y hago...*

I: *No, es cumplir la gráfica. O sea el robot tiene que cumplir...*

Y y C: *Hacer ese movimiento.* [Señalan la imagen de la gráfica en el tablero].

I: *Con la información que de la gráfica, tal cual.*

C: *Pero el problema es que.... Cómo hago el grado* [refiriéndose al ángulo primer tramo].

I: *No, no, no, asuma que los movimientos son uniformes y rectilíneos.*

Acá surge algo discutido que no tuvimos en cuenta cuando hicimos la caracterización de las variables: la interpretación del ángulo β y su relación con la lectura del trazo y la denominación de los ejes. No asumimos que dependiendo de la interpretación de las variables visuales los ángulos pueden evocar ideas diferentes. En el caso de ver la gráfica como trayectoria, el ángulo indica un cambio de dirección en el camino recorrido por el robot; mientras que si identificamos la relación distancia y el tiempo para cada tramo, el ángulo debe interpretarse como un cambio en la velocidad del móvil entre tramos.

Lo anterior muestra la dificultad de relacionar las variables visuales Matemáticas con las fácticas propias del movimiento, reconociendo que no existe congruencia entre las Representaciones Semióticas vinculadas.

Otra de las variables Matemáticas visuales, la denominación de los ejes, permite explicar que las dos posturas surgen de la forma como se observa la imagen de la gráfica y si se prestó especial atención a la rotulación de los ejes. Cada una de estas posturas se enuncia a través de los verbos, **seguir** y **cumplir**.



Gráfica 18 Gráfica propuesta para la tarea 1

Cuando el enunciado incorpora el verbo **seguir**, la gráfica se asume como la trayectoria del robot, es decir que en la gráfica se ve el camino que debe seguir el robot. Al parecer no se atiende a la denominación de los ejes y, por lo tanto, parece que no se realiza una mirada global de la imagen. En efecto, para Y y M parece no haber sido relevante que los ejes identifican magnitudes físicas heterogéneas, las ordenadas la distancia d y las abscisas el tiempo t .

En la segunda postura, por el contrario, se captura la relación entre la distancia y el tiempo, reconociéndose el lugar central de la denominación de los ejes que representan magnitudes heterogéneas. Así, se procura que la programación **cumpla** lo representado por la gráfica, entendiendo los tramos no horizontales de la gráfica poligonal como movimientos en una dimensión y en línea recta y los tramos horizontales como ausencia de movimiento.

Esta mirada de la imagen se da por la correspondencia entre las Representaciones Semióticas de la variable matemática visual de la denominación de los ejes y las variable cinemáticas de la dimensión del movimiento (una dimensión), la trayectoria (línea recta) y el tipo de cambio de velocidad (movimiento uniforme) en cada uno de los tramos de la gráfica. Esta congruencia semiótica se evidencia en la siguiente parte del episodio, en la cual F toma una hoja de papel blanca y comienza a realizar una representación personal en una sola dimensión de su interpretación de la tarea, al mismo tiempo que le explica a M para convencerla de la interpretación de lo representado del movimiento en la gráfica.

- F:** *Ahora me dice, coja y póngalo a que se mueva y se aleje durante 3 segundos.* [F Hace un movimiento en el aire con el índice, señalando el punto desde donde comienza el cuarto tramo y alejando la mano. M lee y sigue con el índice los tres segundos en la escala de la gráfica correspondiente al eje t].
- F:** *Ya me moví este.* [Se refiere al movimiento de los primeros tramos].

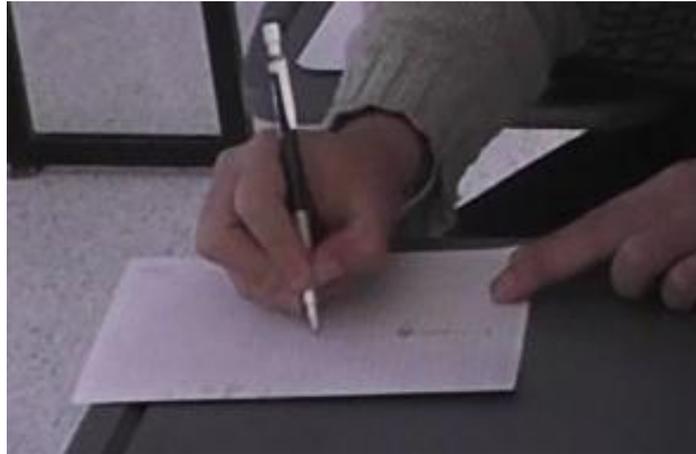
Uno, dos tres y llegué a otro punto acá. [F realiza tres tramos rectos consecutivos sobre la hoja blanca, enfatiza los puntos donde comienza y termina cada tramo].

F: *Entonces esta distancia de acá la recorrió en tres segundos.* [F realiza nuevamente un solo trazo desde el primer punto al tercero enfatizando en la distancia recorrida y el tiempo empleado].

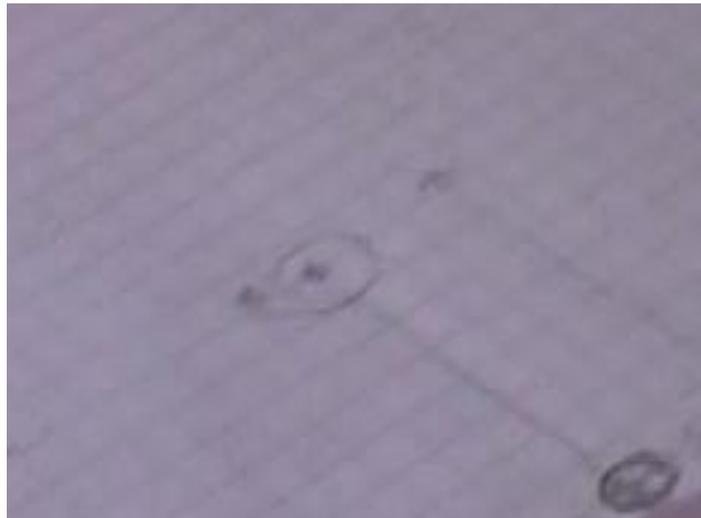
F: *Ahora, dice que del ocho al catorce de nuevo otra vez no genera movimientos. Entonces voy a ponerlo otra vez ahí.* [F representa con un bucle el hecho que el robot no se mueve. Nuevamente M sigue la lectura de los segundos con el índice, pero además hace en el aire la figura del bucle].

F: *Y para el último intervalo yo lo que tengo que hacer es que se devuelva y llegue acá.* [Regresa el trazo hasta el punto de partida inicial].

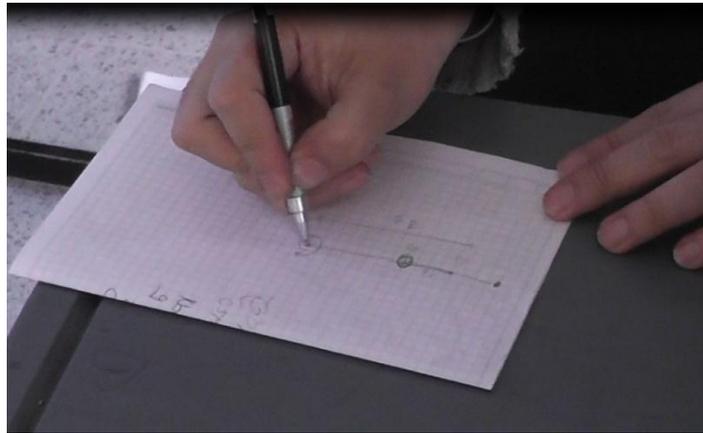
Y el tiempo que se demore va a ser más o menos el mismo que demoro en ir. [En la posición final (vértice) expresa que el robot debe girar y en su diagrama hace una flecha circular].



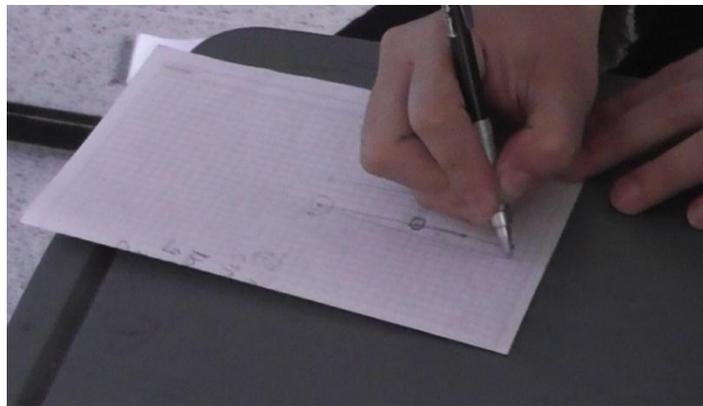
Gráfica 19 Muestra de una representación de un profesor



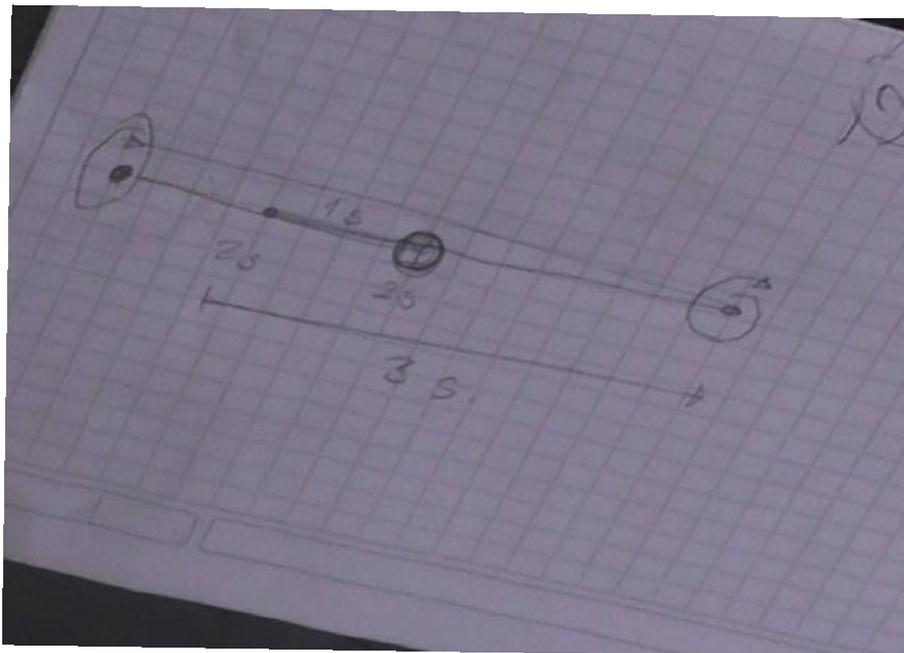
Gráfica 20 Muestra de la representación realizada por el profesor



Gráfica 21 Representación propia de la tarea



Gráfica 22 Movimiento del esfera en la representación propia



Gráfica 23 Gráfica realizada por F para describir el fenómeno

En la explicación que realiza F a M se evidencia que recurre a “otra representación gráfica”, y que esta hace parte del discurso mediante el cual pretende explicar la forma del movimiento y su interpretación de la relación entre las distancias y los tiempos respectivos. En esta representación se simula el movimiento del robot en una trayectoria rectilínea y se demarcan con puntos acentuados los extremos correspondientes a los vértices de los tramos de la gráfica original, es decir, realiza una transformación de las variables Matemáticas visuales de la gráfica original a las variables factuales.

En efecto, F identifica en la variable visual vértices, los valores claves de las diferencias de las distancias recorridas (Δd) y los lapsos de tiempo empleados en tales recorridos (Δt); asimismo identifica la congruencia entre la representación cinemática de la velocidad del robot y la razón de las diferencias ($\Delta d/\Delta t$). Además, relaciona la gráfica funcional definida a tramos, con las variables cinemáticas del tipo de movimiento (M.R.U.) y la dimensión del movimiento (movimiento en una sola dimensión).

De la representación que F propone se debe señalar un par de elementos importantes, que, aunque similares en forma (un bucle y una flecha circular) representan aspectos cinemáticos o factuales diferentes. Interpretamos que los dos bucles que dibuja sobre sendos vértices, representan la ausencia de movimiento durante dos lapsos o, lo que es equivalente, a un desplazamiento nulo durante dichos lapsos. La flecha circular, por su parte, representa un cambio en el sentido del movimiento, pero, al parecer, no un giro del robot. Esto último puede inferirse de un episodio posterior en donde se vincula el ambiente de programación del robot.

En este orden de ideas, se identifica la construcción y uso de un nuevo ambiente “personal” de representación, que no consideramos ni caracterizamos previamente, y que constituye un elemento mediador en la explicación que F realiza a M para procurar su comprensión del fenómeno y de la tarea propuesta. Esta representación incorpora una pseudo-simulación del fenómeno, y exhibe, como parte del complejo conocimiento del profesor de Matemáticas, una aptitud favorable ante la contingencia; además, deja entrever la construcción de sistemas de representación alternos como estrategia de mediación en la explicación.

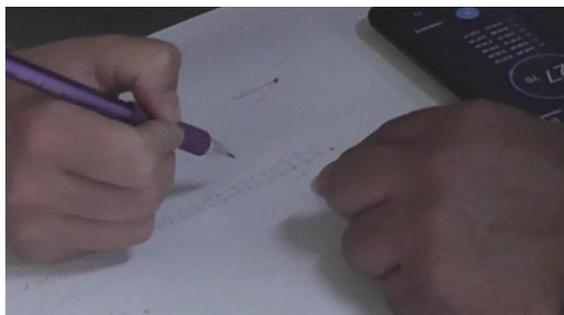
5.2.2 Episodio II

La tarea de este grupo de profesores consistía en ver el propio hecho del robot en movimiento y representarlo en una gráfica distancia – tiempo. Actividad que tiene implícito el cambio de registro semiótico del ambiente disciplinar factual al ambiente de la representación matemática visual de la gráfica, pero con la necesidad de entender e interpretar las variables cinemáticas implicadas en el ejercicio propuesto.

Para el propósito de la tarea el robot se entrega programado con una secuencia de movimientos, que también se pueden ver en el simulador del programa. Los profesores luego de ver el movimiento del robot, trazan un plano coordenado con los ejes etiquetados con distancia (eje vertical) y tiempo (eje horizontal):

- D:** *Has un punto donde quieras.* [Señalando el plano cartesiano].
X: *Pero no puede ser donde quiera.*
D: *Pero es que eso no lo medimos. Has lo que yo te digo.* [Habla del punto de referencia inicial].
X: *Ahí...* [Hace un punto sobre el plano, con coordenadas (3,5)].
D: *Inicialmente, si ahí.* [Mostrado con la mano en la gráfica].
¿El movimiento de reposo cómo lo vamos a manifestar?

X traza un segmento de recta horizontal en el plano cartesiano, parte del punto que colocó anteriormente.



Gráfica 24 Trabajo de los dos profesores en la representación gráfica de la tarea

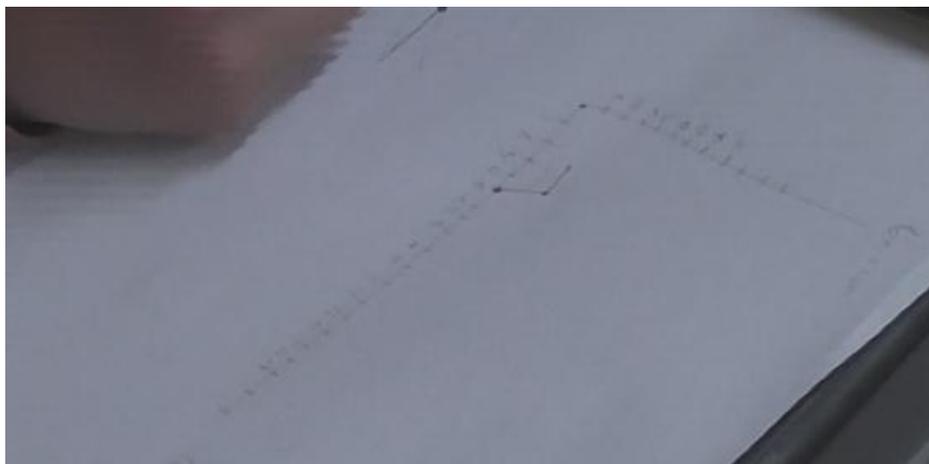
- D:** *Pero es que físicamente, es aquí nos cambia de velocidad.* [Moviendo el dedo índice sobre el segmento horizontal trazado].

D interpreta que el avance horizontal indica un cambio en la velocidad.

- X:** *Pero si cambia de tiempo, pero es que no estamos hablando de velocidad, estamos hablando de posición.*
Estuvo en la misma posición, pero lo que cambió fue el tiempo. [Mientras reteñía de ida y vuelta el segmento de recta horizontal que había trazado].
D: *Y después se regresó a la posición inicial.* [Mostrando con el dedo que se devolvía en el segmento de recta, hasta el origen del plano coordenado].

X no está convencida, piensa un momento y luego propone:

- X:** *¿No? Para volver a la posición inicial entonces baja acá, es así.* [Y traza un segmento rectilíneo desde el punto final del tramo horizontal hasta el eje de las abscisas].



Gráfica 25 Muestra de la tarea

D: Bueno. Entonces el tiempo total sería de 23 segundos.
Y la distancia recorrida.

En común acuerdo repiten una vez más el movimiento del robot, D busca el robot para hacer de nuevo la prueba y lo enciende para que corra el programa, pero esta vez fija en el piso un punto de referencia como punto de partida. Asumen la longitud de las baldosas como referencia de medida para la distancia y la estiman en aproximadamente 30 cm; el robot hace el primer desplazamiento y se detiene para luego retroceder, Al finalizar el recorrido del primer tramo D coloca el dedo señalando el punto en que comienza el movimiento hacia atrás. X toma los tiempos de los intervalos con el cronometro de su teléfono móvil, cada toque registra el tiempo para un tramo de movimiento de robi. La estimación de las distancias se complica porque el robot no muestra una trayectoria recta por algún defecto físico en sus engranajes.

X: Cada uno tiene como 50 cm. [Se refiere al largo de la baldosa].

D: Noo...

N: Unos 30...

Comienzan a corregir la gráfica y representar nuevamente el movimiento del robot, inician a marcar puntos en el plano cartesiano.

N: En distancia, 60 en tres segundos. [Dictando la información para ubicar el punto en el sistema coordenado].

D: Si. [X ubica el punto y paso seguido traza un segmento del origen al punto graficado].

X: ¿Después se detiene cuánto? En tres segundos. [Luego de mirar el cronometro del celular].

O sea hasta el seis. [Ubica el punto (6, 60)].

N: Se devuelve 65.

[X Traza un segmento horizontal desde el punto final del primer segmento hasta el segundo punto].



Gráfica 26 Muestra de la gráfica de solución de la tarea

Los profesores identifican las variables factuales: El sentido del movimiento, y sus diferentes valores (avanzar, retroceder o mantenerse inmóvil). La dirección de la trayectoria como segmentos rectilíneos. La relevancia de medir las distancias recorridas y los tiempos empleados para cada tramo de movimiento.

Cuando se da la correspondencia entre los valores de los tiempos y las distancias medidas en los valores extremos de cada intervalo de movimiento del robot, con la variable matemática visual general de los vértices de la línea poligonal de la gráfica se comienza a dar la depuración de la misma y por ende a entender y solucionar adecuadamente la tarea propuesta. A demás la variable factual del sentido del movimiento coincide con la representación semiótica de la variable visual particular del tramo de tal manera que cuando robi avanza se representa con un segmento ascendente, si se mantiene inmóvil corresponde a uno horizontal y cuando retrocede se representa gráficamente con uno descendente.

En forma implícita se asumen variables cinemáticas: La trayectoria de cada tramo como rectilínea. La velocidad media constante y el movimiento total como una composición de movimientos rectilíneos uniformes (MRU).

5.2.3 Episodio III

F está programando al robot en la primera secuencia, le explica a M, en la proyección la ventana de la variable icónica de tracción, manipula los deslizadores para programar el valor de la potencia y los iguala en ambos motores del robot, F desea especificar el tiempo de la acción:

- C:** *¿I, hay una función que sea girar, o todo se maneja con la potencia?*
I: *Con las potencias de los motores se maneja todo.*

- C:** *El simulador lo puedo usar hasta que conecte a robi.*
I: *Sí. [C ya tiene programada una secuencia de acciones que se evidencian en el diagrama de flujo y quiere simular para comprobar el resultado].*
F: *¿Con ese de pausa uno le mete el tiempo? [Mientras miran la ventana de programación de la variable icónica pausa y programan el tiempo].*

En este momento F ya programó la primera secuencia tracción - pausa, que es congruente con el primer tramo de la variable matemática visual de la gráfica propuesta en la tarea, con la variable factual de avanzar en el movimiento y además con los vértices del primer tramo.

- I:** *Sí, el tiempo que quiere que haga la última acción. [F se dirige a M, mientras comienza a programar el movimiento del segundo tramo].*
F: *Ahora con el siguiente. Pero lo dejamos igual. Si no le meto potencia, pues, se queda quieto. [Explica la acción programada a M,*
C: *Si yo lo giro en la potencia ¿gira o voltea? [Realiza ademanes circulares con las manos para mostrar una rotación (gira) y las alterna con desplazamientos paralelos para indicar el cambio de dirección (voltea)].*
I: *Ahí va a hacer este movimiento. [Realiza círculos con el índice derecho].*
C: *Va a girar. [Hace movimientos de giros circulares con la mano].*
I: *En su propio eje.*
C: *¿Cómo hago para que suba? [Busca que siga la gráfica como trayectoria del movimiento].*
I: *Subir este y poner una potencia diferente en el otro. Este hacia adelante, por ejemplo*
C: *Voy hacer el del espacio 4 – 5, el movimiento de los cuatro a los cinco segundos. ¿Cómo es bajar, es negativo, Le coloco la potencia negativa?*
I: *¿Creerías que es la mejor manera?*
C: *Pues, no sé si tenga que ver la potencia con el lado hacia el que gira.*
I: *Sí.*
C: *entonces sí.*
Traen a robi para ver la ejecución del programa...

5.2.4 Episodio final

El investigador propone una reunión con los dos grupos de profesores, en la cual, se realizará una exposición de las ideas e impresiones que dejó en ellos las tareas propuestas. Para ello solicita que un representante de cada grupo exponga a sus compañeros la tarea que les correspondía. Toma la palabra C.

C: *nosotros teníamos que lograr que, en el simulador del robot, crear la **forma** en que el robot hiciese el movimiento que de la gráfica. Que hiciera el desplazamiento en el tiempo y las distancias dadas.*
 Luego se preguntó por la tarea del otro grupo, expone D

D: *era el ejercicio inverso, partiendo del robot realizar un diseño gráfico.*
 Ahora se cuestiona por las dificultades que encontraron en la elaboración de la tarea. Inicia el grupo que debía programar el robot.

Y: *que se debía tener en cuenta el tiempo en que él debía ejecutar la acción porque a veces se le daba demasiado tiempo y el robot terminaba dando vueltas y no se llegaba al punto al que se quería llegar. Es complicado HACER los giros, o a mí me pareció muy complicado hacer que no rote completamente, sino que complete un ángulo. Entonces fue muy complicado la programación de eso.*

Encontramos en las palabras de Y referencia a la variable de ángulo entre dos tramos β . Es explícita cuando desea hacer que el robot gire para seguir con la trayectoria de la gráfica. También es evidente que la denominación de los ejes de magnitudes heterogéneas no fue una información relevante para la solución de la tarea.

El grupo dos explica sus dificultades.

X: *al ver el movimiento del robot, teniendo en cuenta medir las distancias, la estimación de las distancias fue complicado al igual que la toma de tiempos para identificar el punto exacto de donde ubicar el robot en determinado tiempo. También nos confundimos mucho por la parte como se regresaba, entonces consideramos como que se devolvía, pero no ...como que se devolvía la distancia, no que aumentaba su distancia, entonces si tuvimos como bastante complicación en ese punto.*

N: *de cómo representar que se devolvía el robot*

X: *como hacer que la gráfica representara exactamente lo que estaba haciendo el robot cuando se regresaba, sobre todo.*

En esta intervención podemos ver como la variable visual de inclinación del tramo fue una dificultad. Específicamente la descendente, dado que no encontraron fácilmente un acuerdo en cómo relacionarla con el movimiento del robot. Esto muestra que establecer una relación entre los registros de representación usuales y no usuales dentro del contexto matemático generan una disonancia entre las disciplinas que se buscan integrar en una tarea.

F: *otra cosa del grupo uno, es que para realizar la programación se debía tener en cuenta la potencia en la que se ponía a funcionar el robot, para que hubiese una correspondencia con la PENDIENTE de la recta de cada intervalo que estaba representado. Sino no se llegaba al mismo punto final inicial.*

Para el profesor F, entra como parte de la solución de la tarea, el objeto matemático pendiente de una recta. Relacionó este concepto con la potencia del motor. Esta intervención relaciona la variable simbólica de la pendiente con la variable icónica de programación de la potencia de los motores. Las cuales, a su vez, obtienen correspondencia con la variable factual del sentido del movimiento de robot. Aunque aún no es explícito, el vínculo está en el signo de la pendiente y el sentido de las flechas de la variable icónica. Según lo anterior, la relación entre las tres variables brinda al profesor F la posibilidad de comprender el movimiento del robot, su programación y el concepto matemático que se está trabajando. Este logro muestra que la Interdisciplinariedad de la tarea, y su éxito resultante, está dada principalmente por la transformación entre variables.

Luego de la anterior intervención C e Y expresan sus dificultades para la solución de la tarea.

C: *Creo que el primer intento de todos fue primero como ver, cómo funcionaba el robot. Porque sabíamos que teníamos dos factores la potencia y el tiempo, pero no sabíamos que efecto tenía sobre el robot cada una de esas cosas. Pues en el primero (programación) le coloqué lo que yo creía asumiendo que si le ponía la mitad de la potencia me iba a dar medio giro o un giro de 180 grados. Y resulta que no, entonces pues al comienzo no sabíamos ni cómo funcionaba el ese y*

Y: *yo la primera la hice, la potencia. Traté de calcular el ángulo en el que quería que girara, pero, no tuve en cuenta el tiempo y terminó girando sobre su propio eje.*

Cuando C se refiere a la potencia y tiempo, está utilizando dos variables cinemáticas, velocidad media y tiempo respectivamente. Expresa la necesidad de conocer como estas variables físicas se desarrollan en el robot, la dificultad radica, en la relación de estas variables con las icónicas y fácticas, puesto que pretendía generar un movimiento circular para generar un ángulo β en lugar de interpretar la potencia como la proporción entre la pendiente y la velocidad media. Del mismo modo, el tiempo que menciona es de giro y no como variable visual de la abscisa como lo vimos en el episodio I. Esta dificultad en la interpretación subsecuentemente pone taras en la ejecución de la tarea.

El investigador propuso que cada uno de los grupos expusiera su solución, dicho esto un profesor del equipo uno toma la palabra.

F: *en el primer intervalo que nosotros tenemos, vemos que hay una variación de 2 segundos y que se mueve una distancia de 40 cm del punto de referencia. Entonces, lo que hice fue dejarlo en línea recta (refiriéndose a las flechas de la programación del robot) y ajusté esta potencia (el número) para cada uno de los dos ejes en 20 porque esa es la pendiente de ese intervalo de recta. Ajusté el tiempo en dos segundos (mostrando el ícono de pausa) y pasé al siguiente intervalo.*

Su explicación inicia con una referencia a las variables Matemáticas simbólicas Δt y Δd respectivamente, las vincula con las variables icónicas de tracción por medio del objeto matemático de la pendiente, esta relación la determina hallando el valor numérico de la pendiente en ese intervalo (20), las unidades de esa pendiente (cm/s) y la potencia del motor. (variable icónica). Establecer ese puente entre las variables permite una comprensión global de la tarea y una aproximación a la solución esperada. Seguido de esto, relaciona la variable icónica de pausa con la cinemática de tiempo estableciendo como parte de la programación la duración de la acción inmediatamente anterior.

Aunque la potencia del motor debía pasar por un último ajuste, dado que no era correcto establecer la pendiente como la potencia del motor directamente, sino que se debía establecer una proporción con la velocidad máxima del robot y el número 100 de la variable icónica, es la solución con mayor número de relaciones entre variables.

F: *En el siguiente intervalo pues yo no necesito que se mueva ni para adelante ni para atrás entonces lo dejo quieto y dejo que no tenga ningún efecto de potencia por el tiempo de 2 segundos más.*

El fragmento anterior evidencia las relaciones establecidas anteriormente por el profesor F ante las variables cinemáticas porque desea que el robot esté detenido durante un tiempo determinado, icónicas porque establece los parámetros de programación para este fin y Matemáticas formulando que la pendiente (la cual iguala a la potencia) debe ser cero.

F: *Después me necesito devolver entonces lo que hice fue poner la potencia hacia abajo (mostrando con el curso las flechas hacia abajo y con señalando un movimiento descendente con el brazo) dependiendo de la pendiente del segmento que está ahí. Entonces hay una variación de 10cm por segundo entonces pues así lo dejé acomodado la potencia (mostrando las flechas y el número) y le di el tiempo correspondiente.*

Una de las dificultades que expresaron los profesores, era relacionar la pendiente negativa de un segmento de recta con el movimiento del robot (o esta misma relación inversamente), es por esto, que sobre sale la correspondencia de la variable icónica de las flechas en la programación con la pendiente negativa de 10, y la variable cinemática de desplazamiento hacia atrás.

F: *En la siguiente tenía que SUBIR de 30 hasta 100 entonces pues básicamente lo que hace es moverse a una razón de 24 cm por segundo, entonces acomodo la potencia y lo dejé con los tiempos correspondientes. Posteriormente dejo de nuevamente quieto en el segmento Superior y adecuo tiempos y al finalizar pues la pendiente es negativa y es de 17 cm por cada segundo.*

Como vemos en el segmento anterior el profesor ha mostrado la relación entre las variables que anteriormente ya había tenido cuenta. Éste proceso confirma que la relación entre variables de orden fáctico, cinemático, matemático, e icónico que el profesor de Matemáticas pueda realizar, convergen en la solución de la tarea interdisciplinar.

F: *n esto se garantiza, que cuando haya cumplido con todo el ciclo de la programación voy a llegar al mismo punto inicial y por eso se coincide cero igual a cero.*

El profesor identifica que es un movimiento rectilíneo uniforme a pesar de que no lo hace explícito. Paso seguido, corre la programación en el simulador para que los compañeros puedan observar el movimiento del robot. Marca un segmento de recta en el simulador para tener una referencia de la posición del robot. Ninguno advierte que las distancias no se cumplen. Como se mencionó anteriormente, por la falta de proporción entre la pendiente y la potencia de los motores.

Al ver a la simulación D interviene.

D: *¿por qué se habla de pendiente?*

A lo que F responde.

F: *Le pregunté al moderador (investigador) si cada uno de estos segmentos correspondía a un segmento de recta, entonces pues si lo hay, como objeto matemático puedo ver que hay una razón de*

proporcionalidad, entonces yo puedo mirar cual es la rapidez con la que se mueve en este intervalo y a partir de eso defino la potencia para el dispositivo. Así fue que básicamente la relacioné. Señala que de acá a acá hay una variación de dos segundos y de 40 cm (con el dedo señala el inicio y el fin el intervalo y hace un gesto de intervalo en la abscisa y en la ordenada) entonces por cada segundo se mueve ... lo mismo acá la pendiente sería cero (señalando el segundo intervalo), acá sería de -10, acá sería de, si no me equivoco, 23.7 aproximado a 24 porque nadie consideró usar cifras decimales, y el último segmento también miré más o menos la pendiente. pero básicamente el uso que se hizo del concepto de pendiente ahí es para ajustar la potencia en que se debe mover el robot.

Al contestar la pregunta de D, evidencia la relación hecha entre la variable matemática simbólica de la pendiente con la icónica de potencia. Podemos asegurar que, si el profesor en esa relación tiene en cuenta la variable fáctica de distancia, se habría percatado que no estaba cumpliendo con las distancias de la gráfica. La Interdisciplinariedad se establece como la mayor cantidad de relaciones entre variables de representación de un objeto de estudio a partir de cada una de las áreas de involucradas en la tarea.

El investigador pide la opinión de los profesores

D: *me parece interesante, lo que me parece es que es un poco salido de contexto ese concepto de pendiente, por el mismo movimiento. Es decir, cuando se ve reflejada la cima hablamos de pendiente como hablando de cateto 1 y cateto 2. Es decir, no sé si es pertinente a lo que estamos hablando (con un gesto de duda y descalificación) lo veo claro cuando tu hablas (refiriéndose a F) de pendiente positiva y negativa que efectivamente se puede calcular. Como objeto matemático pues pude uno hablar de Pitágoras que sería la tangente de un punto y la distancia entre los catetos, como el ángulo de ese punto. Digo que no es pertinente porque una persona no ve eso, no lo ve tan claro, si no ve la gráfica. Si a nosotros nos hubieran visto ... diferente a nosotros.*

Del anterior fragmento de diálogo del profesor D se pueden extraer varias ideas. Primero, no ve con relevancia la pendiente en la solución de la tarea, esto se puede derivar de la no entre las variables Matemáticas de nomenclatura de los ejes y la variable cinemática de velocidad. Al dividir Δd entre Δt , con unidades heterogéneas, cm y s respectivamente, podría visualizar una relación con la velocidad. Esa imposibilidad de visualizarlo puede derivarse de la ausencia de estas situaciones en su formación y en su ejercicio docente, además de un elemento que parece faltarle en su esquema de formación donde otras disciplinas intersequen a las Matemáticas en el diseño y solución de situaciones problémicas. un profesor que se expone a ciertas tareas en su formación llevará esas mismas tareas al aula en su profesión.

F: *posiblemente, pero la interpretación hubiera sido diferente porque hay ya tiene que considerar, pues yo lo veo es como con la rapidez y en ese caso yo si vi la rapidez como un segmento de recta, si hay estuviera hablando de una aceleración donde ya tengo que considerar ese arranque y el frenado al final, hay si toca es hacer una gráfica curva (señalándolo con el brazo como una parábola) que adecuen esos cambios de parámetro. Pero pues en este caso particular las hice con rapidez y pues la podía medir con un segmento de recta.*

La interpretación del profesor F profundiza en las representaciones que estaban involucradas en la tarea. Además, menciona otras que no estaban dentro de la propuesta como lo son la aceleración. La cual, no está dentro del software de programación como una variable a controlar, sino que toma todos sus movimientos con rapidez constante. En las variables fácticas, cuando el robot es puesto en marcha, parte del reposo para ejecutar uno de los segmentos de la gráfica, y frena hasta detenerse cuando el tiempo de ejecución de tracción termina. Eso nos deja entre ver que la modelación que realizamos de un MRU es idealizada frente a las representaciones reales y cotidianas. Un modelo más exacto mostrará curvas, como lo advierte F, al inicio y al fin del segmento. Una de las razones que encontramos, por las que esto no se tiene en cuenta, es lo instantáneo que es esa aceleración (positiva o negativa) del robot y en ese sentido, la escala del tiempo debería ser del orden de los milisegundos. Lo cual, es muy poco usual y pragmático en términos de las nociones temporales de las personas.

El investigador pregunta al mismo grupo, si vieron o tuvieron en cuenta lo mismo que F.

C: no, ahora que habla F expone, cae uno en cuenta que la gráfica representa el movimiento del robot pero lo que nosotros intentamos hacer es que el robot se moviera en esa misma...(traza con la mano la gráfica) o sea, realizara el comportamiento de la gráfica. Siguiera ese movimiento. pero una cosa es que el robot haga esa figura y otra que represente lo que dice la información (señalando la gráfica) porque efectivamente el robot se estaba moviendo a una distancia a un determinado tiempo, entonces hablamos de velocidad, o sea que debíamos tener una velocidad en unos tiempos establecidos y pausaba y luego se movía, desaceleraba, aceleraba. pero yo lo que hice fue tratar que simular la trayectoria de la gráfica, por eso hablamos de giros inicialmente pero realmente ... en esto, Y interviene y habla de ángulos y otros conceptos, pero la verdad no, no lo estábamos viendo de la misma forma que F.

La reacción de cambio frente a su solución de la tarea y la expuesta por el profesor F, evidencia que identificar relaciones entre variables es una situación a la que el profesor debe exponerse, preferiblemente en su formación, dado que al explicarle encontró las distintas representaciones de la pendiente en ambientes cinemáticos, fáctico y de programación. Además, visualizó que las variables de los ejes eran heterogéneas y por ende no se podía hablar de un movimiento en dos dimensiones. C explica su solución, pero avala completamente la de F.

El moderador pregunta qué opinan al grupo 2

D: (caminando hacia el tablero para utilizar la gráfica en su explicación) nosotros como objeto matemático tomamos distancia y tiempo, es decir, básicamente era describir la trayectoria del móvil, tuvimos una dificultad grandísima que fue el movimiento arrancaba en tres segundos llegaba se desplazaba a 60 cm (señalando el punto de origen, el punto final del intervalo y los 60 cm en la ordenada respectivamente) en tres segundos (señalando de inicio a fin el segundo intervalo) se queda quieto. en el espacio siguiente, tuvimos un dificultad porque no sabíamos cómo manifestar que del segundo 6 al segundo 9 se devuelve (haciendo un gesto de retraer el brazo) lo

que hace el robot, nosotros lo estamos viendo como desplazamiento entonces decimos que subió (con la mano señala un tramo de la gráfica de forma ascendente) hasta ... bueno , esa distancia. ese desplazamiento (en ese momento olvida el valor que hallaron en la solución de la tarea) que fue otra de las dificultades, que fue medir las distancias. Llegaba a un punto bastante alto y de ahí automáticamente se devolvía entonces nuevamente volvimos a tener esa misma dificultad de aquí (señalando el intervalo donde mencionó que retrocedía el robot) si lo representábamos como que si bajase o si mostrábamos un espacio total, que fue lo que finalmente tomamos como conclusión.

El profesor D en su interpretación de la tarea, utiliza la variable cinemática de tiempo y distancia, dado que este grupo observa al robot hacer el movimiento. Sin embargo, como lo expresan, no les fue sencillo establecer la inclinación del tramo en la gráfica. El cambio de representación entre una variable cinemática y otra matemática visual, y específicamente en esta dirección poco usual en el aula y en la Formación del Profesor de Matemáticas por los contextos en los cuales se desenvuelve su estudio, generó en este grupo conformado por tres profesores dificultades de transformación. Es indudable que los profesores conocen del concepto de pendiente y han trabajado en muchas oportunidades con representaciones gráficas y tabulares, pero estos modelos idealizados los alejan de los contextos fácticos en los que intervienen muchas variables y que desestabilizan el conocimiento del profesor de Matemáticas evidenciando los límites de la comprensión de un objeto matemático; una propuesta interdisciplinaria ofrece la oportunidad de complementar sus conocimiento transformando las representaciones usuales de los objetos matemáticos a representaciones en otras disciplinas. Resumiendo, la invitación al profesor de Matemáticas es conocer el objeto matemático de forma holística y aplicada.

El investigador muestra el video de la tarea propuesta a este grupo para que todos conozcan la actividad propuesta y si estaban de acuerdo con esa interpretación

En el simulador representa un movimiento rectilíneo uniforme donde se desplaza hacia el punto de referencia en dos ocasiones

X: así lo resolvimos, pero teniendo en cuenta lo que acabó de explicar F, pues tendríamos que revisar que, si se devuelve, es porque al segundo 9 vuelve a su posición inicial que sería cero. Y entonces, pues así cambiaría la gráfica.

Al igual que el profesor C, X evidencia un cambio en la interpretación de su tarea luego de la explicación detallada de F. Esto nos advierte, nuevamente, que el profesor al estar inmerso en otros contextos donde el objeto matemático posee otras representaciones y al trabajar con ellas en la solución de una tarea, puede ampliar su estructura de conocimiento del objeto.

Luego de todo lo anterior, podemos evidenciar aspectos importantes de la intervención que concluyen la investigación poniendo en evidencia las características que debe tener una experiencia interdisciplinaria conjugadas con las necesidades de la formación de los

profesores de Matemáticas. Esto se expondrá detalladamente en el siguiente capítulo de conclusiones.

6 CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

6.1 Conclusiones del estudio

A lo largo de nuestra experiencia como profesores de Matemáticas, es evidente que conocemos un gran conjunto de objetos matemáticos que ponemos en juego día tras día en las aulas de clase con diversas estrategias de enseñanza para, y es lo esperado, lograr el aprendizaje de nuestros estudiantes. Pero esta labor nos ha mostrado con la experiencia y el estudio de la maestría, que está muy lejos de ser un sencillo acto de interacción humana como se pretendería ver desde una perspectiva simplista de la educación, por el contrario, abordar el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas ponen en evidencia elementos epistemológicos, sociales y didácticos que forman en conjunto al profesor de Matemáticas. Es innegable, como es mencionado antes en el análisis, que los profesores conocen del concepto de pendiente, el cual elegimos en esta investigación, por ser uno de los más usuales en diferentes currículos y, al preguntarles a los profesores del grupo A y B, lo han trabajado en muchas oportunidades con diferentes representaciones.

Sin embargo, estos modelos idealizados que utilizan en las aulas los alejan de los contextos fácticos en los que posibilitarían la intervención con muchas variables, evidenciando los límites hasta los cuales llega la comprensión de un objeto matemático; es por lo anterior, que una propuesta interdisciplinar ofrece la oportunidad de complementar sus conocimientos por medio de la transformación de las representaciones usuales de los objetos matemáticos a representaciones en otras disciplinas, como lo son la física en el marco de la cinemática y la Robótica en la programación y la simulación. Es por lo anterior, que invitamos al profesor de Matemáticas a conocer el objeto matemático de forma holística y aplicada.

Sumado a lo anterior, tras el análisis de los episodios y de las respuestas que los profesores de los grupos A y B dieron, concluimos que la imposibilidad de visualizar el Objeto Matemático puede derivarse, en la mayoría de los casos, en la ausencia de estas situaciones en su formación y, por ende, en su ejercicio docente. Las evidencias son notorias, dada la consulta en diversas carreras de licenciatura o formación inicial del profesor de

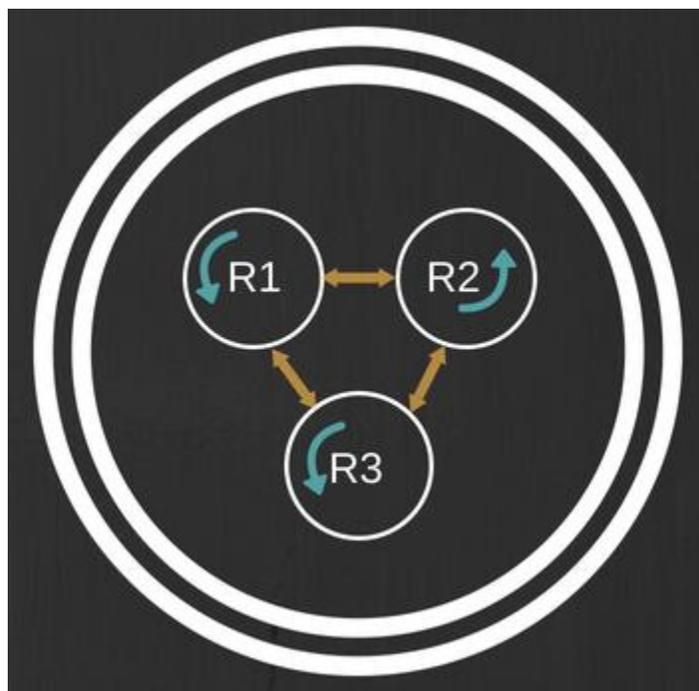
Matemáticas, en las cuales, los espacios académicos con otras disciplinas son escasos o nulos.

Proponen en su pensum algunas asignaturas como física, aun así, no se puede garantizar que estos escasos espacios puedan desarrollar en el profesor en formación, nociones interdisciplinarias, y más, cuando la intención de la carrera y de la asignatura no es esa. Otro ejemplo de este caso, y con el que contamos en el grupo A, es la formación no Matemática exclusiva, como lo son los profesores ingenieros o de ramas similares. En este caso específico, el profesor fue el único de los dos grupos que logró desarrollar la tarea propuesta de forma esperada, su formación de ingeniero, lo obliga a moverse en diferentes campos del conocimiento a la vez en la solución de una tarea, evidenciando que las conversiones entre registros semióticos se facilitan cuando se ha experimentado con tareas similares.

Por el ejemplo anterior, consideramos que un elemento faltante en el esquema de Formación del Profesor de Matemáticas es un espacio donde otras disciplinas intersequen a las Matemáticas en el diseño y solución de situaciones problémicas. Un profesor que se expone a ciertas tareas en su formación llevará esas mismas tareas al aula en su profesión.

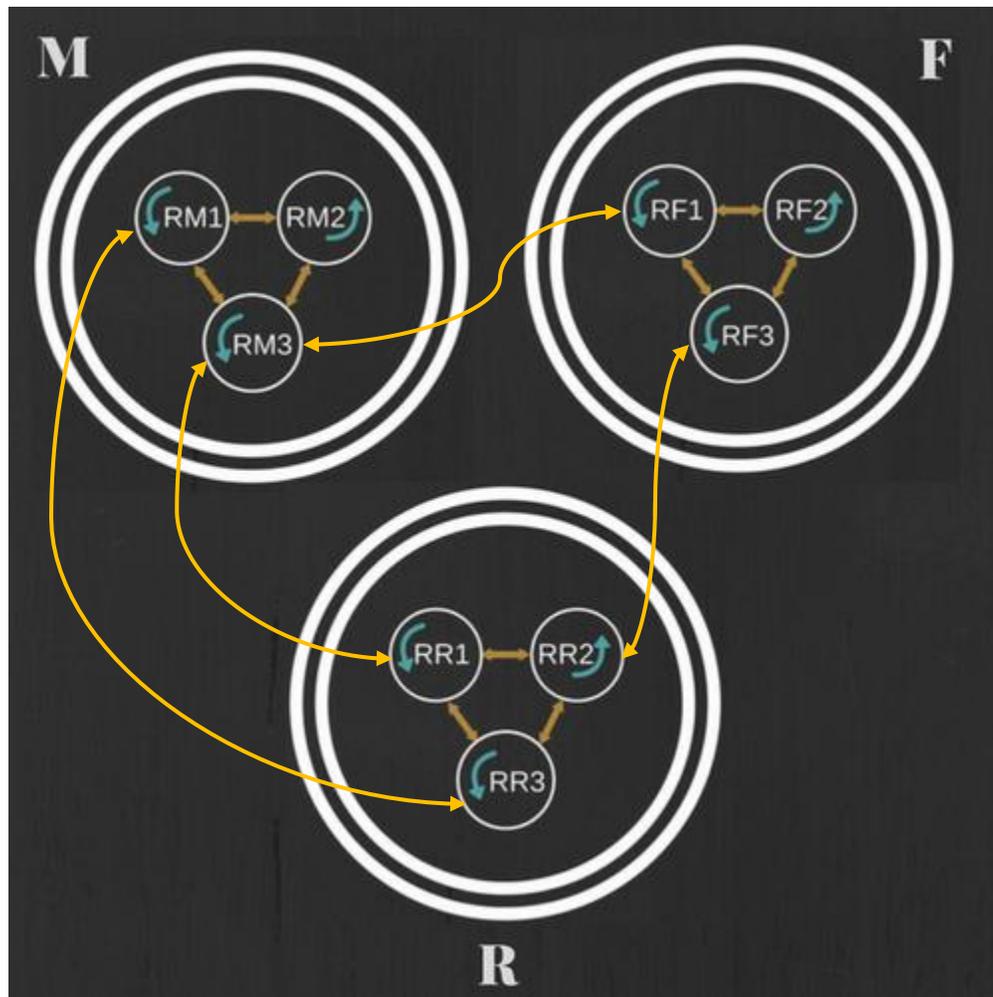
Frente a la misma tarea propuesta, lleva a preguntarse: ¿Son los procesos del pensamiento los mismos en Matemáticas que en las otras áreas de conocimiento?(Duval, 2006) y aunque este no es problema de esta investigación, podemos evidenciar que son muy distintos y que por ello, los trabajos interdisciplinarios de los cuales se hicieron registro durante el trabajo, son de orden multidisciplinar, un mismo problema trabajado desde cada una de las disciplinas (Blasco, 2002). Blasco en su estado del arte muestra que hay un consenso en las definiciones de multi, inter y trans disciplinar entre otras, pero la experiencia con los diferentes grupos de profesores nos muestra que esto no es del todo claro, que utilizan las palabras indistintamente sin el más mínimo reparo por el concepto que enmarca cada una de estas.

Esta disyuntiva nos enfrenta a la dificultad de una tarea y su solución realmente interdisciplinar, además conocer un objeto matemático el cual no es accesible de forma física o sensorial implica realizar tratamiento y conversión entre los registros de representación semiótica dentro de la misma matemática (Duval, 2006), como lo representamos en la siguiente gráfica.



Gráfica 27 Las distintas representaciones y sus transformaciones en un área del conocimiento

Concluimos por todo lo anterior, que en una tarea interdisciplinar se realizan transformaciones entre representaciones de distintas disciplinas, Amplía el marco de significación de los objetos matemáticos, incorporando significados de otras disciplinas en el conocimiento mismo del objeto matemático y poniendo en evidencia las diferentes formas implícitas en las que está en el mundo sensorial. Encontramos una gráfica que nos muestra el conjunto de representaciones de un objeto matemático en el mundo M, de las Matemáticas, F de la Física y R de la Robótica, con una flecha bidireccional ejemplificamos como las conversiones se pueden dar en cada uno de estos conjuntos, en cada una de sus representaciones individuales, modelando así, una posibilidad de tratamiento interdisciplinar de la conversión que será posible desde muchas y distintas disciplinas.



Gráfica 28 Transformación de representaciones ente disciplinas

Para sustentar esta conclusión, se identifica la construcción y uso de nuevos ambientes “personales” de representación como una necesidad y constituye un elemento mediador en la explicación que F realiza a M para procurar su comprensión del fenómeno y de la tarea propuesta. Esta representación incorpora una pseudo-simulación del fenómeno y la exhibe como parte del complejo conocimiento del profesor de Matemáticas, una aptitud favorable ante la contingencia; además, deja entrever la construcción de sistemas de representación alternos como estrategia de mediación en la explicación. Una futura propuesta concluyente de este trabajo es la construcción y clasificación de las distintas variables en las que las representaciones de los objetos matemáticos se pueden encontrar, atendiendo que los más importante en las Representaciones Semióticas no es su relación per se, sino su capacidad intrínseca para ser transformadas en otras Representaciones Semióticas (Duval, 2006) y en este caso, de otros campos del conocimiento.

Para el trabajo realizado, la Robótica Educativa fue un buen mediador que se puede utilizar en el diseño de las tareas de carácter interdisciplinar para poner en evidencia la presencia del asunto semiótico en el ejercicio de la enseñanza – aprendizaje. La semiótica es consustancial a las actividades propuestas en la tarea y genera un ambiente de manera natural donde surge y se propicia los cambios de representación entre registros.

En tareas de carácter interdisciplinar las Representaciones Semióticas se movilizan natural e indistintamente en el campo disciplinar de las Matemáticas y otros dominios del conocimiento, por ende requiere de un conocimiento del profesor de Matemáticas que le permita la re significación de los conceptos sobre los objetos matemáticos para permitir una modelación como construcción del conocimiento desde una mirada holística de las diferentes disciplinas en contravía al conocimiento disgregado y particularizado que por lo general tenemos en la formación de profesor. La Interdisciplinariedad en la formación no ha tenido lugar relevante, hemos sido formados en uni-disciplinas y parece que existe una necesidad que aparezcan otros discursos como la física o la Robótica, de alguna forma incluir un tercero que medie en esa fragmentación de la Formación del Profesor de Matemáticas, dejando de lado el temor a que cada disciplina pierda su status por relacionarse. A partir de situaciones de Robótica se logra desarrollar el conocimiento interdisciplinar en el profesor a favor de la enseñanza de las Matemáticas, proponiendo constituir tareas que en el marco de la Robótica promueve aspectos de la formación del profesor Matemáticas que no están en otros modelos. En este sentido, la tarea interdisciplinar pone al profesor a pensar diferente, a relacionar mundos de disciplinas diferentes, pero en esa relación, aparece el elemento matemático. Es decir, saca al profesor del confort de la disciplina y lo pone frente a heurísticas no habituales, potencia su profesión.

La tarea de programar el robot no tiene valor pedagógico en sí mismo para el profesor de Matemáticas, pero si se acompaña con una reflexión y tiene la experiencia de conversión entre registros, se pueden dar dos sucesos. Primero, tiene la posibilidad de entender las dificultades de sus estudiantes, así como él las presentó en el desarrollo de la tarea interdisciplinar. Segundo, aportando ideas de cómo gestionar una clase y hacer evidentes las conversiones entre registros.

6.2 Conclusiones de la experiencia formativa-investigativa

Finalmente queremos expresar unas conclusiones que durante esta investigación se nos han presentado en aspectos formativos, por ejemplo, el hecho que en el aula damos por sentadas muchas cosas, como lo fue en la intervención con el grupo B el sentido del robot. Asumimos que por la forma del robot entendemos de manera implícita el "frente" y en la

solución de la tarea el profesor no lo ve igual, sucede lo mismo con nuestros estudiantes y de hecho lo hacemos inconscientemente, asumimos convenciones. Pretendemos que el estudiante por estar en un grado específico tiene que dar cuenta de unos conceptos o ideas previas e interpretaciones específicas, los valoramos diferente cuando dan cuenta de ello (Planas, 2002), cuando en este trabajo, se nos revela que ni siquiera los profesores tenemos las mismas nociones frente a los objetos matemáticos.

Otra reflexión, luego de mucho verificar los instrumentos que usamos con los profesores, de hacer pruebas con compañeros de la maestría, con el grupo A y luego el B, nos inquieta contemplar como un instrumento es probado tantas veces en una investigación y como en un examen en un periodo académico, o una prueba escrita cualquiera, los profesores los aplicamos sin la más mínima mediación de un tercero antes, y posteriormente, se discuten los nefastos resultados cuando el problema puede ser de interpretación de una pregunta más que de un conocimiento matemático.

Finalmente, citamos una frase que ha marcado nuestra línea de investigación y por la cual trabajamos y trabajaremos en ella: "...la educación del profesorado tiene el honor de ser, al mismo tiempo, el peor problema y la mejor solución de la educación" (Fullan & Caballero, 2002)

7 REFERENCIAS

- Agudelo-Valderrama, C., & Martínez, D. (2015). En busca de una manera conectada de saber: el caso de una profesora de matemáticas. *REICE: Revista Electrónica Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia Y Cambio En Educación*, 13(3), 121–141.
- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., ... Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. In *Actas del VII CIBEM ISSN, 2301(0797)* (pp. 5063–5069).
- Arias Hernandez, C., Leal, L. H., & Organista Rodríguez, M. L. (2011). La modelación de la variación, un análisis del uso de las gráficas cartesianas en los libros de texto de biología, física y química de secundaria. *Revista de Ciencias*, 15, 93–128.
- Blasco, C. M. (2002). Interdisciplinariedad y currículo: Construcción de proyectos escuela-universidad: Memorias del V Seminario Internacional: Bogotá, junio 19 al 23 de 2000. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Programa RED.
- Bosch, H., Di Blasi, M., Pelem, M., Bergero, M., Carvajal, L., & Geromini, N. (2011). NUEVO PARADIGMA PEDAGÓGICO PARA ENSEÑANZA DE CIENCIAS Y NEW PEDAGOGICAL PARADIGM FOR SCIENCES AND MATHEMATICS TEACHING. *Avances En Ciencias E Ingeniería ACI*, 2(3), 131–140.
- Bridle, H., Vrieling, A., Cardillo, M., Araya, Y., & Hinojosa, L. (2013). Preparing for an interdisciplinary future: A perspective from early-career researchers. *Futures*, 53, 22–32. <https://doi.org/10.1016/j.futures.2013.09.003>
- Cilleruelo, L., & Zubiaga, A. (2014). Una aproximación a la Educación STEAM. Prácticas educativas en la encrucijada arte, ciencia y tecnología. Retrieved from <http://www.augustozubiaga.com/web/wp-content/uploads/2014/11/STEM-TO-STEAM.pdf>
- Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235–253.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 9, 143–168. Retrieved from [http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La habilidad para cambiar el registro de representaci](http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%20n.pdf)n.pdf
- Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M., & Liñan, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático.
- Fullan, M., & Caball Guerrero, J. (2002). *Las fuerzas del cambio: Explorando las profundidades de la reforma educativa*. Akal. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=83034>

- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13–31. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino Union_020 2009.pdf
- González, M. M., Martínez, E. C., González, J. L. M., & Martínez, E. C. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, 29(1). <https://doi.org/10.5565/REV/EC/V29N1.435>
- Guacaneme, E., & Mora, L. (2012). Investigación La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES*, 4(0123–0670), 102–109.
- Guacaneme Suárez, E. A., & Mora Mendieta, lyda C. (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista PAPELES*, 4(7), 102–109.
- Guerrero, A. P. (2015). STEM en la escuela rural: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de. *Memorias VE2015, Guadalajara, México*.
- Igea, R., Rodríguez, R., Rosa, I., & Tena, L. De. (2008). Formación del profesorado universitario y de secundaria: una propuesta globalizadora desde la práctica. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formacion Del Profesorado*, 5(1), 1–6.
- J. Gustems, L. Sánchez, J. Duran, S., & Buset. (2013). Investigación Interdisciplinar: Una Experiencia De Postgrado Universitario, 1–9.
- Jeder, D. (2014). Transdisciplinarity – The Advantage of a Holistic Approach to Life. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 137, 127–131. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.05.264>
- Lamoyi, L. (2012). La robótica Lego Mindstorms ® : un recurso didáctico para fortalecer el pensamiento lógico matemático. *Perspectivas Docentes Acotaciones*, 12–17. Retrieved from <http://revistas.ujat.mx/index.php/perspectivas/article/viewFile/561/467>
- Lenoir, Y., & Hasni, A. (2004). La interdisciplinarietà: por un matrimonio abierto de la razón, de la mano y del corazón. *Revista Iberoamérica de Educación*, 35, 167–185.
- Lombana, N. (2013). La robótica educativa como estrategia para el aprendizaje del lenguaje de las matemáticas. In *Congreso de Investigación y pedagogía* (pp. 1–10).
- López, P., & Sosa, H. (2013). Aprendizaje con robótica, algunas experiencias. *REVISTA EDUCACIÓN*, 37, 43–63.
- López Ramírez, P. A., & Andrade Sosa, H. (2013). Aprendizaje con robótica, algunas experiencias. *Revista Educación*, 37, 43–63. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564003>
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. E. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Memorias Del Seminario Nacional*, (20), 291–300.
- Martín, A. Z. (2004). Interdisciplinarietà y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. *Educarre, Artículos Arbitrados*, 26, 301–308.
- Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política*.
- Molina, M., Martínez, E. C., González, J. L. M., & Martínez, E. C. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación Y Experiencias Didácticas*, 29(1). <https://doi.org/10.5565/REV/EC/V29N1.435>
- Morón, D. R., Peña, P., & Trujillo, E. (2006). La Formación Docente: Entre La

- Indiferencia y La Seducción. *EDUCERE. Artículos Arbitrados*, (32), 49–54.
- Oliveros, A., Valdez Salas, B., & Wiener, M. S. (2016). La motivación de las mujeres por las carreras de ingeniería y tecnología Manufacturing Process of VCI Mineral Paper View project Nanostructured surfaces and synthesis of metallic nanoparticles View project. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/301202059>
- Oviedo, G. L. (2004). La definición del concepto de percepción en psicología con base en la teoría Gestalt. *Revista de Estudios Socilaes*, (18), 89–96.
- Oviedo, L., & Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29–36.
- Planas, N. (2002). El contrato social en el aula de matematicas episodios en torno a la noción de estatus.
- Posada, F., & Sepúlveda, J. (1999). LA ROBÓTICA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 1–13.
- RED INNOVA CESAL. (2014). Estrategias docentes para la formación interdisciplinar en educación superior. *Redic Innovacesal*, 1–30.
- Reyes- González, D., & García- Cartagena, Y. (2014). Desarrollo de habilidades científicas en la formación inicial de profesores de ciencias y matemáticas. *Educación Y Educadores*, 17(2), 271–285. <https://doi.org/10.5294/edu.2014.17.2.4>
- Ruiz-Velasco, E. (2007). Innovación en el aprendizaje de las ciencias y la tecnología. *EDUCATRÓNICA*.
- Ruiz Morón, D., & Peña, P. (2006). *Educere la revista Venezolana de Educación. Educere* (Vol. 10). Univ. de Los Andes. Retrieved from http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102006000100007&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Ruiz Ruiz, E., Castaño Pombo, N., & Boronat Mundina, J. (1999). Reflexiones sobre el enfoque interdisciplinar y su proyección práctica en la formación del profesorado. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, 2.
- Ruth, R. G. (2017). futuros ingenieros : actualidades y desafíos Rethinking mathematics teaching for future engineers : News and challenges, 69–85.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *Pna*, 5, 129–145. Retrieved from <http://cicataleg-publications.ipn.mx:8080/handle/123456789/1355>
- Suárez, L. (2012). Interdisciplinariedad en la investigación educativa. transferencia de la matemática educativa a otras didácticas específicas. *Instituto Politécnico Nacional ITN*, 7, 1439–1447.
- Swanson, L. H., & Coddington, L. R. (2016). Creating partnerships between teachers & undergraduates interested in secondary math & science education. *Teaching and Teacher Education*, 59, 285–294. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.06.008>
- Szostak, R. (2007). How and why to teach interdisciplinary research. *Journal of Research Practice*, 3(2), 1–16.
- Uribe Mallarino, C. (2012). Interdisciplinariedad en investigación: ¿colaboración, cruce o superación de las disciplinas? *Universitas Humanística*, 73(201206), 147–172. [https://doi.org/SICI: 0120-4807\(201206\)41:73<147:IEICCS>2.0.TX;2-5](https://doi.org/SICI: 0120-4807(201206)41:73<147:IEICCS>2.0.TX;2-5)
- Wardley, L. J., & Bé Langer, C. H. (2015). Interdisciplinarity: Suffering from a Lack of

Effective Marketing? *International Journal of Higher Education*, 4(4), 45–52.
<https://doi.org/10.5430/ijhe.v4n4p45>