Universidad de Granada

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico

María Belén Giacomone

Tesis doctoral

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Granada, 2018

Universidad de Granada

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de los doctores Juan Díaz Godino y María Teresa Fernández Blanco, que presenta Dña. María Belén Giacomone para optar al grado de Doctor, con la mención Internacional, en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Fdo. María Belén Giacomone

Vº Bº de los Directores:

Fdo. Juan Díaz Godino

Fdo. María Teresa Fernández Blanco

Reconocimiento:

Esta investigación ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el marco del Grupo PAI, FQM-126 (Junta de Andalucía) y del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Agradezco a mis directores Juan D. Godino y María Teresa Fernández Blanco por haber aceptado dirigir esta tesis doctoral, por sus grandes consejos y aportes en este periodo de formación y por su plena disposición y compromiso para la realización de esta investigación.

Agradezco profundamente a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por toda la orientación, el apoyo y las experiencias vividas. Especialmente, agradezco a Juan Godino por acompañarme durante estos tres años en el desarrollo de mi tesis, por ser mi mentor, mi colega, mi director, por escucharme y darme la oportunidad de trabajar a su lado, por compartir su experiencia y conocimiento, y por incluirme en sus proyectos profesionales; por toda su paciencia, cariño y buenos consejos que me han hecho superar momentos difíciles y crecer. No hay palabras que puedan expresar mi agradecimiento, solo me queda decir que he conocido a un gran colega y gran persona que me ha marcado para el resto de mi vida.

Agradezco a Pablo Beltrán-Pellicer quien ha compartido gran parte de mi experiencia doctoral, por sus palabras de aliento, consejos, sus grandes ideas y por ser un gran colega.

Agradezco a mis grandes amigos JL, Eder y Danilo quienes forman ya parte de mi vida, compartiendo alegrías, experiencias, ideas y han estado presentes en todo momento con sus sabios consejos, motivando y empujando para salir adelante.

Agradezco a mis amigos de la vida que han sabido sostenerme en todo momento principalmente en el último periodo de mi tesis.

Agradezco a mi familia, especialmente a mis papás, quienes nunca dejaron de creer en mi y que me han apoyado incondicionalmente en todas las decisiones de mi vida.

Agradezco a mi marido Agustín que es el motor de mi vida, siempre feliz y sonriente, y que no ha dudado ni un minuto en sostenerme en estos tres años de crecimiento con todo su amor y paciencia infinita.

Resumen

En el área específica de la formación de profesores de matemáticas la última década fue testigo de un notable interés en la comunidad científica, principalmente, por dilucidar cuáles deberían ser los conocimientos y competencias profesionales del profesor. Nuevas perspectivas teóricas se han consolidado de manera significativa estableciendo nuevos retos; así, una preocupación actual se relaciona con la aplicación de tales progresos teóricos en el corazón de la formación inicial. Desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos se ha propuesto un modelo de categorías de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas y también se ha abordado la descripción de competencias profesionales, ligándolas básicamente con la competencia de describir, explicar y valorar los procesos de estudio matemático. Continuando con esta línea, en esta investigación abordamos el desarrollo de un ciclo formativo, esto es, su diseño, implementación y análisis retrospectivo, dirigido a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, con el objetivo de iniciarlos en el desarrollo de su competencia para el análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos ligados a dicha competencia. Centramos la atención en dos aspectos: en primer lugar, en el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, entendiéndola como la competencia para identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de tareas matemáticas; en segundo lugar, en el desarrollo de la competencia de análisis y reflexión profesional. El análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de prácticas didácticas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los participantes, el reconocimiento de conflictos y sus progresos en el desarrollo de las competencias pretendidas. La recogida de información se basa en el análisis de las anotaciones del observador-investigador y profesor-investigador, las grabaciones en audio y las respuestas escritas. El análisis *a priori* del ciclo didáctico propuesto revela una alta idoneidad epistémica y ecológica; no obstante, las limitaciones del tiempo asignado han condicionado el logro de un nivel de aprendizaje adecuado. Por otro lado, los resultados revelan la complejidad involucrada en el desarrollo de ambas competencias, así como su relevancia para lograr una enseñanza de las matemáticas de alta calidad.

Developing prospective secondary school mathematics teacher’s didactic-mathematical knowledge and competences within the framework of the onto-semiotic approach

Abstract

The specific area of mathematics teacher education witnessed, in the last decade, a remarkable interest in the scientific community, mainly interested in elucidating what should be the teacher's professional knowledge and competences. New theoretical perspectives have been consolidated establishing new challenges; thus, a current concern is related to the application of such theoretical developments at the heart of initial teacher education. From the perspective of the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, a model for mathematics teacher's didactic-mathematical knowledge has been proposed, and the description of professional competences has also been addressed, basically linking them with the competence to describe, explain, and evaluate mathematical instruction processes. Continuing with this line of research, this thesis deals with the development of an educational cycle, that is, its design, implementation and retrospective analysis, aimed at prospective secondary school mathematics teachers; the aim is to initiate them in the development of their competence for the analysis and didactic intervention, and didactic knowledge linked to said competence. We focus our attention on two aspects: firstly, on developing the onto-semiotic analysis competence, understanding it as the competence to identify the variety of objects and meanings involved in solving mathematical tasks; secondly, on developing the didactical suitability analysis competence or professional reflection. The data analysis is qualitative oriented to identify significant didactical practices about the initial state of students’ personal meaning, recognition of conflicts, and progress in developing the intended onto-semiotic analysis competence. For this purpose, the students' written responses, observer researcher's notes, and audio recordings on the class are used as a data collection instrument. The information gathered is based on the analysis of: observer-researcher and teacher-researcher's annotations on the debate in the classroom, audio recordings and the participants' written answers. The *a priori* analysis of the didactic design reveals a high epistemic and ecological suitability; nevertheless, time constraints have conditioned an adequate learning achievement. On the other hand, the results reveal the complexity involved in the development of both competencies, as well as relevance of these to achieve high quality mathematics teaching.

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN GENERAL

La formación de profesores, si bien es un campo de investigación que está activo desde hace un largo tiempo, en las últimas décadas, ha crecido notablemente el interés en la naturaleza teórica del campo en sí (Bishop, 2013; Ponte y Chapman, 2006). La gama de investigaciones y la reflexión sobre el lugar que ocupa la formación de profesores en la actualidad se refleja en la trayectoria marcada en los *International Handbooks of Mathematics Education* (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde, 1996; Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2003; Lester, 2007; Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick y Leung, 2013), más específicamente en los cuatro volúmenes del *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Jaworski y Wood, 2008; Krainer y Wood, 2008; Sullivan y Wood, 2008; Tirosh y Wood, 2008), como también en revistas científicas, por ejemplo, *Journal of Mathematics Teacher Education*, ocasionando lo que Artigue (2011, p. 312) considera una "verdadera explosión teórica" en el rango de teorías y metodologías utilizadas en la investigación en educación matemática.

El camino que se ha ido trazando a lo largo de los años transmite los desafíos en el mundo de la investigación en la formación de profesores de matemática, "volviéndose cada vez más difícil y compleja que la investigación en educación matemática en si" (Simon, 2008, p. 27). Esta investigación está influenciada en gran medida por factores políticos, culturales, sociales, organizativos y personales (Llinares y Krainer, 2006), y es de esperar que la comunidad investigadora enfrente este desafío.

Un problema ampliamente aceptado consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que tiene, o que debería tener, el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera idónea (Chapman, 2014; Sowder, 2007). En este sentido, han surgido modelos teóricos que han propuesto diversas categorías y componentes del conocimiento para la enseñanza. Entre otros conocimientos y competencias, se requiere que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la solución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza-aprendizaje adecuadas. Esta competencia profesional global de análisis e intervención didáctica involucra, además, conocimientos didáctico-matemáticos específicos cuyo dominio y aplicación debe ser objeto de atención de los programas de formación de profesores. En este sentido, resulta evidente la necesidad de implementar experiencias que permitan focalizarse en el crecimiento profesional y desarrollo de conocimientos y competencias del profesorado, como un tema fundamental en la agenda de la investigación en educación matemática (Chapman, 2014; English, 2008; Lo, Leatham y Zoest, 2014; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013).

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2017; Godino, Batanero y Font, 2007) se ha elaborado un modelo de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) (modelo CCDM) que puede servir de base para orientar la formación de profesores de matemáticas. Para desarrollar estas competencias y conocimientos, en el EOS se aportan determinadas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar a una competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas; dicha competencia general se compone de cinco sub-competencias: análisis de significados globales; análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas; gestión de configuraciones didácticas; análisis normativo; análisis de la idoneidad didáctica. Apoyando estos aportes teóricos del EOS, se vienen experimentando diversas intervenciones formativas con el objetivo de desarrollar en futuros profesores de matemáticas las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas propuestas en el modelo CCDM (por ejemplo, Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016).

Continuando con esta línea de investigación, en este trabajo abordamos el diseño, implementación y valoración de un ciclo formativo con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, con el objetivo de iniciarlos en el desarrollo de dos sub-competencias específicas descritas en el modelo CCDM: el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico y el desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica. Aplicamos una metodología de investigación basada en el diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008), entendida en sentido amplio, tal como proponen (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014), la cual incluye: resolución de situaciones-problemas y su reflexión epistémico-cognitiva sobre los objetos y significados puestos en juego; análisis de interacciones, recursos, y sistema de normas en la clase de matemáticas; y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático.

La tesis está conformada por 5 capítulos focalizados en la consolidación del marco teórico y el desarrollo de dos estudios principales; la estructura coincide con el desarrollo de tres artículos publicados en revistas con índice de impacto en la base de datos bibliográficos Scopus:

> Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.
>
> Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1-24.
>
> Giacomone, B, Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-25.

En el capítulo 1, se describen las investigaciones previas en el campo de la formación de profesores con el objetivo de fundamentar adecuadamente la investigación. Los estudios preliminares descritos en este primer capítulo nos permiten fundamentar la necesidad de la consolidación de un marco teórico que permita articular de manera coherente las nociones de competencia y conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores de matemáticas.

En el capítulo 2, presentamos el problema de investigación, el marco teórico y la metodología. En la descripción del problema abordamos elementos de su justificación y puntualizamos las hipótesis, preguntas de investigación y objetivos del estudio; en el marco teórico presentamos una síntesis de las principales nociones desarrolladas en el EOS, describiendo su aplicación en las diferentes fases de la investigación; y en la descripción de la metodología damos cuenta del tipo de investigación y profundizamos en la metodología, técnicas e instrumentos aplicados en cada estudio.

En el capítulo 3, se presenta el estudio 1, esto es el diseño, la implementación y la valoración del ciclo formativo orientado al desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico—entendida como la competencia que le permita al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento le permitirá "prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio" (Godino, 2017, p. 94). Se exponen también las conclusiones del primer estudio.

En el capítulo 4, se presenta el estudio 2, esto es el diseño, la implementación y la valoración del ciclo formativo orientado al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica—entendida como la competencia para la reflexión global sobre un proceso de estudio didáctico, su valoración y mejora progresiva. Se exponen también las conclusiones del segundo estudio.

En el capítulo 5, se retoman los objetivos de investigación y se presentan las conclusiones finales destacando las limitaciones del trabajo y futuras líneas de continuación.

CAPÍTULO 1.

AREA PROBLEMÁTICA Y ANTECEDENTES

1. INTRODUCCIÓN

"Los últimos años han sido la era del profesor como el foco casi indiscutible de la atención de los investigadores" (Sfard, 2005, p. 409); desde entonces, el interés de la investigación en los docentes ciertamente no ha disminuido, como lo demuestra el alto y creciente número de artículos de revista, monográficos, conferencias, así como el énfasis en el diseño de acciones educativas en la formación inicial. Sin embargo,

> aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que sea, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores. (Silverman y Thompson, 2008, p. 499)

En este capítulo se presenta un panorama general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática centradas en el profesor de matemáticas, su conocimiento, competencia y proceso formativo. Con el fin de aproximarnos al problema de investigación, los apartados se organizan de acuerdo a los mencionados tres aspectos: la problemática sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y algunas perspectivas teóricas que dan cuenta de la diversidad de investigaciones realizadas; la problemática de las competencias clave del profesores y una aproximación a la competencia de análisis didáctico desde una perspectiva ontosemiótica, aspecto central en nuestra investigación; por último, se mencionan acciones formativas recientes orientadas al desarrollo de algunos conocimientos y competencias específicas. Cerramos el capítulo con algunas consideraciones finales que nos permiten entrar en contacto con el problema de investigación de esta tesis.

2. PERSPECTIVAS TEÓRICAS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas ha sido reconocido como un componente omnipresente en la preparación de docentes y un tema importante en la investigación de la educación matemática en las últimas décadas. El trabajo fundamental de Shulman (1986, 1987) sobre el conocimiento del contenido pedagógico, o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) ha jugado un papel importante en el desarrollo de perspectivas basadas en categorías de este conocimiento que conecta el contenido y el conocimiento pedagógico, y demuestra la forma de representar y formatear el tema y hacer que el tema sea comprensible para los estudiantes, como también los trabajos de Grossman (1990) y Ball (2000) en los que se muestra una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza.

Shulman (1986) propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. El PCK es descrito por Shulman como "aquel que va más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza" (p. 9). En su trabajo siguiente (Shulman, 1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor "categorías del conocimiento base": conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento curricular; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento de los estudiantes y sus características; conocimiento de los contextos educativos; conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. De estas siete categorías diversas investigaciones se han centrado específicamente en el PCK (Ponte y Chapman, 2006; Mason, 2016).

Con base en los aportes de Shulman, Grossman (1990) propone un *modelo del conocimiento del profesor* más amplio, basado en cuatro componentes (p. 5): conocimiento pedagógico general; conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento del contexto. Es posible notar que la noción de competencia, habilidad o capacidad, si bien no se aborda explícitamente, está incluida en las diferentes categorizaciones del conocimiento, al considerarse por ejemplo, que el conocimiento pedagógico incluye habilidades relacionadas con la enseñanza.

Investigaciones más recientes tales como las de Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), Llinares y Krainer (2006), Ponte y Chapman

(2006), Philipp (2007), Sowder (2007), Schoenfeld y colaboradores (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Schoenfeld, 2013), Sullivan y Wood (2008), entre otros, nos dejan claro que no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011); sin embargo, estos modelos "son necesarios para organizar los programas de formación, inicial o permanente, y para evaluar su eficacia" (Godino, 2009, p. 14).

Ball y cols. también se apoyan en las ideas de conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido, propuestas por Shulman, para determinar un modelo teórico muy extendido en la literatura, el modelo MKT *Mathematical Knowledge for Teaching*, un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza; Hill et al. (2008, p. 374) lo definen como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno". Los autores desarrollan este modelo en base a dos grandes categorías:

- *Conocimiento del contenido* (Subject Matter Knowledge), que incluye conocimiento común del contenido (*CCK*), conocimiento especializado del contenido (*SCK*) y conocimiento en el horizonte matemático.
- *Conocimiento pedagógico del contenido* (Pedagogical Content Knowledge), conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes (*KCS*), conocimiento del contenido y la enseñanza (*KCT*), y conocimiento del currículo (Figura 1.1.).

Sin entrar en la complejidad de este marco, el *conocimiento común del contenido* considera conocimientos y competencias que le permiten al profesor resolver con éxito problemas matemáticos (Ball et al., 2008); Hill et al., (2008, p. 377) lo definen como "aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas" (Hill et al., 2008, p. 377). A diferencia, el *conocimiento especializado del contenido* comprende "la red de conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza" (p. 400). El *conocimiento en el horizonte matemático* es definido en Ball y Bass (2009, p. 6) como "una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas".

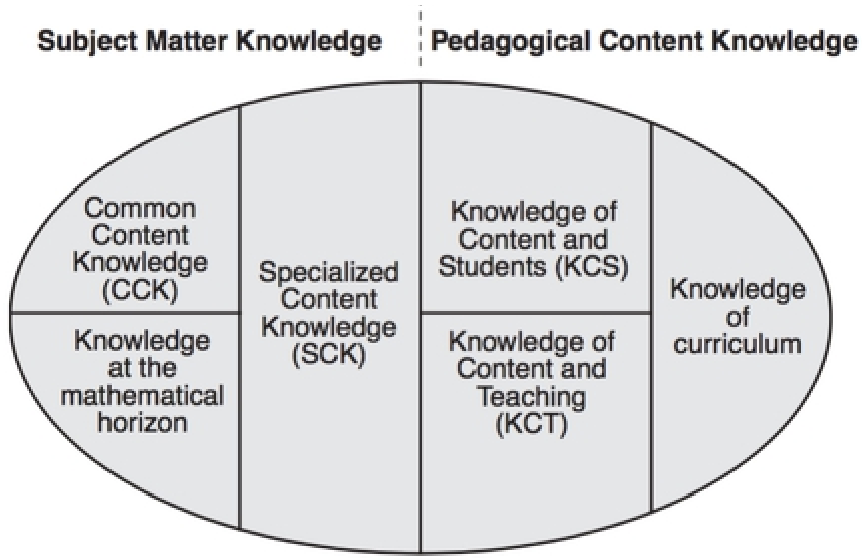


Figura 1.1. Mapa de dominio del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008, p. 377)

Por otro lado, (sector derecho del diagrama representado en la Figura 1.1.), el *conocimiento del contenido y de los estudiantes* se define como "el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular" (Hill et al., 2008, p. 375). El *conocimiento del contenido y la enseñanza* combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas: "cada una de esas tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes" (Ball et al., p. 401). Nuevamente, notamos que la noción de competencia para estar incluida de manera natural en las definiciones de conocimiento, como señalan Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) es importante no olvidarse que este conocimiento "implica más que *solo conocer* las matemáticas en el plan de estudios".

Schoenfeld y Kilpatrick (2008), con base en trabajos previos, describen un marco provisional para la enseñanza de la matemática centrado en la noción de *Proficiency* (Provisional Framework for Proficiency in Teaching Mathematics), en el cual se propone distinguir siete dimensiones (p. 322), las cuales se considera que deben seguir refinándose, dado que no son estáticas:

- conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud;

- conocer a los estudiantes como personas que piensan;
- conocer a los estudiantes como personas que aprenden;
- diseñar y gestionar entornos de aprendizaje;
- desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la enseñanza para la comprensión;
- construir relaciones que apoyen el aprendizaje;
- reflexionar sobre la propia práctica.

De acuerdo con el análisis que plantea Godino (2009), "la noción de *proficiencia* [*Proficiency*] en la enseñanza de las matemáticas se puede interpretar en términos de competencia profesional del profesor de matemáticas para que su enseñanza se pueda considerar de calidad" (p. 18).

> Una teoría de la proficiencia (en la enseñanza) dice lo que es importante —qué destrezas necesitan desarrollar las personas para llegar a ser proficientes—. Se trata de extender la noción de proficiencia en la matemática escolar (introducida en Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) donde se incluye: comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva. (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 350)

Otra propuesta es la conocida como *Knowledge Quartet* (KQ), o en español, *cuarteto del conocimiento*, propuesta por Rowland et al., (2005) como una herramienta que permite observar el conocimiento del contenido matemático de los profesores en sus dos facetas MSK y PCK, en la práctica de enseñanza de las matemáticas y desarrollar la enseñanza de dicha disciplina. Los autores establecen 4 dimensiones amplias (2005, p. 259):

- *Fundamentos*: tiene sus raíces en base a los fundamentos o antecedentes teóricos y las creencias de los profesores en formación. En esta definición se incluyen conocimientos y comprensión de los profesores en la preparación para su rol en el aula obtenidos tanto en su educación *personal* como en su aprendizaje en la *academia.* (p. 260)
- *Transformación*: centra la atención en el conocimiento en acción. Se refiere, a los aportes de Shulman de que la base de conocimiento para la enseñanza se

distingue por “la capacidad de un docente de transformar el contenido de conocimiento que posee en formas que son pedagógicamente poderoso” (Shulman, 1987, p. 15). Esto incluye el uso de ejemplos para ayudar a la formación de conceptos, demostrar procedimientos, selección de tareas. (p. 261)

- *Conexión*: esta categoría se trata de la coherencia de la planificación, o enseñanza, mostrada en un episodio, lección o serie de lecciones. La concepción de coherencia incluye la secuenciación de los tópicos dentro y entre las lecciones, incluyendo el orden de las tareas y ejercicios (p. 262). Esto incluye “hacer conexiones entre los procedimientos, hacer conexiones entre los conceptos, decisiones sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual” (Turner y Rowland, 2011, p. 201).
- *Contingencia*: la última categoría del modelo KQ se refiere a eventos de la clase que son casi imposibles de planificar. Los dos componentes que constituyen esta categoría son la disposición de responder a las ideas de los niños y la preparación consecuente, cuando sea necesario, para desviarse de lo planificado cuando la lección ha sido preparada. (p. 263)

El dominio de este marco teórico KQ se ha centrado casi exclusivamente en el estudio del conocimiento de los profesores en acción.

El modelo *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK-Mathematics Teachers Specialized Knowledge) es un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que evoluciona de las nociones planteadas en el MKT, de tipo descriptivo desarrollado por un grupo de investigación en la Universidad de Huelva, España, (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2014; Escudero, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015). El modelo considera tres subdominios en cada uno de los dos dominios marcados por Shulman (conocimiento matemático y conocimiento didáctico o pedagógico del contenido), pero, a diferencia de éste, asume que todo el conocimiento es especializado (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). La concepciones y creencias del profesor —siendo término sinónimos bajo esta perspectiva teórica— se representan en el centro del modelo (Figura 1.2.) “para mostrar que interaccionan con todos los subdominios de conocimiento (especialmente creencias sobre la matemática con el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática con conocimiento didáctico)" (Escudero et al., 2015, p. 57).

Figura 1.2. Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Escudero et al., 2015, p. 56).

Godino (2009) plantea que los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. En este sentido, Godino y colaboradores proponen un modelo de *Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor* (CDM), como un aporte del EOS, que tiene su inicio en la Universidad de Granada y fue evolucionando en distintas investigaciones (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). El modelo se organiza en tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática y se proponen herramientas específicas. La dimensión didáctica incluye 6 facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e interaccional. Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, cuatro niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales: prácticas matemáticas y didácticas; configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos); normas y meta-normas. Para el desarrollo de esta tesis tomamos en cuenta el modelo CDM, su concepción sobre las competencias clave y las herramientas teórico-metodológicas que permiten estos análisis; utilizaremos el capítulo 2 para la descripción de este marco.

Está claro que no existe una perspectiva teórica universal sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (Chapman 2014). Sin embargos, hemos manifestado que independientemente de la variación en las perspectivas, hay muchas similitudes con respecto a la comprensión didáctico-matemática de los profesores que se han considerado en la formación del profesorado. En esta diversidad, hay un acuerdo generalizado de que el profesor de matemáticas debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, ha de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos usualmente abordables por los estudiantes del nivel correspondiente, y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores. Hay, también, un acuerdo generalizado de que el profesor debe tener un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de las interacciones del contenido matemático a enseñar con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos etc.) que condicionan dichos procesos y debe ser competente en la gestión de dichos conocimientos. Sin embargo, las nociones de conocimiento y competencia no aparecen en forma aislada, como se ha manifestado en las concepciones que utilizan todos estos marcos; sino más bien, la enseñanza de las matemáticas es considerada una tarea compleja que implica competencias profesionales y toma de decisiones en la que intervienen diferentes conocimientos (Ball et al., 2008; Escudero y Sánchez, 2007).

3. COMPETENCIAS CLAVES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Se ha dejado claro que un problema importante en educación matemática consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que tiene, o que debería tener, el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera adecuada (English, 2008; Mason, 2016). También está claro que tener conocimiento matemático no garantiza su desempeño profesional; se requiere el desarrollo de un conjunto de conocimientos, competencias, habilidades, actitudes para la enseñanza (Chapman, 2014; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Sullivan y Wood, 2008). Así, la acción del profesor involucra conocimientos, habilidades, creencia, valores, motivación y meta-cognición (Schoenfeld, 2010).

El Consejo Nacional para la Acreditación en la Formación de Docentes —National Council for Accreditation of Teacher Education— (NCATE) (2016) en los Estados Unidos enumera el conocimiento, las habilidades y las disposiciones profesionales como componentes de un estándar fundamental principal para evaluar la efectividad de los programas de formación docente. Este estándar se considera como un área importante de calidad docente (Darling-Hammond, 1997), los cuales han sido objeto de atención en investigaciones. Por otro lado, el término competencias profesionales ha sido definido de diferentes formas y muchos son los investigadores que recogen una variedad de definiciones, que han existido y todavía existen, sobre el término (Blömeke, Gustafsson y Shavelson, 2015; Seckel 2016).

> Se pone de manifiesto que la competencia de los profesores es un ejemplo brillante de cómo en la educación matemática, tanto los investigadores como los profesores, necesitan desarrollar un enfoque compartido para negociar el significado de términos utilizados, en parte técnicamente, para que el uso de los mismos términos para diferentes cosas y, esencialmente la misma cosa, se reduzca. (Mason, 2016, p. 219)

A este punto, parece claro que la propia competencia docente no está bien especificada y, en efecto, es altamente dependiente del contexto, influida tanto por el investigador como por la situación, como lo señalan Hoth, Döhrmann, Kaiser, Busse, König y Blömeke (2016) y Schlesinger y Jentsch (2016), entre otros.

Los programas de formación inicial del profesorado de matemáticas pretenden como objetivo final que los futuros profesores desarrollen competencias profesionales que le permitan desarrollarse de manera idónea en su profesión. Llinares (2009, p. 95) señala que ser competente en la enseñanza de las matemáticas significa “conocer y saber usar el conocimiento en las situaciones de enseñanza en las que es pertinente. Pero además, debemos preocuparnos de cómo lograr el desarrollo de esa competencia desde la formación inicial. Vázquez-Cano (2016, p. 1062) señala la necesidad de intervenir desarrollando metodologías más activas y funcionales que le permitan al profesorado en formación planificar, coordinar y evaluar competencias claves. Además, se considera necesario centrar la atención en el desarrollo de competencias de análisis y reflexión sobre la práctica docente, junto con el conocimiento especializado sobre los contenidos a enseñar (Husu, Toom y Patrikainen, 2008; Pochulu et al., 2016).

Según Weinert (2001), los enfoques por competencias pueden clasificarse en tres grandes grupos: enfoque cognitivo, enfoque motivacional y enfoque integral o de acción competente. De acuerdo a esto, la conceptualización de competencia que usamos en esta tesis se realiza desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc. que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión. En el marco del EOS, recibe el nombre de *competencia para el análisis didáctico* (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, 2009; Pochulu y Font, 2011):

- Competencia para el análisis didáctico en el enfoque ontosemiótico

La formación docente inicial está preocupada por el desarrollo de conocimientos y competencias en los futuros profesores. La competencia de análisis didáctico se propone realizar un análisis completo de los procesos de enseñanza y aprendizaje que permita describir, explicar y valorar dichos procesos, considerando seis facetas que actúan y están interconectadas en tal proceso: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Por lo tanto, se propone desarrollar y aplicar herramientas, para comprender y responder a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Por otra parte, se propone desarrollar y aplicar criterios o pautas de *idoneidad* o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y *guiar* su mejora. Se destacan que están documentadas muchas acciones formativas focalizadas en esta competencia, principalmente dentro de los programas de formación inicial del profesorado, y en programas de formación continua. En este contexto se sitúa nuestro problema de investigación.

En los siguientes apartados se presenta una reflexión sobre los aportes que se están realizando en torno al desarrollo profesional y se sintetizan los desafíos en la formación inicial de profesores de matemática. A lo largo de la tesis, se profundiza en aquellos aspectos claves para el desarrollo de esta investigación; así, por ejemplo, los aportes que se enmarcan desde una perspectiva del Enfoque ontosemiótico, tienen lugar en el Capítulo 2; los resultados de las investigaciones relacionados con el desarrollo de competencias específicas, se incluyen en los Capítulos 3 y 4.

4. ACCIONES FORMATIVAS Y SU IMPACTO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

La investigación en la formación de profesores de matemáticas ha crecido significativamente destacando una variedad de temas que agregan alcance y profundidad a las áreas de investigación sobre el profesor de matemáticas. Las investigaciones involucran al profesor, en su formación inicial y desarrollo continuo, incluyendo procesos de aprendizaje que tienen lugar durante el vida útil de la carrera de un maestro, en diversos entornos y en todas las etapas y roles de la profesión. Además, se preocupan por el estudio de recursos para la práctica, planes de estudio y programas, así como de políticas educativas, por lo que Ponte (2014), la define como un campo de desarrollo multifacético.

Diversos autores (Chapman y An, 2017; English, 2008; Goldsmith, Doerr y Lewis, 2014; Ponte y Chapman, 2016; Potari y Ponte, 2017) discuten contribuciones y tendencias recientes, relevantes, en los programas de formación para docentes en servicio y en formación inicial; destacan acciones formativas y su impacto en la formación, las cuales se manifiestan desde diversos enfoques teóricos y metodológicos. Dada la diversidad y las diferentes interpretaciones, a continuación, se señalan algunas de estas acciones educativas, la cual no pretende ser exhaustiva, sino más bien, representar las posibles tendencias e impacto en la formación, que nos permiten abrir un abanico de desafíos actuales. Tenemos en cuenta investigaciones que inciden en el desarrollo de competencias en futuros profesores, pero también, algunas investigaciones sobre desarrollo profesional con consecuencias en la formación inicial.

4.1. Acciones formativas centradas en el análisis de tareas matemáticas

Las tareas matemáticas, o bien situaciones-problemas, y el análisis de sus posibles soluciones, son fundamentales en un proceso educativo. El *National Council of Teachers of Mathematics* resalta, desde su inicio, la importancia de las tareas que valen la pena (NCTM 1991), haciendo hincapié actualmente, en aquellas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas (NCTM 2014). Pero, esto compromete al futuro profesor en el desarrollo de competencias específicas que le permitan afrontar esta situación. La resolución de problemas como un proceso matemático que involucra “participar en una tarea para la cual el método de solución no se conoce de antemano” (NCTM, 2000, p. 52) tiende a ser un desafío para muchos docentes para enseñar con eficacia y de manera idónea. Por lo tanto, como en los siguientes ejemplos de estudios recientes, tanto las tareas como la resolución de problemas continúan recibiendo atención en los programas educativos para los futuros profesores así como los profesores en servicio.

Un aspecto del conocimiento matemático para la enseñanza es la capacidad de los docentes para notar los nuevos conocimientos integrados en una tarea matemática (Hill et al., 2008). Reconocer este potencial matemático también es conocimiento de contenido *especializado (didáctico, pedagógico)* en el sentido de que requiere que los profesores evalúen y modifiquen tareas para sus objetivos de aprendizaje (Sullivan 2008). En un estudio sobre tareas para docentes, Sullivan (2008) preguntó a los docentes: “Si desarrollaste una lección basada en esta idea, ¿qué matemáticas esperarías que los alumnos aprendieran?” (p .5). Los resultados dan cuenta que algunos profesores tenían dificultades para expresar lo que consideraban que era *el contenido para el aprendizaje de los alumnos.* Este tipo análisis es importante en la formación de los profesores, pero también es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, en Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) se realiza una revisión de la investigación empírica realizada sobre los profesores de matemáticas y se concluye que estas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos.

Simpson y Haltiwanger (2017) examinaron cómo los futuros profesores de matemáticas de secundaria daban sentido al pensamiento matemático de los alumnos y cuáles consideraban que eran sus fortalezas y debilidades al hacerlo. Investiga las formas en que los futuros profesores de matemáticas adquieren las habilidades necesarias para atender, interpretar y responder al pensamiento matemático de los estudiantes y las formas en que sus fortalezas y debilidades percibidas influyen en sus habilidades cuando este tipo de entrenamiento formalizado no es parte de su programa. Los autores reclaman que se necesita investigación adicional para determinar cómo se pueden desarrollar formalmente las habilidades de los futuros profesores de matemáticas secundarias para dar sentido al pensamiento del estudiante como parte de su programa de preparación docente. Además, los autores reclaman que se necesita más investigación para determinar "hasta qué punto los futuros profesores de matemática secundaria pueden confiar en sus fortalezas auto-identificadas y superar sus debilidades auto-identificadas cuando examinan el trabajo oral y / o escrito de los estudiantes" (p. 353). Para esto se necesita más investigaciones que propongan el desarrollo de competencias específicas en los futuros profesores para el desarrollo de análisis de tareas escolares.

La investigación que presenta Chapman (2009) se centró en apoyar el conocimiento de futuros profesores de matemática de educación secundaria sobre la resolución de problemas para la enseñanza. Una primera fase, estaba focalizada en la autorreflexión sobre problemas matemáticos y sus posibles soluciones con el objetivo de iniciarlos en la toma de conciencia sobre sus propias concepciones y conocimiento inicial. En una segunda fase, se propusieron actividades de investigación destinadas a modificar y ampliar las concepciones y conocimiento inicial detectado previamente. En una tercera fase se incluyeron actividades que requerían que los futuros profesores, compararan su pensamiento inicial con su pensamiento posterior. Los resultados indicaron que las acciones formativas fueron efectivas en la expansión y profundización de la comprensión de los problemas, la resolución de problemas, la pedagogía de la resolución de problemas y la enseñanza basada en la investigación. Por ejemplo, inicialmente los participantes concebían las tareas escolares desde un modelo algorítmico, avanzando en una análisis de los problemas para la enseñanza con foco en el pensamiento del alumnado.

Boston (2013) describe un taller de desarrollo profesional para capacitar al profesorado de matemáticas de secundaria, implementado durante más de un año, con el objetivo de apoyar el aprendizaje y el uso de tareas matemáticas cognitivamente desafiantes por parte de los profesores de matemáticas. En un primer momento, los profesores resolvieron una tarea matemática cognitivamente desafiante, reflexionaron desde una posición de alumno que aprende, analizaron las demandas cognitivas de la tarea y reflexionaron sobre un episodio instruccional de un docente que utilizaba dicha tarea. En un segundo momento, se centraron en el análisis del nivel de demanda cognitiva de un conjunto de tareas de matemáticas. En un tercer momento, los profesores fueron instruidos en una guía de análisis de tareas, con criterios específicos. Esta guía facilitó en los participantes una distinción más precisa entre tipos específicos de tareas de alto nivel y de bajo nivel cognitivo. En los momentos siguientes, fueron incitados en el uso de la mencionada guía para adquirir competencia adecuada. Como resultado general, la acción formativa presentada ayudó significativamente a los profesores a aumentar su conocimiento de las demandas cognitivas de las tareas matemáticas y su competencia para caracterizar diferentes tipos de tareas. Mejoraron sus criterios y fundamentos para describir tareas de alto y bajo nivel y su capacidad para identificar aspectos de tareas que ofrecen oportunidades para diferentes niveles y tipos de pensamiento del estudiante. La autora advierte la importancia de ciclos largos o iterativos para el desarrollo de conocimientos y competencias. Clarke, Roche, Cheeseman y van der Schans (2014) también describen una experiencia para apoyar el aprendizaje profesional de los docentes basado en el uso de tareas desafiantes, con maestro de primaria; pero además, para apoyarlos en la aplicación de estas tareas en la enseñanza en el aula.

An y Wu (2014) desarrollan un curso universitario de un año para el desarrollo profesional de profesores de primaria y secundaria, en cursos divididos. El objetivo fue instruirlos en herramientas teóricas y metodológicas para evaluar el aprendizaje matemático de los estudiantes y ser competente en la descripción de distintas estrategias. Además resultaron competentes en el uso de un modelo específico de instrucción MSA (Model, Strategy, and Application) para abordar conceptos, procedimientos y resolución de problemas. Los resultados mostraron que el programa mejoró el conocimiento de evaluación de los maestros. Guberman y Leikin (2013) presentan una experiencia formativa con futuros profesores de primaria con el objetivo de desarrollar concepciones matemáticas y pedagógicas asociadas con el uso sistemático de tareas de soluciones múltiples utilizando diferentes representaciones matemáticas, propiedades y teoremas. Se les pedía también que realizaran diferentes conexiones entre las representaciones y los objetos matemáticos. Los resultados indicaron que los futuros maestros progresaron en esta competencia mostrándose más flexibles al conectar problemas con conceptos matemáticos y propiedades. Justifican la importancia de formar a los profesores de todos los niveles con este tipo de experiencias.

Ostermann, Leuders y Nückles (2017) presentan un estudio de intervención que tiene como objetivo mejorar la precisión de los juicios que hacen los futuros profesores sobre la dificultad de las tareas en el área del pensamiento funcional; se estudia principalmente el impacto del conocimiento del contenido pedagógico (PCK) en la precisión de los juicios, obteniendo resultados positivos en la formación de profesores.

Los participantes se mostraron más competentes para sondear la comprensión de los estudiantes, tomar conciencia de las diferentes estrategias de resolución y reflexionar frente a las respuestas imprevistas de los estudiantes. Sin embargo, en cuánto al análisis de tareas, no se aborda de manera específica la descripción detallada de la actividad matemática.

Bartell, Webel, Bowen y Dyson (2013) investigan el papel que desempeña el conocimiento del contenido de futuros profesores en su competencia para reconocer la comprensión matemática de los alumnos. Los resultados sugieren que el conocimiento del contenido no es suficiente para este reconocimiento. y que la construcción de actividades tales como la intervención en cursos de formación puede ayudar a desarrollar esta competencia. Se consideran las implicaciones para los programas de formación del profesorado y la investigación futura. Los autores concluyen en que "evaluar la comprensión del estudiante es una competencia esencial para la enseñanza para la cual los futuros profesores necesitan experiencia [formación]" (p. 76).

Lee, Coomes y Yim (2017) trabajaron en un proyecto de desarrollo profesional para mejorar el conocimiento y la competencia de profesores al analizar tareas escolares e identificar sus potencialidades para el aprendizaje. Los talleres aplicados se basan en la resolución de tareas en pequeños grupos, describiendo ideas y procedimientos matemáticos posibles, seguido de la discusión general. Los profesores manifestaron la descripción de distintos procedimientos y conocimientos previos implicados como la parte más significativa, dado que dicho análisis refleja las tareas matemáticas que son un potencial para desarrollar conocimiento nuevo, o aquellas que son útiles, simplemente, para el ejercicio de habilidades sin esperar el desarrollo de nuevos conocimientos. Asimismo, se destaca la necesidad de desarrollar este tipo de estrategias la formación inicial.

Llinares (2013a) describe una propuesta aplicada en la formación inicial centrada en apoyar a los estudiantes para profesor a analizar tareas matemáticas que pueden ser usadas en una lección. Se considera que "la competencia docente para analizar tareas matemáticas viene determinada por la manera en la que el estudiante para profesor identifica la actividad matemática que la tarea puede potenciar en sus alumnos (la idea de demanda cognitiva de la tarea matemática)" (p. 121). Para esto se utilizan consignas como (p. 122):

- Identificar la demanda cognitiva de cada una de las tareas propuestas
- ¿Qué ideas matemáticas se desarrollan en cada actividad?
- Relacionar cada una de las características generales de los niveles de demanda cognitiva que aparecen en el documento de apoyo con las ideas que desarrolla cada actividad.

En este tipo de propuestas se propone el uso del conocimiento guiado por una consigna diseñada con un objetivo, y del desarrollo de una competencia docente (mirada profesional) del profesor de matemáticas; se aborda el uso de diversas definiciones, que surgen de acuerdo a cómo los participantes están *notando* el potencial de estas tareas matemáticas, el reconocimiento de explicaciones, conjeturas y argumentaciones. Al igual que otros trabajos en esta línea (Prieto y Valls, 2010; Sánchez-Matomoros, Fernández, Valls, García y Llinares, 2012) se muestra evidencias de los desafíos a los que se enfrentan los participantes cundo se les propone usar el conocimiento de matemáticas específico para la enseñanza en el análisis de tareas matemáticas; se argumenta también "que la competencia docente *mirar profesionalmente* no es innata y que debe empezar a desarrollarse en los programas de formación de profesores" (p. 121).

Alsina (2010) analiza la aplicación del aprendizaje reflexivo en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas. Utiliza el diseño de una actividad a partir de 5 fases. En primer lugar se utiliza unas preguntas iniciales que permiten al formador obtener información sobre los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema, por ejemplo, se les pregunta ¿qué es para ti un razonamiento lógico-matemático?; continuamente se hace una puesta en común. En la Fase 2, se incita a los estudiantes a documentarse teóricamente sobre el tema para luego intercambiar ideas generales; seguidamente, los estudiantes deben diseñar tareas utilizando los conocimientos anteriores e implementarlas. En la fase 3, los estudiantes deben valorar la intervención realizada; esta valoración está guiada por el diálogo del formador y, en la fase 4, los estudiantes buscan respuestas para mejorar. Una última fase da lugar a la valoración de la acción formativa global recogiendo el logro del aprendizaje de los estudiantes. Los resultados se centran en mostrar evidencias de acciones reflexivas y sus progresos a lo largo del ciclo, siendo fundamental los momentos de interacción con los demás, la toma de conciencia de los conocimientos propios y reflexión sobre los conocimientos necesarios y, por último, la necesidad de involucrar a los futuros profesores en procesos formativos cíclicos en el contexto de una comunidad de aprendizaje. Respecto al análisis de conocimientos previos de la fase 1, los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes no fueron capaces de verbalizar los conocimientos, creencias, etc.

4.2. Acciones formativas centradas en la reflexión del profesor

Un cuerpo emergente de investigación en el campo de la educación matematica está relacionado sin duda con la importancia de reflexionar de manera profesional sobre la práctica docente. Esta reflexión pasa a ser un objetivo importante en la formación de profesores en todo el mundo, y más aún, una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza, contribuyendo a la creación de hábitos mentales que estimulan el crecimiento profesional, desde el inicio de la formación (Mason y Klein 2013). Así, como afirman, Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte (2017, p. 89) “la noción de un maestro reflexivo es actual, tendenciosa y con razón”.

De esta manera, nuevos enfoques teóricos se han centrado en desarrollar herramientas y promover métodos de investigación que ofrecen amplias perspectivas para afrontar este objetivo (Gellert, Becerra y Chapman, 2013; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Llinares, 2013b; Nikolaeva, 2012; Ponte, 2011; Dyer y Sherin, 2016). Algunos ejemplos claros de estos enfoques son *Lesson Study* (Fernández y Yoshida, 2004), *Mirar con sentido profesional, o professional noticing* (Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares, 2012; Mason, 2002), *Concept Study* (Davis, 2008), *Competencia de análisis didáctico en el enfoque ontosemiótico* (Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011), en los cuales se trata de promover la reflexión del profesor sobre la acción, de manera individual o en interacción con sus pares, identificando factores claves que afectan los procesos de estudio y así tomar decisiones basadas en tales reflexiones. Con una mirada a las acciones formativas emergentes, los siguientes aportes son ejemplos de cómo se ha integrado este tipo de competencia sobre el ser reflexivo en la formación de profesores, con el fin de destacar estrategias clave que apoyan nuestro problema de estudio.

- Respecto a las acciones formativas centradas en *Lesson Study:*

Si bien se trata de un proceso de desarrollo profesional en el que los maestros japoneses participan para examinar su práctica sistemáticamente, con el objetivo de ser más efectivos, en los últimos años, las investigaciones se han expandido en diferentes países, que incluyen la investigación de su impacto positivo en la formación del futuro profesor y profesor activo de matemáticas (Amador y Carter, 2018; Leavy y Hourigan, 2016; Quaresma, Winsløw, Clivaz, Ponte, Shúilleabháin y Takahashi, 2018; Sánchez y Gómez-Blancarte, 2015; Verhoef, Coenders, Pieters, van Smaalen y Tall, 2015).

Cajkler, Wood, Norton y Pedder (2014) mostraron cómo la implementación de un programa formativo, basado en esta metodología, proporcionó oportunidades discursivas importantes para una planificación detallada y una reflexión profunda sobre la calidad de la enseñanza y el aprendizaje; además mostraron que los participantes crearon un sentido más fuerte de la comunidad docente.

Ricks (2011) describe una experiencia con futuros profesores basada en dos actividades reflexivas: un primer momento de reflexión inicial, desconectado de algún tipo de instrucción, y un segundo momento de refinamiento progresivo de ideas. Los resultados mostraron cómo los futuros profesores pueden involucrarse en la reflexión progresivamente de manera efectiva y cómo el enfoque puede proporcionar un nivel más profundo de compromiso con la preparación colaborativa de la lección de lo que normalmente se ofrece a los docentes. Llegaron a la conclusión de que las experiencias reflexivas deberían ser estándar en formación y que el Lesson Study se muestra como una metodología eficiente pare el desarrollo de esta competencia reflexiva.

- Acciones formativas centradas en *professional noticing:*

Este enfoque ha ganado recientemente un mayor interés, en la educación matemática, a medida que los investigadores trabajan para comprender cómo y qué se *nota* y cómo esto se traduce en la práctica. Se la considera como una competencia que permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Esta competencia se caracteriza por tres destrezas: identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Fortuny y Rodríguez, 2012). Está en claro, además, que la capacidad de mirar e interpretar profesionalmente las interacciones de clase es algo que se desarrolla en el transcurso del tiempo.

> Reconocer y dar sentido a los hechos que suceden en la clase de matemáticas desde la perspectiva de poder explicar e informar el aprendizaje de las matemáticas permite generar información contextual para apoyar las decisiones de acción que debe tomar el profesor con el objetivo de favorecer el aprendizaje de sus alumnos. (Llinares, 2016, p. 58)

Muchas son las investigaciones realizadas, como por ejemplo la síntesis descrita en Schack, Fisher y Wilhelm (2017) en el ámbito de la formación inicial y continua.

Fortuny y Rodríguez (2012) sostienen que los actuales programas de formación, se concentran en general, en ayudar al profesorado en formación a actuar, proporcionándoles nuevas técnicas pedagógicas, tecnología y nuevas actividades que pueden ser útiles. Si bien estos medios son útiles, "no garantizan necesariamente que los estudiantes para profesor interpreten las interacciones en el aula, de manera que permitan una flexibilidad en su enfoque de la enseñanza. Es decir, pueden apoyar un cambio didáctico en su actuación, pero no llegar a interiorizar en su pensamiento docente un cambio profesional" (p. 24). En este sentido, intervienen con una acción formativa en un máster universitario para ayudar al profesorado de matemáticas en formación a desarrollar la habilidad de mirar con sentido, es decir identificar, interpretar y validar las interacciones en el aula. El foco está en el momento de la realización de las prácticas profesionales, considerándola una etapa fundamental para la formación. Se basan en el uso y reflexiones de sus propios videos, como un instrumento eficaz. En su estudio, los autores analizan en qué forma los participantes son capaces de identificar e interpretar las estrategias usadas por los alumnos observados, y cómo valoran las decisiones de las orquestaciones en clase, como por ejemplo, los momentos de puesta en común. Para el análisis de las respuestas, consideran que se ha producido un refinamiento reflexivo cuando haya evidencias de estrategias nuevas y mejoras en el punto de vista; además, será de alto nivel al relacionar los aportes de la didáctica de la matemática en cuanto favorecer la comunicación, verbalización y potenciando la interacción entre los alumnos y el profesor. Los resultados muestran progresos interesantes en el progreso de su competencia para mirar profesionalmente y la necesidad de realizar experiencias de enseñanza desde la formación inicial para aprender a reflexionar con sentido.

De la misma manera, Roller (2016) en su estudio con futuros profesores de matemática de secundaria, se centró en detectar qué aspectos fueron capaces de *notar* los participantes al observar videos de sus propias prácticas de enseñanza. Se utiliza una herramienta de observación. En general, el análisis de los datos revela que los participantes han logrado avanzar, de observaciones específicas y detalles particulares, hacia conclusiones más generales y amplias, vinculadas con aspectos de la didáctica de las matemáticas. Por último, se destaca nuevamente que los resultados apoyan el uso del video para desarrollar habilidades de *noticing* en los programas de formación inicial y el desarrollo de estrategias de reflexión idóneas, dado que "la complejidad de los episodios de video que contienen muchos movimientos de maestros y estudiantes hace que sea necesario que los maestros desarrollen lentes para ver videos e identificar momentos importantes en un episodio de enseñanza" (Roller, 2016, p. 480).

- Acciones formativas centradas en estrategias con *episodios de video:*

La literatura es extensa respecto al uso de videos, para apoyar el desarrollo de la competencia reflexiva en la formación inicial (p.e. Alsawaie y Alghazo, 2010; Blomberg, Renkl, Sherin, Borko y Seidel, 2013; Climent, Montes, Contreras, Carrillo, Liñan, Muñoz-Catalán, Barrera y León, 2016; König & Kramer, 2016; Llinares y Valls, 2010; McDuffie et al., 2014; Santagata y Yeh, 2014; Thanh, Rijkje Dekker y Goedhart, 2008) y continua (p.e. Ponte, 2011; van Es y Sherin, 2010). Se plantean cuestiones tales: cómo aprenden los futuros profesores/profesores mediante el uso de video; cuál es su papel didáctico; qué características deben tener las consignas instruccionales para que el uso del video sea efectivo. Coles (2014), en su revisión de literatura sobre el rol del video, identifica 4 modelos en los que se pueden encuadrar estas investigaciones: los videos como herramientas (p.e. Maher, Landis y Palius, 2010), para analizar lecciones (p.e. Santagata y Guarino, 2011), para aprender a *notar* (Star y Strickland, 2008) y el modelo de OU (universidad abierta) (p.e. Jaworski, 1990). Se utilizan análisis de videos de clase para aprender de la propia enseñanza, de las prácticas de los demás, interpretación de fenómenos observados, de las interacciones en clase o el razonamiento matemático de los estudiantes y permiten a los participantes explorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reales, a partir de diversas estrategias.

En general, los resultados indican que los participantes logran progresar en el tipo de reflexiones que realizan, a partir del análisis de clases grabadas como recurso didáctico y las discusiones grupales continuas, mejorando su competencia para analizar la enseñanza de las matemáticas; aprenden a prestar más atención a los detalles del pensamiento matemático de los estudiantes y adoptan una postura interpretativa en sus análisis; identifican aspectos que caracterizan como interesantes de la clases observadas; aprenden a interpretar eventos de la clase en lugar de simplemente describirlos, criticarlos o elogiarlos. Para lograr esto, de deben establecer normas de discusión efectivas y apoyar el desarrollo de nuevas formas de ver y actuar en el aula (Coles, 2014).

4.3. Conclusiones generales

Aunque la amplitud de las definiciones y la terminología teórica difieren considerablemente, hemos identificado dos grandes líneas de interés como parte de ciclos de diseños o experiencias formativas; por un lado la importancia del análisis didáctico-matemático de tareas escolares, por otro, la importancia de la reflexión profesional.

4.3.1. Problemática sobre el análisis de tareas

En el primero de los casos, el campo de interés está en las tareas matemáticas, los distintos modos de abordarlas, el conocimiento matemático implicado, la génesis de los juicios de los docentes, los factores externos que influyen en esos juicios y su impacto en el aprendizaje.

Particularmente, la investigación continúa demostrando que el conocimiento del futuro profesor sobre el contenido didáctico-matemático y los procesos matemáticos está plagado de dificultades y una baja comprensión conceptual de muchos conceptos, proposiciones y argumentaciones, como también muestran deficiencias para reconocer algunos conocimientos previos implicados en las tareas. Los docentes deben "involucrarse no solo en la investigación sobre cómo aplicar el conocimiento sobre el pensamiento de los estudiantes al planear e implementar la instrucción, sino también en la investigación para profundizar su comprensión del pensamiento de los estudiantes" (NCTM, 2000, p. 389).

En el área de educación matemática no hay un paradigma que nos diga cómo se debe realizar este análisis de la actividad matemática; sin embargo, los resultados muestran deficiencias generales sobre el conocimiento didáctico del contenido, y no abordan de manera detallada la descripción de la red de conocimientos matemáticos. Si bien es una tarea difícil (Kadunz, 2016), pareciera necesario que los profesores compartan un modelo explícito sobre la naturaleza de las matemáticas, y en particular, sobre los tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen en la práctica matemática; es decir, adoptar una perspectiva teórica que permita realizar análisis más detallados de las prácticas matemática, comprender potenciales conflictos, analizar las soluciones dadas por los estudiantes y evaluar conflictos efectivos; este conocimiento permitirá al profesor gestionar procesos de institucionalización y ser competente en la implementación de procesos de estudio matemáticos en el aula (Lurduy, 2012).

Por otra parte, el diseño de una lección a partir de una secuencia de tareas requiere tener en cuenta, además de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego, otras facetas que condicionan los aprendizajes (facetas cognitiva, instruccional, curricular,…) las cuales muchas veces no se tienen en cuenta en este tipo de investigaciones.

Desde un punto de vista ontosemiótico se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Con estas nociones teóricas, cuando los significados son entendidos de manera pragmática en términos de prácticas, se puede responder en un primer momento a preguntas del tipo: ¿cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos que se quieren enseñar? ¿Cómo se articulan entre sí? En un segundo momento se pueden analizar los objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permite comprender la progresión de los aprendizajes y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. En esta línea de investigación se están efectuando numerosos trabajos, tal como se describen más adelante. En forma general se identifica que uno de los problemas que presentan los estudiantes para profesor de secundaria es que tienen dificultades en la identificación de proposiciones, confundiéndolas además con procedimientos y argumentaciones, principalmente cuando analizan tareas matemáticas sencillas.

Por otro lado, la síntesis de investigaciones que hemos destacado reclaman la importancia del análisis de tareas *a priori* como una competencia del profesor necesaria evaluar competencias de sus estudiantes.

> Los docentes deben poder evaluar si sus alumnos están aprendiendo lo que se pretende, y los formadores de docentes deben proporcionar experiencias que

> ayuden a los futuros maestros a desarrollar esta competencia. (Bartell et al., 2013, p. 58)

Así, los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas (Chapman y An, 2017; Luurduy, 2012; Vázquez-Cano, 2016). En el marco del CCDM, Font, Godino y colaboradores argumentan que si el profesorado no consigue ser competente en el análisis didáctico de secuencias matemáticas, "dará la espalda al currículo por competencias, ignorándolo o bien limitándose a tenerlo en cuenta sólo para los documentos oficiales (programación de departamento, documentos del centro, etc.)" (Font, 2011, p. 23).

Si bien consideramos que este es un aspecto importante, no es suficientes. "Una evaluación o un tipo de evaluación no debe ser la única medida de los logros de un estudiante, porque no es probable que brinde una imagen adecuada del aprendizaje de ese estudiante" (Koelsch, Estrin y Farr, 1995, p. 11). El futuro profesor de matemática debe ser competente en el análisis de tareas, no solo para evaluar por competencias, sino para desarrollar su labor de manera idónea. "El desarrollo de las competencias profesionales se activan en gran medida por medio del aprendizaje reflexivo, que permite comprender la complejidad de los procesos educativos" (Alsina, Planas y Calabuig, 2009, p. 256); así, el profesor debe ser competente y reflexionar sobre los análisis tanto epistémicos como cognitivos y gestionar de manera idónea proyectos educativos.

4.3.2. Problemática sobre la reflexión profesional

Una revisión de la literatura deja clara la importancia del papel de la reflexión y la necesidad de potenciarla en el ámbito profesional (Korthagen, 2010). Esto conduce a encontrar estrategias o propuestas didácticas que favorezcan el desarrollo de la práctica reflexiva en los docentes. Desde distintos enfoques de investigación se han utilizado tareas específicas, en programas de formación del profesorado, que ayudan a desarrollar este objetivo en un intento de sistematizar los procesos de reflexión del profesor sobre su práctica.

En muchos casos, las investigaciones ofrecen resultados poco sorprendentes, desde la perspectiva práctica del docente, pero sirven para mostrar la coherencia entre las distinciones organizativas y lo observado (Mason, 2016). Por ejemplo, aprendemos que los profesores con un fuerte bagaje matemático tendían a *notar* los problemas basados en el contenido, mientras que los profesores con un fuerte bagaje *pedagógico* tendían a notar problemas pedagógicos (Hoth et al., 2016). Sin embargo, resulta positivo que la naturaleza de una experiencia significativa influye en el *tipo de cosas* que se *notan*. Los resultados sugieren que la participación activa de los participantes en el estudio de las matemáticas y la discusión de estrategias y resultados influye positivamente en su aprendizaje de las matemáticas. Además, la participación activa de futuros profesores en la preparación de tareas, el análisis del trabajo de los estudiantes, la retroalimentación a los estudiantes y la discusión con colegas y formadores de docentes también influye positivamente en sus conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas. Los episodios de clase video-grabados, así como el uso de recursos tecnológicos, se revelan como estrategias didácticas útiles para la comunicación e interacción, y despiertan el interés y motivación en los participantes.

Un aspecto fundamental son las consignas que proponen los investigadores para lograr que los futuros profesores sean reflexivos. En muchas oportunidades hemos notado que no se brindan metodologías específicas.

4.3.3. Problemática general sobre las acciones formativas

Es claro que los estudios no provienen de un marco común con respecto a lo que se debe exigir a los futuros docentes de secundaria, y en cierta medida, los requisitos establecidos por los investigadores parecen variar en naturaleza y profundidad.

Pero, un hecho claro es que, la percepción, la descripción e interpretación y la toma de decisiones se consideran habilidades o competencias que deben adquirirse en la formación, basadas en la alineación de creencias y orientaciones teórico-metodológicas.

A nivel general, si bien, los mencionados estudios sugieren que sus acciones formativas mejoraron el conocimiento y las competencias de los profesores y futuros profesores participantes, también indicaron limitaciones en la extensión del cambio en áreas importantes y la necesidad de incorporar más diseños que contribuyan al desarrollo profesional.

> Esto es comprensible dada la complejidad de la formación docente en términos de variables múltiples que están involucradas y que no pueden abordarse en programas (por ejemplo, un curso de educación de un semestre, un instituto de verano de 1 semana). (Chapman y An, 2017, p. 183)

Se destaca como fundamental trabajar desde los programas de formación inicial de profesores de matemática, de manera de proporcionar a los futuros profesores herramientas teóricas que permitan dar sentido a las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por último, si bien hemos hecho un esfuerzo por centrarnos en el desarrollo profesional de futuros profesores de secundaria, un aspecto notable es que la mayoría de los estudios, se centran en general, en los futuros maestros de escuela primaria (Potari y Ponte, 2017); sin embargo, se reconoce que el conocimiento de los futuros docentes de secundaria sobre la enseñanza de las matemáticas y las matemáticas (y su concepción sobre éstas) en las escuelas secundarias es de naturaleza diferente, y se necesitan nuevos marcos teóricos y metodológicos para abordarlas (Speer, King y Howell, 2015).

5. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO. PRIMERA APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Como hemos visto a lo largo del capítulo, aunque se reconoce que la formación de profesores es un área en la que se ha desarrollado mucha investigación, muchos son los interrogantes y las líneas que continúan abiertas.

Queda claro que el trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de tipos de conocimientos, competencias y habilidades, “no solo es importante saber qué matemáticas conocen los profesores sino también cómo las conocen y qué son capaces de movilizar para la enseñanza” (Chapman, 2014, p. 295). Para el diseño e implementación de acciones de enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas es necesario seleccionar un conjunto de conocimientos y competencias que se consideran necesarios para el desarrollo de la profesión docente (Chapman, 2014; Chapman y An, 2017; Potari y Ponte, 2017) y clarificar el modelo de aprendizaje que asumimos;

> es decir, pensar en determinar qué características deben cumplir los entornos de aprendizaje creados para este fin debe apoyarse no solo en la respuesta a qué

> conocimiento y destrezas se quiere que se aprenda, sino también a la caracterización de cómo se aprende. (Llinares, 2008, p. 6)

Realizar esta selección no es una tarea fácil, ya que existen diversos modelos teóricos en el campo de investigación sobre formación de profesores que proponen diferentes sistemas de categorías de dichos conocimientos y competencias profesionales. Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar problemas didácticos básicos en la enseñanza de esta materia mediante la aplicación de unas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar, por tanto, a una serie de competencias específicas. En este sentido, pareciera que en la literatura se habla de conocimiento y competencias sin abordar de manera explícita una postura teórica que permita articular de manera coherente ambas nociones. Tomando esta iniciativa, abordamos en el Capítulo 2 un marco teórico que permite afrontar este problema y señalamos las investigaciones que se están haciendo en la formación de profesores desde esta perspectiva.

Por otro lado, clarificadas las bases teóricas, esta investigación contribuye a la formación inicial del profesor de matemáticas de educación secundaria. Se propone el diseño de acciones que permitan la mejora de la formación de profesores mediante el desarrollo y/o la potenciación de conocimientos y competencias didáctico-matemático requeridas para la enseñanza. El foco de interés recae en los dos tópicos señalados en el apartado anterior: esto es, la competencia para el análisis de tareas y la competencia para la reflexión sistemática. Siguiendo a Ponte (2014), “la educación de los futuros maestros no es solo un paso en la preparación de nuevos maestros, también es un elemento fundamental en la constitución de la enseñanza como profesión” (p. 489).

CAPÍTULO 2.

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

1. INTRODUCCIÓN

La síntesis realizada en el Capítulo 1 sobre los conocimientos y competencias que deberían desarrollar los futuros profesores de matemáticas nos sugiere la necesidad, en primer lugar, de consolidar una postura teórica que nos permita articular ambas nociones y tomar conciencia de cómo pueden influenciar las prácticas profesionales; en segundo lugar, con el fin de hacer operativas tales herramientas teórico-metodológicas, nos sugiere la necesidad de diseñar e implementar procesos formativos que permitan contribuir al aprendizaje de los futuros profesores, su crecimiento profesional y al cambio en las nuevas prácticas de instrucción para la educación matemática.

En este capítulo presentamos el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), marco teórico en que basamos nuestro trabajo, desarrollado por Godino y colaboradores (Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino, 2017; Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; Pino-Fan et al., 2018). Aplicamos al campo de la formación de profesores algunas nociones específicas. Describimos sus características generales y las herramientas teóricas que sirven de fundamento para determinar el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone et al., 2017).

A partir de dicha síntesis surge de forma natural la necesidad de abordar el desarrollo de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de los futuros profesores. En este sentido, destacamos las investigaciones que se vienen haciendo desde el EOS las cuales brindan información para detectar áreas problemáticas en la formación de profesores. Planteamos entonces el problema de investigación resaltando su interés para la didáctica de las matemáticas, los objetivos y la metodología empleada.

2. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

Para afrontar el estudio de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor, nos posicionamos desde una perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, "modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático" (Godino, 2017, p. 5) que integra diversas aproximaciones y enfoques teóricos usados en la investigación en educación matemática. Dicho modelo se viene desarrollando desde 1994 (Godino y Batanero, 1994) con un carácter dinámico y progresivo, tal como puede observarse en las publicaciones científicas en el área (http://enfoqueontosemiotico.ugr.es), que trata de avanzar en la construcción de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas que permiten realizar análisis a nivel *macro* y *micro* de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: dimensión ecológica, epistémica, cognitiva, afectiva e instruccional (Godino et al., 2007).

El conjunto de nociones teóricas que componen el EOS, y que son fundamentales en nuestra investigación, se pueden clasificar en cinco grupos cada uno de los cuales permite centrarse en aspectos específicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino et al., 2007): sistema de prácticas, configuración ontosemiótica, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica. A continuación, se sintetiza cada uno de ellos con especial énfasis en la herramienta configuración ontosemiótica e idoneidad didáctica, dado que son la base de los estudios presentados en los capítulos 3 y 4, respectivamente.

2.1. Sistemas de prácticas

La visión antropológica (Wittgenstein, 1953), pragmatista y semiótica (Peirce, 1958) sobre el conocimiento didáctico-matemático asumida por el EOS se ha concretado en una manera de concebir y analizar la actividad matemática con claras consecuencias para la educación matemática. Se asume que las matemáticas provienen de la actividad humana orientada a la resolución de determinado tipo de problemas, los cuales constituyen la razón de ser y el significado de los objetos emergentes de la misma. En consecuencia, las nociones de práctica matemática y sistema de prácticas constituyen el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font et al., 2013).

Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como "la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva, que permite la reflexión sobre la práctica operativa" (Font et al., 2013, p. 104). A la vez, pueden ser concebidas desde dos puntos de vista dependiendo de quien las realiza; si son llevadas a cabo por una persona, se pondrán en evidencia los significados personales, o bien, si son compartidas en el seno de una institución, dará lugar a los significados institucionales, entendiendo por institución un grupo de personas involucradas en una misma situación problemática.

En cualquier caso, es importante considerar que cuando la acción se dirige a una actividad de resolución de problemas, más que hablar de una práctica matemática, podemos considerar un sistema de prácticas matemáticas (institucionales y personales):

> El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. (Godino y Batanero, 1994, p. 337)
>
> Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, están constituidos por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación Pp(C). (Godino y Batanero, 1994, p. 339)

En Godino y Batanero (1994) se introdujeron las nociones primitivas de problema, práctica, objeto y significado. Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), la pregunta por el significado de un objeto se resuelve indicando que es el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338). "Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional” (p. 338).

En el siguiente sub-apartados se refleja la relación subyacente entre los sistemas de prácticas mencionados, los objetos matemáticos emergentes de tales sistemas y las relaciones que se establecen entre dichos objetos “las cuales deben ser tenidas en cuenta en el análisis del significado de las nociones matemáticas” (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, p. 78).

2.2. Configuración ontosemiótica

En la filosofía de las matemáticas, el término objeto matemático se refiere generalmente a objetos abstractos tales como conceptos, proposiciones, relaciones, etc. Sin embargo, en el marco del EOS, la palabra objeto se usa en un sentido amplio para significar cualquier entidad que esté involucrada de alguna manera en la práctica o sistemas de prácticas matemáticas y que pueda separarse o individualizarse, por ejemplo, un concepto, una propiedad, una representación, un procedimiento, etc. Esta es una metáfora ontológica útil que ayuda a reconocer que, en las prácticas matemáticas intervienen, no solo conceptos o entidades abstractas sino también objetos ostensivos o empíricos. Esta concepción general del objeto matemático se complementa con la introducción de una categorización de diferentes tipos de objetos, teniendo en cuenta su naturaleza y función en el trabajo matemático.

2.2.1. Objetos matemáticos primarios

Godino et al. (2007, p. 130) describen los siguientes tipos de objetos matemáticos o entidades primarias:

- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en diferentes registros de expresión (escrito, oral, gestual) y representaciones. Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

- Concepto-definición (entendidos como entidades que se definen, como número, punto, recta, media, función).
- Proposiciones o propiedades (enunciados sobre conceptos).
- Procedimientos (secuencias de acciones del sujeto ante las tareas matemáticas; algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos).

La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Además, estos seis tipos de objetos, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

2.2.2. Facetas de los objetos matemáticos

De acuerdo al juego de lenguaje en que participan (Wittgenstein, 1953), las entidades matemáticas descritas anteriormente, pueden ser consideradas en el EOS desde cinco facetas o polaridades duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, expresión y contenido (Godino, 2002a; Godino et al., 2007), dando lugar a configuraciones complejas.

- Personal/institucional:

Una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional. Serán personales cuando se trate de la manifestación de un sujeto individual. Por el contrario, si se trata de la explicación del profesor, de documentos curriculares, recursos didácticos, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales, dado que son usados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Unitario/sistémico:

En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

- Ostensivo/no ostensivo:

Se considera que los objetos matemáticos tienen una faceta ostensiva—perceptible, y otra no ostensiva—abstracta. Así, por ejemplo, podemos hablar de un objeto institucional o personal de naturaleza no ostensiva pero que, en su uso en la práctica pública, a partir de notaciones, gráficos, etc. deja a la luz su faceta ostensiva.

- Ejemplar/tipo (extensivo/intensivo):

Esta dualidad es fundamental para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), permitiendo centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general (Font y Contreras, 2008). Así, en el análisis de la actividad matemática, debemos considerar que un objeto matemático puede ser un ejemplar, si se pone en juego por sí mismo, o bien, representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema.

- Expresión/contenido (significante/significado):

Al igual que en los casos anteriores, cualquiera de las entidades matemáticas consideradas puede desempeñar el papel de expresión o de contenido, siendo antecedentes o consecuentes de una "función semiótica" (Hjemslev, 1943). En términos ontosemióticos (Distéfano y Pochulu, 2017), esta dualidad permite comprender las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado), establecidas por una persona/institución de acuerdo con un criterio o regla de correspondencia (hábitos, normas, convenios). Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos).

En la Figura 2.1. se muestran los distintos niveles de análisis que comportan la descripción de los sistemas de prácticas, objetos y dualidades.

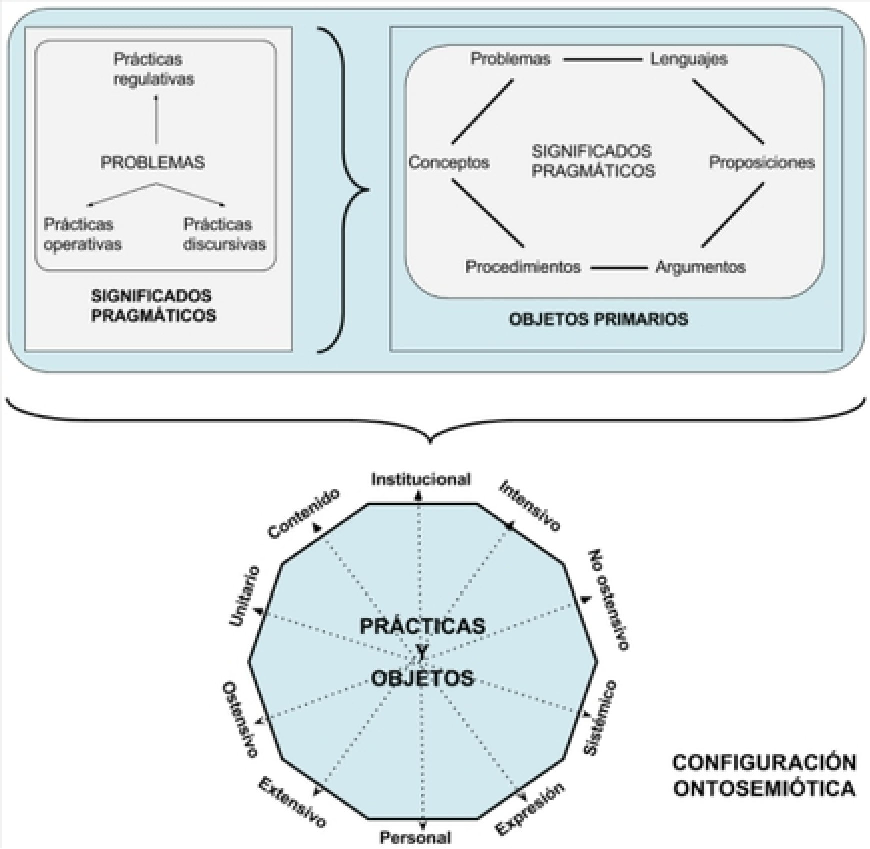


Figura 2.1. Significados pragmáticos y configuración ontosemiótica (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017, p. 4)

Por otra parte, las dualidades dan lugar a sus respectivos procesos cognitivos-epistémicos:

- institucionalización-personalización;
- generalización-particularización;
- análisis/descomposición-síntesis/reificación;
- materialización/concreción-idealización/abstracción;
- expresión/representación-significación.

Otros procesos como los de resolución de problemas y la modelización pueden ser vistos como “mega procesos” e implican la intervención y activación de los procesos antes mencionados (Font y Rubio, 2017; Font, Rubio y Contreras, 2008).

La consideración de las facetas duales con las que se puede interpretar una entidad matemática da cuenta de la complejidad que implica el análisis de la actividad matemática dejando a la vista una configuración de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas. Esta complejidad se pone de manifiesto, por ejemplo, cuando se pretende definir un objeto abstracto—ideal, el cual es entendido como una entidad (Godino, 2017, p. 9):

- no ostensiva —inmaterial—,
- general —intensiva—,

que a su vez se puede considerar de manera:

- unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos),
- personal (mental) o institucional (sociocultural),
- antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

La Figura 2.2. destaca en el centro el papel fundamental que tienen las situaciones-problemas en el EOS, como también las prácticas matemáticas necesarias para resolverlas y su dependencia en el respectivo contexto institucional; también muestra el desglose y las interacciones de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos y los procesos que llevan asociados.

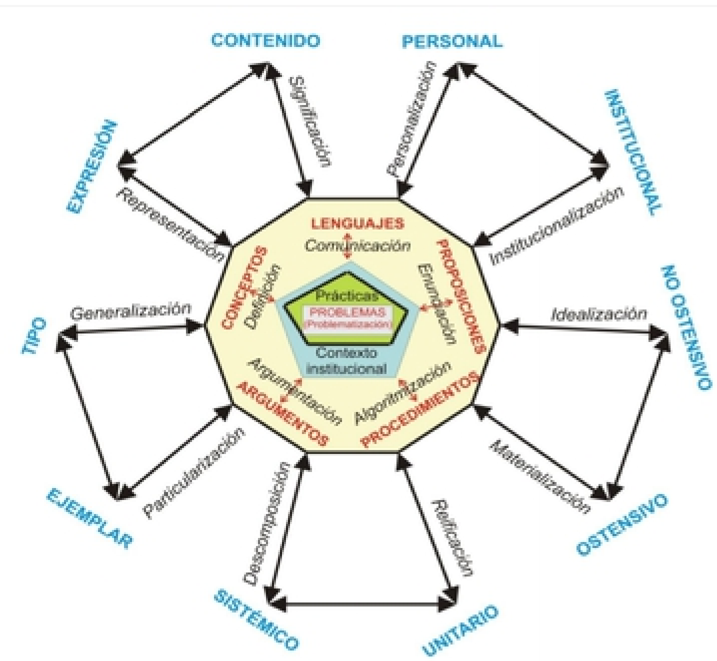


Figura 2.2. Configuración ontosemiótica (Font et al., 2013, p. 117)

La noción de configuración ontosemiótica se debe considerar como una modelización del conocimiento matemático que responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas de resolución de situaciones-problemas (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Desde una mirada hacia la formación de profesores, en el EOS se considera que el profesor en formación debe conocer esta red compleja de conocimientos y ser competente en su análisis pormenorizado. Este aspecto será profundizado en la sección 4; además, en el Capítulo 3 se hace operativa esta herramienta teórico-metodológica mediante la aplicación sistemática en un proceso de formativo (Estudio 1).

2.3. Configuración didáctica

La noción de configuración didáctica es entendida como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema. Constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática (Contreras, García y Font, 2012; Godino, Contreras y Font, 2006). Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas, epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

2.4. Dimensión normativa

En el EOS se adopta un punto de vista global sobre las normas que rigen los procesos de estudio "integrando los distintos modos de entender el contrato didáctico y las normas sociales y sociomatemáticas en didáctica de las matemáticas, desarrollando de este modo la noción de dimensión normativa" (D'Amore, Font y Godino, 2007, p. 57). Dicha noción, descrita de manera detallada en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009), permite abordar el estudio, sistemático y global, del sistema de reglas, hábitos, normas que restringen, regulan y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, clasificando las normas según cuatro direcciones complementarias:

- el momento en que intervienen las normas (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación);

- el origen (administrativo, escolar);
- el tipo y grado de coerción (social y disciplinar);
- la faceta del proceso de estudio a que se refiere la norma (epistémica, cognitiva, afectiva, ecológica, instruccional).

2.5. Idoneidad didáctica

La noción de idoneidad didáctica se describe en el EOS (Godino, 2013a; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013) como el criterio global de pertinencia de un proceso de instrucción cuyo principal indicador empírico puede ser el grado de adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos, y que es relativa a las circunstancias locales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de instrucción matemática. Así la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes (Figura 2.3.):

- Idoneidad ecológica: Es el grado en el que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- Idoneidad afectiva: Es el grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de instrucción. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y su historia escolar previa.

- Idoneidad interaccional: un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se pueden detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional: es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

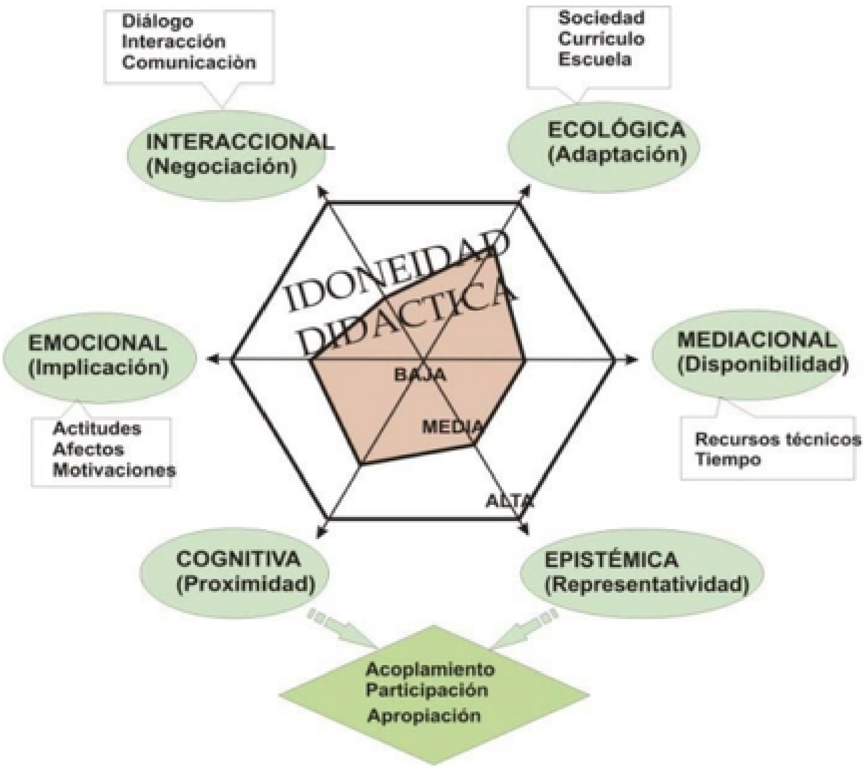


Figura 2.3. Idoneidad didáctica (Godino, 2013a, p. 116)

Godino (2013a) identifica en cada una de estas facetas un sistema de componentes e indicadores empíricos generales que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática; así, dicho sistema aporta criterios para determinar si un proceso de enseñanza y aprendizaje resulta con una idoneidad didáctica alta, media o baja, permitiendo justificar su mejora progresiva. Estos criterios son útiles *a priori*, porque orientan "cómo se deben hacer las cosas" y *a posteriori*, porque "sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado" (Breda, Font y Pino-

Fan, 2018, p. 264). Un claro ejemplo se puede ver en la investigación que presentan Ramos y Font, quienes analizan el papel que juegan estos criterios de idoneidad didáctica en la argumentación de profesores sobre un proceso de instrucción; estos autores concluyen que:

> Los criterios de idoneidad son herramientas que pueden ser muy útiles no sólo para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, sino también para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. (Ramos y Font, 2008, p. 262).

Este aspecto será profundizado en la sección 4; además en el Capítulo 4 se hace operativa esta herramienta teórico-metodológica mediante la aplicación sistemática en un proceso de formativo (Estudio 2).

3. MODELO DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DEL PROFESOR

Como ya se vio reflejado en el Capítulo 1, investigadores en el campo de la formación de profesores han enfrentado el interrogante sobre cuáles son o deberían ser los conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas. Un punto en común en estos aportes es que el profesor de matemáticas debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, ha de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos que abordan los estudiantes de un cierto nivel educativo, y debe saber articularlos con los niveles educativos posteriores. Pero está claro que este conocimiento no basta; el profesor debe tener también un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de las interacciones del contenido matemático a enseñar con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos etc.) que condicionan dichos procesos.

Teniendo en cuenta los aportes teóricos mencionados anteriormente que se han realizado desde distintos marcos para determinar, caracterizar y analizar los conocimientos del profesor, Godino (2009) ha desarrollado dentro del EOS un modelo teórico de “Conocimiento Didáctico-Matemático” del profesor de matemáticas (modelo

CDM), inicialmente introducido como un sistema de categorías de análisis. Este sistema se ha ido refinando y aplicado en diversas investigaciones (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015; Pino-Fan, Assis y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan et al., 2018; Ortiz y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2017) constituyendo el modelo CDM a partir de seis facetas y tres grandes dimensiones, las cuales involucran el uso de las herramientas ontosemióticas descritas en el apartado anterior.

3.1. Facetas y componentes del modelo de conocimiento del profesor

El modelo CDM incluye seis facetas para el conocimiento didáctico-matemático:

- *Faceta epistémica*: es el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce las matemáticas. Sería equivalente a lo que Ball et al., (2001) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.
- *Faceta cognitiva*: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
- *Faceta afectiva*: incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Faceta instruccional*: refiere al conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.
- *Faceta mediacional*: es el conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
- *Faceta ecológica*: implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la medida en que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático, sea común o ampliado. Así, el profesor de matemáticas tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo donde imparte, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles posteriores. Estos conocimientos constituyen el "conocimiento del contenido matemático *per-se*" (Scheiner, 2015, p. 3250), que en el modelo propuesto desde el EOS constituyen, los conocimientos, *común* (correspondiente al nivel en que se enseña) y *ampliado* (relativos a niveles superiores).

Un aspecto fundamental y que determina la complejidad del conocimiento profesional es que todas las facetas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una determinada situación-problemática, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea, utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones; a la vez de poder adaptarla a los conocimientos de los alumnos utilizando los recursos adecuados (facetas instruccional, mediacional y cognitiva), teniendo en cuenta la diversidad ecológica como también aspectos afectivos que involucran los alumnos.

En la Figura 2.4. se presenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático, que se superpone al conocimiento matemático *per-se* (común y ampliado). Se puede observar que, en cada faceta, se destacan algunos componentes de dicho conocimiento, los cuales se pueden encontrar en forma detallada en Godino (2009).

Las categorías genéricas del *conocimiento matemático para la enseñanza* propuestas por otros modelos, por ejemplo, el "Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)", desarrollada por Ball y colaboradores son desarrolladas en el modelo CCDM usando los componentes e indicadores de idoneidad didáctica del EOS (detallados en Godino, 2013a), según se muestra en la Figura 2.4. Por ejemplo, para el "Specialized Content Knowledge-SCK" (conocimiento especializado del contenido) (Hill et al., 2008, p. 377), que se corresponde aquí con la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, se propone tener en cuenta la diversidad de significados parciales de los objetos matemáticos y su interconexión. Pero, además, la descripción de tales significados implica el reconocimiento de las configuraciones ontosemióticas correspondientes. Como resultado de estas interacciones, el CDM se presenta como un modelo mucho más rico que brinda herramientas específicas para el análisis de todos los factores que influyen en un proceso de instrucción.

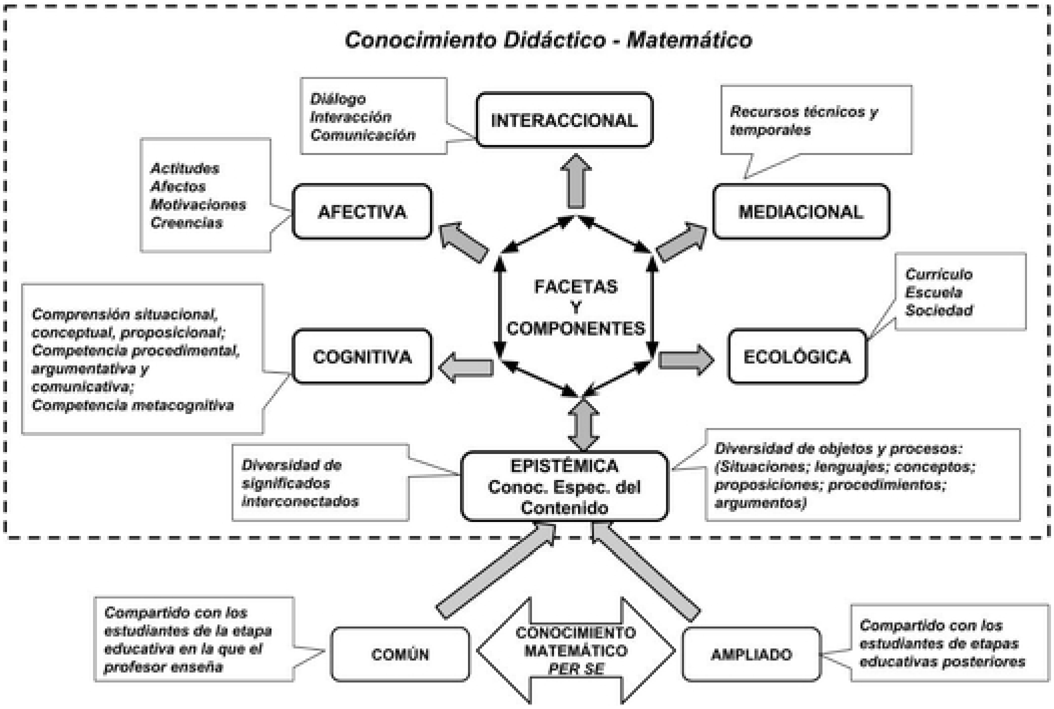


Figura 2.4. Facetas y componentes del conocimiento del profesor (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 292)

Cuando se trata de analizar el conocimiento del profesor de matemáticas es importante clarificar los roles de los sujetos involucrados. Si aplicamos el modelo esquematizado al profesor de matemáticas, se supone que los conocimientos se refieren a un proceso de estudio matemático en el que el profesor está implicado, y, por tanto, la faceta cognitiva y afectiva se refieren a sus estudiantes de matemáticas. En el caso del formador de profesores, se trata de un proceso de estudio de *didáctica de la matemática*, donde los estudiantes son profesores de matemáticas en formación, a los cuáles se refieren las facetas afectiva y cognitiva. En la primera de dichas facetas se tienen en cuenta las creencias, y en la segunda, los procesos meta-cognitivos del profesor de matemáticas, las cuales deben ser conocidas y tenidas en cuenta por el formador. La formación de los profesores debe tener, también, en cuenta el conocimiento matemático *per-se*, ya que los conocimientos didácticos involucran, así mismo, al contenido matemático. Dado que esta tesis se aplica a los futuros profesores, nos referiremos al segundo caso mencionado.

3.2. Dimensiones del modelo de conocimiento del profesor

Además de las seis facetas (con sus respectivos sistemas de componentes e indicadores), detalladas en la sección anterior, en el modelo CMD se propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo a tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática (Figura 2.5).

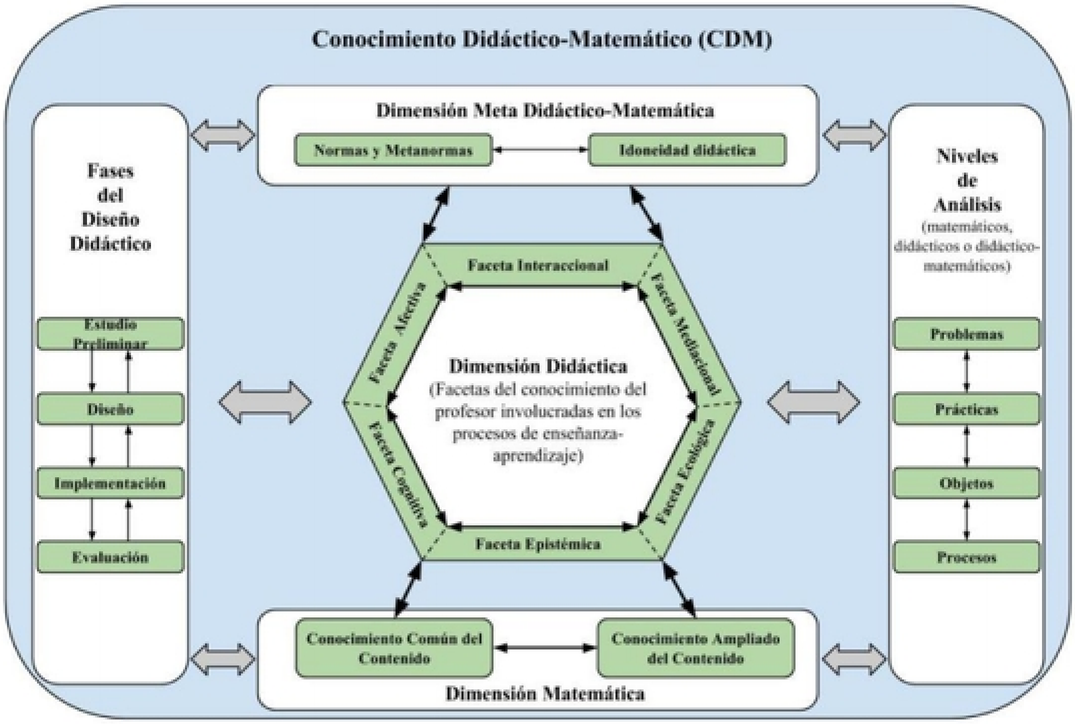


Figura 2.5. Dimensiones del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

La primera dimensión, matemática, refiere a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda refiere a los conocimientos sobre los diversos aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula, y aspectos ecológicos). La dimensión meta didáctico-matemática es la que refiere a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su propia práctica y así poder emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2018).

3.3. Introducción a la articulación de conocimiento y competencia

El modelo CDM se ha presentado en varios trabajos como una herramienta teórico-metodológica que permite caracterizar, y posteriormente desarrollar, competencias claves para la práctica del profesor de matemáticas (Breda, Silva y Carvalho, 2016; Font, 2015; Font, Breda y Sala, 2015; Giménez, Font y Vanegas, 2013). En estos trabajos se ha puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo específico de conocimientos del profesor que permita evaluar y desarrollar sus competencias. Por tanto, es natural pensar en la ampliación del modelo de conocimientos del profesor, a un modelo sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesorado. Para eso, será necesario clarificar ambas nociones en términos ontosemióticos.

Godino (2002b) propone una interpretación ontosemiótica para mostrar la estrecha relación entre competencia-comprensión matemática, entre la práctica y la teoría. Este binomio está íntegramente relacionado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático, particularmente con los aspectos operatorios y discursivos del mismo. De esta manera, en el marco del EOS las nociones de *conocimiento* y *competencia* se relacionan, teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

A continuación, articulamos la noción de competencia con la de conocimiento didáctico-matemático y proponemos un desglose operativo de la competencia general de análisis e intervención didáctica utilizando las herramientas teóricas escritas en la sección 2.

4. MODELO DE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DEL PROFESOR

El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM), descrito recientemente por Godino, Giacomone et al. (2017), surge de la ampliación del modelo CDM. Se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica*, cuyo núcleo fundamental (Breda et al., 2017, p. 1897) consiste en: "diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora".

Para poder desarrollar esta *competencia global de análisis e intervención didáctica* el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra parte, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y tomar decisiones justificadas para mejorar futuras implementaciones. Así, desde el EOS, para hacer operativa esta noción de competencia, se identifican cinco sub-competencias (o *competencias específicas*) asociadas a las cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS (detalladas en la sección 2), cuya descripción sintética se puede encontrar en Godino (2017):

- competencia de análisis de significados globales (basada en la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución);
- competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas (identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas);
- competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didáctica (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos);
- competencia de análisis normativo (reconocimiento de la trama de normas y meta-normas que condicionan y soportan el proceso instruccional);
- competencia de análisis de la idoneidad didáctica (valoración del proceso instruccional e identificación de potenciales mejoras).

4.1. Competencias didácticas específicas

Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Además, en las prácticas didácticas puestas en juego en la resolución de problemas didácticos, intervienen también objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos), que deben ser conocidos por el profesor.

Para desarrollar estas competencias y conocimientos, en el EOS se aportan herramientas teóricas y metodológicas (descritas en la sección 2) dando lugar a una competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas; dicha competencia general se compone de cinco sub-competencias, que se describen a continuación.

4.1.1. Competencia de análisis significados globales

Esta competencia se requiere cuando el profesor trata de dar respuesta a las cuestiones:

- ¿Cuáles son los significados de los objetos matemáticos implicados en el estudio del contenido pretendido?
- ¿Cómo se articulan entre sí?

En la fase preliminar del proceso de diseño instruccional, los significados son entendidos, de manera pragmática, como *sistemas de prácticas* cuyo objetivo es construir un modelo de referencia que delimite los tipos de problemas abordados y las prácticas operativas y discursivas requeridas para su resolución.

Supongamos que se estudian las fracciones. El profesor debe poder caracterizar tanto las prácticas institucionales (diferentes significados institucionales de las fracciones; por ejemplo, como razón, proporción, parte-todo etc.), teniendo en cuenta los diversos contextos de usos donde tales problemas se presentan, como también las prácticas personales esperadas del alumno (significados personales que puedan adquirir los alumnos sobre las fracciones).

El conocimiento de la noción “sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, y sus diversos tipos” (Godino et al., 2007, p. 129) se corresponde con una *competencia de análisis de significados globales*. El foco de atención, ahora, es la identificación de las situaciones-problemas que aportan los significados parciales o sentidos para los objetos, o temas matemáticos bajo estudio, y las prácticas operativas y discursivas que se deben poner en juego en su resolución. En el ejemplo dado, la búsqueda de situaciones que dé sentido a los diferentes significados de las fracciones.

4.1.2. Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas

En la resolución de problemas o tareas matemáticas interviene y emerge una trama de objetos que hacen posible la realización de las prácticas correspondientes. Dichos objetos deben ser reconocidos, de manera explícita, por el alumno para progresar en la construcción del conocimiento. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Se trata, por tanto, de responder a las cuestiones:

- ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas).
- ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los problemas? (configuraciones cognitivas).

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de diseño didáctico. Se trata de la *competencia de análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas implicadas en la solución de las tareas instruccionales.

4.1.3. Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la noción de configuración didáctica (Godino, Contreras et al., 2006), introducida como una herramienta para el análisis de las interacciones, personales y materiales, en los procesos de estudio matemático. Es decir, debe conocer los diversos tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar y sus efectos sobre el aprendizaje de los estudiantes. Además, ha de tener competencia para su uso pertinente en la implementación de los diseños instruccionales, la cual se puede describir como *competencia de gestión de* *configuraciones didácticas.* Debe poder responder al problema docente de cómo enseñar un contenido específico, que en el marco del EOS se concreta del siguiente modo:

- ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje?
- ¿Cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?

4.1.4. Competencia de análisis normativo

Las distintas fases del proceso de diseño didáctico están apoyadas y son dependientes de una trama compleja de normas, de distinto origen y naturaleza (Godino et al., 2009) y meta-normas (D'Amore et al., 2007), cuyo reconocimiento explícito es necesario para poder comprender el desarrollo de los procesos de estudio matemático y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad. Por ejemplo, al estudiar las fracciones aparecen normas sobre su escritura o su forma de representación gráfica. También, hay normas no matemáticas, como el tiempo dedicado al tema de las fracciones, libro que tiene el alumno o fechas en que se realiza la evaluación.

El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la dimensión normativa y usarla de manera competente, siendo necesario, por tanto, diseñar acciones formativas para un uso instrumental de la misma. Se trata, ahora, de desarrollar la *competencia de análisis normativo* de los procesos de estudio matemático para responder a las cuestiones:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

4.1.5. Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica

Las cuestiones profesionales, mencionadas anteriormente, implican una mirada a nivel microscópico de la práctica docente, esto es, realizar análisis pormenorizados de actividades de resolución de problemas o de actividades de enseñanza y aprendizaje puntuales. En el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica, que orienta el análisis a nivel macroscópico de los procesos de estudio matemático. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado, por ejemplo, el estudio de las ecuaciones de segundo grado en educación secundaria, la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013a) lleva a plantear las cuestiones,

- ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje implementado sobre las ecuaciones de segundo grado?
- ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto lleva a plantear una cuestión previa:

- ¿Cuáles son los conocimientos didáctico-matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

La noción de idoneidad didáctica se ha introducido como una herramienta de apoyo para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemáticos.

4.1.6. Competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos

Las competencias descritas anteriormente se pueden considerar como sub-competencias de una más amplia que es la de análisis e intervención didáctica.

La articulación de las competencias y conocimientos didácticos se puede hacer, de manera natural, en el marco del EOS. En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo-declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio-procedimental, indicando la posesión de una capacidad o competencia. Ambos tipos de prácticas están imbricados, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos, los cuales se pueden referir a la descripción de los instrumentos usados o a resultados previamente obtenidos que deben ser activados. A su vez, la comprensión de los conocimientos declarativos requiere que el sujeto esté enfrentado a las situaciones que proporcionan la razón de ser de tales conocimientos e *implicado* (*disposición* para la acción) en su resolución eficiente (Figura 2.6).

Figura 2.6. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 295)

La competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente (Weinert, 2001), considerándola como el conjunto de conocimientos, habilidades, disposiciones, etc. que permite el desempeño eficaz, en los contextos propios de la profesión.

4.2. Herramientas ontosemióticas, conocimientos y competencias

En un primer lugar, hemos identificado los cinco grupos de herramientas que componen el EOS (sistema de prácticas; configuración ontosemiótica; configuración didáctica; dimensión normativa; idoneidad didáctica). En segundo lugar, hemos descrito el modelo CDM del profesor, el cual está ligado a dichas herramientas. En tercer lugar, hemos ampliado el modelo de conocimientos del profesor, pero esta vez ligado al conocimiento y uso competente de las mencionadas herramientas teórico-metodológicas. Estas tres consideraciones dieron como resultado la articulación coherente del modelo teórico CCDM, en el cual se tienen en cuenta 5 *sub-competencias* de la *competencia general de análisis e intervención didáctica*, de las cuales se pretende que el profesor conozca y domine con el objetivo de desarrollar su práctica de manera idónea. La Figura 2.7. representa el desglose de estas nociones teóricas, dejando a la luz, el modelo CCDM completo.

Esta manera de entender el CCDM conlleva que, en los trabajos de investigación enmarcados por el EOS, tenga sentido formularse preguntas tales como, ¿qué debería conocer un profesor para que su enseñanza en un tópico específico tenga alta idoneidad didáctica? o bien, relacionadas con competencias tales como, ¿qué competencias debería desarrollar un profesor para que su enseñanza de un determinado contenido matemático tenga la mayor idoneidad didáctica posible? A continuación, destacamos los avances que se han hecho en el campo de la formación de profesores considerando esta caracterización del conocimiento y las competencias matemáticas, para luego focalizar la atención en nuestro problema de investigación.

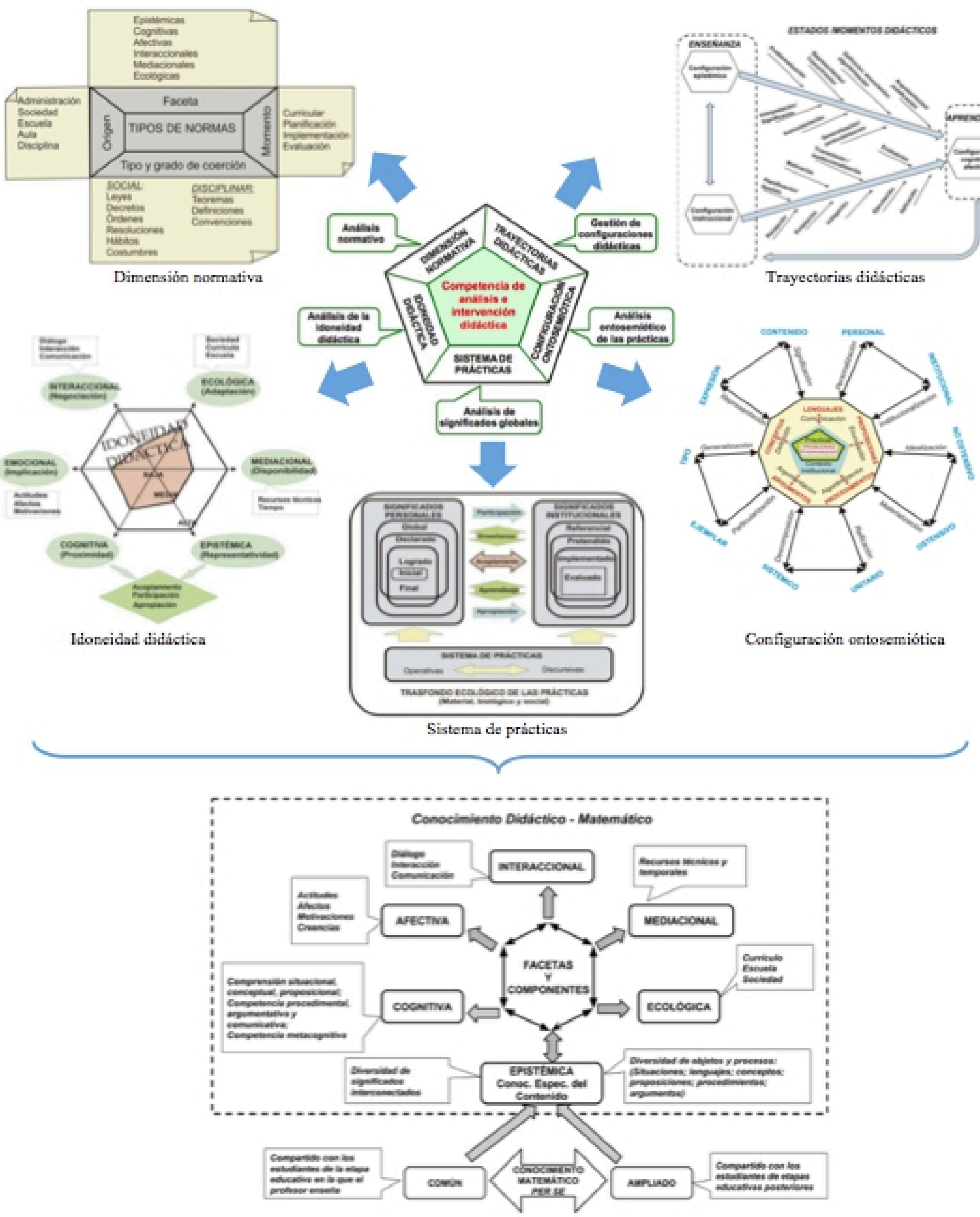


Figura 2.7. Articulación entre conocimientos y competencias desde una perspectiva ontosemiótica (Godino y Giacomone, 2016a, p. 1)

4.3. Síntesis de las investigaciones en el marco del CCDM

Dada la importancia de promover en los profesores en formación inicial su competencia de análisis e intervención didáctica, son numerosos los aportes de investigadores a nivel internacional que han sido producto de la aplicación de las herramientas del Enfoque ontosemiótico. En estos aportes no se habla del modelo CCDM como tal, dado que, como se ha detallado previamente, es una síntesis, actual y en continuo desarrollo, que se hace desde el EOS para articular de manera coherente las nociones de conocimiento y competencia del profesor. Sin embargo, tales investigaciones han puesto de manifiesto la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias; asimismo, se asume que el profesor debe conocer y usar de manera competente herramientas específicas que ayuden a realizar tres tareas básicas del trabajo docente: descripción, explicación y valoración de la práctica de enseñanza y de aprendizaje. Por un lado, se trata de desarrollar y aplicar herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para comprender ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Por otro lado, puesto que se considera que la didáctica de la matemática no debería limitarse a la mera descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio, se propone desarrollar y aplicar criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora progresiva (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Pochulu y Font; 2011; Rubio, 2012).

A continuación se sintetiza la producción científica que se ha realizado en el marco del EOS en torno al desarrollo de la competencia de análisis didáctico. Entre los aportes, se destaca principalmente el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de tareas escolares y la competencia de análisis de la idoneidad didáctica; ambas orientan el problema de investigación de esta tesis.

4.3.1. Análisis ontosemiótico de tareas escolares

La competencia de análisis ontosemiótico es generalmente llamada, en la literatura del EOS, competencia para el reconocimiento de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas, o bien, competencia de análisis epistémico-cognitivo. Diversos autores han implicado la herramienta configuración ontosemiótica en la formación de profesores de matemáticas, destacando sus potencialidades y retos, utilizando diversas estrategias con problemas matemáticos de distintas áreas (Burgos, Godino, Giacomone y Beltrán-Pellicer, 2018; Castro, Godino y Rivas, 2011; Etchegaray, Corrales, Fernández, Nahuin y Vázquez, 2017; Etchegaray, Buffarini, Olivares y Sosa, 2017; Font, 2015; Giacomone, 2017; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2016a; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012; Nogueira, 2015; Rivas, Godino y Castro, 2012; otros).

En sus trabajos, se considera que el reconocimiento y gestión de los conocimientos en la realización de las tareas "requiere que el futuro profesor, tras la realización de las actividades, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución de la tarea, y analice los significados que se les atribuye en el contexto especifico" (Godino, 2013b, p. 8). De esta manera, las actividades de formación que se proponen se pueden entender como una estrategia para que los profesores de matemáticas discriminen la diversidad de objetos y significados que intervienen en la actividad matemática y reflexionen sobre las relaciones dialécticas entre los mismos.

Aké, Godino, Fernández y Gonzato (2014) analizan una experiencia formativa de maestros de educación primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Los resultados sugieren que el reconocimiento de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización es una competencia difícil de lograr con los medios asignados en el proceso formativo. No obstante, señalan cómo el desarrollo de esta competencia favorece el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de tareas algebraicas.

Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino (2017) utilizan una tarea de proporcionalidad en la formación inicial de profesores de secundaria a partir de la cual, se les pide a los participantes resolverla utilizando diversos métodos y realizar el análisis epistémico para cada uno de los tipos de solución planteados. Los autores expresan que, para lograr la competencia de análisis epistémico en los futuros profesores, una solo acción formativa no es suficiente. Como afirman Wilhelmi, Godino y Lasa (2014, p. 581):

> El desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados.

En las investigaciones llevadas a cabo, identificamos dos puntos en común: por un lado, los autores coinciden en que los futuros profesores, no tienen problemas —en general— con la identificación de conceptos y procedimientos; sin embargo, presentan dificultades para reconocer qué es una proposición, para identificarlas en problemas matemáticos básicos y para distinguir proposiciones de argumentos o proposiciones de procedimientos. Rubio (2012) en su tesis doctoral, propone una serie de ejemplos claros que dan cuenta de estas dificultades, más aún cuando se les propone una tarea relativamente simple y muy pautada:

> [los futuros profesores] no siempre tienen suficientemente en cuenta que una proposición es un enunciado que puede ser verdadero o falso. Y que las más relevantes en el episodio son las que necesitan argumentarse para determinar si son falsas o verdaderas. (Rubio, p. 389)

Por otro lado, a raíz de la complejidad que detectan en el logro de dicha competencia, los autores reconocen que es un reto en la formación inicial de profesores y sugieren, como problemática a la comunidad investigativa, la necesidad de implementar más ciclos formativos que contemplen el diseño de tareas para desarrollar la mencionada competencia de análisis ontosemiótico, siendo ésta una línea de investigación vigente.

4.3.2. Análisis de la idoneidad didáctica

En los últimos años, en el campo de la formación inicial, se ha producido un crecimiento notable en el número de investigaciones realizadas, en diferentes países, utilizando el constructo idoneidad didáctica —junto con su desglose en componentes e indicadores— considerada como una potente herramienta para organizar la reflexión del profesor y para desarrollar su competencia de valoración de la idoneidad didáctica (Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea, 2012; Breda, 2016; Breda y Lima, 2016; Breda et al., 2016; Breda et al., 2017; Giménez, Vanegas, Font y Ferreres, 2012; Konic y Reynoso, 2017; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Ramos y Font, 2008; Seckel, 2016; Valls y Muñoz, 2015).

Las estrategias utilizadas para afrontar el conocimiento y el desarrollo de la idoneidad didáctica son diversas. Se proponen procesos de reflexión inicial, sin herramientas específicas; luego se presenta la herramienta idoneidad didáctica y se utiliza el sistema de componentes e indicadores como guía para la reflexión sistemática. Beltrán-Pellicer y Giacomone (2018) consideran que el artículo *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, 2013a) es un material teórico idóneo que se adapta a las necesidades prácticas de los futuros profesores. Algunas propuestas también pueden verse en Godino y Batanero (2011), Godino y Neto (2013).

En cuanto a resultados, los autores coinciden en que,

> aunque no se incorpore explícitamente en el dispositivo formativo de los profesores, la enseñanza de los componentes y descriptores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular los componentes, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas. (Font, Breda y Seckel, 2017, p. 12)

En el trabajo doctoral de Breda (2016) se presentan claros ejemplos de este tipo, en el análisis didáctico realizado por estudiantes que cursan el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* cuándo tienen que justificar que sus propuestas didácticas son innovadoras.

No obstante, en los primeros pasos hacia la reflexión, en los cuales los futuros profesores no cuentan con la guía específica propuesta en Godino (2013a) (u otra), las reflexiones que realizan, suelen ser poco profundas, particularmente en lo que respecta a la valoración de la faceta epistémica (Beltrán-Pellicer y Giacomone, 2018); esto es de esperar dado que la reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio es imprescindible para introducir progresivamente propuestas de cambio fundamentadas (Breda et al., 2017; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Posadas y Godino, 2017).

Si bien el logro de esta competencia no es fácil, dado que se requiere de disponer de más tiempo académico para su aplicación, en general, los estudiantes adquieren un nivel de competencia adecuado y consideran positivo el uso de la idoneidad didáctica para la reflexión profesional. En el trabajo presentado por Aroza et al. (2017), un futuro profesor destaca:

> Focalizar la atención en la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza, ha llevado a tomar conciencia de la necesidad de recopilar, analizar y sistematizar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles, al menos una parte sustantiva de los mismos. (p. 26)

Esta última reflexión nos lleva a la problemática de cómo diseñar dispositivos de formación inicial o continua de profesores para poder formarlos en la reflexión sobre un proceso de estudio y a su aplicación posible y efectiva, en centros educativos, talleres y congresos. Estas líneas de investigación se destacan también en la síntesis que realizan Breda, Font y Lima (2015) y Breda y Lima (2016) respecto a la investigación que se están implementando actualmente en la formación de profesores en diversas universidades, españolas y latinoamericanas.

Otra línea de investigación vigente, derivada de estos trabajos, es la utilización de la idoneidad didáctica en la instancia de práctica profesional. Como señalan Font et al. (2017, p. 12), "uno de los espacios de formación investigados en esta amplia investigación es el Trabajo de Fin de Máster (TFM)". Se parte de la experiencia educativa real que los estudiantes del máster de secundaria adquieren en la fase de prácticas docentes llevadas a cabo en diferentes institutos. En esta fase de su formación estos futuros profesores tienen la oportunidad de enseñar un tema (el cual depende del momento académico y nivel educativo en el que participan), bajo la dirección de un tutor y siguiendo la planificación usual de las clases, basadas con frecuencia en el seguimiento de un libro de texto. Esta experiencia se refleja en la correspondiente memoria de prácticas. La aplicación de los criterios de idoneidad didáctica permite proponer un esquema de trabajo de fin máster orientado hacia la reflexión sobre la experiencia vivida y la indagación sistemática de posibles cambios fundamentados que se podrían introducir en el diseño, implementación y evaluación de la experiencia. Ejemplos de estos TFM son los trabajos de Aroza (2016), Beltrán-Pellicer (2016), Noguera (2015), Posadas (2013), Solera (2015), otros.

En conclusión, en los citados trabajos se argumenta que este tipo de acciones formativas, que fomentan el desarrollo de la competencia de reflexión para potenciar el desarrollo profesional, deberían incluirse en los programas de formación y en la jornada laboral de los docentes (Kilic, 2016; Llinares y Valls, 2010; Mellone, 2011), "tal como lo hacen países como Japón, debido al impacto que tienen en la enseñanza" (Beltrán-Pellicer y Giacomone, 2018, p. 129).

5. PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN

Como se ve reflejado en el apartado anterior, en investigaciones previas se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que los profesores de matemáticas deben desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a planificar, describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La mencionada competencia de análisis didáctico se puede descomponer en otras sub-competencias, las cuales se pueden identificar ligadas al uso de herramientas específicas que hacen posible el abordaje de los problemas didácticos. Resulta pertinente abordar diseños específicos que permitan centrarse y profundizar en cada sub-competencia.

El foco de atención de este trabajo de investigación es poner en funcionamiento el modelo CCDM de los profesores. Partimos de la base de que las características de este modelo proporcionarán pautas que permitan el diseño de acciones formativas a través de las cuales se potencie el desarrollo de conocimientos y competencias específicas para el análisis y la intervención didáctica en los profesores en formación inicial. De esta manera, planteamos las siguientes preguntas de investigación, y, en consecuencia, los objetivos que se indican.

5.1. Preguntas de investigación

Nuestro problema de investigación se sitúa en la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria bajo la perspectiva de contemplar en la formación profesional el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas desde una mirada ontosemiótica.

No se trata de que los futuros profesores incorporen técnicas o procedimientos de manera acrítica y rutinaria, con toda la complejidad teórica que implica el EOS, sino de iniciarlos en el desarrollo del conocimiento y uso competente de algunas herramientas útiles para el análisis e implementación de intervenciones didácticas. Esto les permitirá tomar consciencia de la red compleja de conocimientos que está involucrada necesariamente en las tareas y prácticas matemáticas así como en los procesos de aprendizaje. No obstante, dada la amplitud del modelo CCDM y en relación a la literatura disponible, hemos acortado el horizonte de investigación centrando nuestras preguntas de investigación (PI) en dos aspectos fundamentales:

PI-1. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?

PI-2. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para la reflexión sistemática sobre la práctica docente?

5.1. Objetivos de la investigación

La forma de concebir los conocimientos y competencias que debe adquirir un profesor de matemáticas en formación junto con las preguntas de investigación planteadas anteriormente, nos orienta en la formulación de los siguientes objetivos de investigación.

5.1.2. Objetivos generales

Teniendo en cuanta las dos preguntas de investigación formulamos los siguientes objetivos generales:

OG-1. Realizar una investigación de diseño con profesores de matemáticas de educación secundaria en formación inicial orientado a promover el desarrollo de su competencia para el análisis ontosemiótico. (Relacionado con PI-1).

OG-2. Realizar una investigación de diseño con profesores de matemáticas de educación secundaria en formación inicial orientado a promover el desarrollo de su conocimiento y la competencia para la reflexión sistemática sobre la práctica docente. (Relacionado con PI-2).

5.1.3. Objetivos específicos

El logro del objetivo general 1 requiere elaborar un dispositivo didáctico que permita a los futuros profesores conocer la herramienta configuración ontosemiótica y apropiarse de ella. Para ello nos planteamos los siguientes objetivos específicos (OE-1).

OE-1.1. Diseñar e implementar una experiencia formativa con un grupo de futuros profesores para promover el desarrollo de su competencia de análisis ontosemiótico de tareas matemáticas escolares.

OE-1.2. Valorar la idoneidad didáctica de las acciones formativas implementadas e identificar mejoras potenciales.

Respecto al objetivo general 2, planteamos los siguientes objetivos específicos (OE-2).

OE-2.1. Indagar los significados personales previos de los futuros profesores sobre los factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

OE-2.2. Diseñar e implementar una experiencia formativa para promover el desarrollo de su competencia de análisis de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

OE-2.3. Valorar la idoneidad didáctica de las acciones formativas implementadas.

5.2. Hipótesis básicas

Indicamos a continuación algunas hipótesis básicas, entendidas como expectativas de respuestas a los objetivos de investigación planteados, que esperamos obtener con la realización de esta tesis.

Hipótesis general. El desarrollo de las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos se puede favorecer mediante situaciones de resolución de tareas matemáticas, seguidas del análisis y reflexión de su resolución.

Hipótesis específica 1 (análisis ontosemiótico). Se espera encontrar conflictos en los significados de las nociones de concepto, proposición, procedimiento y justificación por parte de los futuros profesores de matemáticas.

Hipótesis específica 2 (análisis ontosemiótico). Se espera mostrar que las relaciones entre los objetos matemáticos y sus representaciones ostensivas son conflictivas para los futuros profesores.

Hipótesis específica 3 (análisis ontosemiótico). Es posible superar los conflictos identificados mediante la implementación de acciones formativas basadas en la reflexión epistémica y cognitiva de tareas específicas.

Hipótesis específica 4 (idoneidad didáctica). Se espera que los futuros profesores realicen análisis superficiales al reflexionar sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza.

Hipótesis específica 5 (idoneidad didáctica). Se espera que los futuros profesores conozcan, comprendan y apliquen de manera pertinente los criterios de idoneidad didáctica para valorar experiencias de enseñanza y aprendizaje matemático.

6. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA METODOLOGÍA

El trabajo de investigación se enmarca en un enfoque cualitativo (McMillan y Schumacher, 2001) que recolecta y analiza datos a lo largo de un ciclo formativo conformado de dos estudios, de tipo descriptivos y exploratorios, que responden a los objetivos planteados anteriormente.

Se aplica el método de las investigaciones de diseño (Kelly et al., 2008) el cual implica la introducción de innovaciones en prácticas en un contexto reales —en oposición a contextos experimentales o de laboratorio— y el análisis del impacto de esos diseños en el proceso de aprendizaje. Las aplicaciones de dispositivos diseñados (tareas de instrucción, materiales didácticos específicos) y los hallazgos de la investigación se reinician en la próxima iteración de la innovación de diseño para construir evidencia de las teorías particulares que se aplican o investigan, y para impactar positivamente la práctica y la difusión de la innovación. Dado nuestros objetivos de investigación, utilizamos como teoría de base el EOS, adoptando así, una versión flexible, de este tipo de metodología (Godino, Rivas et al., 2014).

El ciclo formativo se compone de dos estudios principales (Figura 2.8.), en un contexto real de clase, cada uno de ellos basados en las cuatro fases siguientes y fundamentadas por las herramientas del EOS:

- *Estudio preliminar.* Se consideran los aportes de las investigaciones descritas en los antecedentes en base al desarrollo de conocimientos y competencias. Se analiza también el contenido matemático que se pretende involucrar en el diseño de tareas para caracterizar los distintos significados.

- *Diseño de tareas.* Para el diseño de las tareas se tienen en cuenta: factores epistémicos y ecológicos —se precisa la secuencia de situaciones didácticas a implementar junto con su análisis *a priori* y la adaptación de la secuencia al contenido establecido en el programa curricular; factores cognitivos y afectivos —se identifican las características de los participantes, sus conocimientos previos así como sus dificultades de aprendizaje previstas; factores instruccionales —se define la temporalización para abordar la secuencia de actividades, los recursos a utilizar y los roles de los participantes dentro del aula. Es importante considerar que el diseño puede tener variaciones de acuerdo a como se va desarrollando la implementación.

- *Implementación*. En esta fase se tienen en cuenta los mismos factores mencionados anteriormente, describiendo en detalle el transcurso de la implementación efectiva de las acciones educativas. La descripción de la trayectoria didáctica ayuda a identificar conflictos y avances en la progresión temporal para el logro de las competencias pretendidas.
- *Análisis retrospectivo*. En esta última fase se realiza una valoración de cada estudio teniendo en cuenta las distintas dimensiones que se involucran en el proceso de enseñanza (epistémica, ecológica, cognitiva, afectica, instruccional), identificando fortalezas, limitaciones y posibles mejoras para una futura implementación.

A partir del diseño e implementación de tareas, se trata principalmente de vincular la investigación y la práctica al examinar cómo se aplica la teoría en un entorno formativo, cómo se debe adaptar teniendo en cuenta los resultados prácticos que se van obteniendo en cada implementación y cómo se desarrollan los aprendizajes pretendidos (Based Research Collective, 2003; Barquero y Bosch, 2015; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Propio de este método de investigación, es importante tener en cuenta que, durante la experiencia, el equipo investigador está comprometido en realizar un proceso de reflexión iterativa que le “permita re-adaptar el diseño inicial, en caso que fuese necesario” (Cobb, Jackson y Dunlap, 2016, p. 482); se trata de micro-ciclos de reflexión sobre los recursos que se van implementando, estrategias e interacciones didácticas, con el objetivo de introducir mejoras en cada sesión de clase.

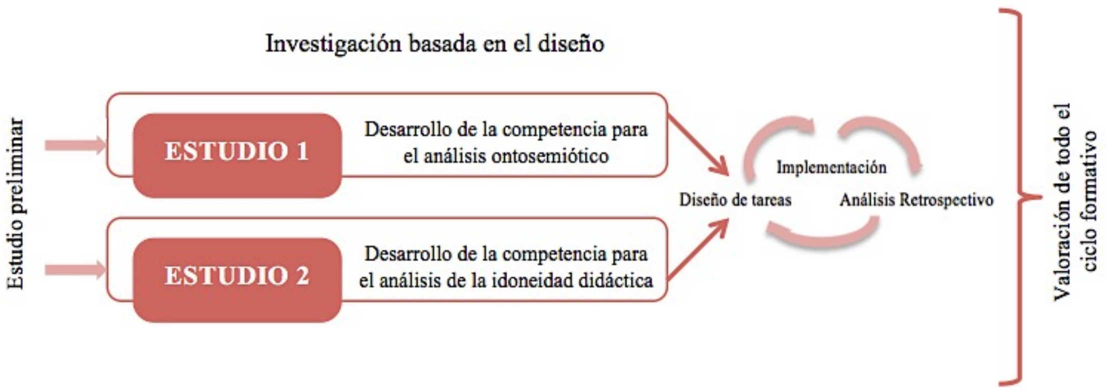


Figura 2.8. Estudios que conforman el ciclo formativo

El ciclo formativo se desarrolla en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (año lectivo 2015-2016) en España, dentro de la asignatura Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas. Dicha asignatura se cursa durante el último mes del máster, previo a que los estudiantes realicen su práctica de enseñanza profesional.

La materia está compuesta de 10 sesiones de clases de 2,5 horas presenciales cada una (de carácter teórico-práctico y exposiciones por parte de los estudiantes[1]), además de horas consideradas para las actividades no presenciales, tanto de trabajo grupal, individual y tutorías individuales. La primera sesión es introductoria, atendiendo a los aspectos específicos del desarrollo de la materia, características de los participantes, actitudes hacia la innovación e identificación de sus conocimientos previos en el área de la didáctica de la matemática como disciplina científica; en las tres sesiones siguientes se desarrolla el estudio 1; en las tres sesiones que prosiguen, se desarrolla el estudio 2.

En las tres sesiones restantes se realizan actividades del máster específicas orientadas a las prácticas profesionales, necesarias para graduarse. En este último tramo, se desarrolla un tercer estudio de casos en torno a las prácticas profesionales; es decir, algunos futuros profesores aplicaron la herramienta de la idoneidad didáctica para reflexionar sobre sus experiencias como profesores en la fase de prácticas de enseñanza en los institutos. No obstante, dado que la muestra es pequeña, el análisis de dichos casos no forma parte de esta investigación.

Los estudiantes participantes son 52 futuros profesores de matemática divididos en dos grupos (grupo A: 27; grupo B: 25), sin experiencia en docencia y con un perfil académico variado: 28 son licenciados en matemática (53,85%), 17 son ingenieros en caminos o arquitectos (32,69%), 4 son físicos (7,69%) y los 3 estudiantes restantes provienen de otras carreras (5,77%); se los considera, por tanto, sujetos con una formación matemática consolidada. En el primer estudio participaron todos los estudiantes en formación; en el segundo estudio, participó solo el grupo A por motivos administrativos.

[1] En ocasiones, referiremos a los futuros profesores como estudiantes.

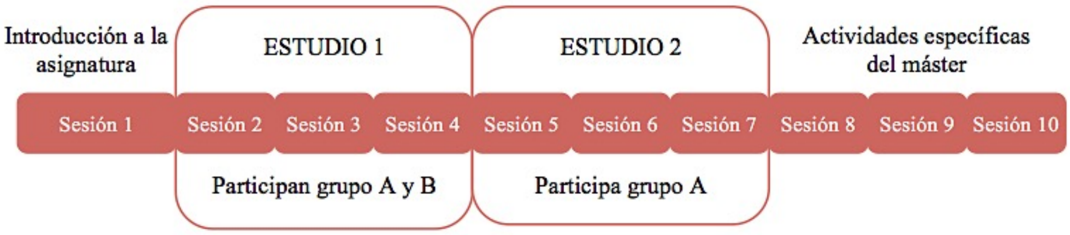


Figura 2.9. Distribución de las sesiones que conforman el ciclo de diseño

Propio de las investigaciones de diseño, los investigadores son intervencionistas-observadores (Design-Based Research Collective, 2003), en nuestro caso los participantes involucrados son: el profesor del curso (director de la tesis) que a la vez es investigador-observador y la doctoranda quién tiene un rol de investigador-observador con participación activa. Por otro lado, distintos investigadores han participado activamente para colaborar en la construcción y validación del dispositivo formativo.

Destacamos que, como cierre general de la asignatura, el programa propone la entrega de un portafolio que recupere los trabajos obligatorios completos, y si corresponde los optativos, realizados durante el periodo de clases. En nuestros caso hemos utilizado el portafolio, como un instrumento de recogida de datos, el cual resulta útil para evidenciar aspectos claves sobre el proceso de aprendizaje de los futuros profesores. De acuerdo con diversos autores, consideramos que, en el proceso de organizar la entrega de tareas completas, el portafolio ayuda a "motivar al alumnado a reflexionar sobre su propio aprendizaje participando en el proceso de evaluación" (Barragán, 2005, p. 127). Seckel y Font (2016) lo traducen como una oportunidad para estimular la reflexión.

En los capítulos 3 y 4 se profundiza en los aspectos metodológicos de cada estudio realizado, considerando los contextos específicos y participantes, los instrumentos de recogida de información, los recursos utilizados, las respectivas fases de implementación y las técnicas de análisis de datos.

7. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se ha puesto en relevancia el problema de qué conocimientos y competencias debería desarrollar un profesor de matemáticas en su formación inicial para que su enseñanza sea de calidad. Para abordar este problema, nos posicionamos bajo la perspectiva del Enfoque ontosemiótico la cual permite articular de manera práctica la relación entre conocimientos y competencias del profesor de matemáticas teniendo en cuenta un conjunto de herramientas teóricas.

Bajo este punto de vista, se asume que los profesores de matemáticas deben desarrollar la competencia especifica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a planificar, describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Para la adquisición de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas descritos en los apartados anteriores es necesario diseñar, implementar y valorar procesos formativos que permitan contribuir al aprendizaje de los futuros profesores, a su crecimiento profesional y al cambio en las nuevas prácticas de instrucción para la educación matemática. Con la intención de hacer operativos los mencionados aspectos teóricos, en este capítulo se han destacado los objetivos de la investigación que implican el desarrollo de dos estudios, como parte de un ciclo formativo.

El primero de ellos se centra en el inicio del desarrollo de la competencia de reconocimiento de objetos y procesos en la resolución de problemas (análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas): el profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de diseño didáctico. Así, en el marco del EOS, el uso de la herramienta configuración ontosemiótica implica el desarrollo de la sub-competencia de análisis ontosemiótico, mediante la cual el profesor está capacitado para describir y explicar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos. Este proceso analítico-reflexivo se puede interpretar como una actividad metacognitiva, ya que se realiza sobre los conocimientos puestos en juego en las prácticas matemáticas, o sea, se trata de una reflexión sobre la cognición, una meta-cognición (D'Amore et al., 2007).

El segundo estudio se centra en el inicio del desarrollo de la competencia de análisis y valoración de un proceso de instrucción. La noción de idoneidad didáctica se ha introducido como una herramienta de apoyo para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemáticos.

CAPÍTULO 3.

ESTUDIO 1: DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LAS PRÁCTICAS

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos la primera pregunta de investigación:

> *PI-1. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?*

Una enseñanza adecuada de las matemáticas requiere el conocimiento y la competencia de los profesores para identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de tareas escolares (Batanero, Contreras, Díaz y Sánchez, 2015; Giacomone, 2017; Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2016, Godino, 2013b; Nogueira, 2015; Sánchez-Matamoros, Fernández, C. y Llinares, 2015; Scheiner, 2016). Desde una perspectiva del EOS, se trata de un problema de diseño instruccional que consiste en indagar, diseñar, modificar, planificar, posibles intervenciones formativas que permitan al formador/investigador iniciar a los futuros profesores en el desarrollo de su competencia para el análisis ontosemiótico de las prácticas.

En este capítulo se describe el diseño, la implementación y análisis retrospectivo de un proceso formativo dirigido a futuros profesores de matemáticas, centrado en desarrollar esta llamada competencia de análisis ontosemiótico. En esta experiencia, los futuros profesores primero resuelven tareas matemáticas sobre visualización, representaciones y razonamiento diagramático; luego, analizan los objetos y significados puestos en juego en la resolución de cada tarea implementada. Además, las estrategias que los estudiantes producen en sus soluciones se discuten y comparten en un entorno real de clase.

El diseño tiene su justificación en un estudio preliminar que recoge los aportes de las investigaciones sobre el desarrollo de esta competencia ––—ya señalados en el capítulo 1 y 2—, aportes relacionados con la importancia de involucrar tareas sobre visualización y razonamiento diagramático en la formación de profesores, y resultados producto de la aplicación de talleres formativos *piloto* con diversos grupos de participantes.

En la sección siguiente se presentan las características generales del ciclo formativo. En la sección 3 se describen los antecedentes de este estudio, es decir, el análisis preliminar que permite justificar el contenido de las tareas diseñadas. En la sección 4 se presenta el diseño de las tareas que fueron efectivamente implementadas. En la sección 5 se amplía la descripción de la implementación y la discusión de los resultados parciales. Finalmente, en la sección 6 se valora el proceso formativo, es decir, se realiza un análisis retrospectivo del mismo indicando las fortalezas, debilidades y posibles mejoras para el re-diseño e implementaciones futuras. La síntesis del capítulo se presenta en la sección 7.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CICLO DE FORMATIVO

En este estudio focalizamos la atención en la faceta epistémica del modelo CCDM en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Hill et al. (2008) denominan *conocimiento especializado del contenido matemático* aunque, como ya ha sido discutido previamente, desde el EOS es posible distinguir un desglose analítico de sus elementos constituyentes.

2.1. Contexto y participantes

La experiencia formativa que compone este primer estudio se ha realizado en el marco de un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2015-2016, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Como se ha mencionado anteriormente, esta asignatura se cursa durante el último mes del máster, por lo tanto, se supone que los futuros profesores han adquirido ciertos conocimientos didácticos.

Para este estudio hemos utilizado 3 sesiones de clases de 2,5 horas presenciales cada una de carácter teórico-práctico y exposiciones por parte de los estudiantes. Por reglamento curricular, se estiman 10 horas empleadas para actividades no presenciales, tanto individuales como grupales y tutorías individuales a pedido del estudiante.

La asignatura fue divida en dos grupos: uno con 27 estudiantes para profesor y otro con 25; los participantes de este estudio fueron los 52 futuros profesores del máster que estaban inscritos. Propio de este tipo de máster universitario, el perfil académico de los participantes es variado, con formación consolidada en el área de la matemática (Gráfico 3.1.).

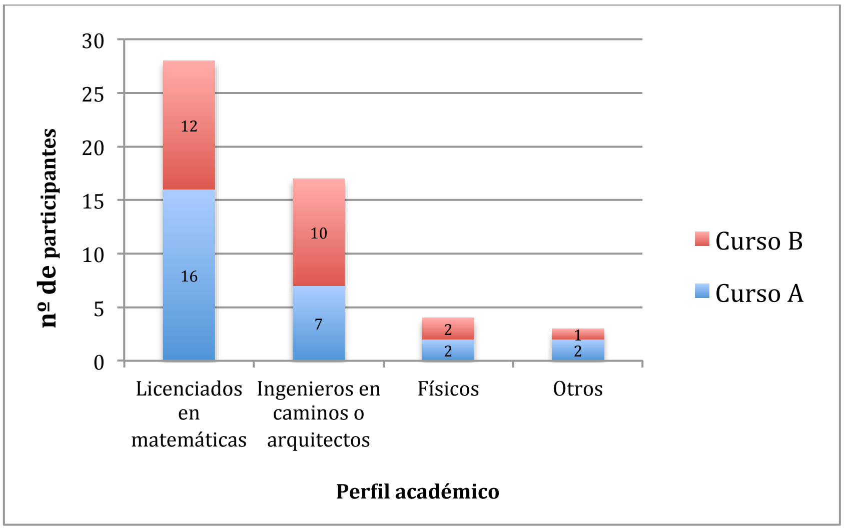


Gráfico 3.1. Perfil académico de los futuros profesores

La experiencia se aplica en un ambiente natural de clases, de acuerdo a los tiempos curriculares preestablecidos y obstáculos reales, con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly et al., 2008). En este sentido, se planifica una experiencia formativa, parte de un ciclo formativo más amplio, que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia.

El equipo de investigación está formado por el profesor del curso —formador de profesores y director de la tesis doctoral— y la doctoranda que desempeña el papel de observadora participante. El análisis e interpretación de los datos recogidos son realizados conjuntamente en el seno de ese equipo.

2.2. Recogida y análisis de los datos

Como instrumentos de recogida de información se dispone de los siguientes elementos:

- registro de las observaciones de los investigadores (profesor del curso y doctoranda) sobre las distintas instancias de trabajo en clase: trabajo grupal, individual, diálogos y puesta en común;
- grabación en audio de todas las sesiones del curso (favoreciendo la interpretación de las observaciones registradas y el desarrollo del curso en la etapa de análisis retrospectivo);
- respuestas escritas de las actividades grupales realizadas en clase;
- material final escrito, a modo de portafolio, entregado por los estudiantes de manera individual, con dos semanas de plazo.

El análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de *prácticas didácticas significativas* sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida. En cuanto a este último aspecto, se considera como indicador de competencia "una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad" (Font, 2011, p. 18).

Se utilizan la herramienta *configuración ontosemiótica* como una modelización del conocimiento matemático que permite describir y comprender los procesos de construcción del conocimiento basado en la resolución de problemas. Aplicada al caso del aprendizaje matemático escolar, permite analizar y comprender el proceso de resolución de las tareas seleccionadas (análisis epistémico a priori) y prever conflictos potenciales de aprendizaje. Asimismo, permite desvelar algunas posiciones ingenuas sobre el papel de las representaciones materiales (visualizaciones, diagramas, manipulativos) en el aprendizaje matemático al facilitar el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre los diversos tipos de representaciones y los objetos no ostensivos necesariamente involucrados.

En las fases de implementación y evaluación de aprendizajes, el análisis ontosemiótico de las respuestas dadas por los futuros profesores (análisis cognitivo a posteriori) proporciona información para gestionar los procesos de explicación e institucionalización y valorar los conocimientos logrados respecto de los conocimientos pretendidos.

Para el análisis retrospectivo del ciclo de diseño se utiliza la herramienta *idoneidad didáctica* la cual, a partir de sus componentes e indicadores, aporta criterios para valorar las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, instruccional y mediacional, que afectan el desarrollo de este estudio.

2.3. Fases y metodología de implementación

El objetivo del diseño es introducir progresivamente a los futuros profesores en el reconocimiento de prácticas, objetos y algunos procesos que se ponen en juego en la resolución de tareas matemáticas, propias de educación secundaria; por lo tanto, no se trata de promover y evaluar su conocimiento matemático *per se*, sino su conocimiento didáctico-matemático, dando principal importancia a la faceta epistémico-cognitiva.

Como se ilustra en la Figura 3.1., la acción formativa comprende el desarrollo de 4 fases: 3 fases, distribuidas en tres sesiones presenciales (de acuerdo al cronograma de la materia, corresponden a las sesiones 2, 3 y 4 como muestra la Figura 2.9.) y una cuarta fase de tipo no presencial. Se debe considerar que tanto las actividades de lectura, como el estudio autónomo no se desarrollan dentro de las sesiones presenciales.

Se espera que los futuros profesores desarrollen su conocimiento y competencia mediante el trabajo colaborativo y la participación en las prácticas que se proponen, ya sea durante las sesiones presenciales, de trabajo individual o grupal, como durante el horario no presencial.

Las técnicas docentes utilizadas combinan:

- lectura y discusión de documentos;
- presentaciones por parte del formador;
- participación en talleres de resolución de problemas;
- análisis didáctico;

– tutoría y supervisión de los estudiantes.

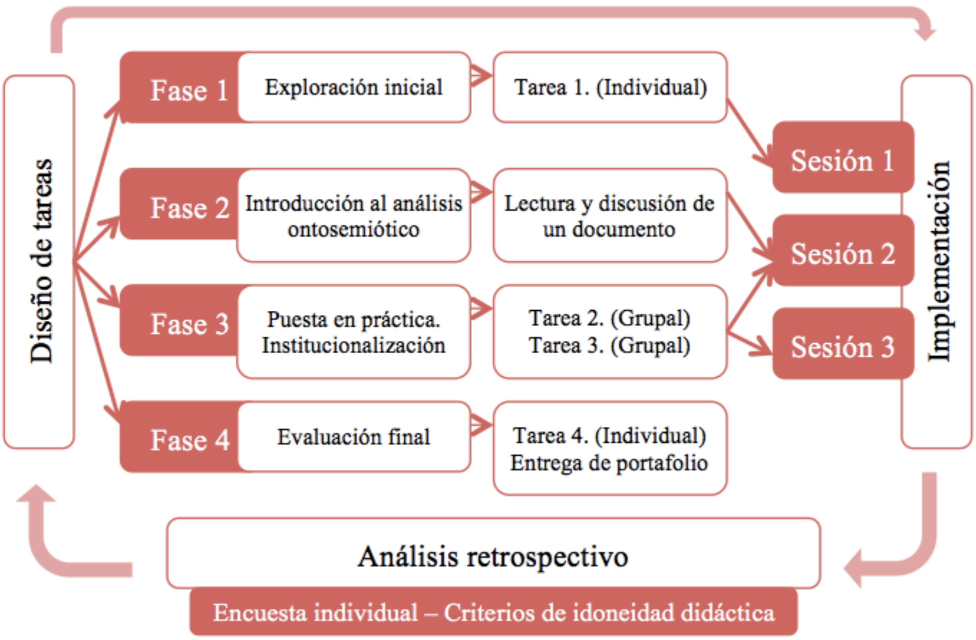


Figura 3.1. Estructura del primer estudio del ciclo formativo

Los problemas se seleccionaron de tal manera que pusieran en juego visualizaciones y razonamiento con diagramas con el fin de provocar la reflexión sobre la dialéctica entre los objetos ostensivos y no ostensivos implicados en las prácticas matemáticas.

2.3.1. Fase 1. *Exploración inicial de los significados personales*

La experiencia formativa comprende una primera fase de exploración inicial de los significados personales de los futuros profesores sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su capacidad para el reconocimiento de dichos objetos en las prácticas matemáticas, a partir del desarrollo de la Tarea 1 (ver Anexo 1). Se introduce también la importancia de considerar el uso o intencionalidad que tienen las prácticas matemáticas implicadas en la construcción de las soluciones. Esta tarea se utiliza además como punto de partida para discutir el papel que juegan algunos de los procesos matemáticos (particularización-generalización; idealización-materialización) en la emergencia de los objetos primarios implicados, tanto en el enunciado de la tarea de como en la construcción de su solución.

Se pretende que los estudiantes para profesor trabajen de manera individual con la primera tarea, la cual consiste en el análisis de un dibujo en perspectiva isométrica —modificado de Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012)—; seguidamente, se presentan y discuten con toda la clase sus respuestas.

2.3.2. Fase 2. *Introducción al análisis ontosemiótico*

La segunda fase comprende la lectura y discusión de un documento específico que permite organizar las distintas ideas que se pretende que surjan de la Tarea 1, titulado *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricados en la visualización espacial y el razonamiento diagramático* (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras, 2015a). Este documento es una adaptación realizada para este estudio.

El artículo propuesto es una introducción al análisis ontosemiótico utilizando como contexto la reflexión sobre el papel que desempeñan los diagramas, la visualización y materiales manipulativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se presenta y se aplica la herramienta *configuración ontosemiótica* (Figura 2.2) para analizar la diversidad de objetos y procesos implicados en la actividad matemática que se realiza con apoyo de representaciones diagramáticas. Esto permite apreciar las relaciones sinérgicas entre los objetos ostensivos (lenguajes visuales y secuenciales) y los objetos no ostensivos (entidades abstractas y mentales) imbricados en las prácticas matemáticas. El análisis de las características del razonamiento diagramático y su interpretación en términos ontosemióticos se contextualiza mediante el análisis de la resolución de un problema sobre fracciones aplicando tres procedimientos que involucran el uso de diagramas; además incluye ejemplos del tipo de análisis que se pretende realizar en las tareas siguientes.

Al final de la sesión 1, se entrega a los estudiantes para profesor el artículo. Se pretende que lean el documento en horario no presencial para luego poner en discusión, en el seno de la clase durante la primera parte de la sesión 2, la importancia de este tipo de análisis y clarificar las dudas que puedan surgir en el uso de esta herramienta para el análisis de las prácticas, objetos y procesos.

2.3.3. Fase 3. *Puesta en práctica y momentos de institucionalización*

Luego de la discusión del artículo, la segunda parte de la sesión 2 se inicia con la fase de puesta en práctica. En esta tercera fase se pone en práctica las nociones discutidas en la fase anterior; comprende el desarrollo de dos tareas (Tarea 1 y 2 del Anexo 1) a realizarse en grupos pequeños, guiadas por momentos de discusión e institucionalización.

Las consignas ontosemióticas generales para cada tarea implementada —tanto para las dos tareas de esta fase, como para la Tarea 4 de la fase siguiente— se incluyen a continuación, en la Figura 3.2:

Para cada tarea:

a) Resuelve la situación didáctica.

b) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

c) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

d) Identifica procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea (particularización-generalización, materialización-idealización, ...).

Figura 3.2. Guía para identificación de objetos y significados (consignas ontosemióticas)

La tabla presente en la Figura 3.2. ítem c permite reflejar la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo referencial –un objeto refiere a otro objeto (columna 3)—, como operacional —uso pragmático de los objetos (columna 1)—; en el centro las prácticas matemáticas.

La Tarea 2 presenta el procedimiento que ha llevado a cabo un supuesto alumno X para construir un cuadrado utilizando el software matemático interactivo *GeoGebra*. Los futuros profesores deben analizar dicho procedimiento y justificar si la respuesta que da el alumno X es correcta o no. Por lo tanto, se pretende un análisis epistémico de la tarea, pero también un análisis cognitivo de la respuesta que da el alumno X.

De la misma manera, la Tarea 3 (Anexo 1) requiere un análisis epistémico y cognitivo. Presenta un problema sobre fracciones que requiere una solución de tipo diagramática, y al mismo tiempo, junto con una solución a dicho problema aportada por un estudiante para maestro. Los futuros profesores deben analizar la solución propuesta y justificar si es correcta o no.

2.3.3.1. Técnica de análisis ontosemiótico

La técnica para el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas —mediante la cual se trata de desvelar la trama de objetos matemáticos que se ponen en juego en dichas prácticas— ha ido cambiando de acuerdo a los avances en las técnicas de análisis ontosemiótico aportadas por Godino y colaboradores. Así, en Godino (2002a) se realiza una primera aproximación a dicha técnica analizando una lección de un libro de texto sobre la mediana; la misma consiste en descomponer el texto que se quiere analizar en unidades de análisis, a partir de las cuales se describe en forma general las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre ambos por parte de los distintos sujetos. En Godino, Font et al. (2006) se realiza el análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta analizando, por separado, cada una de las entidades puestas en juego; por ejemplo, para los *conceptos* identifican todos los conceptos, previos y emergentes, en el problema y su posible solución. En Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se presenta un análisis más rico y detallado de las respuestas de un niño a una tarea relacionada con el aprendizaje de la decena; para el análisis se utiliza una tabla que destaca las reglas implícitas que conectan expresiones a los contenidos. En la sección siguiente mostramos, con el lenguaje diagramático de las tablas propuestas, una versión del análisis semiótico que consideramos más operativa y eficaz para mostrar la configuración de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de tareas. Se utiliza, como instrumento de análisis, la tabla proporcionada en la Figura 3.2. de tres columnas, en la que se identifica, por un lado, el sistema de prácticas, operativas y discursivas, involucradas tanto en el enunciado de la tarea como en su solución, descompuesta en unidades de análisis significativas; por otro lado, los objetos referidos en cada unidad de análisis, como así también, el uso e intención que tiene dicha práctica/unidad de análisis. Esta técnica se está poniendo en práctica en actuales trabajos —tal como señalan Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017, p. 104)— por ejemplo, como puede verse en Giacomone (2017) utilizando una tarea de modelización matemática, Giacomone, Díaz-Levicoy y Godino (2018), quienes realizan el análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en Educación Primaria para comprender potenciales conflictos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, entre otros.

2.3.4. Fase 4. *Evaluación final*

En esta fase se pretende que los estudiantes trabajen de manera individual, en horario no presencial incorporando de manera crítica los elementos teóricos estudiados. Si bien en cada instancia de la implementación se evalúa el progreso de la competencia ontosemiótica de los participantes, en esta fase se utiliza la Tarea 4 (ver Anexo) como instrumento de evaluación final. Dicha tarea involucra una demostración visual del teorema de Pitágoras.

Además, se propone a los futuros profesores 1 tarea adicional de carácter optativo con el objetivo de consolidar el logro de la competencia pretendida y brindar a los investigadores fuentes de datos relevantes.

Para concluir la asignatura, los estudiantes deben entregar un trabajo final, en formato portafolio, con el desarrollo de las cuatro tareas obligatorias, y solo aquellos que lo consideren, la tarea optativa. El objetivo es que los participantes entreguen respuestas más elaboradas que las desarrolladas en clase a partir de una fase de trabajo autónomo.

3. ANTECEDENTES: ESTUDIO PRELIMINAR

3.1. Visualización y representaciones diagramáticas en educación matemática

En muchas ocasiones, para favorecer el aprendizaje de las matemáticas se propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas, materiales manipulativos, etc., con la presunción de que tales materializaciones constituyen modelos de los conceptos matemáticos y de las estructuras en las cuales se organizan (Bakker y Hoffmann, 2005; Barrios y Martínez, 2014; Giaquinto, 2007; Novick, 2006; Rivera, 2011; Pantziara, Gagatsis y Elia, 2009). Se supone que el uso de representaciones materiales es necesario no solo para comunicar las ideas matemáticas sino también para su propia construcción (Arcavi, 2003; Dörfler, 2005; Duval, 2002; Giardino, 2013; Guzmán, 2002; Rivera, 2011; Zahner y Corter, 2010).

Sin embargo, las relaciones entre los objetos físicos, los diagramas y demás visualizaciones usadas en el práctica matemática y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, ...) son conflictivas (Iori, 2016). Duval (2006) concibe el objeto matemático como "el invariante de un conjunto de fenómenos o el invariante de alguna multiplicidad de posibles representaciones" (p. 129), e insiste en no confundir el objeto matemático con sus diversas representaciones. Esto le lleva a plantear la paradoja cognitiva del aprendizaje matemático:

> El problema crucial de la comprensión matemática para los estudiantes, en cualquier nivel del currículo, surge del conflicto cognitivo entre estos dos requerimientos opuestos: cómo pueden distinguir el objeto representado de la representación semiótica usada si no pueden tener acceso al objeto matemático sino por medio de las representaciones semióticas. (Duval, 2006, p. 107)

El problema que abordamos surge de la constatación de que algunos trabajos sobre el razonamiento diagramático, y en general sobre el uso de visualizaciones en educación matemática, no abordan de manera explícita la naturaleza y diversidad de objetos matemáticos representados mediante los diagramas y demás visualizaciones. Los objetos matemáticos son considerados como abstractos mientras que los diagramas lo son como concretos o perceptibles, y se insiste en no confundirlos, pero las relaciones entre ambos tipos de objetos no son abordadas de manera explícita (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012). No es de extrañar esta situación dado que clarificar lo que sean los objetos abstractos y su relación con el mundo empírico es un problema filosófico y psicológico de primera magnitud que es abordado desde diversos paradigmas y marcos teóricos (Radford, 2008). Así, debido a que "los *objetos matemáticos* no pueden ser aprehendidos directamente por los sentidos, el papel de los signos mediadores (representaciones de algún tipo) es crucial en toda actividad matemática, incluida su enseñanza y aprendizaje" (Presmeg, 2006, p. 19) y por lo tanto, "una tarea desafiante para el profesor es la descripción comprensible de la actividad mostrada por los alumnos y la construcción de sus conocimientos al hacer matemáticas" (Kadunz, 2016, p. 111).

Para enfrentar este desafío, el profesor de matemáticas debe tener conocimiento y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos que intervienen en la práctica matemática escolar, apoyada en el uso de diversos sistemas de representación y siendo consciente de las relaciones sinérgicas entre los mismos. Debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización.

A continuación sintetizamos algunos estudios formativos piloto que se han realizado y que han servido para la realización del ciclo de diseño que se muestra en el apartado 4.

3.1. Síntesis de talleres piloto

El antecedente más próximo de este estudio son los aportes que presenta Giacomone (2015) —doctoranda— en su Trabajo de Fin de Máster, en cuanto a la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica para analizar tareas de visualización, en un contexto de formación de profesores de secundaria. Dicho trabajo es considerado como un ciclo de diseño inicial, o bien, estudio piloto, relacionado con el desarrollo de la competencia para el análisis epistémico y cognitivo de tareas.

En su investigación, Giacomone (2015) diseña, implementa y evalúa una experiencia formativa con 54 estudiantes de un máster en educación secundaria (curso 2014-2015) de la Universidad de Granada, como parte de la asignatura *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas*. Las consignas se basan en:

- Lectura y discusión de un artículo:

  Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015a).

- Trabajo grupal:
  - Resolver una tarea (esta tarea corresponde con la Tarea 2, Figura 3.4. de esta investigación doctoral).
  - Identificar los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución, distinguiendo los lenguajes visuales y analítico, así como los objetos matemáticos no ostensivos implicados, utilizando la siguiente tabla:

Objetos ostensivos (medios de expresión)	*Objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
...	...

- Presentación y discusión de resultados en la clase.
- Trabajo individual:
    - Resolver una segunda tarea (esta tarea corresponde con la Tarea 4, Figura 3.7. de esta investigación doctoral).

El fin educativo es mostrar que la aplicación de la *herramienta configuración ontosemiótica* puede ayudar a comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático, al revelar la trama de objetos ostensivos y no ostensivos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

El análisis y la discusión de las respuestas que dan los participantes del grupo piloto nos ha permitido hacer una selección y cambios de las tareas y elaborar un segundo diseño que fue analizado por un grupo de expertos. El análisis retrospectivo del diseño propone considerar este tipo de acciones formativas como el paso inicial para el logro de dicha competencia; además dada su complejidad, se sugiere incorporar un momento de exploración inicial de los conocimientos de los futuros profesores sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, como también involucrar el desarrollo y la discusión de más tareas. Las observaciones y sugerencias de los investigadores nos han llevado a la versión final del diseño, incorporando cambios respecto al diseño piloto, tal como se muestra en la presentación de las tareas en el apartado siguiente, utilizando además, la tabla mostrada en la Figura 3.2.

Las tareas utilizadas en el segundo ciclo de diseño, se están aplicando en diversos talleres, en congresos nacionales e internacionales (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras, 2015; Godino y Giacomone, 2016; Godino, Neto y Wilhelmi, 2016); esto nos permite, por un lado, mejorar nuestro análisis epistémico (*a priori*) en términos de validación en la comunidad científica —dado los aportes de los participantes—; por otro lado, nos permite generar un espacio de reflexión sobre la importancia de aplicar este tipo de tareas en la formación de profesores. Por ejemplo, en todos los casos, se destaca la importancia que tiene el análisis *a priori* de las tareas, como también, el estudio preliminar del tema seleccionado, siendo en nuestro caso, el uso de visualizaciones y razonamiento diagramático en tareas escolares. En otros talleres, se utilizan distintas temáticas. Por ejemplo, en el taller implementado por Godino, Neto et al. (2016), se utiliza como contexto de reflexión las características del razonamiento algebraico elemental, y por lo tanto, el análisis epistémico de tareas mediante el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basados en los trabajos de Godino y colaboradores (por ejemplo, Godino, Aké et al., 2014). Independientemente del tema seleccionado, el análisis epistémico y cognitivo de tareas, a partir de la herramienta configuración ontosemiótica, permite sacar a la luz, los conocimientos matemáticos movilizados en los distintos tipos de soluciones, revelándose como una herramienta potente para el análisis didáctico.

4. DISEÑO DE TAREAS. ANÁLISIS *A PRIORI*

El EOS aporta herramientas para analizar aspectos instruccionales dando principal importancia al análisis *a priori* de las tareas diseñadas. En este análisis *a priori* se ponen de manifiesto los componentes del significado institucional del contenido matemático que se pretende implementar, la relación de este contenido matemático con el resto de los contenidos de la asignatura sobre la cual se desea incidir y las conexiones intra-inter disciplinares si las hubiera (análisis epistémico); también, se tiene en cuenta el contexto curricular-académico en el cual se desarrolla la experiencia (análisis ecológico). Así, el diseño de un proceso requiere, por un lado, "*preparar la escena* para la enseñanza y por otro, hacer un análisis pormenorizado de la *obra* que permita caracterizar *a priori* los principales elementos que entrarán en juego durante su ejecución" (Rivas, 2014, p. 139)

El análisis *a priori* es fundamental para el formador, y para los investigadores, porque permite comprender la complejidad de los conocimientos matemáticos implicados en la resolución de las tareas, prever potenciales conflictos y tomar decisiones en los momentos de implementación y análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes. Además, permite orientar las interacciones en clase y apoyar las instancias de discusión grupal y puesta en común, dado que el profesional adquiere una clara comprensión del problema que está introduciendo en su clase.

El diseño instruccional requiere también considerar el análisis de los recursos temporales y materiales, posibles interacciones y aspectos cognitivos y afectivos. Dado que se trata de una investigación de diseño, es importante considerar que las tareas pueden tener variaciones de acuerdo a cómo se va desarrollando la implementación; por tal motivo, los mencionados factores se tratan en profundidad en el apartado siguiente, cuando se describe la implementación y los resultados en términos de análisis cognitivos.

A continuación, en este apartado presentamos cada una de las tareas efectivamente implementadas, junto con el análisis *a priori* de cada una organizado en las Tablas 3.1. a 3.8. Así, se debe entender que el análisis incluido en cada tabla corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo).

4.1. Tarea inicial. Dibujo en perspectiva

La Tarea 1, presentada en la Figura 3.3. es el primer contacto que los futuros profesores tienen en relación a la identificación de objetos y significados. Es importante recordar que el desarrollo de competencias de análisis para reconocer explícitamente los objetos matemáticos forma parte, según la interpretación del EOS, del conocimiento especializado del contenido y que se debe promover en los profesores de educación secundaria. De este modo esta primera actividad sirve como diagnóstico, para analizar la comprensión inicial de los profesores en formación y caracterizar sus significados personales iniciales.

Tarea 1. Exploración inicial

La figura adjunta muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.

1) Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica la respuesta.
2) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe el procedimiento matemático en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué es para ti una demostración matemática? Elabora una justificación matemática para la respuesta dada en la tarea.
6) Uno de los conceptos que intervienen es el de cubo, usado para indicar cada una de las piezas que componen el 'edificio'.
   a) Elabora al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico.
   b) Indica otros usos o significados que puede tener la palabra 'cubo'.

7) Indica qué papel desempeñan las proposiciones que has identificado en la justificación de la respuesta.
8) Describe otros posibles procedimientos que se podrían aplicar para resolver la tarea.
9) Describe una posible justificación de la respuesta que podría dar un estudiante usando algún tipo de material, secuencia de representaciones u otras explicaciones.
10) La figura geométrica dada se representa como una composición de piezas de forma cúbica.
    a) Identifica propiedades del cubo, como figura geométrica, que no se pueden representar de manera empírica.
    b) Enuncia la tarea utilizando lenguaje natural u ordinario.

Figura 3.3. Presentación de la Tarea 1

El trabajo es individual con el objetivo de identificar sus significados personales sobre:

- los objetos implicados en las prácticas, generando reactivos de distinta naturaleza; por ejemplo, con las preguntas del tipo ¿qué es parta ti: un concepto, una proposición, un procedimiento, una demostración?;
- los usos o intencionalidades de las prácticas en la resolución de las tareas, es decir: ¿cuál es la intención que tiene el sujeto resolutor con cada práctica elemental? (significado pragmático).

Se pretende reflexionar sobre las relaciones sinérgicas entre los lenguajes diagramáticos-visuales y los lenguajes secuenciales, los objetos ostensivos (materiales) y los no ostensivos (inmateriales), los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales), y el lugar que ocupan en los procesos de enseñanza.

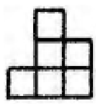
En general, esta tarea es el primer paso para reflexionar sobre los conocimientos que participan en la actividad matemática, la importancia de su reconocimiento y la introducción paulatina de herramientas teóricas que permitan su identificación .

4.1.1. Análisis ontosemiótico *a priori* de la tarea inicial

A continuación, se muestra el análisis *a priori* (análisis epistémico) de la Tarea 1. La Tabla 3.1 resume la configuración de objetos y significados involucrada en la resolución de la tarea; se puede observar que tanto el enunciado como la resolución de la tarea son descompuestos en unidades de análisis que hemos enumerado de 1) a 7) (columna central). Las otras dos columnas resumen la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo operacional —uso pragmático de los objetos (columna 1)—, como de tipo referencial —un objeto refiere a otro objeto (columna 3).

Tabla 3.1.

Configuración ontosemiótico de la tarea inicial (Dibujo en perspectiva)

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Planteamiento del problema; interpretación de una perspectiva isométrica de un objeto físico tridimensional.	**1)** La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.  Dibuja la vista del edificio desde atrás.	*Conceptos*: perspectiva isométrica de un objeto tridimensional; punto de vista (o foco); puntos de vista opuestos; proyección ortogonal; plano de proyección; rectas proyectantes; rayo visual; cubo; composición de cubos; cuadrado; sistema de referencia tridimensional; frente, arriba, derecha; objeto visible, objeto oculto. *Lenguaje*: lenguaje natural-lenguaje visual.
Inducir la elaboración de una justificación de la respuesta requerida.	**2)** Justifica la respuesta.	*Concepto de justificación* de una proposición geométrica (como convencimiento, a sí mismo y al otro, de la corrección de una respuesta).
Respuesta a la tarea solicitada.	**3)** La vista desde atrás debe ser la figura adjunta. 	*Concepto*: vista de alzado (trasero). *Procedimiento*: recuento de cubos por filas y columnas. *Proposición 1:* la vista de atrás es la figura adjunta.
Se establece una hipótesis fundamental para poder dar una respuesta racional a la tarea y se evoca una propiedad de las proyecciones ortogonales.	**4)** Suponiendo que las piezas dibujadas en perspectiva son cubos, las proyecciones ortogonales de las caras son cuadrados.	*Concepto*: cubo; proyección ortogonal; cuadrado. *Proposición 2*: las proyecciones ortogonales de un cubo son cuadrados.

Se evocan propiedades de las proyecciones ortogonales necesarias para justificar deductivamente la respuesta a la tarea.	**5)** Las proyecciones ortogonales conservan la forma, tamaño y posición relativa de los objetos proyectados.	*Argumento:* justificación de la proposición 2. *Conceptos:* forma, tamaño y posición relativa.
Se describen las posiciones relativas de las piezas que componen la construcción para justificar la forma de la proyección plana desde atrás.	**6)** Si me pongo detrás del edificio, a mi izquierda vería un solo cubo, en el centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados, porque en la perspectiva isométrica dada a la derecha-atrás hay un cubo; en medio-atrás hay 3 cubos; y finalmente, en la izquierda-frente, 2.	*Conceptos:* atrás, izquierda, centro y derecha. *Proposición y su argumentación* basada en los datos de la tarea.
Se evoca una propiedad previamente establecida para justificar la respuesta final.	**7)** Como las proyecciones ortogonales de las caras del cubo son cuadrados la vista del objeto debe ser la figura dada en 3)	*Argumentación* que justifica la proposición 1.

Se espera que los estudiantes identifiquen los siguientes procesos (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2018):

– *Procesos de particularización-generalización*

En la tarea se da una vista particular de un objeto espacial y se pretende que se razone sobre el objeto en su totalidad. La solución de la tarea es la misma cualquiera que sea el tamaño y posición ortogonal de los diagramas, aunque es dependiente de la forma en que se compone el cuerpo espacial al que la tarea hace referencia. De esta manera, la proposición 2 y su argumentación, deben ser interpretadas de manera general, para cualquier cubo. La tarea admite múltiples variantes, por ejemplo cambiando la composición del objeto real representado; o bien se puede pedir la construcción y el reconocimiento de las diferentes vistas. Es una tarea prototípica de los problemas de representación en el área de dibujo técnico y geometría descriptiva.

– *Procesos de materialización-idealización*

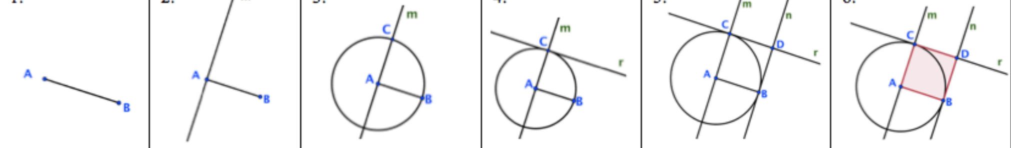
La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (el edificio) ideal (imaginado). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. Este tipo de perspectiva tiene la ventaja de permitir la representación a escala, y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño que percibe el ojo humano. El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la vista de un edificio que tendría un hipotético observador. Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las 'acciones matemáticas' (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos. Un análisis epistémico más profundo de esta tarea se puede encontrar en Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, (2016).

4.2. Tarea 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

Esta tarea (Figura 3.2.) al igual que la tarea siguiente, forma parte de la fase 3 —puesta en práctica de herramientas específicas para el análisis ontosemiótico—. Previamente, en la fase 2 de la implementación, los futuros profesores son familiarizados con el tipo de metodología instruccional que se pretende que realicen en esta etapa.

Tarea 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

La secuencia de pasos indicados a continuación es el procedimiento seguido por un alumno para construir un cuadrado con GeoGebra.



1.	2.	3.	4.	5.	6.
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.	e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.	f) Trazo la recta *n* perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	h) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Figura 3.4. Presentación de la Tarea 2

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico-cognitivo provocada por las consignas: ¿qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico, concretadas en este estudio en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

4.2.1. Análisis ontosemiótico *a priori* de la Tarea 2

Se pretende que los participantes trabajen en grupos reducidos, resuelvan la tarea propuesta, e identifiquen los conocimientos implicados en la tabla propuesta en la Figura 3.2. de la guía instruccional:

Consignas de trabajo

a) Resuelve la situación-problema.

b) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

c) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

A continuación, se muestra el análisis *a priori* (análisis epistémico) de la Tarea 2.

Las posibles acciones y explicaciones esperadas para resolver la cuestión a), se pueden describir en las 8 prácticas matemáticas siguientes:

1) Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.
2) El ángulo en A es recto porque la recta m se ha trazado perpendicular a AB.
3) El lado AC es congruente con AB porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB.
4) r y m son perpendiculares porque r es paralela a AB y m es perpendicular a AB. Por tanto, el ángulo en C es recto.
5) El ángulo en D es recto porque r y n son perpendiculares.
6) El lado CD es congruente con AB porque r y AB son paralelas.

7) DB es congruente con AC porque m y n son paralelas.

8) ABCD es un cuadrado porque sus cuatro lados son congruentes y los cuatro ángulos interiores son rectos.

Para poder justificar que, en efecto, el cuadrilátero dado es un cuadrado, es necesario partir de la definición de cuadrado, la cual moviliza, determinados conceptos. Sin embargo, es necesario reconocer que, la práctica 1) se puede sustituir por otras definiciones de cuadrado, por ejemplo:

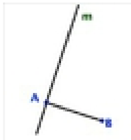
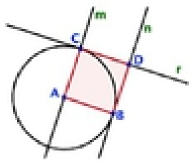
- Región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada formada por cuatro segmentos congruentes y sus ángulos interiores son rectos (o también que son congruentes)
- Paralelogramo cuyos cuatro lados son congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.

La respuesta esperada se puede resumir en la Tabla 3.2. a partir de la identificación de los conocimientos implicados en los pasos a)-h) (representación del cuadrado en GeoGebra para el enunciado) y en las prácticas 1)-8) (respuesta), dispuestos en la columna central. Las otras dos columnas resumen al trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo operacional —uso pragmático de los objetos (columna 1)—, como de tipo referencial —un objeto refiere a otro objeto (columna 3).

Tabla 3.2.

Configuración ontosemiótico de la Tarea 2

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Planteamiento de la tarea; interpretación de la secuencia de diagramas a)-h) utilizados para construir un cuadrado con GeoGebra.	La secuencia de pasos indicados a continuación es el procedimiento seguido por un estudiante para construir un cuadrado con GeoGebra.	*Concepto*: cuadrado geométrico *Lenguajes*: natural refiere al gráfico.
Construir uno de los lados	Diagrama 1-a):	*Conceptos*: segmento (general),

del cuadrado que se quiere obtener.	Represento un segmento AB. 	puntos extremos de un segmento. *Procedimiento*: trazado de un segmento genérico con GeoGebra.
Construir un ángulo recto del cuadrado.	Diagrama 2-b): Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A. 	*Conceptos*: línea recta, punto de un segmento, recta perpendicular a un segmento por un punto, ángulo recto. *Procedimiento*: trazado de una recta perpendicular a un segmento por uno de sus extremos con el GeoGebra.
	...	...
Mostrar la construcción del cuadrado requerido.	Diagrama 6-h): El cuadrilátero ABCD es un cuadrado. 	*Proposición*: ABCD es un cuadrado.
Inducir la elaboración de una justificación de la respuesta dada por el estudiante.	**a)** Justifica que, en efecto, ABCD es un cuadrado.	*Concepto*: justificación de la proposición anterior. *Lenguajes*: simbólico (ABCD) que refiere al gráfico (cuadrado).
Evocar la definición de cuadrado para tener en cuenta las condiciones que deben cumplir la secuencia de acciones que realiza el estudiante.	**1)** Con el término cuadrado designamos a un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos interiores rectos.	*Conceptos*: cuadrado, cuadrilátero, lados congruentes, ángulos interiores de un polígono, ángulo recto.
Evocar propiedades de las rectas perpendiculares para justificar que un ángulo del cuadrilátero ABCD es recto.	**2)** El ángulo en A es recto porque la recta *m* se ha trazado perpendicular a AB.	*Proposición*: el ángulo A es recto. *Argumentación*: por la definición de rectas perpendiculares.
	...	...

Responder a la tarea pedida indicando que se cumple la definición de cuadrado.	**8)** ABCD es un cuadrado porque sus cuatro lados son congruentes y los cuatro ángulos interiores son rectos.	*Proposición*: tesis que se quería demostrar. *Justificación*: secuencia de pasos 1) a 7).

El análisis revela que el uso de diagramas apoya la formulación de conjeturas, pero la intuición y visualización debe completarse con el reconocimiento de la trama de objetos matemáticos no ostensivos implicados en la deducción de las proposiciones geométricas. La tabla resulta una guía útil para la identificación de dichos conocimientos, la cual deja a la luz que existe una estrecha imbricación entre los objetos que intervienen en la actividad matemática; específicamente entre: los lenguajes diagramáticos y secuenciales, los objetos ostensivos y no ostensivos y los objetos extensivos (particulares) y los intensivos (generales).

Un análisis epistémico de esta tarea se puede encontrar en Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras (2016b) y en Godino y Giacomone (2016b).

4.3. Tarea 3. Fracciones y diagrama de áreas

En la Figura 3.5. se muestra el enunciado de la Tarea 3, también implementada en la tercera fase: puesta en práctica de la herramienta configuración ontosemiótica.

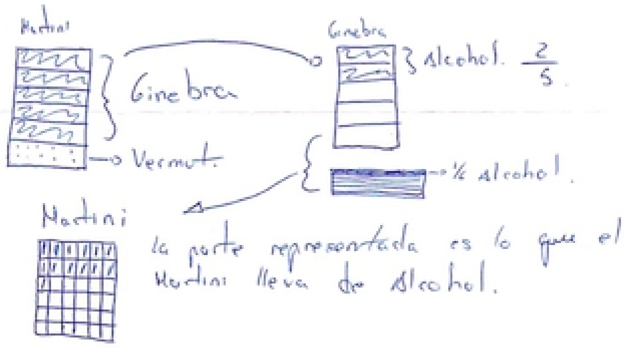
Tarea 3. Fracciones y diagrama de áreas

Un estudiante para maestro resuelve el siguiente problema:

Problema:

> *Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.*

Solución:



a) Responde: ¿Es correcta la solución dada por el estudiante? Justifica la respuesta.

Figura 3.5. Presentación de la Tarea 3

4.3.1. Análisis ontosemiótico *a priori* de la Tarea 3

La secuencia de diagramas de áreas mostrada en la Figura 3.5. es explicativa del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los significados implicados. Por consiguiente, es necesario que el resolutor se apoye en una secuencia de prácticas discursivas y operativas que permita justificar y explicar dichas acciones; una secuencia posible se muestra a continuación.

Suponiendo que la respuesta es parcialmente correcta:

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un rectángulo, el cual se divide en 6 partes iguales horizontalmente (se supone que son partes iguales). De acuerdo a los datos del problema, se señala: la fracción de ginebra (5/6 del rectángulo unidad) y la fracción de vermut (1/6 del rectángulo unidad) (primer diagrama en la Figura 3.5.).

2) Se representa la ginebra como una nueva cantidad unitaria y se divide en 5 partes iguales horizontalmente, siendo 2/5 la fracción de alcohol en la ginebra (señalado con una flecha en la Figura 3.5.).

3) Se representa el vermut como una nueva cantidad unitaria y se divide en 6 partes iguales horizontalmente, siendo 1/6 la fracción de alcohol en el vermut (señalado con una flecha en la Figura 3.5.).

4) Para poder sumar las cantidades de alcohol en total, ambas partes se deben expresar con la misma unidad de medida (en la Figura 3.5. esto está señalado con la flecha que une la cantidad unitaria de ginebra y vermut).

5) Las 2 partes de alcohol en la ginebra se dividen en 6 partes iguales, obteniendo 12 partes de alcohol en la ginebra.

6) La cantidad de alcohol del Martini será 12+1=13 partes iguales (considerando siempre que el sujeto resolutor entiende que las partes deben ser iguales).

7) La representación inicial de Martini se debe medir con la misma unidad que se miden las cantidades de alcohol, para lo cual se divide a cada una de sus 6 partes representadas inicialmente, en 6 partes iguales, obteniendo 36 rectangulitos.

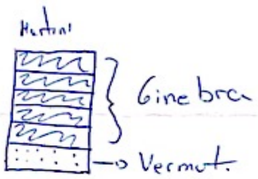
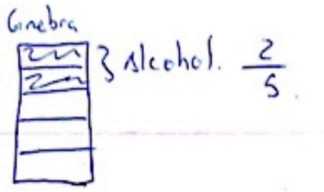
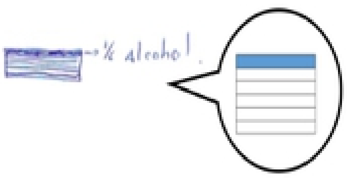
8) Se representan las 36 padres como cuadraditos y se pintan 13. La representación final es la respuesta al problema, siendo la fracción de alcohol 13/36.

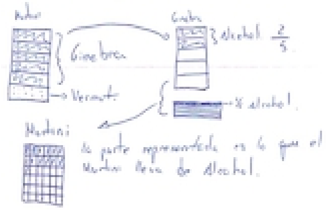
La Tabla 3.3. sintetiza el análisis ontosemiótico que se pretende que los futuros profesores logren durante el desarrollo de la tarea. Se puede observar que tanto el enunciado como la resolución de la tarea son descompuestos en unidades de análisis.

La Tabla 3.3.

Configuración ontosemiótico de la Tarea 3

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Describe la composición del Martini.	Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut.	*Concepto*: un todo unitario de volumen. *Procedimiento*: composición de un todo unitario a partir de partes iguales.
Determina la fracción de alcohol en la ginebra y en el vermut.	Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol.	*Concepto*: fracción como parte de un todo unitario que se divide en partes iguales de las cuales se individualiza una parte.
Enuncia la cuestión problemática de la tarea.	¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.	*Conceptos*: todo unitario, fracción, parte de un todo dividido en partes iguales. *Lenguajes*: lenguaje natural a

		lenguaje diagramático
Planteamiento de la tarea al futuro profesor.	Responde *¿Es correcta la solución dada por el estudiante?*	*Situación/problema*: resolver un problema de mezclas (solución esperada), analizar la resolución del estudiante (solución efectiva), comparar ambas soluciones, emitir un juicio valorativo. *Lenguaje*: pasaje del lenguaje natural (enunciado de la tarea) al lenguaje diagramático (solución), operaciones con diagramas. *Conversión* entre lenguaje natural y diagramático, tratamiento dentro del lenguaje diagramático.
Induce la elaboración de una justificación de la respuesta requerida.	Justifica la solución.	*Concepto de justificación* de una proposición.
Representa diagramáticamente la fracción de ginebra y vermut que componen el Martini.	**Práctica 1)** 	*Concepto*: fracción como parte de un todo. *Lenguaje*: paso del lenguaje natural al gráfico. *Procedimiento*: división de la unidad en partes iguales *Proposición 1*: la figura dada representa la composición del Martini (5 partes de ginebra; 1 de vermut).
Representa la fracción de alcohol en la ginebra y en el vermut.	**Práctica 2)**  **Práctica 3)** 	*Concepto*: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales. *Procedimiento:* - descomposición de la unidad de Martini en dos nuevas partes unitarias; - división de la unidad en partes iguales. *Proposición 2:* la figura dada representa la composición de la Ginebra. *Proposición 3*: la figura dada representa la composición del vermut.
Representa la cantidad de alcohol total en el Martini. Respuesta al problema	**Práctica 4), 5), 6), 7), 8)**	*Conceptos*: fracción como parte de un todo, unidad de medida *Procedimiento*: medir un área con una unidad dada. *Proposición 4:* la figura dada representa la respuesta del problema. El lenguaje natural expresa la

		respuesta al problema. Falta expresar la fracción correspondiente. Faltan argumentaciones que apoyen la construcción de la secuencia diagramática.

Además de los procesos indicados en la Tabla 3.3., el sujeto que resuelve el problema con este razonamiento, realiza, por un lado, procesos de materialización de los conceptos y de las operaciones con fracciones implicadas en el enunciado, y, por otro lado, procesos de composición de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de idealización (la razón del número de cuadraditos marcados al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini). Sin embargo, no se observa un proceso de justificación, argumentación o comunicación de los resultados que se van obteniendo; en este caso, es necesario que los futuros profesores realicen suposiciones para poder valorar la respuesta dada por este estudiante. Por ejemplo, no hay conexión entre la práctica 5 y las prácticas siguientes; es decir: ¿por qué el sujeto decidió dibujar un nuevo todo unitario y dividirlo en 36 partes, supuestamente iguales?

4.3.1.1. Resolución 1: diagrama de áreas

Consideramos importante realizar también un análisis *a priori* del problema del Martini para poder comprender las posibles dificultades que tiene el sujeto resolutor; nos preguntamos entonces, ¿cómo sería una posible respuesta correcta al problema del Martini? Planteamos la siguiente secuencia de prácticas:

Figura 3.6. Diagrama de áreas para resolver el problema del Martini

1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un cuadrado (Figura 3.6.A).

2) El cuadrado se divide en 6 partes iguales verticalmente (Figura 3.6.B).

3) La fracción de ginebra son los 5/6 del cuadrado unidad (color rojo, Figura 3.6.B).

4) La fracción de vermut son 1/6 de dicho cuadrado (color blanco, Figura 3.6.B).

5) El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (1/6 de 6) (Figura 3.6.C).

6) La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules de la Figura 3.6.D (2/5 de 5).

7) Las cantidades de alcohol en la ginebra y el vermut se deben expresar en la misma unidad de medida, para lo cual los dos rectángulos azules que representan la cantidad de alcohol en la ginebra se debe dividir horizontalmente en 6 partes iguales (Figura 3.6.E).

8) La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos (Figura 3.6.E).

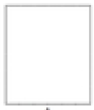
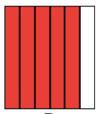
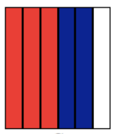
9) La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales (Figura 3.6.F).

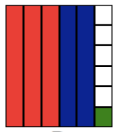
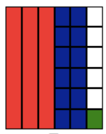
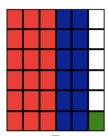
10) La fracción de alcohol del Martini será 13/36 (Figura 3.6.F).

En términos de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2006) se comienza con una conversión, pasando del registro secuencial de la lengua natural (enunciado de la tarea) al registro gráfico (diagramas de áreas); dentro de este registro se realizan determinados tratamientos para finalmente pasar de nuevo al registro secuencial: la fracción de alcohol del Martini es 13/36. Pero como se muestra en la secuencia de prácticas 1) a 9) el registro secuencial acompaña necesariamente al registro gráfico. Así mismo, las prácticas operativas y discursivas puestas en acción están guiadas por la trama de objetos y procesos no ostensivos que desvelamos en la tercera columna de la Tabla 3.4. En la primera columna de dicha tabla indicamos el papel (rol o función) que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad.

Tabla 3.4.

Configuración ontosemiótica del problema del Martini

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
	Respuesta	
Particularizar y materializar el concepto de cantidad unitaria.	**1)** La cantidad de Martini se puede representar mediante un cuadrado.  A	*Concepto*: cantidad unitaria.
Acción requerida para representar de manera ostensiva (diagramática) la composición del Martini en la siguiente práctica, teniendo en cuenta el enunciado.	**2)** Se divide la unidad (cuadrado) verticalmente en 6 partes iguales.	*Procedimiento*: división de la unidad en partes iguales.
Expresa fraccionariamente la cantidad de ginebra y vermut que componen el Martini	**3) 4)** La fracción de ginebra son los 5/6 de la unidad (parte roja) y la fracción de vermut es 1/6 de la unidad (parte blanca).  B *[Tal como muestra la práctica 1) del estudiante].*	*Concepto*: fracción como parte de un todo dividido en partes iguales. *Convención*: la fracción se expresa de dos maneras equivalentes, con un diagrama aritmético (5/6, 1/6) y un diagrama gráfico. *Argumentación* que justificaría la proposición 1 del estudiante
Expresa fraccionariamente la cantidad alcohol en la ginebra	**5)** La cantidad de alcohol de la ginebra se representa por las dos barras azules (2/5 de 5 partes).  C [*El estudiante en cuestión no es capaz de operar con el mismo diagrama: 2/5 de 5/6, y utiliza un nuevo todo unitario para la*	*Procedimiento*: división de una unidad en partes iguales La cantidad de ginebra se puede expresar como un todo unitario. Luego divide la unidad en 5 partes iguales tal como muestra el paso 5), de manera que: la fracción de alcohol en la ginebra es 2/5. *Concepto*: fracción como operador

	ginebra, tal como lo muestra su práctica 2)].	*Argumentación* que justificaría la proposición 2 del estudiante.
Expresa fraccionariamente la cantidad de alcohol en el vermut	**6)** El rectángulo blanco que representa la cantidad de vermut se divide en 6 partes iguales de las cuales 1 parte corresponde a la cantidad de alcohol (parte verde) (1/6 de 6 partes).  D [*El estudiante en cuestión no es capaz de operar con el mismo diagrama: no es capaz de hacer 1/6 de 1/6, y utiliza un nuevo todo unitario para la ginebra, tal como lo muestra su práctica 3].*	*Procedimiento*: división de una unidad en partes iguales. La cantidad de vermut se puede expresar como un todo unitario. Luego divide la unidad en 6 partes iguales tal como muestra el paso 6), de manera que: la fracción de alcohol en el vermut es 1/6. *Concepto*: fracción como operador *Argumentación* que justificaría la proposición 3 del estudiante.
Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de usar la aritmética natural.	**7)** La cantidad de alcohol en la Ginebra y el Vermut se deben expresar en la misma unidad, sobre el total del Martini. *[El estudiante no realiza el esta operación: no es capaz de expresar la suma de*  E *fracciones con un diagrama, dado que ha utilizado dos diagramas separados para cada componente ginebra y vermut, sin embargo utiliza una llave para indicar la suma de esas cantidades (expresado en su práctica 4)].*	*Concepto*: unidad de medida; medida. *Argumentación* que justificaría la proposición 4 del estudiante
Medir la cantidad de alcohol del Martini con números naturales (13 unidades).	**8)** La cantidad total de alcohol en el Martini serán 12 + 1 = 13 cuadraditos.	*Concepto*: magnitud volumen (sumable). *Procedimientos*: conteo y adición
Hacer posible la medida de todas las cantidades con una misma unidad. Se trata de usar la aritmética natural.	**9)** La cantidad total de Martini representada por el cuadrado inicial se debe medir también con la misma unidad que se mide las cantidades de alcohol, para lo cual se prolongan las seis líneas horizontales.  F *[El estudiante llega a este resultado, junto con la identificación de las 13 unidades (práctica 7); sin embargo no es capaz de conectar de manera*	*Concepto*: producto cartesiano de números naturales. *Procedimiento*: medir un área con una unidad dada.

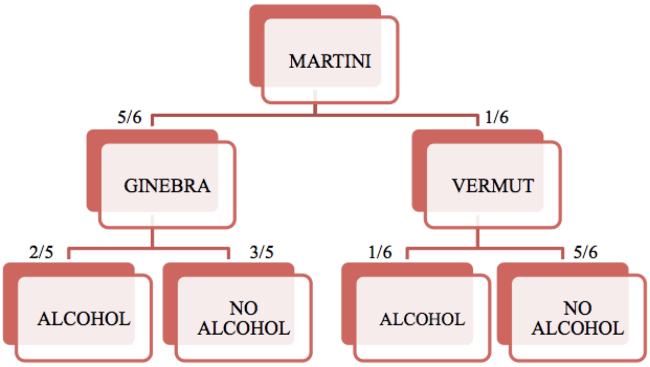
	justificada la secuencia de diagramas realizada. Tal como hemos expuesto, es necesario realizar diagramas complementarios.]	
Expresa la respuesta fraccionaria al problema	**10)** La fracción total del Martini será 13/36.	*Concepto*: fracción como parte de un todo. *Proposición*: la fracción del alcohol en el Martini es 13/36. *Argumentación* formada por la secuencia de diagramas A-F.

Se espera que, al resolver el problema del Martini, los futuros profesores utilicen diversas estrategias, dado que varios autores han identificado dificultades en el uso de este tipo de diagramas para representar operaciones con fracciones. Por ejemplo, Moss (2005) señala que el diagrama de área para representar fracciones como parte-todo apoya el pensamiento aditivo, dejando en un segundo plano el pensamiento multiplicativo. Hackenberg y Tillema (2009, p. 4) reclaman la importancia de realizar análisis conceptuales para comprender las posibles respuestas que se dan frente a estas situaciones problemáticas; según los autores, una pregunta inmediata que el alumno enfrenta podría ser: ¿cómo tomo 2/5 de 5/6? y 1/6 de 1/6? Para resolver esas preguntas se requiere actividad distributiva en algún nivel.

Como posibles respuestas, se espera que los estudiantes utilicen el diagrama de árbol (dado que es más habitual) o bien, razonamiento aritmético simbólico, dado que “en las clases de matemáticas tradicionales, ha prevalecido el énfasis en el uso de representaciones abstractas y simbólicas” (Lee, Brown y Orrill, 2011, sección 1). A continuación, sintetizamos otras posibles soluciones esperadas.

4.3.1.2. Resolución 2: diagrama de árbol

El diagrama en árbol de la Figura 3.7 es explicativo del proceso de resolución para alguien que conozca las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados.



Fracción de alcohol:

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{36}$$

Figura 3.7. Solución del problema usando diagrama de árbol

Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

1) El diagrama construido en la Figura 3.7 expresa en el primer nivel la descomposición de una cantidad unitaria de volumen de Martini en dos partes, ginebra y vermut, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

2) En el segundo nivel se expresa la descomposición de las partes de ginebra y vermut, que ahora son consideradas como cantidades unitarias, en dos partes, alcohol y no alcohol, indicando en cada conector la fracción correspondiente.

3) La fracción de alcohol de la ginebra son los 2/5 de la cantidad de ginebra; como esa cantidad es los 5/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente de la ginebra será la ‘fracción de la fracción’, esto es,

$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$$

4) La fracción de alcohol del vermut son los 1/6 de la cantidad de vermut; como esa cantidad es 1/6 de la cantidad de Martini, la fracción de alcohol en el Martini procedente del vermut será la ‘fracción de la fracción’, esto es,

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

5) La fracción total de alcohol en el Martini serán la suma de las fracciones de alcohol procedentes de la ginebra y del vermut, esto es,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{36}=\frac{13}{36}$$

La Tabla 3.5 incluye la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la solución del problema mediante el uso del diagrama de árbol de la Figura 3.7.

Tabla 3.5.

Configuración ontosemiótica de la resolución 2

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
	Respuesta	
Expresar en forma diagramática y fraccionaria la cantidad de ginebra y vermut en el Martini.	**Práctica 1)**	*Concepto*: primer nivel de un diagrama, conector, cantidad unitaria, fracción. *Procedimiento*: descomposición de un todo en partes iguales. *Convenio de representación:* las fracciones sobre los conectores refieren a la relación fraccionaria entre las cantidades conectadas.
Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol presente en la ginebra y en el vermut.	**Práctica 2)**	*ídem*
Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el Martini que proviene de la ginebra.	**Práctica 3)**	*Conceptos*: multiplicación de fracciones (fracción de una fracción), cantidad unitaria. *Procedimientos*: multiplicación de fracciones, cambio de unidad al pasar del primer al segundo nivel del diagrama (el volumen de ginebra y vermut son ahora consideradas como nuevas unidades que se fraccionan).
Expresar fraccionariamente la cantidad de alcohol en el Martini que proviene del vermut.	**Práctica 4)**	*ídem*
Respuesta fraccionaria al problema.	**Práctica 5)**	*Conceptos*: suma de fracciones. *Procedimientos*: suma de fracciones con diferente denominador. *Proposición*: la fracción de

	alcohol en el Martini es 13/36. *Argumentación*: está formada por la secuencia de pasos 1) a 5), apoyada en el uso de los diagramas aritmético y jerárquico y del lenguaje secuencial natural.

El análisis de cada una de las prácticas individualizadas en la Tabla 3.5. se puede hacer más detallado. Así en la primera unidad del enunciado, la aplicación sistemática de la noción de *configuración ontosemiótica* nos lleva a reconocer que el sujeto que lee el enunciado debe hacer un proceso de interpretación (atribución de significado) de '$^{2}/_{5}$' identificando el 'concepto de fracción' entendido aquí desde un punto de vista institucional como una regla socialmente convenida: una totalidad unitaria se descompone en partes iguales y se individualiza una o varias de dichas partes. A continuación debe realizar un proceso de particularización al caso: el todo unitario se divide en 5 partes iguales y se consideran 2.

Luego, el sujeto debe realizar un proceso de descomposición del sistema de elementos que componen el diagrama, distinguiendo tres niveles jerárquicos, las unidades que constituyen el todo unitario en cada nivel, los conectores, las fracciones y operaciones con fracciones que deben realizarse. También debe realizar un proceso de composición de los cálculos parciales realizados en cada rama del árbol para obtener la fracción del alcohol del Martini y de materialización de los cálculos en la expresión diagramática-aritmética.

Por lo tanto, el concepto de fracción, que se activa, es la fracción como la relación entre algunos números de partes de un todo que está igualmente dividido. La idea de 'fracción de fracción' puede identificarse fácilmente al componer los dos niveles inferiores del diagrama, mientras que la adición de las fracciones resultantes se refleja en la disposición lateral de las dos ramas (izquierda y derecha).

El resto de las prácticas discursivas y operativas realizadas, necesariamente apoyadas en el uso del lenguaje secuencial-natural, son imprescindibles para establecer la conexión entre ambos tipos de diagramas y explicar que en las condiciones del problema la fracción de alcohol del Martini es $^{13}/_{36}$.

4.3.1.3. Resolución 3: aritmética fraccionaria

La siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas establece la justificación y explicación de que la fracción de alcohol en el Martini es ${}^{13}/_{36}$.

1) La fracción de ginebra que contiene el coctel es ${}^{5}/_{6}$, porque la unidad de volumen de Martini se ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.
2) Por igual razón la de vermut será ${}^{1}/_{6}$.
3) El alcohol contenido en la ginebra es una fracción de la fracción de ginebra, en este caso ${}^{2}/_{5}$ de ${}^{5}/_{6}$.
4) Esto es ${}^{2}/_{5} \times {}^{5}/_{6} = {}^{1}/_{3}$
5) El alcohol contenido en el vermut es una fracción de la fracción de vermut, en este caso ${}^{1}/_{6}$ de ${}^{1}/_{6}$.
6) Esto es ${}^{1}/_{6} \times {}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{36}$
7) La fracción de alcohol en el Martini será la suma de las fracciones de alcohol aportado por la ginebra y por el vermut.
8) Esto es ${}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{36} = {}^{13}/_{36}$

En la Tabla 3.6. incluimos la configuración de objetos y significados que se ponen en juego en la solución del problema.

Tabla 3.6.

Configuración ontosemiótica de la resolución 3

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
	Respuesta	
Expresar en forma fraccionaria la cantidad de ginebra presente en el Martini a partir de los datos del problema.	**Práctica 1)**	*Concepto*: fracción, como parte de un todo. *Proposición*: la fracción de ginebra en el coctel es 5/6. *Argumento*: porque el Martini se

		ha dividido en 6 partes iguales y 5 corresponden a la ginebra.
Expresar en forma fraccionaria la cantidad de vermut presente en el Martini a partir de los datos del problema.	**Práctica 2)**	ídem
Establecer la relación de alcohol presente en la ginebra para justificar la práctica 4.	**Práctica 3)**	*Concepto*: fracción de una fracción (multiplicación de fracciones).
Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en la ginebra.	**Práctica 4)**	*Proposición*: La fracción de alcohol en la ginebra es 1/3. *Argumento*: porque el nuevo todo unitario (5/6) se divide en 5 partes iguales y se toman 2. *Procedimiento*: multiplicación de fracciones; simplificación de fracciones. *Conceptos*: número racional, fracción irreducible.
Establecer la relación de alcohol presente en el vermut para justificar la práctica 6).	**Práctica 5)**	ídem
Expresar en forma fraccionaria la cantidad de alcohol presente en el vermut.	**Práctica 6)**	ídem
Interpretar los datos obtenidos en las prácticas anteriores, en términos de la respuesta fraccionaria a tarea, para justificar la práctica 8).	**Práctica 7)**	*Concepto*: suma de fracciones.
Respuesta fraccionaria al problema	**Práctica 8)**	*Proposición*: la fracción de alcohol del Martini es 13/36. *Argumento*: Ese es el resultado de la suma de las fracciones obtenido aplicando el procedimiento correspondiente (suma de fracciones de diferente denominador).

El análisis epistémico de esta tarea se puede encontrar en Godino et al. (2015a).

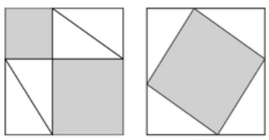
Consideramos que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica matemática escolar. Además, debe ser competente para diseñar y gestionar procesos de materialización e idealización de los objetos matemáticos, junto con los correspondientes procesos de particularización y generalización. A continuación, se muestra la Tarea 4 implementada como instrumento de evaluación del proceso de instrucción en la cuarta fase de la implementación.

4.4. Tarea 4. Relación entre área de figuras planas

La Tarea 4 (Figura 3.8.) forma parte de la fase de evaluación de los futuros profesores sobre el logro en el desarrollo de la competencia pretendida; por lo tanto, se pretende que los estudiantes trabajen de manera individual, en horario extra-académico, con las mismas consignas metodológicas empleadas en clase.

Tarea 4. Relación entre áreas de figuras planas

Dadas las siguientes figuras:



- ¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?
- ¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras?

Consignas de trabajo

a) Resuelve la situación-problema.

b) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

c) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

Figura 3.8. Presentación de la Tarea 4

4.4.1. Análisis ontosemiótico *a priori* de la Tarea 4

En la práctica matemática se movilizan objetos ostensivos (lenguajes y artefactos) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). El resolutor toma decisiones para garantizar la eficacia de la práctica, en su resolución o para su comunicación. La resolución esperada de la tarea imbrica lenguajes natural, diagramático y algebraico, según estándares de idoneidad (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Así, en la formación inicial de docentes de secundaria, se espera la siguiente secuencia de prácticas operativas y discursivas:

1) Aceptamos el supuesto que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas a, b, y c, según se indica en la Figura 3.9.

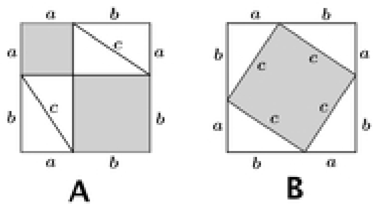


Figura 3.9. Hipótesis métricas necesarias

2) Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a+b).
3) Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.
4) Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.
5) El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2 + b^2$.
6) El área sombreada de la figura B es el área del cuadrado de lado c, c^2.
7) Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente (Figura 3.10.).

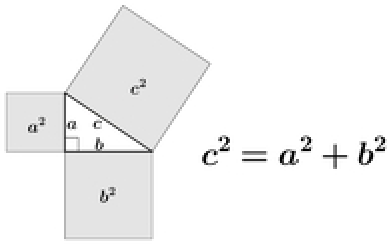


Figura 3.10. Determinación del Teorema de Pitágoras

8) Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.

Como síntesis de la respuesta esperada por los futuros profesores, en la columna central de la Tabla 3.7. sintetizamos las expresiones en lenguaje ordinario (secuencial) que han sido necesarias añadir a los diagramas para producir la justificación y explicación del teorema; es decir, el enunciado y las 8 prácticas elementales textualizadas. En la tercera columna se incluye el sistema de objetos referidos en dichas prácticas; en la primera columna incluimos la función que desempeñan en el proceso explicativo-demostrativo analítico (Cellucci, 2008). Se muestra el funcionamiento de las dualidades ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (particular-general) ligadas a la intervención de conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Tabla 3.7.

Configuración ontosemiótico de la Tarea 4

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
El texto, con lenguaje natural y diagramático, significa el enunciado de la tarea. Se pretende una prueba visual del teorema de Pitágoras.	Enunciado: *¿Qué relación existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B?*	*Conceptos*: área (extensión de una región plana), suma de áreas, comparación de áreas. *Lenguaje*: natural refiere al gráfico. Estos conceptos están particularizados al caso de las figuras del diagrama. Los cuadrados, triángulos y las relaciones entre las áreas son

		genéricos.
Se establecen las hipótesis geométricas y métricas necesarias para resolver el problema. El uso de indeterminadas confiere formalidad al razonamiento.	**1)** Aceptamos el supuesto que las figuras trazadas en A y B son cuadrados y triángulos rectángulos cuyos lados tienen como medidas de longitud las indeterminadas a, b, y c.	*Conceptos*: cuadrado, triángulo rectángulo, lado, cantidad indeterminada de longitud. Los conceptos están particularizados para el caso de las figuras dadas, las cuales refieren a cuadrados y triángulos genéricos. Las longitudes de los lados son genéricas.
Se justifica que los cuadrados exteriores de las figuras A y B son congruentes. (a+b) refiere a la suma de las medidas de los segmentos a y b.	**2)** Los cuadriláteros formados por los segmentos exteriores de las figuras en A y B son cuadrados congruentes porque sus lados tienen igual longitud (a+b).	*Conceptos*: cuadriláteros, figura geométrica, segmento exterior de una figura, congruencia de cuadrados, lados, comparación de longitud. *Proposición*: Los dos cuadrados exteriores (triángulos) son congruentes. *Argumentos*: - porque sus lados miden igual (a+b); - los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados. La proposición es general, válida no solo para los ejemplares de cuadrados dibujados y es una hipótesis esencial en el proceso explicativo.
Se justifica que los triángulos son congruentes. Es una condición necesaria para la práctica 4.	**3)** Los triángulos rectángulos trazados en A y B son congruentes porque sus lados son iguales.	*Conceptos*: triángulos rectángulos, congruencia, lados, comparación de lados. *Proposición*: los triángulos son congruentes. *Argumentos*: los triángulos son rectángulos y tienen los mismos lados. Proposición y su justificación: basada en el criterio general de igualdad de triángulos.
Se justifica la igualdad de las áreas sombreadas. Dar respuesta a la primera pregunta del problema.	**4)** Las figuras sombreadas tienen igual área porque se obtienen quitando a dos cuadrados de igual área cuatro triángulos iguales.	*Conceptos*: áreas, comparación de áreas, adición de áreas. *Proposición*: dos áreas son iguales si representan la misma extensión de superficie, aunque las superficies tengan distinta forma. Proposición y su justificación: aditividad del área.

Se pretende relacionar la parte sombreada en A con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Se expresa esta relación de manera algebraica para darle generalidad.	**5)** El área sombreada de la figura A es la suma del área de los cuadrados de lados a y b, respectivamente, $a^2 + b^2$.	*Conceptos*: áreas, adición de áreas, cuadrados, lados. *Proposición y su justificación*: basada en la aditividad del área y el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado. La propiedad y el procedimiento están aquí particularizados al caso de las figuras del diagrama, que a su vez son genéricas.
Se pretende relacionar la parte sombreada en B con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa para demostrar el Teorema de Pitágoras en la práctica 7.	**6)** El área sombreada de la figura B es el área del cuadrado de lado c, c^2.	*Conceptos*: cuadrado y su área. *Procedimiento*: cálculo del área del cuadrado a partir de su lado. Proposición y su justificación: basada en el procedimiento de cálculo del área del cuadrado a partir de la longitud del lado.
Identificación del teorema de Pitágoras.	**7)** Las regiones sombreadas se interpretan como las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo, respectivamente.	*Conceptos* de cateto, hipotenusa y área de un triángulo rectángulo. *Proposición*: es posible establecer una relación entre las áreas de los cuadrados de lados el triángulo rectángulo ($c^2 = a^2 + b^2$) *Argumento*: gráfico a partir de los diagramas A y B. *Proposición y su justificación*: basada en las operaciones 'visuales' que llevan a componer la figura 3.9. a partir de la información dada en el diagrama A y B.
Enunciado con lenguaje natural del teorema de Pitágoras y con lenguaje algebraico la fórmula como expresión sinóptica del teorema de Pitágoras. Dar respuesta al problema	**8)** Luego el área del cuadrado de la hipotenusa es la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$.	*Proposición*: Teorema de Pitágoras. *Argumentación*: a partir de la secuencia de prácticas operativas y discursivas de 1) a 7). Se interpreta en términos geométricos (relación entre medidas de áreas de figuras geométricos) y en términos aritmético-algebraicos (relación entre valores numéricos de medidas de longitud).

Un análisis epistémico de esta tarea se puede encontrar en Godino et al. (2016b).

4.5. Tarea 5. Modelización matemática

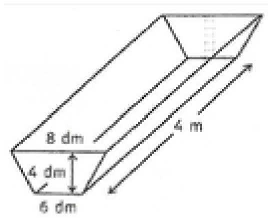
La siguiente tarea mostrada en la Figura 3.11. tiene un carácter opcional; la elaboración de su resolución es de carácter individual.

Tarea 5 optativa. Modelización matemática

Situación-problema:

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. Se trata de un prisma recto de 4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6dm, base mayor 8dm y altura 4dm.

Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300, … litros.



Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.

Consignas de trabajo

a) Resuelve la situación-problema.

b) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

c) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

d) Identifica procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea (particularización-generalización, materialización-idealización, ...).

e) Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los alumnos.

f) Enuncia variantes de la tarea e identifica los cambios que se producen en los conocimientos puestos en juego en cada variación.

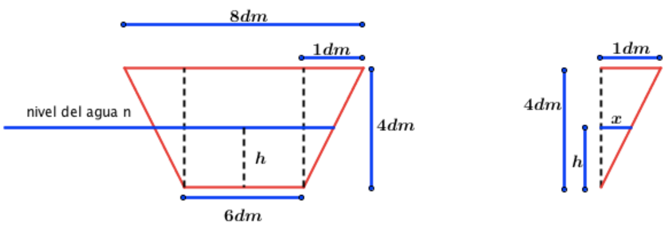
Figura 3.11. Presentación de la Tarea 5

Fuente. La tarea matemática está tomada de Segal y Giuliani (2010). Las consignas didácticas son de elaboración propia

4.5.1. Análisis ontosemiótico *a priori* de la Tarea 5

Una posible respuesta a la tarea, está dada por la siguiente secuencia de prácticas matemáticas operativas y discursivas, dividida en 8 unidades de análisis elementales; esta descomposición permite realizar análisis más detallados de la actividad matemática que se pone en juego en la resolución del problema.

1) Considero dm y dm^3 como las unidades de longitud y volumen; por lo tanto $4m$=$40dm$ y litro= dm^3
2) El volumen total del bebedero es $V = \frac{(8dm+6dm)}{2}\, 4dm. 40dm = 1120dm^3$
3) La altura h del agua del bebedero varía de $0 \leq h \leq 4$
4) El volumen de agua del bebedero $V(h)$ varía de $0 \leq V(h) \leq 1120$
5) Las bases de los trapecios son paralelas porque están determinadas por el nivel que alcanza el agua, paralelo al nivel 0. Por lo tanto, los triángulos de la derecha son semejantes porque sus bases son paralelas:



Por lo tanto sus lados son proporcionales $\frac{1}{4} = \frac{x}{h}$ luego $x = \frac{1}{4}h$

6) Así, la base mayor del trapecio de altura h es $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\, h$
7) El volumen de agua contenido en un bebedero si tuviera altura h será de:

$$V(h) = \frac{\left(6 + \frac{1}{2}h + 6\right)}{2}\, .h.40$$

$$V(h) = 240h + 10h^2$$

8) Despejo la altura en función del volumen:

$$10\, h^2 + 240h - v = 0$$

$$h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$$

9) Para cada valor de v pedido, la altura del trapecio $h(v)$ (graduación de la varilla) será:

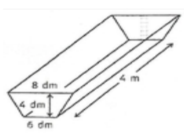
Volumen v (dm^3)	Altura de la varilla $h(v)$ (dm)
0	0
100	0.41
200	0.81
300	1.19
400	1.56
500	1.93
600	2.28
700	2.63
800	2.97
900	3.3
1000	3.62
1100	3.94
1120	4

10) Para la graduación de la varilla, se puede utilizar algún programa informático indicando las medidas obtenidas, o bien pasar las alturas a centímetro y graduarla manualmente.

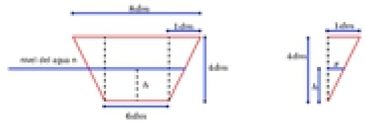
La Tabla 3.8. sintetiza el análisis ontosemiótico del enunciado y su resolución, descompuesta en las unidades de análisis descritas anteriormente. La columna de la derecha describe los objetos referidos en las prácticas matemáticas de la columna central. La columna de la izquierda indica el papel, rol o función, que desempeña cada práctica en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad. El análisis de esta tarea se puede encontrar en Giacomone (2017).

Tabla 3.8.

Configuración ontosemiótico de la Tarea 5

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Contextualizar el problema. Presentar los datos.	Enunciado En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. Se trata de un prisma recto de 4m ...  	*Elementos lingüísticos:* relación entre lenguaje natural y la representación gráfica, convenciones asumidas para identificar la dimensiones del bebedero. *Conceptos:* prisma recto y sus elementos, trapecio isósceles y sus elementos, figuras geométricas congruentes, unidades de longitud, relación entre unidades de medidas de longitud.

Presentar la situación problemática	Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua ...	*Conceptos:* volumen de un prisma recto, altura, posición vertical, unidades de volumen, pasajes de unidades, varilla de medición.
Enunciar el problema que se quiere resolver: medir de manera indirecta el volumen del agua a partir de la altura de la varilla. (modelización); construcción de una varilla como instrumento de medida.	Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.	*Conceptos:* relación entre altura y volumen de un prisma recto; relación entre altura y distancia. *Concepto de justificación* sobre un procedimiento
Fijar una unidad de medida; acción requerida para realizar operaciones.	Solución **1)** Considero *dm* y dm^3 como las unidades de longitud y volumen; por lo tanto 4*m*=40*dm* y litro=dm^3	*Conceptos:* magnitudes de longitud y volumen; unidades de longitud y volumen. *Procedimientos:* - pasar de metros a decímetros; - pasar de litros a decímetros cúbicos. *Proposiciones:* - 4m = 40dm -1litro = 1dm3 *Argumentaciones:* basada en las reglas de conversión de unidades.
Determinar el volumen de agua máximo. Acción necesaria para el paso 3.	**2)** El volumen total del bebedero es $V = \frac{(8dm + 6dm)}{2} 4dm.40dm = 1120dm^3$	*Conceptos:* cantidad de volumen total del bebedero, dimensiones y volumen de un prisma recto, dimensiones y área de un trapecio isósceles. *Procedimiento*: cálculo del volumen de un prisma recto a partir de los datos. *Proposición:* $\mathrm{V} = 1120\mathrm{dm}^3$ *Argumentación:* de tipo deductivo a partir de los datos.
Determinar los posibles valores de la altura, los cuales condicionan las funciones de las prácticas siguientes.	**3)** La altura *h* del agua del bebedero v está comprendida en el siguiente intervalo: $0 \leq h \leq 4$	*Conceptos:* función; variables dependiente e independiente, intervalo real, numero reales, extremos del intervalo, mayor igual, menor igual. *Convenio de etiqueta*: *h* *Proposición:* $0 \leq h \leq 4$ *Justificación* basada en los datos del problema.
Determinar los posibles valores del volumen, los cuáles condicionan la	**4)** El volumen de agua del bebedero *V(h)* está comprendido en el siguiente intervalo:	*Conceptos: ídem* *Convenio de etiqueta*: *V*(*h*)

práctica 8.	$0 \leq V(h) \leq 1120$	*Proposición:* $0 \leq V(h) \leq 1120$ *Justificaciones:* basadas en los datos del problema y cálculo previo.
Establecer relaciones entre la altura h del trapecio y su base mayor n. Acción necesaria para modelizar el área del trapecio en función de su altura.	**5)** Las bases de los trapecios son paralelas porque están determinadas por el nivel que alcanza el agua, paralelo al nivel 0. Por lo tanto, los triángulos de la derecha son semejantes porque sus bases son paralelas.  Por lo tanto sus lados son proporcionales $\frac{1}{4} = \frac{x}{h}$ luego $x = \frac{1}{4}h$	*Elementos lingüísticos:* lenguaje visual-diagramático y lenguaje algebraico. *Conceptos:* teorema de Thales, semejanza de triángulos, proporcionalidad. *Convenio de etiquetas*: x, n, marcas en las figuras. *Proposición:* las bases de los trapecios son paralelas. *Argumentación:* dada por la definición de nivel de agua. *Proposición:* $x = \frac{1}{4}h$ *Argumentación:* por semejanza de triángulos. *Procedimientos*: - representar y relacionar figuras geométricas para mostrar la semejanza de los triángulos; - igualdad de razones; - despeje de la variable x en función de la altura h.
Determinar las dimensión de la base mayor del trapecio para calcular su área en el paso siguiente.	**6)** Así, la base mayor del trapecio de altura h es $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\ h$	*Conceptos:* base mayor de un trapecio isósceles, función lineal. *Procedimientos*: - reemplazar valores obtenidos previamente; - suma algebraica. *Proposición:* $n = x + 6 + x = 6 + \frac{1}{2}\ h$ *Argumentación deductiva* basada en los datos obtenidos en el paso anterior.
Obtener la expresión del volumen en función de la altura del agua.	**7)** El volumen de agua contenido en un bebedero si tuviera altura h será de: $V(h) = \frac{\left(6+\frac{1}{2}h+6\right)}{2}\ .h.40$ $V(h) = 240h + 10h^2$	*Conceptos:* área del trapecio de altura h, volumen del prisma recto con base trapezoidal, función cuadrática. *Procedimiento*: simplificación de una expresión algebraica. Proposición: $V(h) = 240h + 10h^2$ *Argumentación:* deductiva basada en la definición del volumen de un prisma con base trapezoidal.
Modelizar una situación:	**8)** Despejo la altura en función	*Conceptos:* ecuación cuadrática;

<table>
<tr>
<td>expresar la altura en función del volumen.</td>
<td>del volumen:
$10\,h^2 + 240h - v = 0$
$h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$</td>
<td>soluciones de una ecuación de segundo grado.
Proposición: $h(v) = -12 + \sqrt{144 + \frac{1}{10}v}$
Procedimiento y argumentación: cálculo de una solución cuadrática.</td>
</tr>
<tr>
<td>Expresar con una tabla la respuesta al problema.</td>
<td>**9)** Dar valores a la *v*, calcular la altura *h*
<table><tr><th>Volumen v (dm^3)</th><th>Altura de la varilla $h(v)$ (dm)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>100</td><td>0.41</td></tr><tr><td>200</td><td>0.81</td></tr><tr><td>300</td><td>1.19</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td></tr></table></td>
<td>*Elementos lingüísticos:* relación entre lenguaje algebraico, aritmético y tabular.
Procedimientos:
- hallar el valor numérico de la función *h(v)* para cada valor de la variable independiente;
- construcción de una tabla;
Proposiciones:
- para 100dm^3 la altura del agua es 0.41dm;
- para 200dm^3 la altura es 0.81dm;
...
Argumentación: basada en cálculos aritméticos
Proposición: la graduación de la varilla está es la variación de la altura del agua h del trapecio.
Justificación: dada por la interpretación del modelo matemático a la realidad, tal que la altura de la varilla está representada por la altura del agua.</td>
</tr>
</table>

El análisis reflejado en la Tabla 3.8. se complementa con el reconocimiento de los procesos que se ponen en juego.

- Procesos de significación-representación:

Las prácticas y objetos ponen de manifiesto procesos de significación y representación que realiza implícitamente el sujeto epistémico que resuelve el problema. La columna central contiene los objetos ostensivos constitutivos de las prácticas elementales, los cuales son la expresión o antecedente de la función semiótica que se establece con los objetos identificados en la tercera columna y que constituyen los correspondientes contenidos o significados de dichas funciones semióticas. Se trata en este caso de funciones semióticas de tipo referencial. Pero cada práctica elemental textualizada en la columna central puede ser también interpretada en términos del papel que desempeña en el proceso resolutivo. De este modo se establece una nueva función semiótica cuyo antecedente es la práctica textualizada y el contenido o significado es el uso o papel desempeñado.

Este análisis de las funciones semióticas, y por tanto, de los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en el proceso resolutivo, no es exhaustivo. Cada práctica elemental se puede a su vez descomponer en otros elementos constituyentes, los cuales a su vez desempeñan su propio rol dentro de la práctica y refieren a otros objetos no ostensivos. En particular, se pueden también analizar, en términos de funciones semióticas, las conversiones entre los registros de representación semiótica implicados (numérico, gráfico y algebraico), así como los tratamientos que se realizan dentro de cada registro.

- Procesos de materialización-idealización:

Los objetos identificados tienen una faceta ostensiva (visible) y otra no ostensiva (ideal, abstracta), resultando complejas las relaciones que existen entre ambas (Godino, Giacomone et al., 2016b). En el caso de la Tarea 4 se trata de construir una varilla, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos, como se menciona en la columna 3. Se parte de la representación material de un objeto real (bebedero con forma de prisma) o ideal (prisma recto con base trapezoidal); así, el dibujo dado es una materialización de un objeto ideal, a partir del cual se pretende realizar la modelización matemática pedida. Otro ejemplo está en la expresión $V(h) = 240h + 10h^2$ (práctica 7), la cual moviliza una serie de objetos no ostensivos, como es la función cuadrática, variables dependientes, independientes... que si bien no están presentes al observar la expresión simbólica, son necesarios para el trabajo matemático.

- Procesos de particularización-generalización:

Se considera al bebedero como ejemplar de un cierto tipo de objeto, y se obtiene una fórmula general, para cualquier objeto que represente un prisma recto con base trapezoidal. La expresión *V(h)* es un ejemplar del tipo volumen en función de la altura. Se utilizan fórmulas generales y se aplican a los casos particulares del problema. Las proposiciones referidas a la semejanza de triángulos están particularizadas a los datos del problema y al tipo de figura geométrica (práctica 5).

– Procesos de descomposición-reificación:

La dualidad unitario-sistémico está ligada a los procesos de reificación (constitución de objetos como una totalidad) y descomposición (inversa). En este caso, se trata de un cuerpo geométrico presentado ostensivamente, que interviene como un todo unitario que debe ser descompuesto en diferentes elementos: áreas de las caras, alturas, triángulos, etc.

El problema matemático en si fue tomado del trabajo de Segal y Giuliani (2010). El mismo ha sido implementado previamente por Etchegaray, Corrales y Nahuin (2015) en un taller de formación de profesores de matemática. Para la implementación de este diseño, se ha modificado la consigna general del trabajo incorporando los ítems a), b), c), d), e) y f), dado que son los puntos centrales para realizar análisis epistemológicos donde se ponga en juego el conocimiento propio para la enseñanza de las matemáticas.

5. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA IMPLEMENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Las observaciones y anotaciones durante el desarrollo de la intervención, y el análisis de respuestas elaboradas por los futuros profesores han permitido extraer algunas conclusiones sobre las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por el diseño formativo. Dada la naturaleza interpretativa de la investigación, se discuten a continuación la implementación general y los resultados de cada fase utilizando respuestas prototípicas.

5.1. Análisis de la implementación de la Fase 1

En lo que refiere a la resolución matemática de la tarea, solo 1 estudiante dibujó la vista incorrecta del edificio desde atrás; la representación que hace refiere la cara de atrás, pero vista desde el frente, o sea, totalmente opuesta a la vista pedida. En general, la resolución matemática no fue un impedimento.

Durante el desarrollo de la primera fase de trabajo individual, los estudiantes no tenían claro cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos primarios y sus significados. Dado el proceso de visualización que involucra el enunciado (perspectiva frente-derecha del edificio) y su solución (dibujo de la vista desde atrás) los estudiantes se han centrado en los objetos visuales perceptivos. Por ejemplo, reconocen como conceptos intervinientes y emergentes en la resolución: cubo, cuadrado, volumen, altura, giro, sistema de referencia, (...), pero ningún alumno refiere por ejemplo a las proyecciones ortogonales.

La noción de proposición resulta conflictiva en esta tarea; por ejemplo, el estudiante **E1** sugiere que una proposición es un supuesto del que se parte; para el estudiante **E2**, la tarea es muy sencilla de resolver ya que la representación visual de la solución no contiene matemáticas.

> **E1.** La única proposición es la asunción de que las piezas son cúbicas.

> **E2.** Las proposiciones se aplican para demostrar teoremas. Esta resolución no tiene demostración, es simplemente dibujar lo que uno ve (...) Es un problema de dibujo técnico, no de matemáticas.

Los conflictos identificados se reflejaron en la puesta en común siendo un vehículo para manifestar, discutir y compartir la manera de entender dichas entidades y el papel que desempeñan en la práctica matemática resolutiva. El objetivo era que los estudiantes compartieran la visión pragmatista y antropológica sobre el conocimiento matemático que postula el EOS, según la cual un concepto se concibe como una entidad funcional (que desempeña un papel en la práctica matemática), cuyo significado es fijado por una regla o definición; y una proposición es un enunciado al que se debe asignar un valor lógico de verdadero o falso.

En la consigna seis de esta tarea (Figura 3.3.), se les pide a los estudiantes que elaboren al menos dos definiciones diferentes para cubo como concepto geométrico, lo cual causó cierto desconcierto en muchos estudiantes, por ejemplo:

> **E3.** Existe un solo cubo geométrico, por lo tanto, tiene una única definición.

Luego, se pide a los estudiantes que indiquen otros usos o significados en contextos no geométricos asociados a la palabra cubo. Esto representó un reactivo para explicitar la diversidad de significados que puede tener un concepto o una proposición dependiendo del contexto en el que participan, así como aspectos relativos al lenguaje, tales como la polisemia o la homonimia.

Otro aspecto importante a destacar es la dialéctica compleja que existe entre los objetos ostensivos (representaciones) y no ostensivos (inmateriales, mentales o ideales) que se manifiesta en los diálogos registrados; así, por ejemplo, los estudiantes **E4** y **E5** responden a la pregunta del profesor *¿Qué propiedades del cubo no se pueden representar empíricamente?* de la siguiente manera:

> **E4.** Todas las propiedades del cubo se pueden representar empíricamente, menos las caras que están por detrás. Por ejemplo (señala el dibujo): esto es un cubo y lo estoy representando empíricamente; éstas son las aristas, éstas son las caras, (...).
>
> **E5.** Habría que medir las aristas y calcular las distancias entre caras opuestas. De esta manera se puede comprobar que, si son iguales, entonces es posible representarlo empíricamente.

La dualidad ostensivo-no ostensivo tiene un papel esencial en el EOS, ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos (Font et al., 2013). Esta reflexión es necesaria porque permite a los futuros profesores tomar conciencia de que tales objetos son entendidos como las reglas de uso de los lenguajes visuales o analíticos que los representa.

En la última cuestión planteada, se pide a los estudiantes que enuncien la misma tarea utilizando solamente lenguaje natural. La mayoría de los alumnos no supo expresar esta respuesta de manera correcta. Esto permitió discutir sobre los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. De esta manera, el diálogo y la interacción cobran un papel clave en la intervención formativa.

5.2. Análisis de la implementación de la Fase 2

Al final de la sesión 1, luego de la discusión general, se entrega a los estudiantes el artículo titulado *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricados en la visualización espacial y el razonamiento diagramático* (Godino et al., 2015a), en el cual, a partir de las investigaciones sobre visualización y diagramas de diversa naturaleza, se plantea la problemática del análisis de tareas desde una aproximación ontosemiótica. La lectura se presenta como un material de apoyo, obligatoria para la sesión de clase siguiente, ya sea individual o grupal, a realizarse en horario no presencial.

La presentación del documento y su discusión tuvieron lugar durante los primeros 60 minutos de la sesión 2. Salvo dos estudiantes, el resto de los participantes había leído el artículo por lo que la discusión resultó dinámica.

La lectura resultó útil para clarificar las problemáticas sobre qué se entiende por objeto matemático, al menos una posible definición, junto con su clasificación de objetos propuesta por el EOS. Se trata de alentar a los futuros profesores en conocer y dominar herramientas útiles para el análisis de tareas.

En el documento se presenta la herramienta *configuración ontosemiótica* y hace operativa a partir del análisis de las posibles soluciones a un problema matemático. En este sentido, los estudiantes manifestaron problemas con la comprensión de determinados términos teóricos y aprovecharon para discutir, por ejemplo, ¿qué se entiende por epistemológico? ¿qué significa ontológico? Otras preguntas fueron relacionadas directamente a su condición de futuro profesor: ¿cómo me sirve esto para dar clases?

La discusión centró su atención en la importancia de las prácticas que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problemas matemáticos. También, en el papel de las representaciones en educación matemáticas y la potencial utilidad de tener en cuenta la trama de objetos no ostensivos implicados en el uso de tales representaciones (Font, Godino y Contreras, 2008). En la presentación dada por el profesor, se recupera la técnica de análisis ontosemiótico, se explica la descomposición de un enunciado y de su solución como unidades de análisis básicas; se discute cómo analizar dichas prácticas en función de los objetos referidos en ellas, por un lado, y del uso o rol que tienen dichas prácticas para comunicar la solución, por el otro.

Esta claro que no basta solo conocer herramientas teórico-metodológicas, es necesario ponerlas a funcionar de manera que se inicie a los estudiantes en el desarrollo de su competencia. Para esto, la Fase 2 finaliza con la presentación de las consignas instruccionales, que funcionarán como guía para la realización de las tres actividades siguientes.

5.3. Análisis de la implementación de la Fase 3

La Fase 3 comprende el desarrollo de dos tareas. Durante el resto de la segunda sesión, los estudiantes trabajaron en grupos con la Tarea 2, durante 40 minutos, interrumpida por discusiones globales que surgían en el transcurso de la actividad. Los 40 minutos restantes se utilizaron para iniciar la discusión y puesta en común.

Durante la sesión 3, se emplean 40 minutos para resolver en grupos la Tarea 3 y 1 hora para la discusión grupal. La puesta en común fue bastante extensa, dado que afloraron distintos tipos de soluciones y por ende, distintos tipos de análisis. Como cierra de esta Fase, el profesor realiza una síntesis de los aportes realizados durante estas 3 sesiones; además se presenta la Tarea 4, de carácter individual, como una acción formativa obligatoria para cerrar la primera etapa del ciclo de diseño y que representa un instrumento de evaluación de los logros de la competencia pretendida por los futuros profesores. A continuación se describen cada una de las tareas aplicadas en esta fase.

5.3.1. Discusión de la Tarea 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

Durante la resolución en equipos de la Tarea 2 (Figura 3.4.) se ha podido constatar que los estudiantes fueron capaces de identificar todos los conceptos y procedimientos implicados en la respuesta; sin embargo, se evidencian casos en donde la noción de proposición sigue siendo confusa, por ejemplo, un estudiante identifica como proposición: *la definición de cuadrado*; es claro que la definición de cuadrado no es ni verdadera ni falsa.

En la puesta en común de esta tarea se ha podido compartir que para que el estudiante realice una verdadera actividad matemática es necesario pedirle la justificación del procedimiento basado en el uso del software, ya que de ese modo debe explicitar los conocimientos matemáticos implicados en la resolución. El uso de los procedimientos que permite GeoGebra, tal como se muestra en el enunciado de la Tarea 2, no requiere poner en juego, de manera explícita, proposiciones, ni las definiciones y propiedades de los objetos geométricos, quedando enmascaradas sus características de conceptos figurales (Fischbein, 1993). Se requiere la acción del profesor solicitando la justificación explícita de que la secuencia de pasos pone en juego los conceptos y propiedades que garantizan la validez de los enunciados.

Por ejemplo, en la Tarea 2 (Figura 3.4) se presenta la secuencia para la construcción del cuadrado ABCD; el segmento AC, que se muestra en la Figura 3.12., es congruente con AB, no porque ‘se ven en la pantalla de igual longitud’ sino porque es el radio de la circunferencia con centro A y radio AB, y todos los radios de una circunferencia son congruentes entre sí.

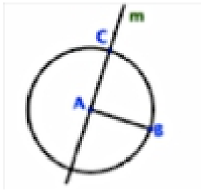


Figura 3.12. Construcción de dos segmentos perpendiculares

Necesariamente el cuadrilátero ABCD de la Figura 3.13. (presente en el enunciado de la Tarea de la Figura 3.4.) es un cuadrado porque se cumplen las condiciones de su definición: los cuatro ángulos son rectos y los cuatro lados congruentes. “Un cuadrado no es una imagen construida. Es una forma controlada por su definición (aunque puede ser inspirado por un objeto real)” (Fischbein, 1993, p. 141).

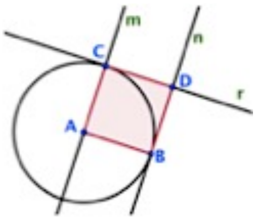


Figura 3.13. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

Este planteamiento es compartido no solo para el uso de GeoGebra, sino también para el trabajo matemático con representaciones y visualizaciones en general. Como afirma Sherry, lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, es decir, los objetos no ostensivos involucrados en tales representaciones, los cuales no son visible en los propios diagramas. “Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes” (Sherry, 2009, p. 68).

Shin y Lemon (2008), plantean como cuestión central, el problema de la generalidad:

El diagrama que aparece en una demostración de Euclides proporciona, un ejemplar único del tipo de configuraciones geométricas a las que se refiere la demostración. No obstante las propiedades que parecen cumplirse en el diagrama son tomadas como que se cumplen en todas las configuraciones del tipo dado. ¿Qué justifica este salto de lo particular a lo general? (sec. 4.1)

Por último, el uso de GeoGebra como parte de la tarea es un aspecto positivo que permite reflexionar sobre los procesos de *particularización* (concreción de los conceptos a las figuras particulares) y *generalización* (las figuras concretas son representantes de una familia de figuras semejantes) a través de las diferentes funciones de uso (Pierce y Stacey, 2013, p. 327; Fahlgren y Brunström, 2014, p. 287).

5.3.2. Discusión de la Tarea 3: Fracciones y diagrama de áreas

Con el desarrollo de la Tarea 3 (Figura 3.5.), se trata de que los futuros profesores analicen una solución dada por un estudiante (Figura 3.14.) a un problema sobre fracciones. La reflexión sobre las acciones matemáticas realizadas es un componente clave ya que "no se trata solo de lo que uno hace, sino también por qué lo hace" (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008, p. 348).

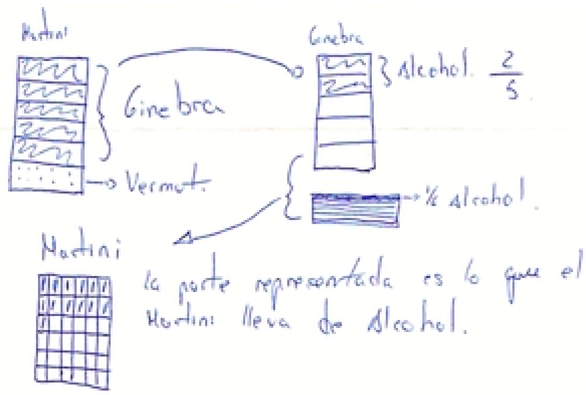
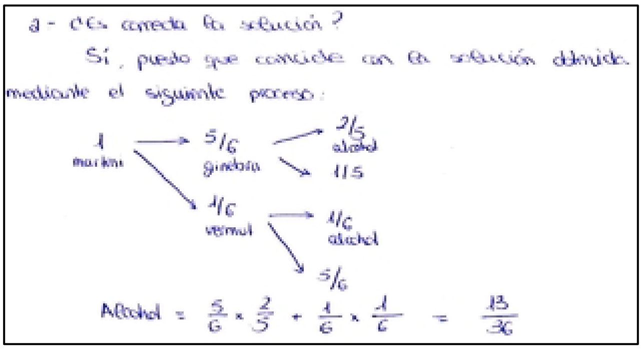


Figura 3.14. Solución diagramática dada por un sujeto (Tarea 3)

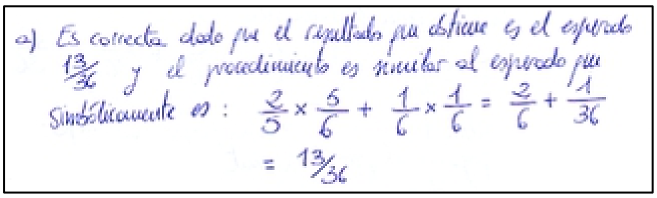
Las respuestas que los futuros profesores dieron a esta tarea, indican algunos avances en el reconocimiento y la identificación de los diferentes objetos involucrados en la tarea, es decir, el análisis de su competencia ontosemiótico. EL sujeto que resuelve la tarea, basando su razonamiento en el uso de diagramas de áreas, lleva a cabo procesos de materialización de los conceptos y de las operaciones con fracciones implicadas en el enunciado. Finalmente, la solución es encontrada mediante un procedimiento aritmético de conteo de unidades de fracciones, representadas en el último diagrama de la Figura 3.14. mediante un proceso de idealización. Sin embargo, la parte de *justifica la respuesta* no resultó fácil, obteniendo como resultado, un ambiente de discusión adecuado para confrontar ideas.

En general, los participantes resuelven el problema utilizando otros diagramas y luego, comparan los resultados obtenidos con la solución de la Figura 3.14. No son capaces de elaborar una justificación apoyándose en el diagrama de áreas, ya que representar la suma y multiplicación de fracciones con este tipo de representaciones, requiere un trabajo matemático poco habitual. Radford (2003, p. 43) pone de manifiesto el problema de la imposibilidad de cualquier acceso directo a los objetos matemáticos y la consiguiente necesidad de medios para que resulten *perceptibles*. De esta manera, los estudiantes necesitan recurrir a otros tipos de lenguajes, como se ejemplifica con las respuestas siguientes:

E6.



E7.



Cada uno de estos procedimientos utilizados para resolver el problema moviliza objetos matemáticos diferentes; esto genera consecuencias importantes si el objetivo es analizar la actividad matemática implicada en una respuesta dada (en un procedimiento determinado). El punto es que "lo que importa mucho más que los diagramas en sí mismos, tiene que ver con lo que los estudiantes hacen con ellos" (Rivera, 2011, p. 222).

Varios autores en el campo de la formación de profesores han discutido la resolución de este tipo de tareas sobre fracciones. Por ejemplo, Cohen (2004) utiliza un problema sobre multiplicación y división de fracciones proponiendo el uso de diversos diagramas, con maestros en ejercicio. La autora muestra el verdadero desafío que implica la justificación de la resolución de estos problemas, y señala que el uso de los distintos tipos de diagramas es una oportunidad para llamar a la *reflexión profesional*.

A propósito de las respuestas **E6** y **E7**, se comparte en clase el papel de los diagramas en el razonamiento matemático, desde una perspectiva Wittgeinsteiniana. Se observa que el significado del *concepto de fracción* que se moviliza de acuerdo al diagrama que se use, es diferente. En el de áreas (Figura 3.14.) la fracción interviene como operador de una cantidad de área, mientras que en el diagrama en árbol **(E6)** la fracción es la razón entre las partes de un todo genérico que se divide en partes iguales y las partes que se individualizan. Además, los procedimientos involucrados en diagramas de áreas tienen rasgos de menor generalidad que en el diagrama en árbol.

La complejidad en el uso de diagramas de áreas por parte de los futuros profesores era de esperar. El alumno que dio la respuesta al problema, era parte de un proceso instruccional en el cual se estudiaba la resolución de problemas utilizando diversas estrategias diagramáticas. Pero, los participantes de este estudio no fueron instruidos para esto, por tal motivo hemos encontrado estas deficiencias matemáticas particulares, en la que los estudiantes se apoyaron de otros medios diagramáticos para resolver efectivamente la tarea y comprender la respuesta del alumno. Pantziara et al. (2009) señalan que los estudiantes en situaciones de resolución de problemas perciben que las tareas con y sin diagramas son diferentes a pesar de tener las mismas características estructurales básicas. Así, a pesar de la complejidad esperada, consideramos que este tipo de tareas ayudan a enfatizar el papel crucial de las estrategias efectivas de enseñanza para ayudar a los estudiantes a usar diagramas de manera efectiva.

Al igual que en la tarea anterior, se insiste en el papel fundamental que tienen las justificaciones en el uso de situaciones diagramáticas; de manera concreta, las acciones realizadas con el diagrama del Martini (respuesta del alumno), son explicativas del proceso de resolución para alguien que conoce las convenciones asumidas, así como los objetos no ostensivos implicados. Sin embargo, Dörfler (2005) reconoce que los diagramas pueden constituir un registro de representación autónomo para representar y producir conocimiento matemático en ciertos campos específicos, pero no es completo; necesita ser complementado por el lenguaje conceptual-verbal para expresar nociones. En términos ontosemióticos, es necesario que el resolutor se apoye en una secuencia de prácticas discursivas y operativas que permita justificar y explicar dichas acciones.

5.4. Análisis de la implementación de la Fase 4

Si bien hay una observación y evaluación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes, la Tarea 4 es utilizada como evaluación final del proceso de estudio (Figura 3.8.). Para favorecer la reflexión, el trabajo autónomo y la responsabilidad en el estudio, se planifica el plazo de una semana para que los estudiantes entreguen la resolución de la misma.

El reconocimiento del sistema de prácticas, como unidades de análisis básicas para resolver la tarea, varía de acuerdo a cada sujeto, pero han sido competentes en el uso de la técnica de análisis ontosemiótico. El análisis de las respuestas permite observar que los estudiantes han sido capaces de identificar los conceptos y los procedimientos implicados en las prácticas matemáticas; sin embargo, persisten las dificultades con las nociones de argumento y proposición resultando compleja su identificación. A continuación, se muestran algunos casos concretos como ejemplos prototípicos de respuestas; estas confusiones ya se habían manifestado en la tarea inicial:

> **E8.** Proposición: partimos del supuesto que las figuras sombreadas son cuadrados y triángulos rectángulos.
>
> **E9.** Proposición: definición de área de un cuadrado.

El comentario de un estudiante, se refiere al uso (significado) que se le asigna al término proposición en las tareas, permite reflexionar sobre la importancia de aplicar herramientas que promuevan el desarrollo de competencias específicas de un profesor de matemáticas:

> **E10.** En todas las tareas he tenido una dificultad con el término proposición puesto que se refería a resultados concretos del ejercicio, y desde el punto de

vista matemático una proposición es algo que siempre se cumple y tiene una demostración.

Este estudiante está condicionado por el uso que se hace en las clases de matemáticas universitarias, y en los textos correspondientes, de los términos *proposición, propiedad y teorema*. En ese contexto, la matemática es un producto terminado, un sistema de conceptos y proposiciones demostradas. Esta concepción puede impedir comprender la actividad que realiza un matemático, sea un profesional académico o un escolar, cuando se enfrenta a un problema. La práctica matemática comprende, no solo los momentos finales de sistematización y generalización de los resultados, sino que incluye también los momentos de indagación, de ensayos, pruebas y refutaciones, en los cuales el estudiante trata de formular los enunciados y aportar argumentos sobre su verdad o falsedad. Este tipo de respuestas son de esperar, tal como informan Ramos-Rodríguez et al. (2017) en su investigación con profesores en formación, quien afirman que los mismos profesores, al reflexionar reconocen su falta de conocimiento especializado dado que "su experiencia con el contenido matemático contrasta marcadamente con su estrecho conocimiento de contenido pedagógico" (p. 94).

En lo que respecta a la Tarea 5, tarea de carácter optativo, solo 20 de 52 estudiantes pertenecientes al grupo A entregaron su resolución incluida en el portafolio final. Los 15 estudiantes fueron competentes en la resolución matemática del problema, ítem a), describiendo las prácticas matemáticas operativas y discursivas necesarias. Los participantes se han empeñado en mostrar soluciones creativas para construir la varilla pedida, mostrándose comprometidos en la solución del problema. Por ejemplo, un participante presentó la modelización de la situación usando GeoGebra, mostrando cómo varía la altura del agua contenida en el prisma en función de su volumen, señalando los límites máximos y mínimos de acuerdo a los datos del problema.

Al completar la tabla, ítem b), no hemos encontrado dificultades en el reconocimiento de la intencionalidad de cada práctica (primera columna); el análisis de los objetos referidos en las prácticas (tercera columna) ha sido bastante rico, observándose un proceso reflexivo profundo en las respuestas de los estudiantes, sin embargo, encontramos nuevamente algunas dificultades. A continuación, destacamos algunos ejemplos.

– *Conceptos*:

Los futuros profesores no mostraron confusiones en el reconocimiento de conceptos. Solo en un caso, el cual se muestra en la Figura 3.15.(a), encontramos un análisis superficial respecto al reconocimiento de conceptos, en comparación con el análisis *a priori* realizado en la Tabla 3.8., señalado en la Figura 3.15.(b). Además, este participante muestra confusión con la noción de procedimiento, pero solo en el caso del análisis del enunciado.

Tiene la intención de enunciar el problema matemático, a partir de una modelización.	Encuentra la manera de preparar dicha varilla ...	Conceptos: distancia, trazar Procedimientos: encontrar la manera de preparar la varilla

(a)

Enunciar el problema que se quiere resolver ...	Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.	*Conceptos:* relación entre altura y volumen de un prisma recto; relación entre altura y distancia. *Concepto de justificación* sobre un procedimiento

(b)

Figura 3.15. Comparación entre la respuesta de un estudiante y la respuesta *a priori*

– *Proposiciones:*

7 de 20 futuros profesores confunden proposiciones con argumentaciones, procedimientos o simplemente, con enunciados. Algunos ejemplos prototípicos los agrupamos en la siguiente Figura 3.16.

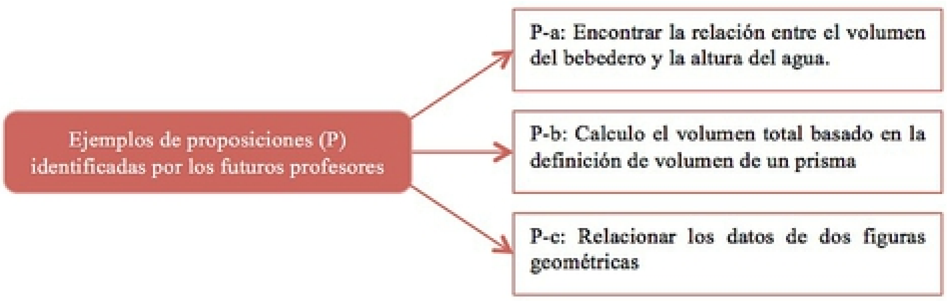


Figura 3.16. Tipo de respuestas no competentes en el reconocimiento de proposiciones

En lo que respecta al reconocimiento de algunos procesos, los estudiantes han sido competentes en su análisis respecto al análisis profesional realizado *a priori*. Destacan en sus respuestas principalmente los procesos de particularización-generalización y materialización-idealización. Observemos el caso de la Figura 3.17.; el futuro profesor reconoce los procesos que se ponen en juego, buscando relaciones entre todos ellos; además, reflexiona sobre el hecho que no es necesario repetir en cada práctica los procesos que se involucran ni el tipo de lenguaje manifestado.

Práctica que tiene como intención expresar la situación matemática que se quiere modelizar	a) Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.	Los conceptos necesarios son: cuerpo geométrico: prisma; relación entre su altura y volumen; parámetros; altura, distancia, instrumento para medir, unidad de medida Para encontrar la manera de preparar el instrumento de medida (la varilla), el problema pide una justificación del procedimiento.
Quiero destacar que la interpretación del problema implica un proceso de descomposición-reificación, materializalición-idealización y procesos de particularización-generalización, que no los iré colocando en el análisis porque sería repetir mucho. Es necesario primero interpretar el bebedero como un cuerpo geométrico ideal, un prisma recto perfecto, que está materializado en un bebedero y que debe descomponerse en un conjunto de otros objetos para su resolución. Se debe particularizar sus partes como la cara frontal (trapecio isósceles), todos ellos objetos ostensivos, y aplicar fórmulas y definiciones a esos objetos pero que en realidad, esas fórmulas se pueden aplicar a otros objetos de manera general. Es decir, aplico fórmulas generales a casos particulares.		

Figura 3.17. Relación entre los distintos procesos que participan en la tarea

– *Proposiciones, procedimientos y argumentaciones:*

Los estudiantes no presentan dificultades al reconocer proposiciones cuando enuncian un resultado, o bien procedimientos, con sus respectivas argumentaciones; por ejemplo la respuesta dada en la Figura 3.18 por un futuro profesor cuando resuelve la tarea.

Práctica necesaria para poder realizar todas las operaciones	**Resolución:** 1) Pongo todas las dimensiones del prisma en la misma unidad de medida. En este caso elijo ponerlas todas en dm, por lo que transformo la altura del prisma que está en metros a decímetros multiplicando por 10, obteniendo que la altura del prisma son 40 dm.	**Conceptos**: unidades de longitud magnitudes de longitud Procedimiento: pasaje de m a dm multiplicando por 10 **Proposición**: obtenemos que 4m equivale a 40dm El procedimiento aplicado y la proposición se pueden argumentar por las reglas que rigen la conversión de unidades.

Figura 3.18. Reconocimiento competente de proposición, procedimiento y argumento

En este caso, es posible observar que el estudiante reconoce de manera competente los conceptos implicados.

Con este análisis hemos podido constatar que el tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico.

6. ANÁLISIS RETROSPECTIVO DEL CICLO DE DISEÑO

Es propio de las investigaciones orientadas al diseño instruccional la aplicación de varios ciclos de investigación mediante los cuales los medios y estrategias que se diseñan e implementan se van mejorando progresivamente. En cierto modo, la investigación realizada en el primer ciclo puede no ser del todo adecuada, a pesar de que sea precedida de un estudio preliminar y de un análisis a priori. El análisis retrospectivo es esencial entonces para poder introducir cambios fundamentados en los sucesivos ciclos, que permitan progresivamente obtener ingenierías más idóneas y ajustadas a las restricciones normativas. Así, la noción de idoneidad didáctica (en sus diversas componentes e indicadores) y el desarrollo de la dimensión normativa basados en el EOS se revelan especialmente útiles en la fase de análisis retrospectivo, puesto que orientan el reconocimiento de puntos de mejora en el siguiente ciclo de rediseño y experimentación (Godino, Rivas et al., 2014).

6.1. Encuesta de opinión

En esta sección se utiliza la noción de idoneidad didáctica, con su sistema de criterios, componentes e indicadores (Godino, Batanero, Font, Contreras y Wilhelmi, 2016) para reflexionar y valorar la experiencia docente descrita anteriormente. Estos criterios se clasifican en seis facetas, las cuales caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica (significados institucionales matemáticos), ecológica (contexto socio-profesional y curricular), cognitiva (significados personales), afectiva (factores emocionales), interaccional (interacciones personales) y mediacional (recursos didácticos).

Con la finalidad de recoger información adicional para este análisis, los estudiantes tenían que cumplimentar una encuesta de opinión anónima sobre los siguientes aspectos, para cada tarea:

1) Claridad de la tarea y de las consignas.
2) Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor).
3) Grado de motivación e interés suscitado por las actividades.
4) Nivel de aprendizaje logrado.
5) Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas.

Cada ítem debía ser valorado según una escala de [1-5], siendo 1: valor mínimo y 5: valor máximo. Además, los estudiantes podían añadir cualquier comentario que considerasen pertinente.

6.2. Idoneidad didáctica del proceso formativo

A continuación, se utilizan los componentes e indicadores que asocia Godino (2013a) a cada faceta, como una guía de reflexión, para valorar el proceso instructivo llevado a cabo en esta primera etapa. Se incluyen los resultados obtenidos de la encuesta de opinión.

6.2.1 Idoneidad epistémica y ecológica

Se han propuesto tareas que requieren poner a funcionar diversos modos de expresión matemática (verbal, visual y simbólica), incluyendo situaciones donde el alumno tiene que argumentar, interpretar y representar. Sería deseable incorporar variaciones en las consignas y generar relaciones entre los diversos contenidos. La actividad de *resolver problemas*, provoca que los estudiantes movilicen sus conocimientos previos para dar respuesta a la pregunta, ¿qué matemáticas se pone en juego en la resolución de la tarea?

La respuesta a esta pregunta, se concreta con la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos; esto es, la competencia de análisis ontosemiótico de los futuros profesores.

La lectura propuesta introduce a los estudiantes en el uso de la herramienta *configuración de objetos y procesos;* además, analiza la importancia del razonamiento visual para enfatizar la dialéctica entre las facetas ostensiva-no ostensiva de los objetos matemáticos. A pesar de ello, el lenguaje involucrado en el documento no ha resultado claro respecto a su formación previa. Si bien es necesario superar estos momentos en la discusión grupal, podría ser un aspecto a mejorarse para la implementación de un nuevo ciclo.

Por otro lado, la acción formativa implementada es coherente con los objetivos del contexto institucional dado que se trata de futuros profesores y, por tanto, se debe asegurar la competencia para su desarrollo profesional. Asimismo, se trata de innovación basada en la práctica reflexiva, siendo una actitud favorable hacia el desarrollo profesional del profesor (Pochulu et al., 2016; Ponte, Mata-Pereira, Quaresma y Vélez, 2017).

- “El conjunto de talleres aplicados fue muy completo y útil para mi formación. La parte inicial era difícil para trabajar de manera individual, principalmente con las preguntas de ¿qué es un concepto?... y la lectura no fue muy fácil de comprender al inicio, pero fue importante para reconocer la importancia de la visualización en la educación matemática y para mostrar ejemplos del tipo de análisis que teníamos que hacer nosotros. Luego con la resolución de la primera tarea [Tarea 2] todo empieza a tener sentido. Cada tarea fue importante para destacar aspectos de nuestra formación: por ejemplo, la importancia de justificar una respuesta, la importancia en saber identificar la matemática escondida en las representaciones, la importancia de *entrenar* el uso de representaciones, etc.”

6.2.2. Idoneidad interaccional y mediacional

Al inicio de cada sesión, el profesor recuerda los objetivos de la clase y hace una presentación adecuada del tema. Las explicaciones e institucionalizaciones están apoyadas en el uso de diapositivas que permiten gestionar el tiempo y sistematizar los conocimientos pretendidos.

El trabajo grupal favoreció el diálogo y comunicación entre los estudiantes, “siendo un aspecto positivo que contribuye mejor al aprendizaje de los alumnos” (Escobar, Romero y Mier, 2015, p. 269). El profesor y observador tuvieron un rol activo con el fin de generar reactivos en los participantes y obtener información relevante. Por ejemplo, el pequeño fragmento **E4** y **E5** permiten sacar a la luz los conocimientos previos de un grupo de estudiantes sobre la naturaleza del objeto geométrico cubo.

En la puesta en común los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar, aspectos valorados positivamente por los propios participantes, al igual que destacan Ponte et al. (2017, p. 21) en sus resultados con futuros profesores; asimismo, la mayoría de ellos participa en la discusión de las respuestas.

El factor tiempo es quizás el recurso más importante que ha de considerarse para una gestión adecuada, pero sin duda, dada la complejidad que requiere este tipo de competencia, no ha resultado suficiente; “el uso de una herramienta compleja como es la configuración epistémica/cognitiva de objetos primarios necesita de un tiempo de apropiación más largo y probablemente, de un proceso de instrucción específico y sostenido a lo largo de varias sesiones” (Pochulu et al., 2016, p. 90). La investigación está condicionada por el ambiente real de clase, propio de las investigaciones de diseño. Por ejemplo, las respuestas de la evaluación formativa final no tuvieron lugar de discusión en el aula; sería necesario incorporar momentos de reflexión sobre las dificultades detectadas e incorporar el diálogo y la negociación de significados.

El uso de recursos manipulativos y tecnológicos son aspectos que deben mejorarse. Los siguientes comentarios recuperados de la encuesta, permiten avanzar en esta dirección:

- [Tarea 1] “incorporar materiales manipulativos (tecnológicos, dada su presencia en las aulas de hoy) que permitan resolver la tarea y analizar otros procedimientos posibles”.
- Hubiese sido más significativo para mi, resolver la tarea con GeoGebra [Tarea 2] porque no conocía ese software. Además es difícil estar evaluando el desarrollo de una tarea realizada en un programa, sin estar involucrado con el programa.

- [Tarea 4] Sugiero incorporar la discusión de esta tarea porque se pueden utilizar recursos manipulativos muy interesantes y, en consecuencia cambiarían los objetos matemáticos que habíamos identificado en el primer análisis.

6.2.3. Idoneidad cognitiva y afectiva

En el desarrollo de la *primera fase* los alumnos tuvieron muchas dificultades para el reconocimiento de objetos y significados, manifestando la complejidad del análisis; esto no es de extrañar dado que se trata de estudiantes con un amplio conocimiento matemático *per-se* y poco conocimiento didáctico (especializado) (Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Giacomone, 2015). Es posible encontrar comentarios en la encuesta que reflejan esta idea, relacionada con la baja idoneidad cognitiva *a priori* y la baja idoneidad afectiva:

- Era necesario instruir previamente sobre: que se entiende por concepto, proposición, argumento.
- La lectura era difícil de comprender así de primeras, y no comprendí el lenguaje específico.

Para las demás tareas se observa un progreso cognitivo-afectivo; los estudiantes toman conciencia de progresar en su desarrollo profesional:

- La Tarea 2 me ha resultado motivadora: desde una acción simple como la ‘construcción de un cuadrado’ es posible crear una situación de verdadero aprendizaje, lo cual también implica un gran desafío para nosotros, los profesores (...).

Respecto a la Tarea 3, al igual que los resultados señalados por Pochulu y cols. (2016), los participantes manifiestan la importancia en el dominio de herramientas que ayuden a comprender dificultades de aprendizajes:

- Me pareció muy interesante analizar la forma de respuesta de un alumno ante un problema dado. Nunca me lo hubiera planteado y a partir de ahora lo haré.
- Esta tarea fue todo un desafío. Primero porque ya no se trataba solo del análisis del problema, sino de la respuesta de un alumno real. Segundo, porque la solución no era fácil de evaluar; si bien parecía claro que el alumno no dominaba el uso de las representaciones con diagramas de área, ¿cómo era

posible comprender su conocimiento matemático? Esto me hace pensar de los desafíos que hay que enfrentar cuando haya que comprender la competencia matemática que adquieren nuestros alumnos.

Proponer el análisis de soluciones reales, resultó una actividad interesante, tal como sugieren las investigaciones relacionadas con el análisis de tareas. Como señaló un participante, en el estudio de Simpson y Haltiwanger (2017), futuro profesor de secundaria: "Honestamente, me refiero a que esta es la primera vez que hago esto [notando profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes], lo cual es aterrador porque voy a ser un maestro y se supone para voy a hacer eso todo el tiempo" (p. 353). Además, el desarrollo de las Tareas 2 y 3 proporciona información sobre cómo los futuros profesores aprenden sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

En el análisis de la Tarea 4 aún se registraron confusiones que ya habían tenido lugar en el proceso de estudio; si bien esto era de esperar, esas confusiones podrían haber sido tratadas en una puesta en común, lo cual indica que la idoneidad cognitiva *a posteriori* no ha sido del todo adecuada. Sería deseable incluir una fase de discusión de los resultados de la evaluación, mostrando ejemplos claros sobre las dificultades detectadas y los distintos tipos de objetos matemáticos implicados.

6. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se ha descrito, explicado y valorado un diseño aplicado en un curso de formación inicial de profesores de matemática, para desarrollar la llamada *competencia de análisis ontosemiótico*. La herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, propuesta en el marco del EOS, ha permitido iniciar a los estudiantes en el logro del desarrollo de dicha competencia siendo el factor tiempo un condicionante fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al igual que señalan otros autores (Llinares, Fernández-Verdú y Sánchez-Matamoros, 2016) los resultados indican que el aprendizaje de los futuros profesores no fue uniforme ya que en el transcurso de las actividades, realizaban análisis más profundos.

El análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas que se propone permite centrar la atención en la dialéctica que existe entre los objetos ostensivos y los objetos ideales o abstractos (esto es, objetos no ostensivos) implicados necesariamente en la solución comprensiva y competente de las tareas. Se muestra que el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas, como también el progreso en la tarea.

Un desafío es determinar el posible rango de orientación epistemológica y el tipo de conocimiento matemático que una herramienta puede permitirse, y elegirlas apropiadamente para situaciones pedagógicas (Leung y Bolite-Frant, 2015, p. 195). En este sentido, los diferentes problemas matemáticos elementales en torno a diferentes tipos de visualizaciones y uso de diagramas (similares a las tareas presentadas) se están experimentando con diversos grupos de estudiantes. Los resultados y las reflexiones proporcionadas nos permiten considerar que estas actividades son un reto para los futuros profesores, siendo conflictiva la identificación y la discriminación de los diferentes tipos de objetos y significados. Esto se debe a que los estudiantes en general no están habituados a un cierto nivel de actividad metacognitiva.

El factor tiempo es, quizás, la variable más importante que ha de considerarse para una gestión adecuada del proceso de enseñanza y aprendizaje, pero sin duda, dada la complejidad que requiere este tipo de competencia, no se dispone de tiempo suficiente, siendo una limitación en la implementación formativa. Por ejemplo, las respuestas de la evaluación final no pudieron ser discutidas en el aula; en este sentido, sería necesario incorporar momentos de discusión sobre las dificultades detectadas, así como momentos para la negociación de significados. Se considera necesario implementar más ciclos, ampliar el diseño y mejorar la aplicación.

A pesar de la cantidad y difusión de trabajos sobre la formación de profesores, el cambio significativo continúa siendo un desafío para muchos profesores (Chapman, 2014). El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.

CAPÍTULO 4.

ESTUDIO 2: DESARROLLO DE COMPETENCIA PARA EL ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos la segunda pregunta de investigación:

> *PI-2. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para la reflexión sistemática sobre la práctica docente?*

En educación matemática han proliferado las investigaciones que proponen la reflexión sobre la práctica docente como una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Partiendo de considerar al docente como un profesional reflexivo (Schön, 1983; Elliot, 1993), en diversos trabajos se ha desarrollado y aplicado la noción de idoneidad didáctica como una herramienta de reflexión sobre un proceso de estudio en la formación de profesores (Breda y Lima, 2016; Breda et al., 2017).

En este capítulo se describe, analiza y evalúa la implementación de un diseño formativo para iniciar a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en el desarrollo de su competencia para el análisis y reflexión didáctica. La planificación de la experiencia, su implementación y evaluación, están basados en la aplicación de herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico, particularmente, en la noción de idoneidad didáctica. Así, el objetivo principal de la acción formativa que aquí se describe, es que los futuros profesores conozcan y sean competentes en la aplicación de dicha herramienta.

En esta experiencia, se diseña un dispositivo formativo que contempla las posibilidades ofrecidas por episodios de clases video-grabadas. De esta manera, los estudiantes en formación tienen "la oportunidad de desarrollar un tipo diferente de conocimiento para la enseñanza; conocimiento no de qué hacer a continuación, sino más bien, el conocimiento de cómo interpretar y reflexionar sobre las prácticas de aula" (Sherin, 2004, p. 14). Sin embargo, destacamos que, en este trabajo, la videograbación de clases queda en un segundo plano (Stockero, 2008). Éstas deben ser un mero recurso que puede facilitar el acceso al formador y futuros profesores a *fragmentos de realidad educativa* en toda su complejidad, y desarrollar en los estudiantes en formación competencias docentes específicas mediante el análisis didáctico sistemático de las diversas facetas, componentes y factores condicionantes.

En la sección 2 de este capítulo se describe el diseño didáctico planificado e implementado como parte de un curso de máster. En la sección 3 se justifica el diseño a partir de la presentación de su estudio preliminar, en el cual, se recogen los resultados obtenidos de la aplicación de talleres formativos piloto con diversos grupos de participantes. En la sección 4 se muestra el análisis a priori de las tareas implementadas, el cual es necesario para guiar las discusiones en clases y comprender las dificultades potenciales y efectivas de los participantes. En la sección 5 se presentan los resultados en términos de nivel de aprendizaje logrado; mostramos ejemplos prototípicos de respuestas que permiten poner en evidencia dificultades, desafíos y avances en su competencia de reflexión. En la sección 6 se presenta el análisis retrospectivo del diseño didáctico. Finalmente, en la sección 7 se incluyen las conclusiones y síntesis del capítulo.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CICLO DE FORMATIVO

2.1. Contexto y participantes

El contexto y los participantes de este estudio son los mismos que para el estudio 1, con la diferencia que participa un número menor de futuros profesores. La experiencia formativa se llevó a cabo en el marco de un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2015-2016, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Como se ha mencionado anteriormente, esta asignatura se cursa durante el último mes del máster, por lo tanto, se supone que los futuros profesores han adquirido ciertos conocimientos didácticos.

Para este estudio hemos utilizado 3 sesiones de clases de 2,5 horas presenciales cada una de carácter teórico-práctico y exposiciones por parte de los estudiantes. Por reglamento curricular, se estiman 10 horas empleadas para actividades no presenciales, tanto individuales como grupales y tutorías individuales a pedido del estudiante.

Los participantes de este estudio fueron 27 futuros profesores del máster que estaban inscritos en el curso A, a diferencia del primer estudio, en el cual se trabajó con ambos cursos A y B, debido a motivos administrativos.

Propio de este tipo de máster universitario, el perfil académico de los participantes es variado, con formación consolidada en el área de la matemática (Gráfico 4.1.).

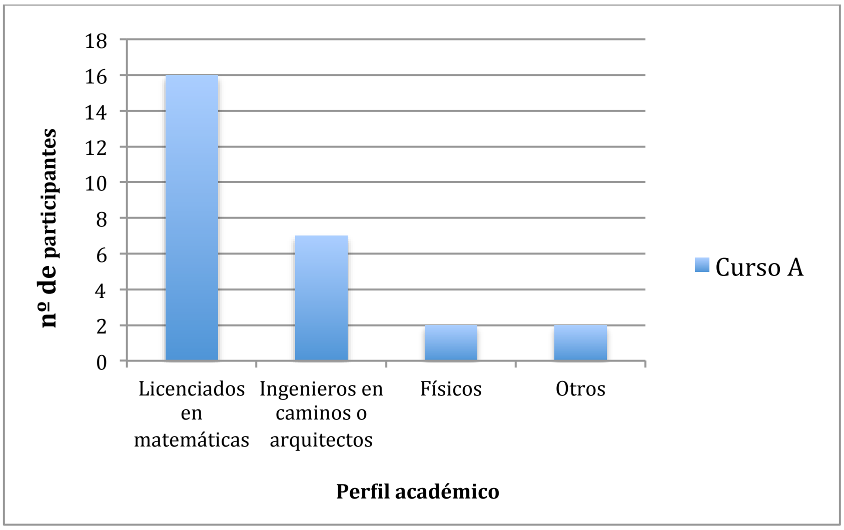


Gráfico 4.1. Perfil académico de los futuros profesores

La experiencia se aplica en un ambiente natural de clases, de acuerdo a los tiempos curriculares preestablecidos y obstáculos reales, con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly et al., 2008). En este sentido, se planifica una experiencia formativa, parte de un ciclo formativo más amplio, que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia.

El equipo de investigación está formado por el profesor del curso —formador de profesores y director de la tesis doctoral— y la doctoranda que desempeña el papel de observadora participante. El análisis e interpretación de los datos recogidos son realizados conjuntamente en el seno de ese equipo.

2.2. Recogida y análisis de los datos

Como instrumentos de recogida de información se dispone de los siguientes elementos:

- registro de las observaciones de los investigadores (profesor del curso y doctoranda) sobre las distintas instancias de trabajo en clase: trabajo grupal, individual, diálogos y puesta en común;
- grabación en audio de todas las sesiones del curso (favoreciendo la interpretación de las observaciones registradas y el desarrollo del curso en la etapa de análisis retrospectivo);
- respuestas escritas de las actividades grupales realizadas en clase;
- material final escrito, a modo de portafolio, entregado por los estudiantes de manera individual, con dos semanas de plazo.

El análisis de los datos es cualitativo y está orientado a la identificación de *prácticas didácticas significativas* sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

En la fase de implementación, se pone en práctica el uso sistemático de la herramienta *idoneidad didáctica,* como objetivo educativo, a partir de directrices explícitas. Dichas consignas, son necesarias porque permiten orientar al profesorado en formación hacia una reflexión más elaborada del proceso de estudio (Breda y Lima, 2016). El sistema de criterios e indicadores empíricos para cada faceta es una guía de análisis y reflexión sistemática que aporta conocimiento para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (dimensión meta didáctico-matemática, Figura 2.5).

Para el análisis retrospectivo del ciclo de diseño se utiliza también la herramienta *idoneidad didáctica,* pero como una herramienta metodológica, con un objetivo propio para la investigación. En este sentido, a partir de sus componentes e indicadores, la idoneidad didáctica aporta criterios para valorar las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, instruccional y mediacional, que afectan el desarrollo de este estudio.

2.3. Fases y metodología de la implementación

La implementación está organizada en 4 fases que incluyen distintos recursos didácticos y momentos de trabajo individual, grupal y de evaluación final. Se utilizan 3 sesiones de clase de tipo presencial para las primeras 3 fases y para la cuarta fase no se requiere asistencia. La disposición de fases de implementación se muestra en la Figura 4.1.

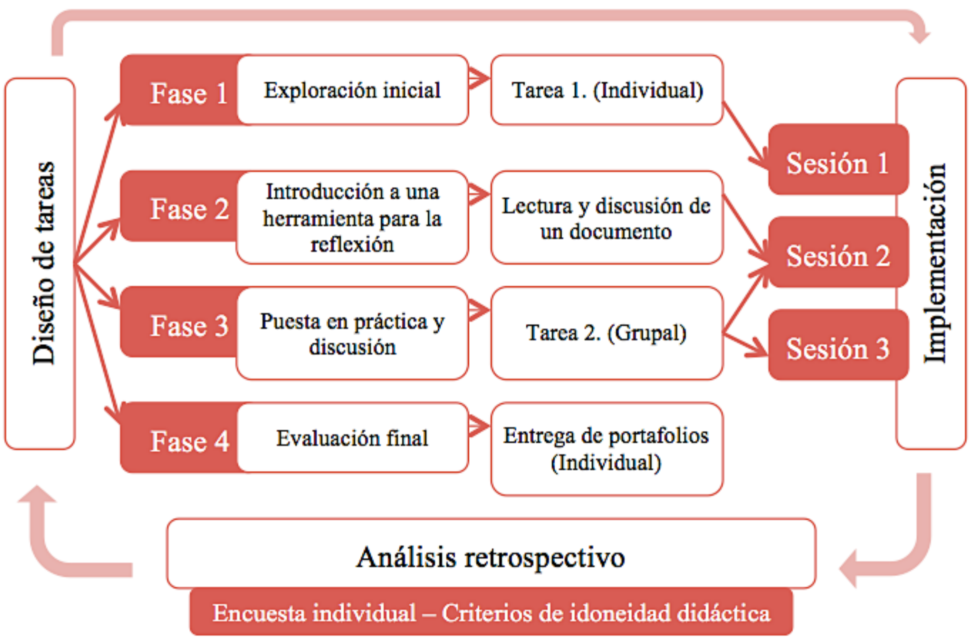


Figura 4.1. Estructura del segundo estudio del ciclo formativo

Dado que el contexto de investigación es siempre el mismo, y que este segundo estudio se aplica seguidamente al primer estudio, las sesiones de clase, se corresponderían, en número, con la sesión 4, sesión 5 y sesión 6. Se recuerda que, en total, se utilizan 6 sesiones de clase presenciales.

Las técnicas docentes utilizadas combinan:

- lectura y discusión de documentos;
- presentaciones por parte del profesor;
- participación en talleres de resolución de problemas;
- análisis didáctico;
- tutoría y supervisión de los alumnos.

2.3.1. Fase 1. *Exploración inicial de los significados personales*

La experiencia formativa comprende una primera fase de exploración inicial de los significados personales de los futuros profesores, sobre las distintas facetas que pueden intervenir en un proceso de estudio. El objetivo es que los estudiantes para profesor elaboren una primera reflexión sobre posibles características ideales de una clase de matemática.

Se pretende que trabajen de manera individual o en parejas durante la primera sesión presencial, con la primera tarea (ver Anexo 2) basada en la lectura y discusión de un documento sobre las características de una clase ideal de matemáticas, tomado de las orientaciones curriculares del *National Council of the Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000, p. 3): *Una visión de las matemáticas escolares*.

La Tarea 1 funciona como una guía de reflexión, siendo un eje motivador para discutir las ideas previas, creencias y concepciones que tienen los futuros docentes sobre las matemáticas y los complejos procesos de su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, se pretende involucrarlos en una reflexión sobre las diferentes formas de enseñar y los distintos posicionamientos didáctico-matemáticos, para finalmente provocar una evolución de sus ideas.

2.3.2. Fase 2. *Introducción a una herramienta para la reflexión*

Al final de la primera sesión, se propone a los estudiantes la lectura de un artículo en horario extra-académico y su posterior discusión durante la sesión 2.

La segunda fase comprende la lectura (previa) y discusión de un documento específico que permite organizar las distintas ideas que se pretende que surjan de la Tarea 1, titulado *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, 2013a).

En este documento se presenta la noción de idoneidad didáctica y un sistema de indicadores de idoneidad didáctica para las distintas facetas implicadas en un proceso de enseñanza y aprendizaje, indicando las concordancias entre los criterios seleccionados y los propuestos por diversos autores y marcos teóricos. La herramienta idoneidad didáctica está alineada, y en cierto modo concuerda, con los Estándares para la Preparación de Profesores de Matemáticas de la Asociación de Educadores de Maestros de Matemáticas —*Association of Mathematics Teacher Educators*— (AMTE, 2017), en el sentido de que es "útil y posible identificar criterios de buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas sobre las cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educadores matemáticos" (Godino, Giacomone, Font, Pino-Fan, 2018, p. 69).

2.3.3. Fase 3. *Puesta en práctica y momentos de institucionalización*

Luego de discutir el artículo, durante la segunda parte de la sesión 2 y durante toda la sesión 3, se propone a los estudiantes ver un fragmento de una clase de matemáticas de educación secundaria.

Este episodio fue seleccionado de internet, siendo material de libre acceso, en el que es posible observar 10 minutos de una clase impartida en México. En el video se identifican dos etapas; en la primera de ellas, los alumnos trabajan en grupos resolviendo problemas relacionados al cálculo de alturas inaccesibles, seguido de la puesta en común en el conjunto de la clase; en la segunda etapa, trabajan con objetos reales (árboles, postes,...) a partir de la medida de sus sombras.

Después del visionado del episodio de clase, se entrega la Tarea 2 de reflexión (ver Anexo 2) en la que se pretende que los futuros profesores trabajen de manera grupal, guiados por momentos de discusión conjunta e institucionalización.

2.3.5. Fase 5. *Evaluación final*

Si bien, en cada instancia de la implementación se evalúa el progreso de la competencia para el análisis de la idoneidad didáctica de los futuros profesores, en esta fase se utiliza la el portafolio como instrumento de evaluación final.

Se pretende que los estudiantes trabajen de manera individual, en horario no presencial, completando de manera crítica las tareas realizadas durante las 3 sesiones de clases. Se pone un plazo de dos semanas para presentar los trabajos realizados en formato portafolio.

3. ANTECEDENTES: ESTUDIO PRELIMINAR

Como ya se ha anticipado en el Capítulo 1, investigaciones recientes han encontrado que analizar el pensamiento, actitudes, comportamientos, de los estudiantes a través de la observación y reflexión profesional puede aumentar el conocimiento pedagógico y de contenido de los profesores en formación inicial y continua (Mason 2002; Philipp, Ambrose, Lamb, Sowder, Schappelle y Sowder, 2007). Los aportes en el campo de la formación de profesores de matemáticas muestran una tendencia en centrar las investigaciones hacia aspectos que permiten al profesor, a partir de cierta información, describir qué sucede y por qué sucede, en determinados contextos educativos; brindan herramientas que permiten al profesor ser competente para describir, explicar y, en algunos casos, valorar su práctica, asumiendo que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos, pero también debe ser competente en el uso de esos conocimientos (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013; García, Sánchez y Escudero, 2007; Llinares y Krainer, 2006; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015; Ponte, 2011; Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte, 2016).

Muchas de estas propuestas, no determinan pautas para que los participantes, ya sean estudiantes para profesor, profesores en ejercicio o formadores de profesores, valoren la pertinencia y propongan mejoras de la situación a la cual refieren, ya sea una clase observada o implementada, una programación de la clase, un programa educativo, un libro de texto, o el propio currículo. Básicamente, no abordan instrumentos que guíen de manera específica la reflexión profesional *sistemática* de un proceso de estudio; esto es de esperar ya que la reflexión profesional es un concepto difícil de alcanzar (Hodgen y Johnson, 2004):

> En términos prácticos, no está claro cómo la reflexión de los profesores se puede facilitar o alentar. De hecho, existe considerable evidencia de que activar a los profesores para reflexionar está lejos de ser una tarea sencilla. (Hodgen y Johnson, 2004, p. 224)

Ponte (2011), en su investigación sobre formación de profesores, proporciona un ejemplo de la importancia de utilizar situaciones reales de aula, a través del uso de episodios grabados, para reflexionar sobre el papel del profesor observado y la incidencia de dicha reflexión en la propia práctica. Para esto utilizan una tarea didáctica compuesta de tres momentos: en primer lugar se pide a los profesores realizar un análisis *a priori* de un problema matemático; se les pide analizar también, con qué objetivos del plan de estudios se identifica dicho problema y se alienta a los profesores a pensar cómo se podría usar este problema en la clase de matemáticas, considerando aspectos como la administración del tiempo empleado y posibles dificultades de aprendizaje. Este primer momento finaliza con la discusión colectiva. En un segundo momento, se les presenta a los estudiantes un episodio de clase video-grabado, así como su transcripción. Se les pide concretamente a los profesores: que identifique y analicen los roles asumidos por el profesor del episodio; que identifiquen y analicen las intervenciones del docente. Por último se les pregunta qué decisiones importantes asume el docente durante este episodio? El tercer momento es el de la reflexión final en la que se alienta a los profesores a contrastar sus expectativas iniciales (análisis a priori) con lo que realmente vieron en el video. Consideramos que esta tarea tiene un alto potencial tanto para el desarrollo profesional como para la formación inicial de profesores. De hecho, el autor destaca la forma en que los maestros participaron activamente en la discusión siendo una tarea bastante exitosa, principalmente por el interés que promovió en los participantes para mirar una situación real de clases. Sin embargo, es posible que el carácter general de las consignas dejen de lado aspectos importantes que se deben tenerse en cuenta al analizar un proceso educativo. Consideramos que es posible contemplar la inclusión de consignas específicas que obtengan como resultado una reflexión más elaborada.

Breda y Lima (2016, p. 28) señalan que, una manera de llegar a una reflexión más elaborada, que permita la mejora de la enseñanza de las matemáticas, consiste en el uso de directrices explícitas, como las que ya se han aplicado en diversas propuestas de investigación y formación de profesorado en el marco de la teoría de la ID. Específicamente, desde el EOS se considera que el profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemáticos; de esta manera, implementar ciclos de diseño o intervenciones formativas, se convierte en el paso siguiente para promover el desarrollo profesional del profesor de matemáticas como profesionales reflexivos.

Haciendo frente a este problema, los indicadores de idoneidad didáctica se presentan como un recurso para la reflexión del profesor y del investigador en las fases de diseño, implementación y evaluación de experiencias de enseñanza (Seckel y Font, 2015; Breda, Font, Lima y Pereira, 2018).

4. DISEÑO DE TAREAS. ANÁLISIS *A PRIORI*

Como ya se ha mencionada para el Estudio 1, en el EOS se da un papel central al análisis *a priori* de las tareas, en el que se formulan las soluciones esperadas para las mismas. En este apartado se describirán con detalle las actividades planificadas e implementadas en la Fase 1 (Tarea 1) y Fase 3 (Tarea 2); se debe entender que dicho análisis corresponde al sistema de prácticas realizadas para resolver la tarea por un sujeto epistémico y constituye, por tanto, un análisis de tipo institucional. El análisis de las respuestas concretas dadas por estudiantes caracterizaría el significado personal atribuido (análisis cognitivo), expuesto en la sección 5 de este capítulo.

En Godino y Neto (2013) se proponen algunas actividades didácticas para desarrollar en cursos de formación inicial con el fin de reflexionar sobre algunos principios didáctico-matemáticos básicos e introducir criterios de idoneidad didáctica en el estudio de las matemáticas; entre esas actividades se encuentra la Tarea 1 y la Tarea 2 “ante el problema de sistematizar los criterios necesarios para el logro de una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de alta calidad” (Godino y Neto, 2013, p. 4). Para este diseño, hemos modificado algunas consignas de la Tarea 2, con el fin de provocar en los futuros profesores, respuestas específicas.

4.1. Tarea 1. Reflexión sobre una clase de matemáticas

La Tarea 1 se desarrolla en la primera sesión de clases y es un reactivo que permite aflorar las ideas previas de los estudiantes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, favoreciendo así el progreso de sus ideas.

Se pide realizar un análisis de contenido de un texto breve “Una visión de las matemáticas escolares” (NCTM, 2000, p. 3), el cual permite fijar la atención y promover la reflexión sobre las características ideales de una clase de matemáticas. El texto seleccionado se indica en la Figura 4.2. y las consignas de la Tarea 2 se muestran en la Figura 4.3.

Lectura individual

Una Visión de las Matemáticas Escolares (NCTM 2000, p. 3)

> "Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión. La tecnología es un componente esencial del entorno. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje."

Figura 4.2. Descripción de una clase imaginaria de matemáticas

Fuente. NCTM (2000, p. 3)

Tras la lectura individual del texto, se propone a los estudiantes que trabajen de forma individual, o en parejas, y que elaboren una reflexión conjunta, seguida de su presentación y discusión en el seno de la clase.

Tarea 1. Reflexión sobre una clase de matemáticas

A continuación, se presenta un texto que describe una clase de matemáticas imaginaria.

1) Lee el texto con atención. Subraya los puntos que consideres especialmente atractivos en la descripción.

2) Indica las características de las matemáticas que se consideran valiosas en el texto.

   2.1. Explica por qué se consideran valiosas y si compartes esa opinión.

2.2. ¿Qué otros rasgos de las matemáticas consideras valiosos desde el punto de vista educativo?

3). Indica las características del aprendizaje matemático que se consideran valiosas en el texto.

3.1. Explica por qué se consideran valiosas y si compartes esa opinión.

3.2. ¿Qué otros rasgos del aprendizaje consideras valiosos desde el punto de vista educativo?

4). Indica qué características se mencionan en el texto relacionadas con los aspectos afectivos en el estudio de las matemáticas.

4.1. Explica por qué se consideran valiosos dichos aspectos y si compartes esa opinión.

4.2. ¿Qué otros rasgos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consideras valiosos desde el punto de vista de la afectividad?

5) Indica los modos de interacción entre profesor y estudiantes que se consideran valiosos en el texto.

5.1. Explica por qué se consideran valiosos dichos modos de interacción y si compartes esa opinión.

5.2. ¿Qué otros modos de interacción en el aula consideras valiosos para optimizar el aprendizaje matemático?

6) Indica qué características de la clase imaginaria de matemáticas se consideran valiosas relativas al uso de recursos tecnológicos.

6.1. Explica por qué se consideran valiosas dichas características y si compartes esa opinión.

6.2. ¿Qué otros aspectos del uso de recursos consideras valiosos para favorecer el aprendizaje matemático?

7) Identifica los factores externos a la clase que se mencionan en el texto como condicionantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

7.1. Explica por qué se consideran factores condicionantes y si compartes esa opinión.

7.2. ¿Qué otros factores consideras que condicionan el logro de una clase ideal de matemáticas?

Figura 4.3. Presentación de la Tarea 1

Esta actividad sirve al formador para motivar la reflexión sobre algunos principios básicos a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre los cuales existe un cierto grado de consenso en la comunidad de educadores matemáticos.

4.1.1. Análisis *a priori* de la Tarea 1

La visión de la educación matemática descrita en *Principios y estándares: una visión de las matemáticas escolares,* publicado por *National Council of Teachers of Mathematics*

(NCTM, 2000), resulta muy ambiciosa, pero está idealizada. Se presenta una base común de matemáticas para ser aprendidas por todos los estudiantes, entendiendo que este enfoque no implica que todos los estudiantes son iguales. Los estudiantes exhiben diferentes talentos, habilidades, vínculos, logros, necesidades e intereses en matemáticas, sin embargo, todos los estudiantes deben tener acceso a las matemáticas de más alta calidad.

En búsqueda de esta utopía, una de las finalidades del documento es el servir como recurso a los profesores, formadores e investigadores educativos, para pensar y mejorar la calidad de los programas de instrucción matemática. En definitiva, se plantean seis principios que, aunque no sean específicos de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas (NCTM, 2000, capítulo 2):

1) Equidad. La excelencia en la educación matemática requiere equidad-unas altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.
2) Currículo. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.
3) Enseñanza. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien.
4) Aprendizaje. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
5) Evaluación. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
6) Tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Estos principios deben ser tenidos en cuenta para “el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de unidades didácticas, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores" (Godino, Batanero y Font, 2004, p. 12). En nuestro caso, el objetivo es provocar en los participantes, la necesidad y la búsqueda de determinados componentes e indicadores de calidad.

Se parte de una guía instructiva (Figura 4.3.) con la cual se pretende que los futuros profesores identifiquen en el texto frases representativas, sobre seis aspectos críticos:

- *ítem 2.* Indica las características de las matemáticas que se consideran valiosas.
- *ítem 3.* Indica las características del aprendizaje matemático
- *ítem 4.* Indica qué características se mencionan en el texto relacionadas con los aspectos afectivos en el estudio de las matemáticas.
- *ítem 5.* Indica los modos de interacción entre profesor y estudiantes que se consideran valiosos en el texto.
- *ítem 6.* Indica qué características de la clase imaginaria de matemáticas se consideran valiosas relativas al uso de recursos tecnológicos
- *ítem 7.* Identifica los factores externos a la clase que se mencionan en el texto como condicionantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Estos ítems, no son elegidos al azar, como se muestra en la Figura 4.4. Fueron pensados para iniciar a los estudiantes en el reconocimiento de las "seis facetas" que afectan, en términos del EOS (Godino, 2013a, p. 116), un proceso de estudio.

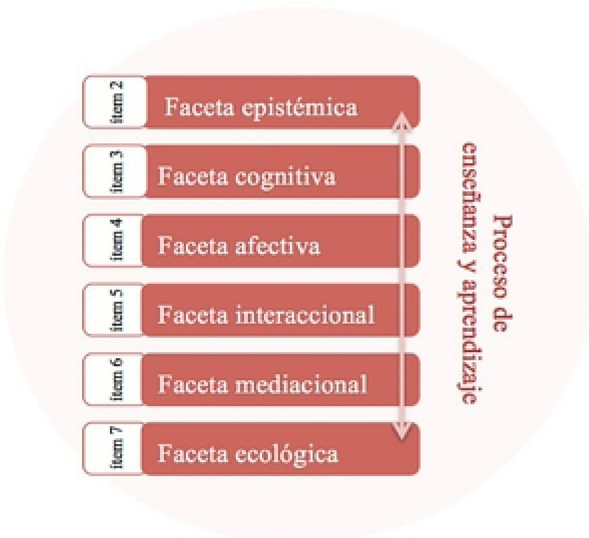


Figura 4.4. Facetas que afectan un proceso educativo

Destacamos algunas posibles frases identificadas en el texto:

- *Faceta epistémica.* "Las tareas se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos".
- *Faceta cognitiva.* Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan.
- *Faceta afectiva*. "Los alumnos se comprometen activamente en su aprendizaje", "valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje".
- *Faceta interaccional*: Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas.
- *Faceta mediacional.* "La tecnología es un componente esencial del entorno".
- *Faceta ecológica.* "El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión".

Estas seis facetas proporcionan un sistema de referencia para valorar los procesos educativos; sin embargo, resulta necesario contar con más herramientas que permitan valorar cada facetas. Así, con la integración de los sub-ítems se pretende que los estudiantes justifiquen y profundicen en cada una de ellas, con el fin de direccionarlos hacia una discusión conjunta sobre los componentes e indicadores relevantes que se asocian a cada faceta. Por ejemplo, con los sub-ítems del tipo:

- "Explica por qué [las características mencionadas] se consideran valiosas",

se espera que los futuros profesores no tengan las herramientas necearías para valorar de manera crítica y sistémica el por qué los aspectos (frases) mencionadas son consideras valiosas.

- "Qué otros rasgos consideras valiosos",

se espera que los participantes mencionen aspectos relacionados con su propia experiencia.

Mediante la realización de las cuestiones anteriores ponemos al futuro profesor ante el problema de sistematizar los criterios necesarios para el logro de una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de alta calidad. Estas preguntas son motivadoras para introducir un sistema de componentes e indicadores que funcione como guía para orientar el proceso de reflexión del profesor sobre una práctica de enseñanza. Por ejemplo, para el caso de la valoración de la faceta ecológica, Godino (2013a, p. 126) propone 5 componentes generales con sus respectivos indicadores, tal como se muestra en la Tabla 4.1.:

Tabla 4.1.

Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	– Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	– Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. – Integración de nuevas tecnologías (ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	– Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	– Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	– Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Se pretende también reflexionar sobre la complejidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, dadas las interacciones sistémicas entre las distintas facetas y componentes. Así, por ejemplo, el uso de tecnologías para la enseñanza introduce modos de interacción diferentes y motivación en el aprendizaje de los alumnos (mediacional-interaccional-afectiva).

El objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje está en la base de cualquier esfuerzo de investigación e innovación. Sin embargo, la complejidad de tales procesos nos lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Ciertamente no disponemos de recetas de cómo enseñar (Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018) pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes.

De acuerdo con Hiebert, Morris y Glass (2003, p. 202) “la preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva".

La noción de idoneidad didáctica se presenta en la Fase 2 a partir de la lectura del documento: "Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (Godino, 2013a) junto con el sistema de indicadores que la desarrollan, puede ser una herramienta de trabajo para el investigador, pero también para el profesor. Luego, en la Fase 3 se hace operativa esta herramienta a partir del desarrollo de la Tarea 2.

4.2. Tarea 2. Reflexión didáctica

Luego de la lectura y discusión del documento propuesto en la Fase 2, se propone a los futuros profesores centrar la atención en la observación y análisis de un fragmento de una clase de matemáticas de educación secundaria. Este video se encuentra en internet y es sugerido por Godino y Neto (2013) como una ventana para observar un episodio real de clases en la formación inicial de profesores.

Lo importante de esta fase no es el *video* como instrumento, sino la clase que se observa mediante el recurso tecnológico de la videograbación, y todavía más importante son las herramientas teórico-metodológicas que ayudan a identificar prácticas didácticas significativas en el devenir del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este estudio, se utiliza la Tarea 2 (Figura 4.5.) como guía para el análisis reflexivo del episodio.

A partir del visionado, se espera que los futuros profesores trabajen en grupos reducidos con la posterior discusión en el seno de la clase de las respuestas elaboradas.

Tarea de reflexión didáctica

En el siguiente link encontramos un video de una clase de matemáticas: http://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8.

Después de visionado el vídeo, y trabajando en equipos, elaborar un informe respondiendo a las siguientes cuestiones:

1) Descripción: *¿Qué sucede?*

a. ¿Qué contenido matemático se estudia?

b. ¿Qué significados caracterizan el contenido estudiado?

c. ¿Cuál es el contexto y nivel educativo en que tiene lugar la clase?

d. ¿Qué hace el profesor?

e. ¿Qué hace el alumno?

f. ¿Qué recursos se utilizan?

g. ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos para poder abordar la tarea?

h. ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan?

i. ¿Qué normas (regulaciones, hábitos, costumbres) hacen posible y condicionan el desarrollo de la clase?

2) Explicación: *¿Por qué sucede?*

a. ¿Por qué se estudia ese contenido?

b. ¿Por qué se usa un problema realista para estudiar el contenido?

c. ¿Por qué actúa el docente de la manera en que lo hace?

d. ¿Por qué actúa los alumnos de la manera en que lo hacen?

3) Valoración: *¿qué se podría mejorar?*

Emitir un juicio razonado sobre la enseñanza observada en las siguientes facetas, indicando algunos cambios que se podrían introducir para mejorarla:

a. Epistémica (contenido matemático estudiado)

b. Ecológica (relaciones con otros temas, currículo)

c. Cognitiva (conocimientos previos, aprendizaje, …)

d. Afectiva (interés, motivación, …)

e. Interaccional (modos de interacción entre profesor y estudiantes)

f. Mediacional (recursos usados)

4) *Limitaciones de la información disponible:*

Para discutir en clase: ¿qué información adicional sería necesario tener para que el análisis realizado fuera más preciso y fundamentado?

Figura 4.5. Presentación de la Tarea 2 (guía para los futuros profesores)

En la Tabla 4.2. se incluye la transcripción del video para facilitar el análisis de las respuestas dadas por los participantes.

Tabla 4.2.

Transcripción del episodio de video centrada en las voces de los participantes

Representación escrita del discurso de la clase	
1P	Buenas tardes a todos

2As	Buenas tardes
3P	Miren, el día de hoy vamos a trabajar con una consigna nueva. Estamos en el eje: forma espacio y medida, con el tema de formas geométricas y con el subtema (pone énfasis) de semejanza.
4P	Vamos a trabajar de una manera normal, como siempre, como lo hemos estado haciendo.
5P	Está aquí con nosotros el profesor Martín Eduardo Martínez Morales, que toma evidencias de las clases que hacemos y de la forma en cómo trabajamos. A si que trabajen ustedes de una manera normal, como siempre lo han hecho.
6P	Esperemos que el día de hoy saquemos esta consigna.
Entrega de consignas [minuto 00:52]	
7P	Ahora si, pueden darle vuelta su hoja y van a leer la consigna
Lectura de consignas [01:07]	
8P	A ver. Ya jóvenes. ¿Ya leyeron la consigna?
9P	¿Alguien de ustedes me puede decir, qué es lo que vamos a hacer en esa consigna?
10P	Señor Legarre
11A	En base al dibujo que se encuentra ahí, calcular la altura.
12P	Muy bien, ¿qué dicen los demás? ¿Todo bien?
13As	Si
Verbalización [01:49]	
14P	Van a calcular la altura de un árbol que aparece en un dibujo.
15P	¿Estamos bien?
16As	Si
17P	Adelante. Hagan y calculen la altura del árbol como se da en la información.
18P	Ahora. Ahora. Miren.
Uso de las Tic's [02:18]	
19P	Ahí en la pizarra, en el proyector, estamos viendo ya el problema que estamos resolviendo.
20P	Utilicen los conocimientos adquiridos en las consignas anteriores, porque ahí, ustedes calcularon el valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos.
21P	También obtuvieron el valor de proporcionalidad.
Situaciones didácticas [02:52]	
Alumnos hablando español [03:18]	
22P	¿Quedó claro?
Alumnos hablando dialecto Nahuatl [03:40]	
23P	Acá tienen dos caminos. Ustedes cuando resuelven el problema pueden utilizar un método, ¿si?, pero también utilicen el otro para verificar si están en lo correcto.
24P	Lo más correcto es que sea "esto" (el profesor señala el folio del alumno).
Puesta en común [03:44]	
25A	La respuesta del problema es 5.23 *(Ella explica el procedimiento que hicieron escribiendo la cuenta en la pizarra)*
26A	Entonces hicimos una regla de tres, y X es 5.23
27P	Les dio lo mismo por las dos formas. Muy bien

28P	Entonces la altura del árbol es 5.23
29	*La clase sale a trabajar al patio de la escuela*
30P	'Esto', por 'esto', entre 'esto' y te da la altura del poste. *(El profesor le explica a unos alumnos y le escribe en el cuaderno)*
31A	Ah!
32P	Ahora ustedes van a hacer lo mismo. Ya teniendo ustedes el metro, van a buscar un arbolito y van a medir su sombra.
Actividades complementarias [06:41]	
33E	Maestro, tenemos que presentar ante la supervisión escolar evidencias de los trabajos que se realizan actualmente con la reforma secundaria. Nos gustaría que comentara brevemente lo que están haciendo y que nos diga de qué grado es este grupo que tiene, qué consigna está trabajando y qué parte de la matemática se está viendo en este momento.
34P	El grupo que está aquí es el grupo de 3ºA.
35P	Estamos trabajando sobre semejanza de triángulos. Entonces, algunos de los ejercicios que marca la reforma es la semejanza. Entonces estamos viendo algunos problemas sobre eso.
36P	Salimos aquí al campo para hacerlo más práctico para que los alumnos tengan la evidencia concreta de lo que es cálculo de alturas de algunos árboles / postes, que muy difícilmente podemos ver hacia arriba.
37P	Pues con la semejanza de triángulos se resuelve este problema
38P	Lo que están haciendo es medir la sombra de algunos objetos y en base a eso, sacan la altura.
39E	Muy bien maestro, muchas gracias. Estas son las consignas desarrolladas actualmente por la reforma, ¿estamos viendo alguna consigna en especial?
39P	Claro que si, la semejanza de triángulos

Nota. A: Alumno/a; As: Alumnos; E: Entrevistador; P: Profesor

La discusión entre pares tuvo lugar durante el desarrollo de toda la tarea. La puesta en común del apartado *1) Descripción* y *2) Explicación* se realizó durante la segunda sesión. A partir de la información recogida en esos dos apartados, los estudiantes trabajaron en equipos durante la última sesión de clase, en el apartado *3) Valoración* y luego se realizó la puesta en común final.

El análisis *a priori* realizado por el equipo de investigación, permite apoyar la puesta en común realizada en el seno de la clase, así como prevenir posibles conflictos de aprendizaje.

4.2.1. Análisis a priori de la Tarea 2

Aunque el segmento de video solo permite vislumbrar una pequeña parte del desarrollo de la sesión de clase, es útil para provocar una reflexión inicial sobre las diversas dimensiones de un proceso de estudio matemático y señalar conocimientos didáctico-matemáticos que pone en juego el profesor.

A continuación, presentamos el análisis *a priori* de la Tarea 2, en el que se incluyen posibles intervenciones que el formador puede utilizar para guiar las respuestas dadas por los futuros profesores durante la fase de discusión conjunta. Mostramos también cómo las herramientas teóricas del EOS, particularmente la noción de idoneidad didáctica, ayudarían a realizar un análisis más sistemático de las facetas correspondientes. El objetivo final de este diseño es el dominio de estas herramientas, es decir, que los futuros profesores desarrollen su competencia para el análisis de la idoneidad didáctica.

Incluimos primero un apartado sobre la necesidad de realizar un estudio preliminar de la situación-problema planteada, orientado a la reconstrucción de un significado global sobre la proporcionalidad que sirva de referencia para los restantes tipos de análisis. Para ello se tendrán en cuenta resultados de la investigación sobre los significados de proporcionalidad (faceta epistémica), los procesos de aprendizaje (faceta cognitiva) y recursos instruccionales (facetas interaccional y mediacional). También habría que tener en cuenta la posición del tema en el currículo y sus conexiones con otros temas y áreas disciplinares (faceta ecológica) (Figura 4.6.). Se espera que los estudiantes no tengan en cuenta este aspecto y prosigan con la realización de los ítems de la parte 1 y 2. Precisamente, el análisis *a priori* de la situación didáctica es un aporte fundamental para guiar el diseño de tareas, el cual el profesor debe considerar. La necesidad de este análisis se manifiesta precisamente en el punto 3 de la tarea, cuando se pide valorar qué se podría mejorar y por qué. Destacamos nuevamente que previo al punto 3 se genera un espacio de debate y cierre de resultados relativos al punto 1 y 2 donde se pondrá en discusión este análisis.

El análisis epistémico de esta tarea se puede encontrar en Godino et al. (2018).

4.2.1.1. Reconstrucción de un significado de referencia sobre la proporcionalidad

Los alumnos del episodio del video trabajan con una guía de tareas; trabajando en grupos, se puede observar que resuelven la siguiente actividad:

> *Si la longitud de la sombra de un árbol es de 12m y la de un poste de 1,5m es de 2,25m, ¿cuál es la altura del árbol?*

En la resolución se pone en juego un significado aritmético de la proporcionalidad, basado en el establecimiento de la igualdad de razones,

$$\frac{12}{2{,}25} = \frac{x}{1{,}5}$$

También se puede calcular hallando la constante de proporcionalidad mediante un procedimiento de reducción a la unidad (significado algebraico-funcional),

$$2{,}25\ m \to 1{,}5\ m$$

$$1\ m \to (1{,}5\ m : 2{,}25\ m)$$

$$12\ m \to (1{,}5\ m : 2{,}25\ m)\,.\,12\ m = 8\ m$$

$$y = \frac{1}{15}x$$

En ambos casos, será necesario evocar el cumplimiento de las condiciones de aplicación de una versión del Teorema de Thales (Font, Breda y Seckel, 2017), y por tanto, un significado geométrico de la proporcionalidad (Figura 4.6.).

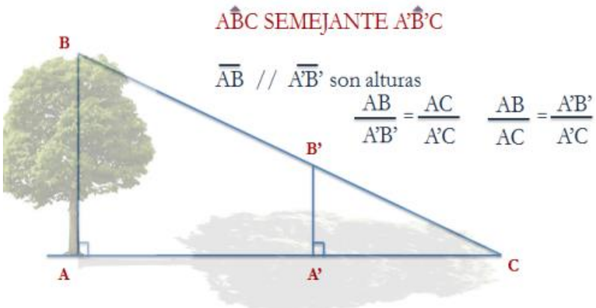


Figura 4.6. Representaciones gráfica y simbólica

Si se justifica la solución aplicando la 'semejanza de triángulos' será necesario justificar que los triángulos formados por los objetos y sus respectivas sombras son semejantes, lo cual requiere evocar que ambos triángulos se pueden poner en 'posición de Thales', en cuyo caso se justifica la proporcionalidad de los segmentos correspondientes.

Debido al uso mecánico de algoritmos y reglas, se puede resolver un problema de proporcionalidad sin tener garantía de que tenga lugar un razonamiento proporcional. El uso generalizado de algoritmos como la regla de tres lleva con frecuencia a los estudiantes a su utilización para resolver problemas que no son de proporcionalidad. Se potencia de esta manera la posibilidad de provocar en los estudiantes la 'ilusión de la linealidad' (suponer que las relaciones entre variables son lineales cuando no lo son).

Realizar un estudio preliminar del contenido es una manera de reflexionar sobre los distintos significados y la conexión entre ellos. De este modo, el problema matemático que se estudia en el episodio es una posible situación que lleve a discutir con los futuros profesores la necesidad de reconocer que los objetos matemáticos tienen diversos significados, desde el punto de vista institucional y personal, como se propone en diversos trabajos desde el EOS (Godino, Font, Wilhelmi y Arreche, 2009; Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2017).

4.2.1.2. Ítem 1. Descripción: *¿Qué está sucediendo?*

Los ítems a y b de la guía (Figura 4.5.) llaman la atención de los estudiantes sobre el contenido que se está estudiando en el episodio. Se requiere un análisis detallado del contenido para comprender las dificultades de aprendizaje (ítem h) y los conocimientos previos requeridos (ítem g). No parece suficiente mencionar que en el episodio se estudia "la semejanza de triángulos", o la "proporcionalidad". Se requiere un análisis más detallado de los objetos y procesos matemáticos implicados, lo que se corresponde con la configuración ontosemiótica estudiada previamente en el Estudio 1 (Figura 2.2). Detallamos algunos ejemplos a continuación.

1. Análisis de objetos y procesos matemáticos:

En la transcripción (Tabla 4.2.) encontramos este fragmento de diálogo:

> **9P** ¿Qué es lo que vamos a hacer?
>
> **11A** Calcular la altura de un árbol que aparece en un dibujo.
>
> **17P** Adelante, calculen la altura con esa información.

Se debe calcular la altura inaccesible de un árbol, aplicando la proporcionalidad, ya estudiada, de lados homólogos en triángulos semejantes. Es un ejercicio de aplicación.

> **20P** Utilicen los conocimientos adquiridos en las consignas anteriores, porque ahí, ustedes calcularon el valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos.

21P También obtuvieron el valor de proporcionalidad.

Sin realizar un análisis pormenorizado, en la resolución se ponen en juego determinados conceptos previos (Tabla 4.3.)

Tabla 4.3.

Conocimientos involucrados en la actividad del video

Tarea y su resolución	Objetos referidos en las prácticas
Si la longitud de la sombra de un árbol es de 12m y la de un poste de 1,5m es de 2,25m, ¿cuál es la altura del árbol?	Conceptos previos: altura de un objeto, triángulos, lados homólogos, valor de proporcionalidad, números decimales; unidades de medida; ... Procedimiento: cálculos aritméticos con/sin calculadora, regla de tres, ... Proposición: la respuesta del problema es 5.23m

Es claro que, en los 10 minutos del video, no se problematiza la aplicación de la semejanza de triángulos ni tampoco hay momentos en los cuales se requiera justificar las soluciones y procedimientos, al igual que en el trabajo de campo donde la medición de las sombras es poco precisa. Se observa que en general los alumnos del video aplican la regla de tres simple, entonces:

¿porqué es posible resolver la tarea mediante regla de tres (por ejemplo)?

¿porqué es posible aplicar el teorema de Thales?

Se espera que los futuros profesores reconozcan que se debe incorporar en la clase una explicación, por ejemplo, que, debido a la lejanía del sol, los rayos son paralelos y se puede aplicar el teorema de Thales (ya sea para el trabajo de campo, como para el trabajo en el aula); en particular se explica que los triángulos que forman el árbol con su sombra y el bastón y su sombra se pueden poner en posición de Thales.

La emisión de un juicio razonado sobre la idoneidad epistémica del contenido trabajado en la clase (ítem 3a) requiere de la aplicación de herramientas de análisis detallado de los objetos y procesos implicados, como la herramienta configuración ontosemiótica (Font et al., 2013).

2. Análisis de algunos procesos didácticos:

Los ítems:

d —¿Qué hace el profesor?—,

e —¿Qué hace el alumno?,

f —¿Qué recursos se utilizan?,

pretenden iniciar la reflexión sobre los procesos de interacción en el aula. Se espera que los futuros profesores hagan observaciones como las que se sintetizan en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4.

Reflexiones de interacciones en el aula

Interacciones en la clase observada	Indicadores
El docente del curso:	En la primera parte del video: da instrucciones; reparte material; pregunta qué se debe hacer de acuerdo a la consigna; autoriza que pueden utilizar calculadora y señala que utilicen los conocimientos que han trabajado las clases anteriores; les pregunta, monitorea y retroalimenta el trabajo de los alumnos; dirige la puesta en común. En trabajo de campo: ayuda a los alumnos a llevar a la práctica los procedimientos aprendidos en el aula para calcular las alturas de árboles y otros objetos en la realidad.
El alumno, en el aula:	En la primera parte del video: lee la tarea; recuerda la solución de tareas anteriores relacionadas con la semejanza de triángulos; aplica esos conocimientos a la tarea dada (calcular la altura de un árbol representado en el papel; ejercita la aplicación de la regla de tres. En el trabajo de campo: mide las sombras; trabaja en equipo.
En el proceso de enseñanza/aprendizaje:	Se utilizan como recursos instruccionales: una guía de aprendizaje; cuadernos; papel, lápiz, calculadora; elementos del entorno (árboles, sombras); regla graduada, metro y pie para medir las sombras; pizarra y proyector.

Será necesario discutir con los futuros profesores la delicada cuestión que plantea la articulación de distintos modos de interacción en el aula: trabajo individual, trabajo en equipos, papel del profesor como gestor y transmisor de conocimientos. En definitiva, se trata de adoptar una actitud crítica frente a modelos didácticos tradicionales centrados en el profesor, como frente a los constructivistas ingenuos centrados en el alumno.

La reflexión sistemática sobre los procesos de interacción y mediación en el aula requiere aplicar herramientas analíticas específicas, como la noción de configuración didáctica. Ejemplos de aplicación de esta herramienta se pueden ver en Pino-Fan, Assis y Godino (2015).

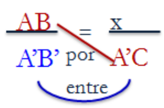
4.2.1.3. Ítem 2. Explicación: *¿Por qué está sucediendo?*

Las cuestiones a, b, c, y d del ítem 2) de la guía (Figura 4.5.) se proponen para provocar la reflexión sobre la trama de normas que condicionan y soportan el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La reflexión sobre las normas (regulaciones, hábitos, costumbres) es un elemento clave como factor explicativo de los fenómenos didácticos que se observan (dimensión Meta Didáctico-Matemática, Figura 2.5.).

El desarrollo del episodio está guiado por la *Reforma*[2] (orientaciones curriculares de México): se debe procurar trabajar en equipo resolviendo problemas; esta forma de trabajo se ha convertido en un hábito en la clase que establece la forma de trabajar. En cuanto a los modos de interacción profesor-alumnos, se propone una situación (consigna escrita) para cada alumno; los estudiantes están agrupados alrededor de mesas; primero se trabaja de manera personal, con libertad para consultar e intercambiar ideas y puesta en común de las soluciones. Los alumnos consultan al profesor; el profesor explica el desarrollo de la tarea.

En el patio de la escuela, el profesor explica a unos alumnos y escribe en su cuaderno:

> **30P** Si haces, esto, por esto, entre esto, [ABxA’C:A’B’] te da la altura del poste. (El profesor explica a unos alumnos y resuelve el cálculo):



[2] La reforma curricular (2011), no es una reforma radical. Los principales puntos de atención están en el desempeño docente, en lo que refiere al diseño de situaciones didácticas, reorganización del ambiente de enseñanza y formas de trabajo en el salón de clases, dando lugar a distintas relaciones entre alumnos, maestro, y contenido, junto con el empleo de recursos de lectura, audiovisuales e informáticos. Algunos de esos puntos críticos son mencionados al final del video propuesto.

31A Ah!

32P Ahora ustedes van a hacer lo mismo, van a buscar un arbolito, ponen los datos acá...

Frente a la pregunta:

¿Porqué se estudia el contenido del episodio?

Se espera que los futuros profesores reconozcan que el contenido está incluido en los programas de estudio; currículo de Reforma (unidad 35P de la transcripción). Además, desde el punto de vista matemático, la tarea permite poner en juego prácticas matemáticas (conocimientos, comprensiones y competencias) significativas y relevantes: proporcionalidad geométrica; función lineal; semejanza de triángulos; cálculo de alturas y distancias inaccesibles.

Frente a la pregunta:

¿Porqué actúa el docente de la manera en que lo hace?

Es claro que el docente sigue directrices didácticas de la Reforma (modelo de enseñanza socio-constructivista). Acepta que el aprendizaje matemático será de mejor calidad y se favorece si:

- el alumno tiene ocasión de trabajar en la solución de manera personal y en equipo sobre una situación-problema realista;
- crea situaciones cercanas y conocidas por los alumnos, lo que propicia la construcción de conocimiento por parte de los alumnos;
- hay comunicación en la clase, (puesta en común ...).

Frente a la pregunta:

¿Porqué actúan los alumnos de la manera en que lo hacen?

- siguen las reglas del contrato didáctico marcado por el docente;
- aplican la regla de tres por ser la forma fijada de resolver tareas de proporcionalidad.

Frente a la pregunta:

> *¿Cuáles pueden ser las razones por las cuales se originan dificultades/conflictos?*

Posiblemente el docente no ha visto la conveniencia de justificar la proposición, 'los triángulos formados son semejantes'. Comienzan a trabajar las consignas entregadas y sin embargo no se cuestionan los datos, por ejemplo:

> **12P** Muy bien ...
>
> **14P** Van a calcular la altura de un árbol que aparece en el dibujo.
>
> **15P** ¿Estamos bien?
>
> **17P** Adelante. Hagan y calculen la altura del árbol como se da en la información.

Se espera que los futuros profesores reconozcan que:

- Hacen mediciones imprecisas de las sombras posiblemente porque este problema no ha sido previamente planteado (carencia de una norma).
- En la puesta en común, la alumna que pasa al frente llega a la solución correcta; sin embargo, el profesor podría haber hecho pasar al frente a algún otro alumno que tenga una solución distinta, o que haya aplicado un procedimiento distinto. O preguntar, ¿alguien lo ha hecho de otra manera?
- Considerando que el profesor ha estado caminando alrededor de los grupos de trabajo, es consciente de las dificultades que van teniendo los alumnos, y la puesta en común podría ser un espacio adecuado para confrontarlas.
- En el trabajo de campo, el profesor informa de manera directiva qué tienen que hacer.

La reflexión sistemática sobre las normas que condicionan y soportan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se puede hacer en el modelo CCDM con la herramienta dimensión normativa tal como se muestra en los trabajes de Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) y con la herramienta dimensión meta-normativa, de acuerdo a los aportes de Assis, Godino y Frade (2012) y D'Amore et al. (2007).

4.2.1.4. Ítem 3. Valoración: ¿Qué se podría mejorar?

La cuestión 3) planteada en la guía (Figura 4.5.) sobre qué aspectos de la clase observada se podrían mejorar?, se desglosa según las facetas propuestas en la teoría de la idoneidad didáctica (Godino et al., 2007; Godino, 2013). El sistema de criterios e indicadores empíricos para cada faceta es una guía de análisis y reflexión sistemática que aporta conocimiento para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (dimensión meta didáctico-matemática, Figura 2.5.). La herramienta idoneidad didáctica, aplicada al caso del episodio, ayuda a emitir los siguientes juicios:

a) *Epistémica (contenido matemático estudiado)*

- Se debe plantear como problema la aplicación del teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos y poder aceptar la relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados homólogos.
- Favorecer la formulación de conjeturas por los propios estudiantes y no inducir la aplicación de un procedimiento ya ejercitado antes.
- Justificar la validez y equivalencia de los procedimientos.
- Falta de precisión en el lenguaje y conceptos referidos:

  20P Calcularon el valor de medidas de algunos triángulos con sus lados homólogos.

  21P También obtuvieron el valor de proporcionalidad.
- Evitar la resolución de las tareas mediante aplicación mecánica de la regla de tres.
- Utilizar un enfoque funcional en la solución de problemas de proporcionalidad.
- Discutir la precisión de la medida y adquirir destreza en la medida de longitudes.

El análisis señala la necesidad de reconocer el papel clave, para lograr una alta idoneidad epistémica de la enseñanza y aprendizaje, de los procesos matemáticos de:

- argumentación, validación;
- institucionalización;
- generalización (modelización mediante la función lineal del fenómeno estudiado);

- conexiones matemáticas, proporcionalidad y función lineal, teorema de Thales y semejanza de triángulos.

b) *Ecológica (relaciones con otros temas, currículo)*

- Los contenidos corresponden a temas requeridos en el currículo contribuyendo a la formación matemática de los estudiantes.
- Se podría enfatizar las conexiones entre temas (semejanza de triángulos, teorema de Thales, proporcionalidad y función lineal)
- Desde el punto de vista matemático, la tarea permite poner en juego prácticas matemáticas (conocimientos, comprensiones y competencias) significativas y relevantes, como la: proporcionalidad geométrica; función lineal; semejanza de triángulos; cálculo de alturas y distancias inaccesibles.
- Es un tema práctico que se puede utilizar en la vida cotidiana; contexto realista.
- No hay evidencias de que se estimule el pensamiento crítico.

c) *Cognitiva (conocimientos previos, aprendizaje, ...)*

- El objetivo es aplicar las reglas de cálculo aprendidas; cálculo de un término de una proporción conocidos los otros tres. El contenido pretendido está al alcance de los estudiantes y supone un reto accesible.
- No se tiene información sobre si los alumnos conocen el teorema de Thales.
- No se requieren adaptaciones curriculares.
- Al parecer los alumnos consiguen dar respuesta a la tarea aplicando dos métodos (no se ve en el fragmento de video cuáles pueden ser esos dos métodos).
- No se puede evidenciar el aprendizaje logrado, que es básicamente procedimental.
- El trabajo en equipo y dialógico indica momentos de evaluación formativa.

d) *Afectiva (interés, motivación, ...)*

- La tarea muestra la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana. Los alumnos se ven interesados en la tarea.

- La enseñanza podría ir acompañada de una contextualización histórica del contenido en la Antigua Grecia y en el Antiguo Egipto.
- Se podría proponer el problema de la leyenda relatada por Plutarco según la cual Thales aplicó su teorema para calcular la altura de las pirámides de Guiza.
- No se observa argumentación, aunque sí trabajo en equipo.
- No se resalta la cualidad de precisión del trabajo matemático (medidas imprecisas).

e) *Interaccional (modos de interacción entre profesor y estudiantes)*

- Aunque hay una puesta en común a cargo de una alumna, se echan en falta momentos de justificación de las soluciones, así como de institucionalización por parte del profesor. En este sentido, uno de nuestros participantes expone: "En la línea de trabajo que ellos siguen, yo intentaría además que cada grupo expusiera sus soluciones al resto de la clase en lugar de una única alumna"
- Los estudiantes tienen un cierto grado de autonomía para resolver la tarea de cálculo y de medición, pero no para comunicar los resultados y discutirlos.
- Se observan momentos de evaluación formativa por parte del profesor.

f) *Mediacional (recursos usados)*

- Usan calculadoras para hacer los cálculos de la regla de tres.
- Dado que el docente tiene a su disposición un ordenador y un proyector podría utilizarlos para plantear situaciones ilustrativas y otros métodos de estimación de distancias inaccesibles. En internet hay disponible material interesante de libre acceso que podría utilizarse, como:

  https://www.youtube.com/watch?v=xpyWm-JqMk4
  https://www.youtube.com/watch?v=R4syPwJZ1Eg

- No se ve el uso de cintas métricas. Los alumnos están midiendo distancias con una regla graduada, y con pasos, situación que también podría utilizarse para discutir distintos instrumentos y unidades de medida.

Ejemplos de aplicación de la herramienta idoneidad didáctica se pueden ver en Aroza et al. (2016), Beltrán-Pellicer y Godino (2017), Breda et al. (2017), Castro, Santana, Neto y Órfão (2013), Posadas y Godino (2017), entre otros.

4.2.1.5. Ítem 4. Limitaciones de la información disponible

El problema con este tipo de fragmentos es que son una ventana pequeña al mundo de la clase; "a menos que la información contextual que se proporciona sea suficiente, la naturaleza del análisis que se realice puede ser limitada" (Sherin, 2004, p. 22). Por ello, para que el análisis de los conocimientos puestos en juego en el episodio de clase fuera más preciso y fundamentado sería necesario que el formador de profesores genere un espacio para la reflexión sobre qué tipo de información adicional habría que disponer. Además, el formador podría seleccionar fragmentos de video para señalar características específicas de la enseñanza-aprendizaje que se quiera estudiar. En particular, sería necesario disponer de:

- Las fichas de trabajo de las sesiones en que se introdujo la noción de semejanza de triángulos, su relación con el teorema de Thales.
- La filmación/transcripción de la clase completa, para comprobar si efectivamente hubo o no momentos de validación e institucionalización.
- Observación del papel del profesor en el seguimiento del trabajo de los equipos (identificación de conflictos y modos de resolverlos; evaluación formativa).
- Momentos de evaluación sumativa individualizada, para tener acceso a los aprendizajes efectivamente logrados.

5. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA IMPLEMENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Análisis de la implementación de la Fase 1

La Fase 1 se desarrolla durante la primera sesión de clase. Esta reflexión desprende inquietudes y motiva a preguntarse ¿cómo sería entonces una enseñanza de alta calidad? ¿con qué criterios puedo valorar mis propias prácticas matemáticas? ¿cómo realizar una reflexión sistemática sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje? ¿cómo valorar la idoneidad del proceso implementado? ¿cómo el análisis de dichos procesos puede ser apoyado y mejorado, controlado y gestionado, con algunos modelos (didácticos) que nos ayuden a mirar la realidad de *nuestra* aula?. Siguiendo a Schoenfeld (1998, p. 3): “Algo ha sucedido, ¿Qué hará el profesor a continuación y por qué?”.

En la puesta en común afloraron las componentes epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, cómo se articulan entre sí y cómo afectan al desarrollo de un proceso de estudio.

En las discusiones conjuntas y en las respuestas analizadas en el portafolio, se observaron regularidades en la reflexión de los futuros profesores, coincidiendo con los resultados señalados por Seckel, Breda y Font (2018, p. 804).

- Los futuros profesores, al opinar sobre el texto inicial de la Tarea 1, sin estar instruidos previamente con el sistema de componentes e indicadores de idoneidad didáctica, son capaces de expresar comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.
- Las opiniones de estos participantes se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM).
- Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).
- La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

Así, se pusieron en evidencia *los significados personales* de los futuros profesores sobre posibles criterios de idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La fase cierra con un proceso de reflexión sobre la necesidad de conocer y ser competente en el uso de herramientas específicas que le permitan al profesor valorar dicha práctica de manera sistemática; no se trata solo de describir y explicar qué está sucediendo en esa clase ideal, sino también de reflexionar sobre qué aspectos podrían mejorarse.

5.2. Análisis de la implementación de la Fase 2

Al final de la sesión 1, luego de la discusión general, se entrega a los estudiantes el artículo titulado *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (Godino, 2013a), en el cual se presenta la noción de idoneidad didáctica introducida en el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, y el sistema de indicadores empíricos que la desarrollan. La lectura se presenta como un material de apoyo, obligatoria para la sesión de clase siguiente, ya sea individual o grupal, a realizarse en horario no presencial.

La presentación del documento y su discusión tuvieron lugar durante los primeros 40 minutos de la sesión 2. Los participantes presentes habían realizado la lectura considerándola interesante y práctica:

- la primera impresión que me da, es que la idoneidad didáctica parece una herramienta fácil de aplicar en la práctica. Después de leer los indicadores de idoneidad de cada faceta, me vinieron en mente como algo natural, pero la cuestión es, que no creo que haya tenido en cuenta todos estos aspectos y todas estas facetas si hubiese tenido que analizar un proceso educativo por mi mismo" (comentario de un participante durante la clase).

En la presentación dada por el profesor, se recupera la idea de competencia de análisis de la idoneidad didáctica, como una competencia clave para el reflexión profesional; se discute cómo se pueden hacer operativa esta noción, ya sea a partir de la reflexión de un proceso de estudio, programa de formación, libro de texto, etc.

La Fase 2 finaliza con la presentación de las consignas instruccionales, que funcionarán como guía para la realización de la Tarea 2, desarrollada en las siguientes fases.

5.3. Análisis de la implementación de las fase 3 y 4

El desarrollo de la Tarea 2 se desarrolla durante la sesión 2 y sesión 3. Cuando los estudiantes observan el video por primera vez, centran su atención en elementos concretos y conocidos para ellos como *buenas prácticas*; de esta manera aparecen cuestiones valoradas positivamente, como el uso de problemas con contexto, el trabajo grupal, la disposición de las mesas, el uso de recursos tecnológicos, la puesta en común, el respeto, la dinámica de la clase y el trabajo de campo. Sin embargo, el primer análisis que realizan está basado en características superficiales y sin conexiones entre la información recogida por los ítems de la guía de reflexión.

En la discusión conjunta se trata entonces de "ayudar al profesorado en formación a adquirir competencias docentes profesionales" (Llinares, 2012, p. 24) centradas en este caso, en poner a funcionar el sistema de indicadores y componentes estudiados previamente. De esta manera, es posible encontrar en las respuestas (portafolios) análisis más elaborados y organizados, donde los estudiantes buscan establecer conexiones claves entre esos elementos que les parecían, de alguna manera, importantes. Es importante destacar que, de 25 portafolios entregados en la etapa final, 20 de ellos presentan un análisis donde se proponen posibles mejoras para aumentar la idoneidad del proceso de estudio observado. Sin embargo, no todos los estudiantes se animan a dar una valoración baja, media o alta de cada faceta indicando que se requiere mucha información adicional para poder calificarlas.

5.3.1. Indicadores de logro de aprendizaje

A continuación, se muestran ejemplos prototípicos de respuestas significativas, recogidas de la experiencia, considerando la reflexión de los estudiantes sobre cada una de las 6 facetas. En este sentido, hemos tenido en cuenta cómo influyen sus respuestas aportadas en la primera y segunda parte de la tarea (descripción y explicación de la situación de enseñanza) para hacer la valoración de la tercera parte (Cuadro 1). Se trata entonces, de confrontar el análisis de los participantes con el análisis *a priori* de los investigadores; este último permite abrir un abanico de posibles respuestas *expertas* y poner así en evidencia, la importancia de conocer y ser competente en el uso de la herramienta de idoneidad didáctica y formarse como profesionales reflexivos capaces de valorar y mejorar su propia práctica.

5.3.1.1. Faceta epistémica

Un punto clave para valorar la faceta epistémica (conocimientos matemáticos institucionales) consiste en reflexionar sobre el tipo de situaciones-problemas implementadas en el episodio de clase video-grabado. Si bien reconocen que no es posible observar en 9 minutos una muestra representativa y articulada de tareas de contextualización, ejercitación y aplicación, destacan la presencia de una guía de problemas sobre cálculo de alturas inaccesibles, como también el trabajo de campo en el patio de la escuela. Desde un punto de vista matemático, los futuros profesores reconocen que el contenido que se estudia permite poner en juego prácticas matemáticas (conocimientos, comprensiones y competencias) significativas y relevantes: proporcionalidad geométrica, función lineal, semejanza de triángulos, cálculo de alturas y distancias inaccesibles; valoran positivamente el tipo de problemas que permiten explorar este contenido, como también el tipo de lenguajes que movilizan.

El primer problema que se observa consiste en calcular la altura de un árbol a partir de un dibujo que modeliza la situación. Destacamos la siguiente respuesta (R)[3] de un estudiante:

> **R1**. Calcular la medida de alturas es útil para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de semejanza de triángulos y proporcionalidad. Además, este tipo de situaciones emplea distintos métodos de expresión: verbal-visual (en el patio); gráfica (interpretación de los datos); simbólica-aritmética (porque requiere de cálculos para resolver la tarea).

Sin embargo, los estudiantes destacan aspectos importantes como: "Falta de precisión en el lenguaje del profesor y conceptos referidos (Tabla 1, ítems 20P y 30P)"; asimismo, identifican aspectos que deberían mejorarse, como la falta de situaciones para argumentar y generar definiciones o proposiciones:

> **R2.** Si bien las situaciones problemáticas que se manifiestan parecieran potenciar las conexiones entre los distintos conceptos, proposiciones y procedimientos, la ausencia de momentos de argumentación o justificación, hacen que la propia tarea se convierta en un mero ejercicio de aplicación de una regla. No significa que sea incorrecto, pero sería idóneo agregar consignas tales

---

[3] Se considera R_1, R_2, ... a cada respuesta dada por los estudiantes en formación.

como: Justifica tu respuesta, de esta manera los alumnos pueden establecer relaciones entre los conceptos previamente estudiados y el profesor puede evaluar su conocimiento sobre el tema.

El siguiente estudiante ha considerado previamente los significados que caracterizan la semejanza de triángulos para argumentar por qué deberían hacerse dichas mejoras; esto significa, que ha tenido en cuenta el análisis obtenido de la parte 1 de *la tarea de reflexión*.

R3. Si esto es un problema de contextualización [Figura 4.7.] es mejorable pues el problema tal como está planteado es un poco artificial. Existen aplicaciones de la semejanza a situaciones reales mejor planteadas, como, por ejemplo, no solo calcular longitudes inaccesibles, sino también; ¿cómo se representa la realidad? (representación en mapas, planos, etc.); ¿cómo se reproducen imágenes? (proyecciones); también utilizando diversos recursos materiales, dinámicos, o la misma historia de las matemáticas: ¿cómo empleó Thales los conocimientos sobre semejanza de triángulos para calcular la altura de la pirámide egipcia, o bien desde la etnomatemática aprovechando la variedad de culturas del país y dentro del aula. Tampoco se problematiza, por ejemplo, por qué este es un contexto de semejanza de triángulos.

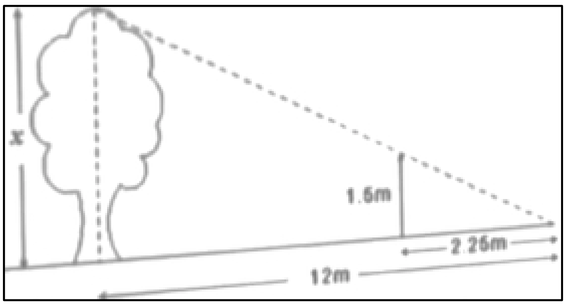


Figura 4.7. Problema matemático planteado a los alumnos de la clase video-grabada.

5.3.1.2. Faceta ecológica

Los estudiantes lograron identificar componentes e indicadores que caracterizan esta faceta, articulando sus respuestas con los análisis previos obtenidos de la parte 1 y 2 de la tarea. Valoraron, por un lado, la adecuación del contenido y su implementación según las directrices curriculares que marca la nueva reforma de México (2011), la cual condiciona el desarrollo de la clase.

Como aspectos a mejorar, destacan la implementación de problemas que enfaticen las conexiones intra/interdisciplinares, así como situaciones de innovación y práctica reflexiva:

> **R4**. Si bien, el profesor intenta dar paso a la apertura de las nuevas tecnologías, [Tabla 1, ítem 19P] la observación de la clase video-grabada no permite poner en evidencia su uso real. No se trata solo de *innovar* como sugiere la reforma, se debe hacer de manera justificada respecto a las distintas actividades [consignas] propuestas.

5.3.1.3. Faceta cognitiva

Los estudiantes centraron su atención en los conocimientos previos necesarios para abordar el cálculo de alturas inaccesibles. Si nos detenemos en el inciso 1)g. de la tarea de reflexión, esto es: ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos para poder abordar la tarea? solo 3 de 24 estudiantes, no responden *regla de tres simple*. Estos alumnos son conscientes que la regla de tres es un método para, y no el objetivo en sí; muestran coherencia en sus reflexiones destacando la importancia de aplicar correctamente los procedimientos. Por ejemplo, este alumno reflexiona:

> **R5**. En el trabajo de campo [los alumnos] recogen información y aplican el teorema de Thales cuando no se cumplen las condiciones del teorema (por ejemplo, paralelismo). Al menos deberían considerar determinados supuestos para poder resolverlo, o el profesor podría aprovechar el momento para hacerlo y así generar instancias de institucionalización.

El mismo estudiante agrega:

> **R6.** El profesor debe conocer el papel que juegan la argumentación y la validación a la hora de realizar una justificación matemática, las dificultades de los alumnos ante el razonamiento proporcional y la generalización de los contenidos explicados.

Los 21 estudiantes restantes, indican que la *regla de tres simple* es un conocimiento previo *necesario* para resolver las tareas. Entre estas respuestas, 19 creen que la *semejanza de triángulos* y *teorema de Thales* no son conocimientos previos. Además, valoran positivamente la faceta cognitiva, ya que consideran que los alumnos son capaces de aplicar satisfactoriamente la regla de tres, o al menos es un objetivo accesible.

Wilhelmi (2017, p. 4) valora la idoneidad epistémica del estudio de la proporcionalidad en el desarrollo del currículo de Educación Secundaria. El autor señala que, si bien la regla de tres no se incluye de manera homogénea en los currículos internacionales ni en la misma etapa Educativa, en el caso particular de España, la enseñanza de esta regla ha persistido en la escuela como modelo prototípico de la proporcionalidad. Si bien esto fue discutido en clase, pareciera que la regla de tres es un procedimiento que está muy arraigado en su formación, así como el uso deliberado de las relaciones de proporcionalidad. "Los alumnos usan la regla de tres porque los segmentos son proporcionales; eso se demuestra fácilmente midiendo los lados [señalando la Figura 4.7.]" (comentario de un estudiante).

Con mayor énfasis, los dos estudiantes restantes afirman que el uso de la regla de tres simple es importante como *conocimiento previo necesario* para resolver la tarea. Sin embargo, sus reflexiones posteriores entran en contradicción ya que valoran en forma negativa el aprendizaje ligado a la aplicación de reglas y procedimientos mecánicos. Es decir, ¿cómo es posible considerar esta regla como un conocimiento importante y al mismo tiempo, considerar erróneo el aprendizaje mediante esta regla? En efecto, el uso que se hace habitualmente de la regla de tres en las escuelas es puramente instrumental "ocultando en cierto modo la intervención de las razones y la proporción, lo cual puede comportar un significado degenerado de la proporcionalidad aritmética" (Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017, p. 6-7).

Por último, los participantes no han emitido juicio de valor acerca de los aprendizajes logrados, ciertamente porque en el video no es posible observarlos, pero sí destacaron posibles dificultades de aprendizaje:

> **R9.** No todos los alumnos parten del mismo nivel inicial de conceptos y aprendizaje; por ejemplo, en el trabajo de campo, pareciera que no todos trabajan y que no todos entendieron las consignas. Podría deberse a que en la puesta en común no se discuten los diferentes resultados encontrados.

Otros, destacan dificultades cognitivas tales como: “dificultad para encontrar una unidad de medida”, “dificultades con la noción de proporcionalidad directa”, etc. Suponer conflictos de aprendizaje, es un avance en el proceso de reflexión profesional.

5.3.1.4. Faceta afectiva

Las valoraciones que se identifican respecto a esta faceta son muy superficiales, del estilo: el trabajo de campo genera motivación; permite valorar la matemática en la vida cotidiana. Solo un estudiante valoró negativamente esta faceta:

> **R10.** Los alumnos no están interesados en la tarea. No todos trabajan y seguramente, no todos aprenden, dado que no se observa argumentación en el trabajo matemático. Podría pensarse en grupos de trabajo más pequeños, involucrar otros materiales, motivarlos con preguntas y discutir los resultados.

5.3.1.5. Faceta interaccional

Las reflexiones de los estudiantes mantienen relación con la información obtenida de las preguntas previas; en general se observan competencias para reflexionar sobre los distintos modos de interacción: entre alumnos y docente, entre alumnos y sobre la autonomía de estudio. Los estudiantes identifican normas establecidas en clase como la disposición de las mesas, levantar la mano para llamar al profesor, el profesor como observador en la clase. Asimismo, emiten juicios razonables sobre éstos.

Respecto al rol del profesor, los estudiantes lo clasifican como el protagonista de la clase. Reconocen que la puesta en común tiene como objetivo exponer la respuesta al problema:

> **R11.** Pareciera que el alumno que pasa a la pizarra, ya sabe que tiene bien sus resultados y además no será puesto en cuestionamiento. Sería idóneo dar la oportunidad a todos para confrontar sus resultados.

Cuatro respuestas que presentan análisis superficiales, tales como, *Se produce un diálogo fluido entre los alumnos y el profesor, y entre los alumnos entre sí*. Consideramos que es una falsa impresión creada por la manera de trabajo grupal.

5.3.1.6. Faceta mediacional

Los estudiantes se refirieron al uso de distintos materiales manipulativos, como *escasos y poco productivos*, valorando esta faceta como poco idónea; sin bien reconocen la importancia de la guía de problemas y el uso de calculadoras, destacan que los recursos informáticos son muy *valiosos* en este tipo de contenidos y no están presentes:

> **R12.** Sería deseable el uso de software dinámicos para mostrar, por ejemplo, cómo varía la sombra de un árbol a medida que el sol transcurre por distintos puntos, así, generar momentos de estimación, comprobación de hipótesis, búsqueda de relaciones entre la altura y la sombra, sin necesidad de calcularla.

En el trabajo de campo, los alumnos utilizan reglas graduadas, pies, manos y otros elementos para medir las sombras; se ve que las medidas son pocos precisas. En este sentido, sugieren incorporar momentos donde el profesor pueda problematizar, como, por ejemplo, discutir el problema de la precisión de la medida en el trabajo de campo y adquirir destreza en la medida correcta de longitudes.

Respecto a la cantidad de alumnos y el tiempo dedicado a la tarea, los estudiantes consideran que podrían resultar adecuados, pero faltan datos para valorar estos aspectos y otros como el horario en que se dicta esta materia y la distribución de tiempos a cada tarea.

5.3.1.7. Interacción entre facetas

Además de las valoraciones de cada faceta, tanto en las interacciones en clase, como en las respuestas escritas, los estudiantes manifestaron que las facetas analizadas se articulan unas con otras y que muchas veces resulta difícil diferenciarlas:

> **R13.** [Sobre la idoneidad cognitiva] Sería positivo para todos los alumnos realizar una puesta en común exponiendo no solo los resultados obtenidos, sino también las dificultades encontradas durante el desarrollo de la actividad, donde el profesor pueda usar diversos recursos para cuestionar a los alumnos e incluirlos en un ambiente donde tengan [los alumnos] que justificar sus resultados. En este caso, hablar de la dimensión cognitiva, implica también la afectiva e interaccional.

R14. Es imposible centrar el análisis en una sola faceta. Esto me hace pensar en la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente, de las matemáticas. Un ejemplo claro para mi está en el tiempo dedicado. Si bien en este caso no es posible saberlo, sin duda es un factor que afecta a todo el proceso de estudio: en lo ecológico: ¿cómo está diseñado el programa de la materia?, epistémico: ¿cómo se organiza el contenido?, cognitivo: ¿los conocimientos pretendidos están al alcance de los alumnos?, interacciones: ¿se tienen en cuenta momentos de trabajo individual, grupal, discusión, etc.? Al leer el artículo [Godino, 2013a] me di cuenta cómo este modelo permite tomar conciencia de estas relaciones.

Como se ve reflejado en este apartado, los resultados permiten mostrar la eficacia de este modelo teórico puesto en práctica, como también tomar conciencia de la importancia de incorporar el aprendizaje reflexivo en la docencia universitaria (Alsina, 2010).

5.3.1.8. Análisis final de la información adicional

El ítem 4, sobre la identificación del material adicional que sería interesante disponer para que el análisis anterior sea más rico y preciso, en general las respuestas fueron bastante parecidas.

El análisis que realizaron los futuros profesores se basó básicamente en utilizar los indicadores y componentes de idoneidad didáctica para cada faceta, y así reflexionar sobre qué aspectos no se habían considerado anteriormente.

Dos de los futuros profesores en formación que participaron en la experiencia indicaron:

R15. "Se deberían mostrar los procedimientos completos que realizan los estudiantes y cómo el profesor orienta o dirige dichos procesos y eventualmente retroalimenta o permite la detección y corrección de errores. Se deberían escuchar las distintas interacciones de los alumnos en el trabajo grupal".

R16. "Saber exactamente cuáles son los contenidos previos que se han trabajado, ver si todos los alumnos llegan al final a las conclusiones acertadas y si han sabido aplicar esos conocimientos previos. Saber, además, cuánto tiempo se ha dedicado a todos estos contenidos para poder evaluar si es una técnica de trabajo práctica".

6. ANÁLISIS RETROSPECTIVO DEL CICLO DE DISEÑO

Como investigadores reflexivos, es necesario realizar una mirada retrospectiva sobre el diseño y la implementación de este ciclo formativo, tomando consciencia de los límites y desafíos que quedan por superar. En este apartado se realiza un análisis retrospectivo de la experiencia formativa aplicando la noción de idoneidad didáctica introducida en el marco del EOS, con la finalidad de identificar mejoras potenciales del proceso de formativo implementado. Usaremos como guía para la reflexión el sistema de indicadores de idoneidad descrito en Godino (2013a) para las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e interaccional-mediacional. Aplicamos también una encuesta de opinión a los participantes de este estudio, para obtener información más detallada sobre cada una de las mencionadas facetas.

6.1. Encuesta de opinión

Como cierre del ciclo de diseño, se les pidió a los estudiantes cumplimentar una encuesta anónima sobre los siguientes cinco aspectos:

1. Claridad de la tarea y de las consignas.
2. Adecuación de la metodología seguida (forma de trabajo, explicaciones del profesor, recursos utilizados).
3. Grado de motivación e interés suscitado por la experiencia.
4. Nivel de aprendizaje logrado.
5. Grado de pertinencia global del taller para tu formación como profesor de matemáticas.

Se les pidió valorar los ítems según la escala de [1-5], siendo 1: valor mínimo y 5: valor máximo. También se dejaba espacio para que añadieran cualquier comentario que consideraran pertinente para mejorar la actividad.

La encuesta fue cumplimentada por 26 de 27 estudiantes; la puntuación mediana en todos los ítems fue de 4; la puntuación mínima fue 2 y máxima 5. El análisis de la valoración hecha por los estudiantes aporta información valiosa para el análisis retrospectivo, como un medio de reflexión para los investigadores.

6.2. Idoneidad didáctica del proceso formativo

Para valorar la idoneidad didáctica del proceso formativo, nos basamos en los componentes e indicadores descritos en Godino (2013a), los cuales pueden servir de pauta o guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas o efectivamente implementadas.

6.2.1. Idoneidad epistémica y ecológica

En primer lugar, el análisis *a priori* de la situación didáctica revela una alta idoneidad *epistémica-ecológica*. Las etapas de implementación están articuladas y son adecuadas al nivel que se dirigen; en las situaciones de enseñanza propuestas se trata de que los estudiantes indaguen, interpreten, relacionen significados, discutan y argumenten. A la vez, el diseño propuesto muestra una apertura hacia la innovación basada en la investigación y en la práctica reflexiva. No hay que olvidarse que la clase video-grabada ofrece una pequeña ventana al mundo de la educación, y “como recurso formativo es importante pensar que la información que se muestra es limitada” (Sherin, 2004, p. 22) y, por lo tanto, los análisis de los estudiantes podrían ser superficiales. Para ello, con la tarea de la Figura 4.7. se incita a que los estudiantes reflexionen sobre los aspectos que serían necesarios para que los análisis sean precisos y más detallados.

6.2.2. Idoneidad cognitiva y afectiva

Respecto al objetivo de enseñanza, se trataba de *iniciar* a los estudiantes en su proceso de formación reflexiva. Los portafolios finales podrían haber sido más elaborados, apoyados en la búsqueda de información y lecturas sobre el contenido, sin embargo, los contenidos pretendidos se han podido alcanzar valorando como media la idoneidad cognitiva. Los futuros profesores participaron activamente en las discusiones grupales, a las cuales se les asignó un mayor tiempo de trabajo dado el interés que éstas promovían, y se involucraron en la puesta en común exponiendo sus argumentaciones y análisis crítico. Asimismo, se manifestaron comprometidos en la resolución y entrega de las tareas. Por otro lado, Cooney (1994) sostiene principalmente que, en estos procesos de desarrollo del nivel de reflexión, es necesario que los profesores sientan la motivación propia de reflexionar. En esta experiencia, el mayor interés para los estudiantes estuvo centrado en la *observación de una situación real de aula*, tal como señalan los resultados de investigaciones en el campo (por ejemplo, Ponte, 2011, p. 258; Climent et al., 2013) mostrándose alta la idoneidad afectiva. En la encuesta de opinión, respecto al grado de motivación suscitado por la experiencia, un estudiante escribe:

> Me hubiese encantado conocer esta herramienta [idoneidad didáctica] antes. Es muy útil por ejemplo para reflexionar sobre: cómo mirar lo que funciona mal en una clase, y qué aspectos podrían mejorarse.

Otro estudiante escribe:

> En mi caso, la lectura resultó muy fácil, y principalmente, fácil de aplicar, a diferencia que la anterior, el lenguaje apunta más al profesor que al investigador. Esta es un tipo de competencia muy útil para los profesores porque nos ayuda a realizar juicios razonables.

6.2.3. Idoneidad interaccional y mediacional

Por otro lado, la baja idoneidad mediacional la atribuimos principalmente a las limitaciones del tiempo asignado. Si bien este tipo de investigaciones de diseño ocurren en ambientes reales de clase, donde no es posible disponer una mayor carga horaria, el corto período de tiempo entre las consignas implementadas permite poner en evidencia una gran limitación de este estudio. La discusión de las respuestas finales, entregadas en el portafolio, no tuvieron lugar en el seno de la clase. En este sentido, consideramos que un intercambio de respuestas finales hubiese proporcionado mayor oportunidad a los participantes para desarrollar formas de reflexión sobre las distintas facetas y apropiarse del marco teórico ofrecido por este diseño. En concordancia con otras investigaciones (Amador, 2016, p. 237) “incluir experiencias adicionales, o bien pensar en ciclos continuos en la formación docente, sería beneficioso para que los futuros profesores adquieran una mayor competencia en la reflexión sobre la práctica”.

En cuanto al nivel de interacciones en el aula, consideramos que ha sido alto, destacando el diálogo y las discusiones en el aula, la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase, la presentación adecuada del tema utilizando diversos recursos. Además, se contemplaron momentos de estudio autónomo y evaluación continua.

6. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo se han planteado dos cuestiones principales:

1) ¿Qué herramientas teóricas podrían estar al alcance de los futuros profesores de matemáticas, que les ayuden a reflexionar, de manera sistemática, sobre los procesos educativos que se llevan a cabo?
2) ¿Qué tipo de estrategias son factibles e idóneas para formar profesionales reflexivos?

Con relación a la primera cuestión hemos mostrado que el sistema de facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica permite poner en acción puntos de decisión claves para la reflexión y la apertura hacia la introducción de cambios fundamentados. La *idoneidad didáctica*, como constructo teórico y metodológico, es una herramienta que se viene implementando en la formación de profesores en diversas universidades españolas y latinoamericanas (Breda et al., 2015). Otros autores también han destacado su uso para la propuesta de mejoras de unidades didácticas, como muestran Castro et al. (2013).

Respondiendo a la segunda cuestión, este trabajo propone un ejemplo de investigación de diseño en el cual, se hace operativa esta herramienta en las diferentes etapas de implementación. Si bien los distintos factores que afectan los procesos educativos son complejos, los participantes de este estudio han valorado positivamente este tipo de situaciones didácticas para su formación, destacándolas como necesarias; más aún, resaltando su utilidad para la etapa siguiente de su labor profesional: planificación de clases e implementación de prácticas profesionales en una institución escolar. Vale la pena destacar que tres estudiantes han continuado su tesis de maestría utilizando la herramienta de la idoneidad didáctica aplicándola a la reflexión de su propia experiencia como profesor durante las prácticas de enseñanza.

El análisis *a priori* de la situación didáctica propuesta revela una alta idoneidad epistémica y ecológica; no obstante, las limitaciones del tiempo asignado han condicionado el logro de un nivel de aprendizaje adecuado.

Por otro lado, el uso de videograbaciones como recurso ha sido ampliamente reconocido en la formación de profesores (Alsawaie y Alghazo, 2010; McDuffie et al., 2014; Santagata, Gallimore y Stigler, 2005) y sin duda se ha revelado como una estrategia de formación idónea, permitiéndole a los estudiantes "ver una lección desde la perspectiva de un observador" (Sherin, 2004, p. 22). Sin embargo, no hay que olvidarse que "es la reflexión sobre y el análisis de la práctica de enseñar matemáticas la que crea las condiciones para la construcción del conocimiento útil para enseñar matemáticas" (Llinares y Valls, 2009, p. 9). Esta reflexión puede estar apoyada en episodios de clases video-grabadas, fragmentos transcriptos, situaciones creadas, o las propias experiencias de enseñanza. En nuestro estudio, el análisis de episodios de clase, usando las herramientas descritas en este artículo, se revela como una estrategia formativa idónea de profesores de matemáticas, aunque debe ser complementada con situaciones focalizadas en el desarrollo de otras competencias didácticas.

En lo que refiere al diseño de investigación, el análisis retrospectivo revela un gran interés en algunos futuros profesores en usar los criterios de idoneidad didáctica como una herramienta teórico-metodológica para aplicar en su trabajo de fin de máster (TFM). Se parte de la experiencia educativa real que dos estudiantes del máster de secundaria adquieren en la fase de prácticas docentes llevadas a cabo en diferentes institutos. En esta fase de su formación estos futuros profesores tienen la oportunidad de enseñar un tema (el cual depende del momento académico y nivel educativo en el que participan), bajo la dirección de un tutor y siguiendo la planificación usual de las clases, basadas con frecuencia en el seguimiento de un libro de texto. La aplicación de los criterios de idoneidad didáctica permite proponer un esquema de TFM orientado hacia la reflexión sobre la experiencia vivida y la indagación sistemática de posibles cambios fundamentados que se podrían introducir en el diseño, implementación y evaluación de la experiencia.

CAPÍTULO 5.

SÍNTESIS, CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

1. INTRODUCCIÓN

Frente a la problemática de determinar cuáles son los conocimientos y competencias profesionales que debe adquirir un profesor de matemáticas en su formación, inicial y permanente, en esta investigación se ha presentado la consolidación de un modelo teórico CCDM, como una ampliación del modelo CDM, ligado a cinco grupos de herramientas teóricas básicas que componen actualmente el EOS. Hablar de conocimiento y competencia desde una perspectiva ontosemiótica no es un problema, donde el sistema de prácticas matemáticas, ya sea discursivo-declarativo o bien, operatorio-procedimental, juegan un papel fundamental para el reconocimiento de ambos. Bajo esta perspectiva se considera que el futuro profesor de matemáticas debe conocer y ser competente en el uso de herramientas específicas que le permitan realizar análisis, detallados y globales, de las prácticas matemáticas y didácticas.

Cinco son las herramientas teóricas del EOS, desarrolladas y perfeccionadas en diversos trabajos: sistema de prácticas, configuración ontosemiótica, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica, las cuales se utilizan como base para delimitar sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas. Los antecedentes que se vienen realizando usando este modelo teórico de articulación de los conocimientos y las competencias, apoyan la pertinencia y posibilidad de que el futuro profesor conozca, comprenda y esté capacitado para aplicar las herramientas de análisis propuestas en su propia práctica profesional.

Sentadas las bases teóricas, sobre qué se entiende en esta investigación por conocimiento y competencia, resulta necesario preocuparnos sobre ¿cómo lograr el desarrollo de esa competencia desde la formación inicial?, ¿qué tipo de acciones formativas son efectivas y posibles de llevar a cabo para el desarrollo de los mismos?, ¿qué tipo de acciones permiten la mejora de la formación de profesores mediante el desarrollo y/o la potenciación de conocimientos y competencias didáctico-matemático requeridas para la enseñanza?

Así, en segundo lugar, esta investigación presenta un ciclo de diseño conformado por dos estudios con el objetivo de desarrollar competencias específicas en futuros profesores de matemática de educación secundaria. El primer estudio se focaliza en el diseño, implementación y valoración de una experiencia formativa orientada al desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico. El segundo estudio se centra en el diseño, implementación y valoración de una experiencia formativa orientada al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica. Ambos estudios están basados en la aplicación sistemática de herramientas teóricas del EOS.

A continuación, se presenta una síntesis de los resultados más relevantes que se han obtenido durante el desarrollo de esta tesis. Dichos resultados son producto de dos preguntas de investigación y dos objetivos generales, con sus respectivos objetivos específicos, planteados en el Capítulo 2. Posteriormente, se incluye una síntesis de las implicaciones de este trabajo y su aporte al campo de la educación matemática y al campo específico de la formación de profesores de matemática. Se incluye también algunas cuestiones abiertas y futuras líneas de investigación. La tesis tiene su cierre con la mención de los aportes científicos derivados de este trabajo.

2. CONCLUSIONES

El estudio profundo de la problemática y la justificación de la pertinencia de nuestra propuesta de investigación, han dado lugar a una serie de objetivos, generales y específicos, que responden a dos preguntas de investigación generales, planteadas en el Capítulo 2. En general, consideramos hemos logrado de forma razonable los objetivos planteados aportando perspectivas valiosas para la formación inicial de profesores de matemática.

A continuación, se recupera el problema de investigación y se discute en qué medida se lograron cada uno de los objetivos.

2.1. Conclusiones sobre la pregunta de investigación PI-1.

> PI-1. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico?

Para responder esta pregunta hemos concretado el trabajo de investigación con el planteamiento de un objetivo general y dos objetivos específicos. Consideramos que esta tesis describe un tipo de acción formativa, en términos de ciclo de diseño, la cual fue posible de implementar en un programa de formación inicial y ha proporcionado información útil y detallada sobre el logro de la competencia de análisis ontosemiótico en un grupo de futuros profesores de educación secundaria. Discutimos a continuación el logro de los objetivos.

2.1.1. Aportes derivados del objetivo general OG-1.

> OG-1. Realizar una investigación de diseño con profesores de matemáticas de educación secundaria en formación inicial orientado a promover el desarrollo de su competencia para el análisis ontosemiótico.

Con la finalidad de lograr este objetivo, y, en consecuencia, dar respuesta a la primera pregunta de investigación se han planteado en el apartado 5.1.3. del Capítulo 2 objetivos específicos que se sintetizan a continuación y que están contenidos en el OG-1.

2.1.1.1. Síntesis del objetivo específico OE-1.1.

> OE-1.1. Diseñar e implementar una experiencia formativa con un grupo de futuros profesores para promover el desarrollo de su competencia de análisis ontosemiótico de tareas matemáticas escolares.

Los desarrollos plasmados a lo largo del Capítulo 3, lo que refiere al diseño y la implementación del primer estudio, dan cuenta del logro de este objetivo. El diseño se basó en un estudio preliminar sobre las dificultades del profesorado en formación, en lo que respecta al análisis de tareas, sobre la importancia de las representaciones y visualizaciones en educación matemática y las dificultades cognitivas que derivan de este tópico; propusimos una serie de criterios que nos permitieron la selección intencional de tareas, las cuales fueron aplicadas en talleres piloto. Las consignas involucraron análisis epistémicos de las tareas matemáticas y de su resolución; además involucraron análisis de tipo cognitivo, ya que se les pedía a los futuros profesores analizar respuestas de alumnos.

Un aspecto fundamental ha sido el análisis *a priori* de las tareas implementadas. Este análisis representa un análisis institucional (utilizando la herramienta configuración ontosemiótica) y ofrece una mirada más amplia, profesional, de aquella que se pretende que realicen los participantes. No obstante, este análisis es necesario para prever posibles conflictos cognitivos que puedan surgir en la implementación y apoyar la puesta en común; además es necesario para analizar las respuestas escrita que dan los futuros profesores y detectar el desarrollo o progreso de su competencia.

2.1.1.2. Síntesis del objetivo específico OE-1.2.

> OE-1.2. Valorar la idoneidad didáctica de las acciones formativas implementadas e identificar mejoras potenciales.

Al final del Capítulo 3, en el apartado 6, se presenta el análisis retrospectivo del diseño lo que da lugar a un proceso de valoración/reflexión sobre cómo ha resultado la idoneidad didáctica del estudio. El desarrollo de este apartado determina el logro del objetivo OE-1.2. Para lograr esto, tomamos los criterios de idoneidad didáctica que propone Godino (2013a), con sus componentes e indicadores para cada una de las seis faceta que afecta el proceso de estudio. Para enriquecer la información sobre algunos indicadores, hemos implementado una encuesta de opinión que permite conocer aspectos específicos del proceso formativo, desde una mirada de los participantes.

El análisis retrospectivo revela una alta idoneidad epistémica-ecológica, mostrándose como un diseño que se adecúa al sistema formativo; la idoneidad mediacional-interaccional se puede considerar media, sacando a la luz aspectos que deberían ser tenidos en cuenta en el futuro, por ejemplo, debería aumentar el tiempo empleado para el desarrollo de esta competencia, incorporando fundamentalmente más momentos de discusión grupal. La idoneidad cognitiva-afectiva se puede considerar media. Si bien, el tipo de análisis que realizaban los participantes fue evolucionando en las distintas actividades implementadas, el dominio de la herramienta configuración ontosemiótica por parte de los futuros profesores no resultó fácil, como revelan los resultados de este trabajo, indicando, por tanto, la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de dispositivos formativos adecuados y ampliar el tiempo requerido para el logro de esta competencia, que, sin duda, ha sido insuficiente en esta investigación. Respecto a la faceta afectiva, los estudiantes, al inicio, se mostraron defensivos frente a las preguntas del tipo *qué es para ti un concepto, ...*, en este sentido, no han querido trabajar de manera individual, por lo tanto hemos adaptado parte de la actividad al trabajo grupal. El desarrollo de las tareas siguientes han superado esta etapa de tensión, logrando un trabajo efectivo y motivador.

Con el desarrollo de estos dos objetivos específicos hemos estudiado, diseñado, implementado y evaluado un ciclo formativo que da cuenta del logro del objetivo OG-1. dejando plasmado un aporte que puede ser tenido en cuenta en los programas de formación inicial del profesor de matemáticas. Si bien es cierto que, luego de la aplicación de un ciclo formativo, y su posterior reflexión o análisis retrospectivo, se presentan aspectos que pueden ser re-adaptados a nuevas circunstancias, el diseño aquí descrito es una posible respuesta a la pregunta de investigación PI-1. resultando un tipo de acción formativa necesaria y posible de implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el desarrollo de su conocimiento y la competencia para el análisis ontosemiótico.

2.2. Conclusiones sobre la pregunta de investigación PI-2.

> PI-2. ¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario y posible implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el conocimiento y la competencia para la reflexión sistemática sobre la práctica docente?

Esta pregunta se diferencia de la anterior por el tipo de competencia que se pretende involucrar. En este caso, nos preocupamos por investigar sobre posibles acciones formativas para desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica. Para responder a esta pregunta planteamos un objetivo general y tres objetivos específicos, los cuales se discuten a continuación.

2.2.1. Aportes derivados del objetivo general OG-2.

> OG-2. Realizar una investigación de diseño con profesores de matemáticas de educación secundaria en formación inicial orientado a promover el desarrollo de su conocimiento y la competencia para la reflexión sistemática sobre la práctica docente.

En el Capítulo 4 hemos procedido a desarrollar este objetivo para dar respuesta a la pregunta de investigación planteada anteriormente. Para lograr esto hemos planteado en el apartado 5.1.3. del Capítulo 2 tres objetivos específicos, los cuales se sintetizan a continuación destacando los principales aportes que dan cuenta del logro de los mismos.

2.2.1.1. Síntesis del objetivo específico OE-2.1.

> OE-2.1. Indagar los significados personales previos de los futuros profesores sobre los factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El logro de este objetivo se concreta con el diseño e implementación de la Tarea 1 descrita en el apartado 4.1. —*Reflexión sobre una clase de matemáticas*— siempre en el Capítulo 4.

El punto clave de esta actividad ha sido la reflexión conjunta con la clase para conocer sus significados personales sobre las facetas que afectan los procesos educativos y para aflorar en los participantes la necesidad y la búsqueda de determinados componentes e indicadores de calidad para tales facetas.

El logro de este objetivo ha sido muy útil para las fases siguientes, en las cuales se presenta, en primer lugar, una lectura, como una forma de promover tales discusiones; en segundo lugar, la resolución de la Tarea 2, dando lugar al OE-2.2.

2.2.1.2. Síntesis del objetivo específico OE-2.2.

> OE-2.2. Diseñar e implementar una experiencia formativa para promover el desarrollo de su competencia de análisis de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

El logro de este objetivo se concreta con el diseño e implementación de todo el ciclo formativo descrito en el apartado 4.2.; principalmente con el desarrollo de las fases de implementación 2, 3 y 4. El desarrollo de la competencia de reflexión se concreta con la aplicación de la Tarea 2 —*Tarea de reflexión didáctica*— con la cual se pretende que los futuros profesores describan, explique y valoren un episodio de clases video-grabado. Lo importante de esta actividad no es la clase grabada, sino las herramientas metodológicas que permiten su análisis.

Las consignas involucraron tres momentos importantes de discusión. Con los dos primeros momentos ¿qué está sucediendo? ¿por qué está sucediendo? se propone analizar ítems que son indicadores de aspectos ecológicos —¿qué normas condicionan el desarrollo de la clase?—, epistémicos —¿qué significados caracterizan el contenido estudiado?—, cognitivos-afectivos —¿qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan?—, e instruccionales —¿qué hace el profesor, alumno, ...? acompañado de las preguntas del tipo ¿por qué ...? El tercer momento ¿qué se podría mejorar? pretende que, una vez que se hayan identificado componentes e indicadores específicos del episodio, se utilicen los criterios de idoneidad didáctica para reflexionar sobre la clase visionada.

Nuevamente, el análisis *a priori* de la tarea se destaca como un punto clave para el formador e investigador.

2.2.1.3. Síntesis del objetivo específico OE-2.3.

> OE-2.3. Valorar la idoneidad didáctica de las acciones formativas implementadas.

Al final del Capítulo 4, en el apartado 6, se presenta el análisis retrospectivo del diseño lo que da lugar a un proceso de valoración/reflexión sobre cómo ha resultado la idoneidad didáctica del segundo estudio. El desarrollo de este apartado determina el logro del objetivo OE-2.3. Al igual que para el OE-1.2. hemos utilizado los mismos métodos: los criterios de idoneidad didáctica y la encuesta de opinión. En este caso, el análisis retrospectivo revela una alta idoneidad epistémica-ecológica. La idoneidad mediacional-interaccional se puede considerar en general media; la disposición del trabajo en equipos, el número de participantes involucrados y el uso de recursos, particularmente la elección del análisis de un episodio real de clases, revelan una alta idoneidad mediacional; las interacciones en el aula también han sido muy adecuadas y fundamentales en este proceso; sin embargo, el uso del tiempo empleado para el desarrollo de esta competencia fue insuficiente, principalmente porque la parte más importante de la Tarea 2, la parte de valoración ítem 3), no se pudo discutir en profundidad en clase. En consecuencia, las limitaciones del tiempo asignado han condicionado el logro de un nivel de aprendizaje adecuado, considerando media la idoneidad cognitiva pero alta la afectiva. En este último sentido, los estudiantes se mostraron muy receptivos con el uso adecuado de los criterios de idoneidad.

Con el desarrollo de estos tres objetivos específicos hemos estudiado, diseñado, implementado y evaluado un ciclo formativo que da cuenta del logro del objetivo OG-2. y brinda una respuesta a la pregunta de investigación PI-2. resultando un tipo de acción formativa necesaria y posible de implementar en un programa de formación para iniciar a los futuros profesores en el desarrollo de su conocimiento y la competencia para el análisis de la idoneidad didáctica.

2.3. Conclusiones sobre las hipótesis

A continuación se discuten las conclusiones obtenidas respecto las hipótesis básicas formuladas en el Capítulo 2 (ver apartado 5.2.) entendidas como expectativas de respuestas a los objetivos de investigación planteados.

En un primer momento hemos planteado una hipótesis general

> *Hipótesis general.* El desarrollo de las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos se puede favorecer mediante situaciones de resolución de tareas matemáticas, seguidas del análisis y reflexión de su resolución.

Esta hipótesis es corroborada dado que en esta tesis se ha puesto de manifiesto que los futuros profesores logran progresar en el desarrollo de su competencia para el análisis didáctico. Si bien el análisis retrospectivo de todo el diseño revela ciertas dificultades en los aprendizajes esperados, en ambos estudios se han detectado avances en sus reflexiones, tanto para el análisis de las tareas escolares, como para valorar un proceso de estudio.

La reflexión ofrece a los futuros docentes "un medio de reestructurar su práctica basada en principios claros y en la promoción de su desarrollo profesional" (Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte, 2017, p. 93). En términos de Mason (2016), este tipo de acción formativa, basada en el diseño de tareas para la formación profesional, es útil y necesaria porque "permite a los docentes el acceso a enriquecer tanto su repertorio de acciones pedagógicas como el discurso que utilizan para justificar esas acciones" (p. 225).

> *Hipótesis específica 1 (análisis ontosemiótico).* Se espera encontrar conflictos en los significados de las nociones de concepto, proposición, procedimiento y justificación por parte de los futuros profesores de matemáticas.

La hipótesis ha sido confirmada con el análisis de las respuestas que dan los futuros profesores durante el desarrollo de todo el primer estudio. Principalmente han destacado los conflictos en la identificación de proposiciones, siendo aún más visible cuando el problema matemático era bastante sencillo.

> *Hipótesis específica 2 (análisis ontosemiótico).* Se espera mostrar que las relaciones entre los objetos matemáticos y sus representaciones ostensivas son conflictivas para los futuros profesores.

Las cuatro tareas obligatorias del estudio 1 confirman esta hipótesis y por lo tanto, justifican la importancia de inserir en la formación de profesores el tipo de actividades didácticas que se han propuesto en esta tesis. Con la implementación de la Tarea 1 sale a la luz que los estudiantes focalizan su análisis en los objetos visuales dejando de lado los objetos no ostensivos involucrados. Por ejemplo, cuando se les plantea el dibujo en perspectiva isométrica muchos de los estudiantes manifiestan que (Figura 5.1.):

"aquí solo hay cubos; en esta tarea no hay mucha matemática; el problema involucra cubos, cuadrados y aristas"

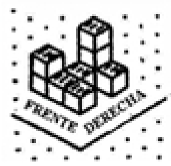


Figura 5.1. Ejemplos de conflictos entre objetos ostensivos y no ostensivos

Además, en los diálogos se registran tensiones continuas entre objetos matemáticos y sus posibles representaciones. Por ejemplo, el diálogo que mantenía un futuro profesor con el grupo en el cual argumenta que un cubo se puede representar empíricamente:

> Todos los cuerpos geométricos, o figuras geométricas se pueden representar gráficamente. Particularmente el cubo; y si puedo representar el cubo quedan

representadas todas sus propiedades: por ejemplo que tiene sus cuatro caras iguales (...) Para estar seguro que sus caras son iguales se pueden medir, o se puede graficar con un programa.

Esta hipótesis era de esperar dado que conflictos similares se han manifestado en los diversos talleres piloto aplicados.

Hipótesis específica 3 (análisis ontosemiótico). Es posible superar los conflictos identificados mediante la implementación de acciones formativas basadas en la reflexión epistémica y cognitiva de tareas específicas.

Considerando específicamente el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, la hipótesis ha sido confirmada, tal como se reconoce en la hipótesis general.

Hipótesis específica 4 (idoneidad didáctica). Se espera que los futuros profesores realicen análisis superficiales al reflexionar sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza.

Efectivamente, las reflexiones iniciales que realizaban los estudiantes se mostraban escasas y superficiales. Esto se puede observar en la discusión de la Tarea 1 y la discusión de resultados de la Tarea 2. Cuando los participantes se inician en el proceso reflexivo tienen cierta facilidad para reconocer algunos indicadores generales, pero sus reflexiones son desordenadas y superficiales, limitándose a los factores observables.

Hipótesis específica 5 (idoneidad didáctica). Se espera que los futuros profesores conozcan, comprendan y apliquen de manera pertinente los criterios de idoneidad didáctica para valorar experiencias de enseñanza y aprendizaje matemático.

Al final de la Tarea 2, los estudiantes se enfrentan a una consigna de valoración del proceso observado. En un primer intento, los participantes discutieron esta valoración sin aplicar los criterios de idoneidad didáctica. En un segundo intento, al aplicarlos, los futuros profesores fueron capaces de reconocer otros componentes e indicadores que habían pasado desapercibidos. Asimismo, fueron capaces de emitir juicios razonados sobre la información que faltaba para poder valorar de manera efectiva el proceso.

Así, para el caso particular del desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica, la hipótesis ha sido confirmada, tal como se reconoce en la hipótesis general.

2.4. Reflexiones finales

Como reflexión final podemos decir que hemos conseguido lograr satisfactoriamente los objetivos planteados y contribuir así, al campo de la formación inicial de profesores de matemática.

Las nociones teóricas del modelo ontosemiótico sobre el conocimiento y las competencias didáctico-matemáticas del profesor han sido operativas y se han mostrado eficientes en el diseño, implementación y valoración de un ciclo formativo orientado al desarrollo de competencias profesionales; asimismo, ha demostrado ser una herramienta eficiente para describir adecuadamente la práctica educativa de los participantes.

Se han empleado varias sesiones de clase, acompañadas de momentos de trabajo individual y grupal, presencial y no presencial, discusiones grupales e institucionalizaciones por parte del formador y del investigador. El proceso de diseño llevado a cabo fue sistemático, creativo, dinámico, utilizando un conjunto de actividades que han dado lugar a innovaciones dirigidas a los desafíos que enfrentan los futuros profesores y para los propios formadores e investigadores (Hjalmarson y Lesh, 2008; Kelly, 2004). En un primer momento, se presenta el problema didáctico que se debe abordar, y se utiliza el diseño de una tarea para explorar los significados personales iniciales de los futuros profesores, respecto a la competencia que se quiere desarrollar. Seguidamente, se incorpora la lectura y discusión de un documento introductorio en el que se describe el instrumento propuesto a los futuros profesores, ejemplificando su uso en un caso y mostrando el tipo de resultados que se pueden obtener. Finalmente se implementan acciones, en las que los futuros profesores aplican el instrumento a nuevos casos para adquirir, progresivamente, destreza en su aplicación eficiente. Es importante tomar conciencia que lograr la comprensión y el dominio de las herramientas teóricas propuestas no es instantáneo, ni es posible lograrlo con lecciones o discursos declarativos aislados. Se requiere tiempo y un periodo de práctica guiada.

3. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

A lo largo de esta capítulo se han sintetizado contribuciones que han sido producto de una pequeña ventana hacia la problemática de la formación de profesores de matemática. Somos conscientes que aún quedan muchos aspectos por investigar sobre el desarrollo de conocimiento y las competencias específicas. A continuación se presentan algunas problemáticas que podrían estudiarse con la finalidad de contribuir y seguir avanzando en el problema de investigación planteado en esta tesis, desde una perspectiva ontosemiótica.

3.1. Continuidad del ciclo formativo en la formación inicial

Como aspecto central, tal como se ha señalado a lo largo de los dos estudios realizados, el ciclo formativo aquí presentado representa solo el primer paso para *iniciar* a los participantes, futuros profesores de matemática de educación secundaria, en el desarrollo de su competencia de análisis de las prácticas y objetos matemáticos, y en su competencia para la reflexión profesional. En sintonía con la preocupación que plantean diversos autores, es necesario continuar con la implementación de otros ciclos formativos, aprovechando contextos de formación inicial. Por ejemplo, en España se lleva a cabo un máster universitario de formación del profesorado de matemáticas de educación de secundaria, el cual abre nuevas posibilidades de mejorar la formación, en matemáticas y en su didáctica, de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. Como argumenta Rubio (2012) en su tesis doctoral, esta mejora debería estar orientada por investigaciones sobre la puesta en práctica de estos nuevos estudios, como la realizada en esta investigación.

Esta tesis aporta una propuesta educativa y destaca aspectos que podrían mejorar los resultados en implementaciones siguientes. Desde una perspectiva formativa, un aspecto es considerar la posibilidad de disponer de más tiempo para discutir y compartir las respuestas de los participantes. Otro aspecto interesante, está relacionado con el uso de software educativos, ya que nuevas herramientas de aprendizaje visual movilizan otros tipos de conocimientos y pondrían en juego nuevos modos de comunicar ideas matemáticas, hacer conjeturas, explorar conceptos, etc. Por ejemplo, Battista (2007, p. 883) señala que "los profesores no están aprovechando la capacidad de estos entornos para apoyar la formulación de una demostración".

3.2. Diseño de procesos de instrucción para potenciar competencias profesionales en la formación continua

Durante el desarrollo de esta tesis se ha argumentado la posibilidad de extender este tipo de acciones formativas para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. No solo aplicando talleres en diversas actividades de formación, sino también en cursos más amplios que permitan contar con tiempo suficiente para potenciar el desarrollos de estas competencias. La importancia del desarrollo de estas competencias profesionales reclama la necesidad de articular oportunidades para apoyar su promoción dentro de los programas de formación de profesores (Llinares, 2013b; Korthagen, 2010; Ponte, 2011). En este sentido, sería interesante apuntar al diseño de tareas didácticas en la formación del profesorado de diferentes niveles educativos, tal como se ha resaltado en los antecedentes.

3.3. Aplicación de la Idoneidad didáctica como herramienta de reflexión en el trabajo de fin de máster

El estudio 2, descrito en el capítulo 4, orientado al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de futuros profesores —esto es su competencia para la reflexión profesional—, presenta y motiva la aplicación de los "criterios de idoneidad didáctica" de aspectos parciales de un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. El análisis retrospectivo del estudio reveló el interés de algunos estudiantes en aplicar esta herramienta en su TFM, con una orientación hacia la innovación, fundamentado en el proceso de reflexión sobre su experiencia de práctica docente. Esta posibilidad de innovación es destacada por diversos autores mostrando resultados positivos (Breda y Lima, 2016; Castro et al., 2013; Giménez et al., 2012; Morales-López y Font, 2017; Posadas y Godino, 2017). En general, los autores concluyen que la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica ayuda a sistematizar los conocimientos didácticos y su aplicación a la reflexión y mejora progresiva de la práctica de la enseñanza. Queda planteada así, la posibilidad de realizar estudios de caso que permitan por ejemplo, evaluar la competencia de análisis de idoneidad didáctica que presentan determinados participantes cuando utilizan la herramienta idoneidad didáctica, luego de un proceso instructivo, tal como se destaca en este diseño.

3.4. Exploración de otros aspectos de la competencia general de análisis e intervención didáctica

Dada la complejidad involucrada en un proceso de instrucción, hemos centrado nuestra atención en diseñar, implementar y evaluar estrategias formativas para el desarrollo de dos sub-competencias de la competencia general de análisis e intervención didáctica. Si bien hemos intentado abordar aspectos amplios, principalmente en el segundo estudio, para describir, explicar y valorar procesos educativos, al involucrar la importancia del estudio de los distintos significados de la semejanza, o bien, de las normas que condicionan el proceso instruccional, etc. no se ha abordado con mayor profundidad. Queda una línea de exploración abierta hacia la posibilidad y utilidad de diseñar acciones formativas que pongan en juego otras herramientas, por ejemplo, la dimensión normativa, dando lugar al desarrollo de la competencia de análisis normativo.

3.5. El papel del formador de profesores

El trabajo realizado en esta investigación tiene claras implicaciones para los investigadores formadores de profesores. Si bien es importante centrarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los docentes, no se puede olvidar el papel fundamental de los formadores (Chapman, 2008; Novotná, Margolinas y Sarrazy, 2012). Los formadores son ellos mismos profesores, son profesionales que trabajan con futuros docentes y docentes en activo. En sus funciones de investigación, "los formadores tienen la responsabilidad de la investigación sobre la educación de docentes y esa investigación puede dar como resultado conocimientos opcionales en la práctica para ambos grupos de profesionales" (White, Jaworski, Agudelo-Valderrama y Gooya, 2013, p. 406). Dada la importancia del desarrollo de las competencias profesionales y de los conocimientos didáctico-matemáticos mencionados en este artículo, una consecuencia inmediata de esta investigación, recae sin duda en los programas de formación, cuyo diseño e implementación es responsabilidad de los formadores. Una línea que queda abierta es focalizar la mirada en el formador, su rol, conocimientos y competencias en la actividad de formar. Diseñar cursos para que el formador conozca y use de manera competente este tipo de herramientas.

5. PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA INVESTIGACIÓN DOCTORAL

En este último apartado recogemos las aportaciones que hemos realizado al campo de la formación de profesores, a partir de los desarrollos y resultados obtenidos a lo largo de la investigación. Los mismos están ordenados cronológicamente de manera descendente.

5.1. Artículos en revistas

Giacomone, B, Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-25. doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1-24.

Giacomone, B., Díaz-Levicoy, D., & Godino, J. D. (2018). Onto-semiotic tasks analysis involving statistical graphs in Primary Education. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 18*(1), 1-13.

Beltrán-Pellicer, P., & Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en un curso de posgrado mediante la discusión de la de una experiencia de enseñanza. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, 7*(2), 111-133.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM*, *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 63-83.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En Muñoz-Escolano, J. M., Arnal Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M., & Carrillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2016). Evaluando la competencia de análisis epistémico de profesores de matemáticas. En A. Engler, A. Castro et al. (Eds.), *ALME—Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 29, pp. 885-893). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2016). Perspectiva ontosemiótica de la visualización espacial y el razonamiento diagramático. En A. Engler, A. Castro et al. (Eds.), *ALME—Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 29, pp. 541-548). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

5.2. Participación en eventos científicos

Godino, J. D., Font, V., & Giacomone, B. (2017, sept.). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Taller presentado en el *Grupo Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas-Investigación en Educación Matemática XXI.* Zaragoza: SEIEM.

Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En Contreras, J. M., Arteaga, P., Cañadas, G. R., Gea, M. M., Giacomone, B. y López-Martín, M. M. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-11). Granada, España: CIVEOS.

Giacomone, B., & Godino, J. D. (2017). Análisis cognitivo del uso de diagramas de áreas y de árbol en la solución de un problema sobre fracciones. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Eds.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM* (pp. 108-116). Madrid, España: FSPM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En Berciano, A., Fernández, C., Fernández, T., González, J., Hernández, P., Jiménez, A., Macías, J. A, Ruiz, F., Sánchez, M. T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 257-265). Málaga, España: SEIEM.

Giacomone, B., & Godino, J. D. (2016). Dialéctica entre las facetas ostensiva y no ostensiva de las prácticas matemáticas. Implicaciones para la formación de profesores. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A.

Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 586). Málaga, España: SEIEM.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. Gonzales, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga, España: SEIEM.

Godino, J. D., & Giacomone, B. (2016). Competencias y conocimientos didácticos del profesor de matemáticas según el EOS. En Berciano, A., Fernández, C., Fernández, T., González, J., Hernández, P., Jiménez, A., Macías, J. A, Ruiz, F., Sánchez, M. T. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 601). Málaga, España: Universidad de Málaga.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016, jul.). Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning. En Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds*.), Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (v. 2. pp. 291-298). Szeged, Hungary: PME.

Godino, J. D. Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2016, jul.). Onto-semiotic analysis of visualization and diagrammatic reasoning tasks. *13th International Congress on Mathematical Educations*. Hamburg, Germany: ICME. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/8400/

Giacomone, B., & Godino, J. D. (2016, jul.). Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico-matemática de futuros profesores. En Sociedad Andaluza de Educación Matemática (Ed.), *XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. *Matemáticas, ni más ni menos* (pp. 45-55). Jerez: CEAM.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Blanco, T. F. (2016, jun.). Visualización y razonamiento diagramático: implicaciones para la formación de profesores de matemática. En T. Ramiro-Sánchez, M. T. Ramiro Sánchez, & M. P. Bermúdez Sánchez (Eds.), *4th International Congress of Educational Sciences and Development* (pp. 145). Compostela: AEPC.

Godino, J. D., & Giacomone, B. (2016, abril). Análisis ontosemiótico de tareas de visualización y razonamiento diagramático. *6to Congreso Uruguayo de*

Educación Matemática. Montevideo, Uruguay: CUREM 6.

Giacomone, B. (2015, dic). Visualización y razonamiento diagramático. Una mirada ontosemiótica (Conferencia). Universidad Nacional de La Plata, Argentina: FaHCE.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2015, nov.). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía, & M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 138-145). Villarrica: SOCHIEM.

REFERENCIAS

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5,* 25-48.

Alsawaie, O. N., & Alghazo, I. M. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(3), 223-241.

Alsina, A. (2010). Reflective learning in the early formation of teachers: a model to learn to teach maths. *Educación matemática, 22*(1), 149-166.

Alsina, A., Planas, N., & Calabuig, M. (2009). El aprendizaje reflexivo en la formación del profesorado de matemáticas. Actas de las VII *Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria: la calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio* (pp. 252-257). Universidad de Alicante, Alicante.

Amador, J. (2016). Professional Noticing Practices of Novice Mathematics Teacher Educators. *International Journal of Science & Mathematics Education, 14*(1), 217-241.

Amador, J. M., & Carter, I. S. (2018). Audible conversational affordances and constraints of verbalizing professional noticing during prospective teacher lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 5-34.

AMTE, Association of Mathematics Teacher Educators. (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*. Recuperado de https://amte.net/standards

An, S., & Wu, Z. (2014). Using the evidence-based MSA approach to enhance teacher knowledge in student mathematics learning and assessment. *Journal of Mathematics Education, 7*(2), 108-129.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241.

Aroza, C. J. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad y porcentajes en primero de la E.S.O* (Tesis de Máster, Universidad de Granada). Recuperada de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_master/TFM_Aroza.pdf

Aroza, C. J., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES, 6*(1), 1-29.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Gea. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educaçao Matemática Pesquisa. 14*(2), 279-297.

Artigue, M. (2011). Review of Bharath Sriraman & Lyn English: Theories of Mathematics Education—Seeking New Frontiers. *Research in Mathematics Education, 13*(3), 311-316.

Bakker, A., & Hoffmann, M. H. G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: a semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 333-358.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009, mar.). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learns' mathematical futures. En *43rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held*. Oldenburg, Germany. Recuperado de https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31305/1/003.pdf

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407.

Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson, & M.

Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 249-272). Springer, Cham.

Barragán, R. (2005). El portafolio, metodología de evaluación y aprendizaje de cara al nuevo espacio europeo de educación superior. Una experiencia práctica en la Universidad de Sevilla. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 4*(1), 121-139.

Barrios, F. M. G., & Martínez, E. C. (2014). Diagrams produced by secondary students in multiplicative comparison word problems. *Journal of Mathematics and System Science, 4*(2), 83-92.

Batanero, C., Contreras, J. M., Díaz, C., & Sánchez, E. (2015). Prospective teachers' semiotic conflicts in computing probabilities from a two-way table. *Mathematics Education, 10*(1), 3-16.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79.

Beltrán-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del azar y probabilidad en tercer curso ESO* (Tesis de Máster, Universidad de Granada). Recuperada de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_master/TFM_PBeltran.pdf

Beltrán-Pellicer, P., & Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en un curso de posgrado mediante la discusión de la de una experiencia de enseñanza. *REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, 7*(2), 111-133.

Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional, 56*(2), 92-116.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema, 32*(61), 1-21.

Bishop, A. J. (2013). Mathematics education as a field of study. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 265-271). Nueva York: Springer International.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2003), *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blomberg, G., Renkl, A., Sherin, M. G., Borko, H., & Seidel, T. (2013). Five research-based heuristics for using video in pre-service teacher education. *Journal for educational research online, 5*(1), 90-114.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(1), 3-13.

Boston, M. D. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 7-31.

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado PROFMAT no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso* (Tesis doctoral, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul). Recuperada de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/tesis_Breda_2016.pdf

Breda, A., Font, V., & Lima, V. M. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M., & Pereira, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación, 14*(2), 162-176.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *Journal of Research in Mathematics Education, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflections and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Breda, A., Silva, J. F. D., & Carvalho, M. P. D. (2016). A formação de professores de matemática por competências: trajetória, estudos e perspectivas do professor Vicenç Font. *Revista Paranaense de Educação Matemática, 5*(8), 10-32.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En Muñoz-Escolano, J. M., Arnal Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M., & Carrillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M., Godino, J. D., Giacomone, B., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. En *ALME—Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol.31, pp. 706-713). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cajkler, C., Wood, P., Norton, J., & Pedder, D. (2014). Lesson study as a vehicle for collaborative teacher learning in a secondary school. *Professional Development in Education, 40*(4), 511-529.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2014). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Castro, W. F., & Godino, J. D. (2009). Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem. Paper presented at the *Meeting of the CERME 6*, Group 4: Algebraic Thinking. Lyon, France.

Castro, W. F., Godino, J. D., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25*, 73-88.

Castro, A., Santana, F., Neto, T., & Órfão, I. (2013). Iniciação à investigação em educação matemática: exemplo de duas tarefas com recurso ao Geogebra. *Indagatio Didactica, 5*(1), 127-148.

Cellucci, C. (2008). The nature of mathematical explanation. *Studies in the History and Philosophy of Science, 39,* 202-210.

Chapman, O. (2008). Mathematics teacher educators' learning from research on their instructional practices: A cognitive perspective. En T. Wood, B. Jaworski, K. Krainer, D. Tirosh, & P. Sullivan (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 115-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Chapman, O. (2009). Self-study as a basis of prospective mathematics teachers' learning of problem solving for teaching. En S. Lerman, & B. Davis (Eds.), *Mathematical action and structures of noticing* (pp. 163–174). Rotterdam: Sense Publisher.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham, & L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Chapman, O., & An, S. (2017). A survey of university-based programs that support in-service and pre-service mathematics teachers' change. *ZDM Mathematics Education, 49*(2), 171-185.

Clarke, D., Roche, A., Cheeseman, J., & van der Schans, S. (2014). Teaching strategies for building student persistence on challenging tasks: Insights emerging from two approaches to teacher professional learning. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(2), 46-70.

Clements, M. K., Bishop, A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2013), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27). Nueva York: Springer International.

Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M., & Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(1), 13-36.

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñan, M. M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, & V. J., León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (9), 85-103.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 481-503). Nueva York, NY: Routledge.

Cohen, S. (2004). *Teachers' professional development and the elementary mathematics classroom: Bringing understandings to light*. Nueva Jersey: Routledge.

Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. *ZDM Mathematics Education, 46*(2), 267-278.

Cooney, T. J. (1994). Teacher education as an exercise in adaptation. En D. Aichele, A. Coxford, (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 9-22). Reston, VA: NCTM.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en didactique des Mathemátiques, 25*(2), 151-186.

Contreras, A., García, M., & Font, V. (2012). Analysis of a process of statement on the teaching of the limit of a function. *Bolema, 26*(42), 667-690.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Darling-Hammond, L. (1997). The quality of teaching matters most. *Journal of Staff Development, 18,* 38-41.

Design-Based Research Collective (2003). Design based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Distéfano, M. L., & Pochulu, M. D. (2017). Trama de funciones semióticas en actividades de simbolización. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Universidad de Granada: CIVEOS.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking. Affordances and constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign-grounding mathematics education* (pp. 57-66). Nueva York: Springer.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). Ciudad de México: PME-NA: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103-131.

Dyer, E. B., & Sherin, M. G. (2016). Instructional reasoning about interpretations of student thinking that supports responsive teaching in secondary mathematics. *ZDM Mathematics Education, 48*(1), 69-82.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York, NY: Routledge.

Escobar, A. V., Romero, A. C., & Mier, M. M. (2015). Adaptation of a questionnaire to assess the epistemological beliefs of mathematics in secondary school teachers. *Revista Complutense de Educación, 26*(2), 255-273.

Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-76.

Escudero, I., & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behaviour 26*(4), 312-327.

Etchegaray, S., Buffarini, F., Olivares, M., & Sosa, M. (2017). Análisis y reflexión sobre la complejidad ontosemiótica de dos sistemas de prácticas planificados en el contexto de la práctica final del profesorado. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-12). Granada: CIVEOS.

Etchegaray, S., Corrales, J., Fernández, C., Nahuin, K., & Vázquez, L. (2017). El objeto ecuación en la formación inicial de profesores: análisis de significados institucionales a un tipo de tareas en diferentes contextos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. LópezMartín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Granada: CIVEOS.

Etchegaray, S., Corrales, J., & Nahuin, K. (2015). Un proceso de modelización en la formación del profesor: Análisis didáctico-matemático. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía, & M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 655). Villarrica: SOCHIEM.

Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry. *Technology, knowledge and learning, 19,* 287-315.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), 747-759.

Fernández, C. Yoshida, M. (2004). Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Flores, E., Escudero, D., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). Bilbao, España: SEIEM.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, 26,* 9-25.

Font, V. (2015). Competencias profesionales para el desarrollo y evaluación de competencias matemáticas en alumnos de secundaria. En B. D'Amore, & M. Fandiño (Eds.), *Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica* (215- 230). Bogotá, Colombia: Universidad de la Sabana.

Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional, 11*(19), 17-34.

Font, V., Breda, A., & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 10*(2), 1-23.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97-124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Font, V., & Rubio, N. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el*

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (pp. 1-21). Universidad de Granada: CIVEOS.

Font, V., Rubio, N., & Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21 (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Fortuny, J. M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación matemática*, (1), 23-37.

Gellert, U., Becerra, R., & Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 327-360). Nueva York: Springer International.

Giacomone, B. (2015). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento diagramático en educación matemática. Implicaciones para la formación de profesores (Trabajo fin de Máster). Universidad de Granada, España). Recuperada de http://www.ugr.es/local/jgodino/Tesis_master/TFM_BGiacomone.pdf

Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-11). Universidad de Granada: CIVEOS.

Giacomone, B., Díaz-Levicoy, D., & Godino, J. D. (2018). Onto-semiotic tasks analysis involving statistical graphs in Primary Education. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 18*(1), 1-13.

Giacomone, B., & Godino, J. D. (2016). Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico-matemática de futuros profesores. *Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos* (pp. 1-10). Jerez: CEAM.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquis, 44*, 1-21.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 269-277). Málaga: SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1-24.

Giaquinto, M. (2007). Visual thinking in mathematics: An epistemological study. New York, NY: Oxford University Press.

Giardino, V. (2013). Towards a diagrammatic classification. *The Knowledge Engineering Review, 28*(3), 237-248.

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactical analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (581-590). Oxford: Proceedings of ICMI Study 22.

Giménez, J., Vanegas, Y., Font, V., & Ferreres, S. (2012). El papel del trabajo final de Máster en la formación del profesorado de Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 61*, 76-86.

Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2002b). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica, 4*, 434-450.

Godino, J. D. (2013a). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D. (2013b). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la*

Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Universidad de Granada: CIVEOS.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En Serrano, L. R. (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica*, (pp. 9-34). Melilla: Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En Godino, J. D. (Ed*.), Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 5-123). Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulating mathematics teachers' knowledge and competences: the DMKC. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2016). The theory of didactical suitability: networking a system of didactics principles for mathematics education from different theoretical perspectives. *Proceedings of* *the, 13th International Congress on Mathematical Education*, (24-31 July 2016). Hamburg, Germany: ICME.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H., & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*(1), 46-74.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). Universidad de Granada: CIVEOS.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T., & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 163-184.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Especial), 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN, 19,* 34-46.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J. D., & Giacomone, B. (2016a). Competencias y conocimientos didácticos del profesor de matemáticas según el EOS. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández. & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 601). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., & Giacomone, B. (2016b, abril). Análisis ontosemiótico de tareas de visualización y razonamiento diagramático. *6to Congreso Uruguayo de Educación Matemática.* Montevideo, Uruguay: CUREM 6.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Blanco, T. F., Wilhelmi, M. R., & Contreras, A. (2016, jul.). Onto-semiotic configurations underlying diagrammatic reasoning. En Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds*.), Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (v. 2. pp. 291-298). Szeged, Hungary: PME.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 63-83.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T., & Contreras, A. (2015a). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricados en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2015b, nov.). Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matemáticas. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía, & M. Parraguez (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 138-145). Villarrica: SOCHIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2016a). Evaluando la competencia de análisis epistémico de profesores de matemáticas. En A. Engler, A. Castro et al. (Eds.), *ALME—Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 29, pp. 885-893). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., & Contreras, A. (2016b, jul.). Onto-semiotic analysis of visualization and diagrammatic reasoning tasks. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Educations.* Hamburg, Germany: ICME.

Godino, J. D., & Neto, T. (2013). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *UNO, 63,* 69-76.

Godino, J. D., Neto, T., & Wilhelmi, M. R. (2016, jul). Analysis of algebraic reasoning and its different levels in primary and secondary education. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Educations.* Hamburg, Germany: ICME.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W., & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

Goldsmith, L. T., Doerr, H. M., & Lewis, C. C. (2014). Mathematics teachers' learning: A conceptual framework and synthesis of research. *Journal of mathematics teacher education, 17*(1), 5-36.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York and London: Teachers College Press.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33-56.

Guzmán, M. D. (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. En *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 1-25). Hersonissos, Grecia: ICTM. Recuperado de https://eric.ed.gov/?id=ED472047

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behaviour, 28*(1), 1-18.

Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education 6,* 201-222.

Hill H. C., Ball D. L., & Schilling S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Hjalmarson, M. A., & Lesh, R. A. (2008). Engineering and design research: Intersections for education research and design. En Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education. Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 96-110). New York: Routledge.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Hoth, J., Döhrmann, M., Kaiser, G., Busse, A., König, J., & Blömeke, S. (2016). Diagnostic competence of primary school mathematics teachers during classroom situations. *ZDM Mathematics Education, 48*(1), 41-53.

Husu, J., Toom, A., & Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice, 9*(1), 37-51.

Iori, M. (2016). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics, 94*(3), 275-291.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41,* 169-202.

Jaworski, B. (1990). Video as a tool for teachers' professional development. *Professional development in education, 16*(1), 60-65.

Jaworski, B., & Wood, T. (Eds.). (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kadunz, G. (2016). Diagrams as means for learning. En A. Sáenz-Ludlow, & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics* (pp. 111-126). SensePublishers.

Kelly, A. E. (2004). Design research in education: Yes, but is it methodological*?* *Journal of the Learning Sciences, 13*, 115-128.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (Eds.). (2008). *Handbook of Design Research in Methods in Education. Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching.* New York: Routledge.

Kilic, H. (2016). Pre-service Mathematics Teachers' Noticing Skills and Scaffolding Practices. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-24.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics* (1. ed.). Washington: National Academy Press.

Koelsch, N., Estrin, E., & Farr, B. (1995). Guide to developing equitable performance assessments. San Francisco, CA: WestEd.

Konic, P., & Reynoso, D. (2017). Diseño de una tarea que pone en discusión las concepciones de número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Granada: CIVEOS.

König, J., & Kramer, C. (2016). Teacher professional knowledge and classroom management: on the relation of general pedagogical knowledge (GPK) and classroom management expertise (CME). *ZDM Mathematics Education, 48*(1), 139-151.

Korthagen, F. A. (2010). Situated learning theory and the pedagogy of teacher education: Towards an integrative view of teacher behaviour and teacher learning. *Teaching and Teacher Education, 26*(1), 98-106.

Krainer, K., & Wood, T. (Eds.). (2008). *Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leavy, A. M., & Hourigan, M. (2016). Using lesson study to support knowledge development in initial teacher education: Insights from early number classrooms. *Teaching and Teacher Education, 57,* 161-175.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(3), 198-220.

Lee, H. S., Coomes, J., & Yim, J. (2017). Teachers' conceptions of prior knowledge and the potential of a task in teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1-23.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. En A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 191-225). New ICMI Study Series. New York: Springer.

Llinares, S. (2008, abril). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. *Actas de III Encuentro de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.* Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/5302

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(2), 53-70.

Llinares, S. (2013a). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista,* (50), 117-133.

Llinares, S. (2013b). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2016). ¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor. En

Ruiz, A. (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (pp. 57-67). Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Llinares, S., Fernández-Verdú, C., & Sánchez-Matamoros García, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*(3), 247-271.

Llinares, S., & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Lo, J. J., Leatham, K. R., & Zoest, L. R. Van. (Eds.). (2014), *Research trends in mathematics teacher education* (1ed.). Berlín: Springer.

Lurduy, J. O. (2012). Conceptualización y evaluación de las competencias para el análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas1. *Revista Científica, 16*(2), 87-108.

Maher, C., Landis, J., & Palius, M. (2010). Teachers attending to students' reasoning: Using videos as tools. *Journal of Mathematics Education, 3*(2), 1-24.

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. New York: Springer.

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision-making: understanding gaps between competence and performance —a commentary. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 219-226.

Mason, K. O., & Klein, S. R. (2013). Land, sea and sky: mapmaking as reflection in pre-service teacher education. *Reflective Practice, 14*(2), 209-225.

McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G., Drake, C., & Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of students' multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 245-270.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction* (5th edition). Nueva York: Long.

Mellone, M. (2011). The influence of theoretical tools on teachers' orientation to notice and classroom practice: a case study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 269-284.

Morales-López, Y., & Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae, 19*(1), 122-137.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching rational-number system. En Donovan, M., & Bransford, J. D. (Eds.), *How students learn: Mathematics in the classroom* (pp. 309-350). Washington, D.C: The National Academies Press.

NCATE, National Council for Accreditation of Teacher Education (2008). Professional standards for the accreditation of teacher preparation institutions. Boston, MA: Washington, DC: Author.

NCTM, National Council of the Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathemat*ics. Reston, VA: Author.

NCTM, National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: Author.

Nikolaeva, S. (2012). Improving initial teacher education by using the project-based approach. *Educational Research, 1*(1), 51-60.

Nogueira, I. C. (2015). Análise ontossemiótica de procesos instruccionales de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente. *Revista de Estudios e investigación en Psicología y Educación, Extra*(6), 209-2143.

Noguera, M. (2015). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre distribuciones binomial y normal en 2º de bachillerato* (Tesis de Máster, Universidad de Granada). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_master/TFM_Noguera.pdf

Novick, L. (2006). Understanding spatial diagram structure: An analysis of hierarchies, matrices, and networks. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *59*, 1826-1856.

Novotná, J., Margolinas, C., & Sarrazy, B. (2012). Developing mathematics educators. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 431-457). Nueva York: Springer International.

Ortiz, C. V., & Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48.

Ostermann, A., Leuders, T., & Nückles, M. (2017). Improving the judgment of task difficulties: Prospective teachers' diagnostic competence in the area of functions and graphs. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1-27.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39-60.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 2-6-8.* C. Hartshorne, & P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Harvard UP.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Philipp, R., Ambrose, R., Lamb, L., Sowder, J., Schappelle, B., Sowder, L. (2007). Effects of early field experience on the mathematical content knowledge and beliefs of preservice elementary school teachers: An experimental study. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 438-476.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: Four 'early majority' teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16(*5), 323-347.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Godino, J. D. (2015). Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación Matemática, 27*(1), 37-64.

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2017). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 1-23.

Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT, 8*(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pochulu, M. & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. En O. Zaslavsky, & P. Sullivan (Eds.), *Constructing*

Knowledge for Teaching Secondary Mathematics, Mathematics Teacher Education (pp. 249-261). New York, NY: Springer US.

Ponte, J. P. (2014). Mathematics teacher education as a multifaceted field of study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(6), 489-490.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez, A., & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Ed. Sense Publisher.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Vélez, I. (2017). Elementary teachers' professional development in interrelation with the context of mathematics teaching practice. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(1), 1-24.

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria* (Tesis de Máster, Universidad de Granada). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/TFM_Posadas.pdf

Posadas, P., & Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae, 1*, 77- 96.

Potari, D., & Ponte, J. P. (2017). Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge. En G. Kaiser (Ed.), *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World* (pp. 3-15). Springer, Cham.

Presmeg, N. (2006, July). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. 19-34). Prague: PME.

Prieto, J. L., & Valls González, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura auditiva en estudiantes para maestro. *Educación matemática, 22*(1), 57-85.

Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., da Ponte, J. P., Shúilleabháin, A. N., & Takahashi, A. (Eds.) (2018). *Mathematics Lesson Study Around the World. Theoretical and Methodological Issues*. Springer.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: SensePublishers.

Ramos, A. B., & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 233-265.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., & Ponte, J. P. (2016). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research, 30*(1), 85-102.

Ricks, T. E. (2011). Process reflection during Japanese lesson study experiences by prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 251-267.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Granada). Recuperada de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/tesisdoctorales.html

Rivas, M. Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

Roller, S. A. (2016). What they notice in video: A study of prospective secondary mathematics teachers learning to teach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(5), 477-498.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education 8*(3), 255-281.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* (Tesis doctoral, Universidad de Granada). Recuperado de http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/65704

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. En S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn, & J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (pp. 13-27). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Sánchez, E. A. S., & Gómez-Blancarte, A. L. (2015). La negociación de significado como proceso de aprendizaje: El caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(3), 387-420.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education, 13*(6), 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de una función en un punto. En Estepa, A., Contreras, Á., Deulofeu, J., Peñalba, M. C., García, F. J., & Ordóñez, L. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*(1), 133-145.

Santagata, R., & Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: evidence from a video- and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 491-514.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 393-413.

Schack, E. O., Fisher, M. H., & Wilhelm, J. A. (Eds.). (2017). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks*. Springer.

Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3248-3253). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague.

Scheiner, T. (2016). New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 165-183.

Schlesinger, L., & Jentsch, A. (2016). Theoretical and methodological challenges in measuring instructional quality in mathematics education using classroom observations. *ZDM Mathematics Education, 48*(1), 29-40.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education, 45*, 607-621.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Ed. SensePublisher.

Schoenfeld, A. H., & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework.* Berkeley, CA: Graduate School of Education. Recuperado de http://map.mathshell.org/trumath.php or http://tru.berkeley.edu.

Seckel M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral, Universidad de Barcelona). Recuperado de http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/99644/1/MJSS_TESIS.pdf

Seckel, M. J., Breda, A., & Font, V. (2018). Regularidades en la reflexión de futuros profesores sobre su práctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 803-808.

Segal, S., & Giuliani, D. (2010). *Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades*. Bs. As., Argentina: Libros del Zorzal.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Using video in teacher education* (v.10, pp. 1-27). Oxford, UK: Elsevier Science.

Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundation of Science*, *14*, 59-74.

Shin, S-J., & Lemon, O. (2008). Diagrams. En E. N. Zalta (Ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Recuperado de http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Silverman, J., & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511.

Simpson, A., & Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 335-355.

Simon, M. (2008). The challenge of mathematics teacher education in an era of mathematics education reform. En T. Wood, B. Jaworski, K. Krainer, D. Tirosh, & P. Sullivan (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 4, pp. 17-30). Rotterdam: Sense Publishers.

Solera, M. (2015). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del simbolismo algebraico y las ecuaciones primer grado* (Tesis de

Máster, Universidad de Granada). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_master/TFM_MSolera.pdf

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte: Ed. NCTM and IAP.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. En P. Sullivan, & T. Wood (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Vol. 1, pp. 1-9). Dordrecht: Sense Publishers.

Sullivan, P., & Wood, T. (Eds.). (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.

Speer, N. M., King, K. D., & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 105-122.

Star, J., & Strickland, S. (2008). Learning to observe: Using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 107-125.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, *48*(1-2), 1-27.

Thanh, T. N., Rijkje Dekker, R., & Goedhart, M. J. (2008). Preparing Vietnamese student teachers for teaching with a student-centered approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(1), 61-81.

Tirosh, D., & Wood, T. (Eds.). (2008). *Tools and processes in mathematics teacher education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Valls, S. F., & Muñoz, Y. M. V. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 196,* 219-225.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 155-176.

Vásquez, C., & Alsina, A. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación Matemática, 29*(3), 79-108.

Vázquez-Cano, E. (2016). Teachers' difficulties to plan, coordinate, and evaluate key competencies. An analysis from the education inspection. *Revista Complutense de Educación, 27*(3), 1061-1083.

Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., van Smaalen, D., & Tall, D. O. (2015). Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. *Professional Development in Education, 41*(1), 109-12.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. En D. S. Rychen, & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (pp. 45-66). Gottingen, Alemania: Hogrefe & Huber.

White, A. L., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C., & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. En M. A. K. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 393-430). Springer, New York.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77-120.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York, NY: The MacMillan Company.

Zahner, D., & Corter, J. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 177-204.

ANEXOS

ANEXO 1. UNIDAD TEMÁTICA COMPLETA DEL ESTUDIO 1

COMPETENCIA PARA EL ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS ESCOLARES

OBJETIVOS GENERALES:

- Reflexionar sobre diversidad de objetos y significados implicados en tareas matemáticas propias de educación secundaria.
- Reflexionar sobre las características de la visualización y el razonamiento diagramático (VRD) y su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas propias de educación secundaria realizadas mediante la aplicación de visualizaciones y razonamiento diagramático.
- Conocer y aplicar herramientas teóricas específicas e innovadoras en el ámbito de la educación matemática para realizar análisis didácticos de tareas escolares.

CONTENIDO:

- Conceptos de visualización, diagramas y razonamiento diagramático.
- Uso de diagramas, visualización y recursos manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Conocimientos implicados en la visualización y el razonamiento diagramático.

DURACIÓN:

- 3 sesiones de clases presenciales

REFLEXIÓN INICIAL SOBRE LOS OBJETOS QUE INTERVIENEN EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Apellido y nombre: ---

METODOLOGÍA:

- Resolución de la Tarea 1, incluida a continuación, de manera individual.
- Presentación y discusión de resultados

DURACIÓN:

- 1 sesión de clases

Tarea 1. Exploración inicial

La figura adjunta muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.

1) Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica la respuesta.
2) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe el procedimiento matemático en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué es para ti una demostración matemática? Elabora una justificación matemática para la respuesta dada en la tarea.
6) Uno de los conceptos que intervienen es el de cubo, usado para indicar cada una de las piezas que componen el 'edificio'.
    a) Elabora al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico.
    b) Indica otros usos o significados que puede tener la palabra 'cubo'.
7) Indica qué papel desempeñan las proposiciones que has identificado en la justificación de la respuesta.
8) Describe otros posibles procedimientos que se podrían aplicar para resolver la tarea.
9) Describe una posible justificación de la respuesta que podría dar un estudiante usando algún tipo de material, secuencia de representaciones u otras explicaciones.
10) La figura geométrica dada se representa como una composición de piezas de forma cúbica.
    a) Identifica propiedades del cubo, como figura geométrica, que no se pueden representar de manera empírica.
    b) Enuncia la tarea utilizando lenguaje natural u ordinario.

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS MATEMÁTICAS

METODOLOGÍA:

- Lectura y elaboración de una reflexión sobre el siguiente artículo:

  Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. y Contreras, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático.

- Presentación y discusión del artículo.
- Resolución de la Tarea 2, Tarea 3 y Tarea 4, incluidas a continuación, a partir de las siguientes consignas ontosemióticas, trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes:

  1. Resuelve el problema matemático.
  2. Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.
  3. Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

- Presentación y discusión de resultados

DURACIÓN:

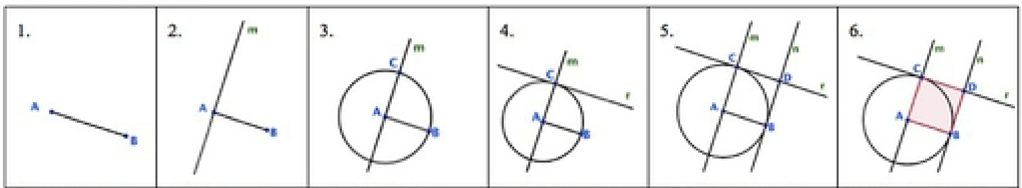
- 2 sesiones de clases

GRUPO DE TRABAJO:

Apellido y nombre: ---

Tarea 2. Construcción de un cuadrado con GeoGebra

La secuencia de pasos indicados a continuación es el procedimiento seguido por un alumno para construir un cuadrado con GeoGebra.



1.	2.	3.	4.	5.	6.
a) Represento un segmento AB.	b) Trazo una recta *m* perpendicular al segmento AB por el punto A.	c) Trazo una circunferencia de centro A y radio AB. d) Llamo C al punto de intersección entre la circunferencia trazada y la recta *m*.	e) Trazo una recta *r* paralela al segmento AB haciendo que pase por el punto C.	f) Trazo la recta *n* perpendicular al segmento AB por el punto B. g) Llamo D al punto de intersección de la recta *n* y la recta *r*.	h) El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

Justifica que, en efecto, el cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

GRUPO DE TRABAJO:

Apellido y nombre: ---

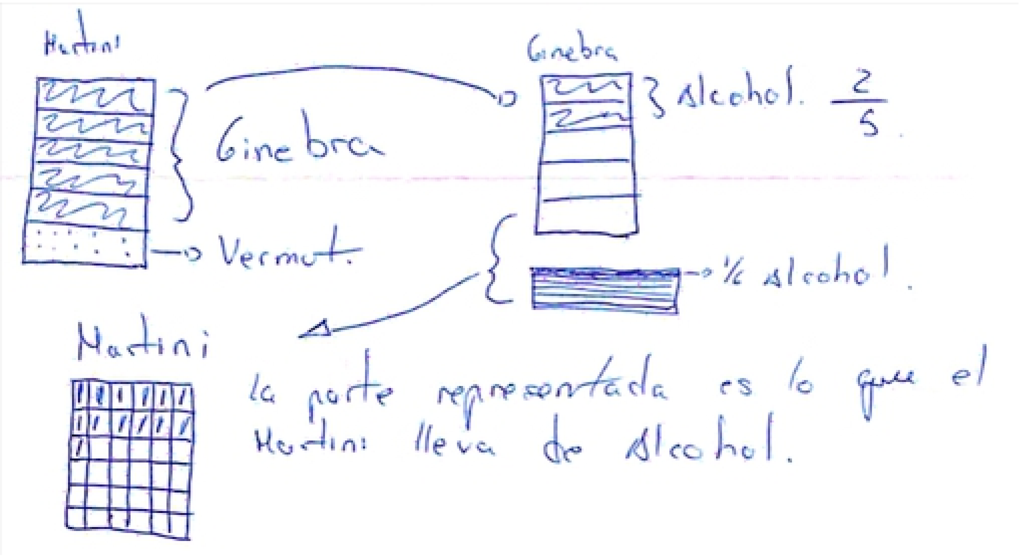
Tarea 3. Fracciones y diagrama de áreas

Un estudiante para maestro resuelve el siguiente problema:

Problema:

> *Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.*

Solución:



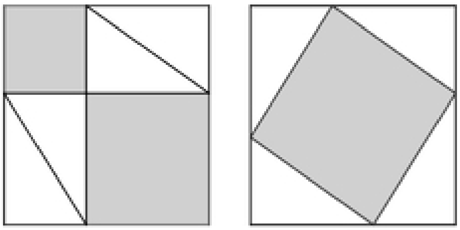
Responde: ¿Es correcta la solución dada por el estudiante? Justifica la respuesta.

TRABAJO INDIVIDUAL

Apellido y nombre: ---

Tarea 4. Relación entre áreas de figuras planas

Dadas las siguientes figuras:



A B

- ¿Qué relación piensas que existe entre las áreas de las figuras sombreadas de la parte A y B? Usa las hipótesis que creas necesario.

- ¿Cómo se puede usar esta relación para probar el teorema de Pitágoras?

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE TAREAS MATEMÁTICAS

TAREA OPCIONAL INDIVIDUAL

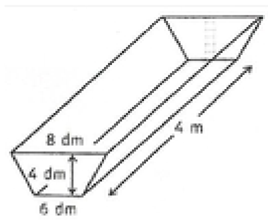
Tarea 5 optativa. Modelización matemática

Situación-problema:

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo. Se trata de un prisma recto de 4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6dm, base mayor 8dm y altura 4dm.

Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300, … litros.

Encuentra la manera de preparar dicha varilla indicando las distancias a las cuales se deben trazar las marcas correspondientes.



Consignas de trabajo

a) Resuelve la situación-problema.

b) Describe el procedimiento seguido indicando la secuencia de prácticas elementales que has realizado para resolver la tarea; añade las explicaciones necesarias para justificar las respuestas.

c) Completa la tabla incluida a continuación en la que se identifican los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y en cada una de las prácticas elementales, (añade las filas necesarias):

Uso e intencionalidad de las prácticas	Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos referidos en las prácticas *(conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

d) Identifica procesos matemáticos involucrados en la resolución de la tarea (particularización-generalización, materialización-idealización, ...).

e) Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los alumnos.

f) Enuncia variantes de la tarea e identifica los cambios que se producen en los conocimientos puestos en juego en cada variación.

ANEXO 2. UNIDAD TEMÁTICA COMPLETA DEL ESTUDIO 2

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

OBJETIVOS GENERALES:

- Reflexionar sobre los factores que influyen en los procesos educativos.
- Conocer y aplicar herramientas teóricas específicas e innovadoras en el ámbito de la educación matemática para describir, explicar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemática.

DURACIÓN:

- 3 sesiones de clases presenciales

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Curso de posgrado:

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas *2015-2016*

REFLEXIÓN SOBRE UNA CLASE DE MATEMÁTICAS

TRABAJO INDIVIDUAL

Apellido y nombre: ---

METODOLOGÍA:

- Resolución de la Tarea 1, incluida a continuación, de manera individual.
- Presentación y discusión de resultados

DURACIÓN:

- 1 sesión de clases

Tarea 1. Reflexión sobre una clase de matemáticas

A continuación, se presenta un texto que describe una clase de matemáticas imaginaria. Al final se incluye el texto descompuesto en párrafos numerados para que puedas referirte a ellos al responder a las siguientes cuestiones.

1) Lee el texto con atención. Subraya los puntos que consideres especialmente atractivos en la descripción.

2) Indica las características de las matemáticas que se consideran valiosas en el texto.

2.1. Explica por qué se consideran valiosas y si compartes esa opinión.

2.2. ¿Qué otros rasgos de las matemáticas consideras valiosos desde el punto de vista educativo?

3). Indica las características del aprendizaje matemático que se consideran valiosas en el texto.

3.1. Explica por qué se consideran valiosas y si compartes esa opinión.

3.2. ¿Qué otros rasgos del aprendizaje consideras valiosos desde el punto de vista educativo?

4). Indica qué características se mencionan en el texto relacionadas con los aspectos afectivos en el estudio de las matemáticas.

4.1. Explica por qué se consideran valiosos dichos aspectos y si compartes esa opinión.

4.2. ¿Qué otros rasgos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consideras valiosos desde el punto de vista de la afectividad?

5) Indica los modos de interacción entre profesor y estudiantes que se consideran valiosos en el texto.

5.1. Explica por qué se consideran valiosos dichos modos de interacción y si compartes esa opinión.

5.2. ¿Qué otros modos de interacción en el aula consideras valiosos para optimizar el aprendizaje matemático?

6) Indica qué características de la clase imaginaria de matemáticas se consideran valiosas relativas al uso de recursos tecnológicos.

6.1. Explica por qué se consideran valiosas dichas características y si compartes esa opinión.

6.2. ¿Qué otros aspectos del uso de recursos consideras valiosos para favorecer el aprendizaje matemático?

7) Identifica los factores externos a la clase que se mencionan en el texto como condicionantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

7.1. Explica por qué se consideran factores condicionantes y si compartes esa opinión.

7.2. ¿Qué otros factores consideras que condicionan el logro de una clase ideal de matemáticas?

Lectura individual

Una Visión de las Matemáticas Escolares (NCTM 2000, p. 3):

> "Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión. La tecnología es un componente esencial del entorno. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje."

UNIDADES DE ANÁLISIS:

1. Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad.
2. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan.
3. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional.
4. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión.
5. La tecnología es un componente esencial del entorno.
6. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores.
7. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar.
8. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas.
9. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados.
10. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores.
11. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva.
12. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje.

TAREA DE REFLEXIÓN DIDÁCTICA

TRABAJO GRUPAL

Apellido y nombre: ---

METODOLOGÍA:

– Lectura y elaboración de una reflexión sobre el siguiente artículo:

  Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

– Presentación y discusión del artículo.

– Resolución de la Tarea 2, incluida a continuación, trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes.

– Presentación y discusión de resultados

DURACIÓN:

– 2 sesiones de clases

Tarea 2. Reflexión didáctica

En el siguiente link encontramos un video de una clase de matemáticas: http://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8.

Después de visionado el vídeo, y trabajando en equipos, elaborar un informe respondiendo a las siguientes cuestiones:

1) Descripción: *¿Qué sucede?*

a. ¿Qué contenido matemático se estudia?
b. ¿Qué significados caracterizan el contenido estudiado?
c. ¿Cuál es el contexto y nivel educativo en que tiene lugar la clase?
d. ¿Qué hace el profesor?
e. ¿Qué hace el alumno?
f. ¿Qué recursos se utilizan?
g. ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos para poder abordar la tarea?
h. ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan?
i. ¿Qué normas (regulaciones, hábitos, costumbres) hacen posible y condicionan el desarrollo de la clase?

2) Explicación: *¿Por qué sucede?*

e. ¿Por qué se estudia ese contenido?
f. ¿Por qué se usa un problema realista para estudiar el contenido?
g. ¿Por qué actúa el docente de la manera en que lo hace?
h. ¿Por qué actúa los alumnos de la manera en que lo hacen?

3) Valoración: *¿qué se podría mejorar?*

Emitir un juicio razonado sobre la enseñanza observada en las siguientes facetas, indicando algunos cambios que se podrían introducir para mejorarla:

j. Epistémica (contenido matemático estudiado)
k. Ecológica (relaciones con otros temas, currículo)
l. Cognitiva (conocimientos previos, aprendizaje, …)
m. Afectiva (interés, motivación, …)
n. Interaccional (modos de interacción entre profesor y estudiantes)
o. Mediacional (recursos usados)

4) *Limitaciones de la información disponible:*

Para discutir en clase: ¿qué información adicional sería necesario tener para que el análisis realizado fuera más preciso y fundamentado?

EXTENDED SUMMARY

INTRODUCTION

A major problem in mathematics education, which has recently been gaining more attention, is to clarify the kind of didactic-mathematical knowledge and professional competences that mathematics teachers should have in order to carry out their teaching appropriately (Chapman, 2016; English, 2008; Sowder, 2007). Having mathematical knowledge is not guaranty of professional performance, "It is not only important what mathematics teachers know but also how they know it and what they are able to mobilize for teaching" (Chapman, 2014, p. 295). Certainly, characterizing this knowledge necessary for mathematics teaching is a relevant research topic, among other reasons, because "there is limited understanding of what it is, how one might recognize it, and how it might develop in the minds of teachers" (Silverman & Thompson, 2008, p. 499). These researches have been gestated in the light of several theoretical approaches; "however, there is neither a consensus nor a common perspective regarding the nature of this knowledge" (Chapman, 2014, p. 296).

Several authors develop tools and strategies to promote teacher's analysis and reflection about the processes of mathematics teaching and learning; in addition, they provide tools that allow the teacher to be competent to describe, explain, and assess systematically, their own practice (Llinares & Krainer, 2006; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015). In these works, it is recognized that the teacher should have mathematical and didactic knowledge, but the teacher should be also competent in the use of such knowledge to address the profession performance.

Within the Onto-Semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction (Godino, Batanero, & Font, 2007), a theoretical model of the mathematics teacher's knowledge, known as the Didactic-Mathematical Knowledge model (DMK model), has been developed (Godino, 2009; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015). As stated by these authors, one of the aspects that the aforementioned model considers is the interconnection of the notion of the teacher's knowledge with that of her/she competence. Further, from the OSA, significant research has been carried out on the competences of the mathematics teacher (Giménez, Font, & Vanegas, 2013; Nogueira, 2015; Rubio, 2012; Seckel, 2016; Pochulu, Font & Rodríguez, 2016), which has also brought to light the need for such a model on teachers' knowledge in order to evaluate and develop their competences. Both of these research topics have converged to create the model known as *Didactic-Mathematical Knowledge and Competences* of the mathematics teacher (DMKC model) (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017). This theoretical model is addressed in Chapter 2.

From DMKC model is assumed that mathematics teachers should develop *the specific competence of didactical analysis and intervention*; whose fundamental nucleus (Font, 2011; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015) consists of designing, applying and assessing mathematical study processes through of didactic analysis techniques and criteria of quality, in order to establish cycles of planning, implementation, evaluation and to put forward proposals for improvement. This didactical analysis competence can be split into sub-competencies, which can be identified linked to the use of specific theoretical tools, allowing to approach teaching problems:

1) C*ompetence for global meanings analysis*, linked to the knowledge and competent use of the *system of practises* tool (Godino y Batanero, 1994).

2) *Onto-semiotic analysis competence,* linked to the knowledge and competent use of the *onto-semiotic configuration of practices, objects, and processes tool* (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

3) *Competence for the management of Interactions and conflicts analysis*, linked to the knowledge and competent use of the *didactic trajectory* tool (Godino, Contreras et al., 2006).

4) *Norms and meta-norms analysis competence* linked to the knowledge and competent use of the *normative dimension* tool (D'Amore et al., 2007; Godino et al., 2009).

5) *Didactical suitability analysis competence,* linked to the knowledge and competent use of the *didactic suitability* tool (Godino, 2013a).

Continuing with this research line, this thesis deals with the development of an educational cycle, that is, its design, implementation and retrospective analysis, aimed at prospective secondary school mathematics teachers. The aim is to initiate them in the development of their competence for the analysis and didactic intervention, and didactic knowledge linked to mentioned competence. We focus our attention on two aspects: firstly, on developing the onto-semiotic analysis competence, understanding it as the competence to identify the variety of objects and meanings involved in solving mathematical tasks; secondly, on developing the didactical suitability analysis competence or professional reflection.

> *OG-1. Design, implement, and evaluate an educational experience with prospective secondary school mathematics teachers aimed at promoting the development of their competence for the* onto-semiotic analysis.
>
> OG-2. *Design, implement, and evaluate an educational experience with prospective secondary school mathematics teachers aimed at promoting the development of their competence for the* analysis of didactical suitability.

The research work is framed in a qualitative approach (McMillan & Schumacher, 2001) that collects and analyses data throughout a design cycle composed of two descriptive and exploratory studies, which respond to the objectives outlined above. The educational cycle is developing as part of a master course of mathematics education for secondary teachers (academic year 2015-2016) in a real classroom setting. According to the design based research methodology (Kelly, Lesh, & Baek, 2008) it is carry out from the following four phases supported by the OSA tools: preliminary study, design of tasks, implementation, and retrospective analysis.

The sample consists of 52 students for teacher—prospective mathematics teachers, separated into two groups (group A: 27, group B: 25), with no teaching experience and consolidated mathematical knowledge. In the first study, all the students participated; in the second study, only group A participated for administrative reasons.

For both studies, the teaching techniques used combine: reading and discussion of documents; presentations by the teacher; participation in problem solving workshops; didactic analysis; extracurricular support for students. The instruments for collecting data are: notes of the researchers on the different instances of work in class audio recording of all sessions of the course written responses to the group activities final written material, delivered by the students individually, with two weeks of deadline.

The research group consists of the teacher of the course—teacher educator and director of the Doctoral Thesis, and the doctoral candidate who plays the role of participant observer.

The thesis is organized in 5 chapters. In Chapter 1, previous researches in the field of teacher education are described in order to adequately support research. The contributions allow us to approach the research problem. In Chapter 2, we present the research problem—research questions, objectives, and hypotheses, the theoretical framework, and the methodology. In Chapter 3, we present the study 1, as part of a design research, on developing the *onto-semiotic analysis competence*, that is, knowledge and competence to identify and describe objects and processes involved in school mathematical tasks. This competence will allow the prospective teachers "to anticipate potential and effective learning conflicts, evaluate the mathematical competences of the students, and identify objects (concepts, propositions, procedures, arguments) that should be remembered and institutionalized at the appropriate moments of the study processes" (Godino, 2017, p. 94). The conclusions of the first study are also exposed. In Chapter 4, we present the study 2, as part of a design research, on developing the *didactical suitability analysis competence* understood as the competence for global reflection on a mathematical study process, its assessment and progressive improvement. The conclusions of the second study are also exposed. Finally, in Chapter 5, the research objectives are retaken, and the final conclusions are presented highlighting the limitations of the work and future continuation lines.

FIRST RESEARCH STUDY

This study describes an experience with prospective mathematics teachers on developing the *onto-semiotic analysis competence*, that is, knowledge and ability to identify and describe practices, objects, and processes involved in school mathematical tasks.

From onto-semiotic perspective, various type of mathematical objects (problems, languages, concepts/definitions, propositions, procedures, and arguments), intervene and emerge from mathematical practices. These types of objects are interconnected to each other through referential and operational semiotic functions building configuration of knowledge. These configurations can be contemplated from five duals points of view

(Godino et al., 2007): expression content; personal (cognitive)-institutional (epistemic); intensive (general)-extensive (particular); ostensive-non-ostensive; unitary-systemic. On the other hand, the dualities lead to the following processes: institutionalization-personalization; generalization-particularization; analysis (splitting)-synthesis (reification); materialization-idealization (abstraction); expression (representation)-signification. In the Tables 3.1. to 3.8. showed in Chapter 3 we discuss the role that some of these processes play in the emergence of the primary objects involved in a priori analysis of the tasks; for this extensive summary we will use Table 6.1 to exemplify the analysis.

The formative action includes the development of the following four phases. The first phase corresponds to the recognition of students' initial personal meanings on the nature of mathematical objects and their ability to recognize these objects in mathematical practices. Prospective teacher worked individually with the Task 1 (see Appendix 3) answering a series of questions from an isometric perspective drawing; following, students' answers were presented and discussed in class.

In the second phase, the required reading and discussion of a specific document was proposed (Godino et al., 2015a). The proposed article is an introduction to ontosemiotic analysis using as a context the reflection on the role of diagrams, visualization, and manipulative materials in the mathematics teaching and learning processes. After the article discussion, it begins the third phase: put into practice. Working in teams of 3 or 4 students, two tasks were implemented followed by presentation and discussion of the answers with the whole class. In Task 2 (see Appendix 3), students had to justify a procedure given by a student to build a square with GeoGebra. In Task 3 (see Appendix 3), a problem on fractions together with its solution based on a sequence diagram areas, were proposed; the prospective teachers had to justify if such solution was correct. Finally, phase 4 is related to the final evaluation process. Students worked individually with a Task 4 (see Appendix 3), based on a demonstration of the Pythagorean theorem. The resolution was not addressed in class and was regarded as a final assessment instrument. In addition, prospective teachers are proposed 1 optional task, in order to consolidate the achievement of the intended competition and provide researchers with relevant data sources. Finally, the development of all the tasks is presented at the end of the subject, considering a period of two weeks.

Following, the teaching methodology used for the four tasks is described. It should be taken into account that each one of them was analysed by the research group, that is, an a priori analysis of each problem was carried out; however, in order to exemplify this type of analysis, in this summary only the *a priori* analysis of the task 1 is shown. The results of the entire implementation are then discussed.

Teaching methodology

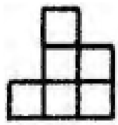
Task 1. Initial exploration

The designed questions to investigate the students' personal meanings on the nature of mathematical objects and their initial level of onto-semiotic analysis competence is included in Appendix 3. Down below an a priori analysis (epistemic analysis) of Task 1, which was used to support the sharing of individual students' responses, is presented. The Table 6.1. summarizes the configuration of objects and meanings involved in the resolution of the task; it can be seen that both the statement and the task resolution are broken down into units of analysis that we have listed from 1) to 7).

Table 6.1.

Onto-semiotic analysis of the initial task

Use and purpose of the practices	*Statement and sequence of practices to solve the task*	*Objects referenced in the practices (concepts, propositions, procedures, arguments)*
Presenting the problem; interpretation of an isometric view of a 3-D object.	1) The attached figure shows the drawing of a building from the front-right angle:  Draw the view of the building from behind.	Concepts: isometric perspective of a 3-D object, viewpoint (or focus), opposing viewpoints, orthogonal projection, projection plane, straight lines of projection, visual ray, cube, composition of cubes, square, 3-D reference system, front, above, right, visible object, hidden object.
To induce the development of a	2) Justify your answer	Concept of justification of a

justification of the required response.		geometric proposition
Answer to the task.	3) The view from behind should be the following figure: 	Concept: elevation view (rear view). Procedure: counting of cubes by rows and columns. Proposition 1: the view from behind is the attached figure
To establish a fundamental hypothesis to give a rational response to the task, and a property of orthogonal projections.	4) If the building pieces are drawn of cubic form, the orthogonal projections of their faces are squares.	Concept: cube, orthogonal projection, square. Proposition 2: orthogonal projections of a cube are squares.
To evoke the properties of orthogonal projections necessary to justify deductively the answer to the task.	5) Orthogonal projections preserve the shape, size and relative position of the projected objects.	Argument: justification of the proposition 2. Concepts: form, size, and relative position
To describe the relative positions of the components of the "building" to justify the shape of the flat projection from behind.	6) If I get behind the building, I would see 1 cube on my left, 3 cubes stacked up on the center, and 2 cubes stacked up on my right, because in the isometric perspective given, there are 1 cube on the right-back, 3 cubes on middle-back, and 2 cubes on the left - front.	Concepts: behind, left, center, and right. Proposition and its argumentation based in the task data
To evoke a previously established property to justify the final answer.	7) Orthogonal projections of a cube are square, then the view of the object must be the shown in practice 3)	Argument: justification of the proposition 1.

Despite the fact that Table 6.1. shows the analysis of objects and meanings at stake, it is necessary to complement this analysis with the recognition of the processes involved in solving the task. Elaborating a full epistemological analysis of semiotic functions plot involved in the practices, both referential (an object refers to another object) and operational (pragmatic use of objects) type is not the aim of this article. But it should be noted that the processes of generalization-particularization, and materialization-idealization are always present. For example, the task shows the material representation in the paper sheet of a real object (the building) but ideal (imagined). This representation in isometric perspective refers to the view that a hypothetical ideal observer would build it. This kind of perspective has the advantage of allowing representation to scale, and the disadvantage of not reflecting the apparent decrease in size perceived by the human eye. The drawing of the building is then an embodiment of an ideal object: the view of a building that would have a hypothetical observer. The drawings (isometric and orthogonal projections) can be interpreted as materialization of ideal objects (cubes compositions) that facilitate the realization of the "mathematical actions" done on them (recognize the views).

Complementary methodology

The four tasks (situations-problems) were selected with the purpose of they put into play visualizations and reasoning with diagrams in order to provoke reflection on the dialectic between ostensive and non-ostensive objects involved in mathematical practices.

The onto-semiotic methodology for Task 2, 3, 4 and optative are included below:

a) Solve the mathematical task (Task 2, Task3, and Task 4)

b) Describe the procedure followed, indicating the actions to be performed and the necessary explanations to justify the answers.

c) Identify mathematical knowledge put at stake in the statement and each of the elementary practices, completing the table below (add the necessary rows)

Use and purpose of the practices	Statement and sequence of practices to solve the task	Objects referenced in the practices (Concepts, propositions, procedures, and arguments)
…	…	…
…	…	…

d) In addition to the signifying processes indicated in the above table, identify other mathematical processes involved in solving the task.

An a priori analysis is performed for each task as shown in the previous Table 6.1.

Observations during the educational process and the analysis of students’ responses have allowed drawing some conclusions about the difficulties of understanding the instructions, achievements, and the possibilities offered by the didactical design.

Discussion

Discussion of the Task 1: Initial exploration of personal meanings

During the first phase of individual work, it was observed that students were not clear what was the nature of the primary mathematical objects and their meanings. Due to the visualization process involving the statement (front-right building perspective) and its solution (drawing seen from behind), recognition of the students on mathematical objects has focused on perceptive visual objects. For instance, they recognize as intervening and emerging concepts in the resolution: cube, square, volume, height, rotation, reference system, (...), but none of them refers, for example, to the orthogonal projections. The notion of proposition is also controversial for them; for example, a student arguments:

> Propositions are applied to prove theorems. This task does not involve demonstrations, is simply to draw what you see (...). It is a problem of technical drawing, not a mathematical problem.

The conflicts identified were deal with in the classroom sharing, aiming to discuss and share the understanding of the entities put at stake and their role in mathematical practice. The aim was that students share the pragmatic and anthropological vision of mathematical knowledge that OSA postulates, according to which a concept is conceived as a functional entity (i.e., it has a role in mathematical practices), whose meaning has been socially reified as a rule or definition, and a proposition is a statement that is either true or false.

On the question six of this task (Appendix 3) students have to develop at least two different definitions for the cube as geometric concept. This part of the task generated some confusion among some students. Then in the next part, students must identify other uses or meanings of the word *cube* that do not relate to the geometric concept. This was used as a reagent to explain the diversity of meanings that might have a concept or proposition depending on the context in which they participate, and to discuss some aspects of language, such as polysemy and homonymy.

Another important aspect is the complex dialectic between the ostensive objects (material representations) and non-ostensive objects (immaterial, mental or ideal objects), which is manifested in different dialogues recorded. Thus, for instance, to the question ten: What properties cannot be represented empirically? A prospective teacher comments:

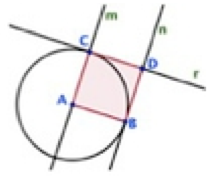
> All properties of a cube can be represented empirically, except the faces that are behind. For example (pointing with a finger to the picture): this is a cube, and I am representing it empirically; these are its edges, these are its faces, ...

The ostensive/non-ostensive duality has an essential role within the OSA framework, since the activity of mathematical production and communication cannot be performed without the synergistic relationship between the two types of objects, which are interwoven in mathematics practices. This reflection is necessary, because it allows prospective teachers become aware that such objects are understood as the rules of use of the visual and analytical languages that represent them. So, dialogue and interaction took a key role in the didactical action

Discussion of the Task 2: Building a square with GeoGebra

While working in teams to deal with the Task 2, it has been observed that students were able to identify all the concepts and procedures involved in solving the task; however, cases where the notion of proposition remains unclear is evident. For instance, a student identified as a proposition the definition of square; it is clear that the definition of square is neither true nor false.

In the collective discussion, in order that students make a real mathematical activity, it is necessary to ask for the justification of the procedure based on the use of the software, since this way they have to think about the mathematical knowledge involved in the resolution. Geogebra does not require the explicit use of definitions, propositions or properties of geometric objects to carry out the mathematics practices, being masked their features of figural concepts (Fischbein, 1993). It is necessary that the teacher asks the student explicit justification of procedures to ensure the validity of the statements. For example, in the figure below:



the segment AC is congruent to AB, not because “they are seen on the screen of the same length” but because they are the radii of the same circle with center A, then by definition they are congruent. Necessarily the quadrilateral ABCD is a square because the conditions of the definition are met: all four angles are right and the four sides are congruent. “A square is not an constructed image. It is a shape controlled by its definition (though it may be inspired by a real object” (Fischbein, 1993, p. 141). Finally, using software as part of the task is a positive aspect because it provides opportunities for students to engage in mathematical processes and reflect about particularization (materialization of concepts to particular figures) and generalization processes (the particular figures are representative of a family of similar figures).

Discussion of the Task 3: Fractions and area diagrams

Developing Task 3 aims that prospective teachers use the knowledge gained through the previous activities and discussions to analyse and assess a possible solution given by a subject to a problem on fractions. The answers that students have given to this task indicate some progress in the recognition and identification of the different objects involved in the task, that is, their onto-semiotic analysis competence.

In general, the prospective teachers solve the Martini problem using other diagrammatic procedures. They are not able to develop a justification based on the area diagrams, since the addition and multiplication of fractions represented with these kind of representations, requires an unusual mathematical work. In this way, students need to resort to other types of languages. The problem is that from different procedures for the same task involve that the mathematical objects mobilized in each of them are different. This generates a major consequence if the aim is to analyze the mathematical activity involved in a given response. This fact is a fundamental problem, which was discussed in the whole class discussion.

Discussion of the Task 4: Pythagoras Theorem

The analysis of the answers allows observing that students have been able to identify the concepts and procedures involved in mathematical practices, making detailed and deep analyses. However, difficulties persist mainly for the argument and proposition notions, resulting complex their identification and their onto-semiotic analysis.

The type of analysis that has been implemented, that is, recognition and management of knowledge put at stake in tasks, allows the prospective teacher analyze the intervening and emerging objects in the resolution, and become aware of the diversity of meanings attributed to them in the specific context.

Retrospective analysis and conclusions

The notion of didactical suitability and the system of suitability criteria (Godino 2013a) are used to reflect and evaluate the teaching experience described in the previous paragraphs. These criteria are classified into six facets that characterize teaching and learning processes: epistemic (mathematical institutional meanings), ecological (socio-professional and curricular context), cognitive (personal meanings), affective (emotional factors), interactional (personal interactions) and media (didactical resources). This retrospective analysis of an implemented teaching cycle allows the teacher/researcher reflecting on each of the six facets, and determine potential improvements for future cycles.

In order to collect additional useful information for this analysis, students were asked to respond an anonymous opinion survey on the following five aspects of the four proposed tasks: 1) clarity of the task and its instructions; 2) suitability of the teacher's explanations and interactions; 3) degree of motivation and interest generated; 4) learning level achieved; 5) degree of overall relevance of the activities for your education as a teacher of mathematics.

The retrospective analysis reveals a high epistemic-ecological suitability, showing itself as a design consistent with the objectives of the institutional context in which is carried out, and with preparation of prospective secondary school teachers. The medial-interactional suitability can be considered average, bringing to light aspects that should be taken into account in the future, for example, it should increase the time used for the development of this competence, incorporating more fundamental moments of group discussion. In the class sharing, the teacher facilitates the inclusion of students in the class dynamics; students are encouraged to explain, justify, disagree, question, and reflect on different alternatives, so most of them were involved in the discussion of the answers. Although awareness of the existence of conflicts in some students is taken, there is no evidence that these conflicts have been resolved. The time factor is perhaps the most important resource that must be considered for proper management of the teaching and learning process; but certainly, given the complexity of mastering the onto-semiotic analysis competence, the time spent was insufficient. The use of manipulative and technological resources is an aspect that should be improved in this intervention; the following comment retrieved from a student's opinion survey, regarding Task 1, allows progress in this direction:

> "Incorporate manipulative material that may help solve the task and analyze other possible methods".

The cognitive-affective suitability can be considered average. In the analysis of the evaluation results, common confusions were recorded in the students' responses, which also took place during the study process, indicating that the *a posteriori* cognitive suitability has not been adequate.

In this research, a didactical design cycle for teacher education focused on developing the so-called onto-semiotic analysis competence has been designed, implemented, and evaluated a education cycle, leading to the achievement of objective OG-1., reflecting a contribution that can be taken into account in the initial teacher mathematics education programs.

SECOND RESEARCH STUDY

In this second study we describe, analyse, and evaluate the implementation of an educational design to develop the prospective mathematics teacher's didactical analysis and reflection competence, addressing the general objective OG-2.

The Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC) proposed by Godino, Giacomone et al. (2017) focuses, among others, on the competence of didactical suitability analysis, as the competence for global reflection on the teaching practice, its assessment and its progressive improvement. Also, these authors suggest the importance of designing and implementing training resources that promote the realization of this type of macro-analysis by teachers.

The notion of Didactical Suitability (DS) is part of the Onto-Semiotic Approach (OSA) to mathematical knowledge, a theoretical framework introduced by Godino, Batanero, and Font (2007) within mathematics education field. This notion, its components and indicators, allow the systematic analysis and assessment of mathematics teaching and learning processes. It is understood as the degree to which an educational process (or a part of it) combines certain characteristics in order to be classified optimal or appropriate for the adaptation between the personal meanings achieved by students (learning), and the intended or implemented institutional meanings (teaching), taking into consideration the circumstances and the available resources (environment). This assumes the coherent and systemic articulation among the six following facets or dimensions:

- Epistemic suitability: it refers to the degree of representativeness and interconnection of institutional meanings implemented (or intended) regarding to a reference meaning. The tasks/situations-problems are an important component in this facet, and they should include various types of mathematical objects and processes.
- Ecological suitability: the extent to which the process of study is adapted to the educational/curricular project, scholar norms, and social environment.
- Cognitive suitability: the extent to which intended and implemented meanings are within the students' zone of proximal development, as well as the correlation between students' achieved meaning and the intended and implemented meanings.
- Affective suitability: it refers to the degree of the students' involvement (interest, emotions, motivation, attitudes, and beliefs) in the study process.
- Interactional suitability: it is the degree to which the didactic configurations and classroom discourse served to identify and solve semiotic conflicts that appeared throughout the instructional process.
- Media suitability: is the extent to which the teaching process fit the school and society educational process, and took into account other factors influencing the setting in which it was developed.

For each of these six facets, Godino (2013) identifies a system of associated components and general empirical indicators that constitute a guide for the analysis and systematic reflection; thus, this theoretical model provides criteria for the progressive improvement of the teaching and learning processes.

Starting from considering the teacher as a reflective professional (Schön, 1983; Elliot, 1993), with this design we intend that prospective teachers know the criteria and use them competently to reflect systematically and professionally. The instructional device uses the possibilities offered by episodes of video-recorded lessons. The participants in these types of experiences have:

> [...] the opportunity to develop a different kind of knowledge for teaching — knowledge not of "what to do next", but rather, knowledge of how to interpret and reflect on classroom practices. (Sherin, 2004, p. 14)

However, in this work, video recording of classes remains in the background (Stockero, 2008). These should be a mere resource that may facilitate access to the teacher educator and future teachers *fragments of educational reality* in all its complexity, and develop in the training students specific teaching skills through the systematic didactic analysis of the various facets, components and conditioning factors.

The implementation is organized in four phases, which include different didactic resources as well as moments of autonomous and group work, and final evaluation. First phase, called *Initial exploration phase,* includes reading and discussion of a highly ambitious document about the characteristics of an ideal mathematics class, taken from the curriculum orientations of the NCTM —National Council of Teachers of Mathematics (2000, p. 3): *A Vision for School Mathematics.* The goal is that students develop a first reflection on possible ideal characteristics of a math class. The students worked individually upon a reflection guide, which played a key role in motivating the discussion about previous ideas, beliefs and conceptions that prospective teachers may have about mathematics and the complex processes of their teaching and learning. The discussion made the epistemic, cognitive, affective, interactional, media, and ecological components to emerge and how they articulate each other and how they affect the development of a study process. In addition, the prospective teachers' meanings of possible suitability criteria of teaching and learning processes were highlighted. This phase ends with a reflection on the need to know about specific tools that allow the teacher to assess the teaching practice in a systematic way and to be competent using them. It's not just about describing and explaining what is happening in that ideal class, but also to reflect on what aspects could be improved.

In the second phase, *Introduction of a tool for reflection,* the required reading and discussion of a specific document was proposed (Godino, 2013a). In the second-class session the article, previously read by students, is jointly discussed. The notion of didactic suitability is presented in this article, in addition to a system of didactic suitability indicators for each of the different facets involved, and the concordance between this system and other proposals from various authors.

The third phase, *Put into practice,* begins after discussing the article. It is proposed that students watch a fragment of a high school mathematics class. This episode was selected from the internet, being free open-access material, in which it is possible to observe 10 minutes of a class taught in Mexico. After watching the class episode, a second activity, *Didactic reflection task*, was delivered, and the prospective teachers worked on it in teams of two or three peoples. Peer discussion took place during the development of the whole task. The sharing inside of the classroom of the sections 1 (description) and 2 (explanation) was done during the second session. From the information gathered in these two sections, students worked in teams during the last class session, in section 3 (evaluation) and then the final sharing was done. The a priori analysis carried out by the research team allowed to support the sharing done within the class, as well as to prevent possible learning conflicts. Finally, the forth phase, *Final evaluation process, was carried out; that is* the development of all the tasks/activities was presented by the students at the end of the subject, considering a period of two weeks.

Discussion

When students watch the video for the first time, they focus on specific elements, which are known to them as good practices. In this way, positively valued issues appear, such as the use of problems with context, collaborative work, classroom arrangement, the use of technological resources, sharing, respect, class dynamics and fieldwork. However, the first analysis they perform is based on superficial characteristics and without connections between the information collected by the items in the reflection guide.

The group discussion aims "[...] to help the prospective teachers to acquire professional teaching competencies" (Llinares, 2012, p.24). In this case, these competencies are focused on implementing the system of indicators and components previously studied. In this way, it is possible to find more elaborate and organized analysis in the answers (portfolios), where the students seek to establish key connections between those elements that seemed important to them. It should be highlighted that of 25 portfolios delivered in the final stage, 20 of them presented an analysis where possible improvements are proposed to increase the suitability of the observed study process. However, not every participant wanted to give a low, medium or high assessment of each facet considering that a lot of additional information is required in order to assess them.

To following, we synthesize significant responses collected from the experience, considering the participants' reflection on each of the six facets. In this sense, we have considered how their answers contributed in the first and second part of the task (description and explanation of the teaching situation) to make the assessment of the third part. The aim is to confront the analysis of the participants with the a priori analysis of the researchers. The latter allows opening a range of possible expert responses and thus to highlight the importance of knowing and being competent in the use of the didactic suitability tool and training as reflective professionals capable of assessing and improving their own practice.

Discussion about the epistemic facet

A key point to assess the epistemic facet (institutional mathematical knowledge) is to reflect on the type of situations-problems implemented in the video-recorded class episode. Although the participants notice that it is not possible to observe a representative and articulated sample of contextualization, exercising and application tasks in only nine minutes, the presence of a problem guide on inaccessible height calculation stands out, as well as the field work in the school courtyard. From a mathematical point of view, the prospective teachers notice that the studied content allows us to put into practice significant and relevant mathematical practices (knowledge, comprehensions and competences): geometric proportionality, linear function, similarity of triangles, calculation of inaccessible heights and distances. They assess positively the type of problems that allow to explore this content, as well as the type of languages that they mobilize.

The prospective teacher highlights important aspects such as: *Lack of precision in the teacher's language and concepts referred* to; likewise, they identify aspects that should be improved, such as the lack of didactic situations to argue and generate definitions or propositions:

> Although the problematic situations that appear seems to enhance the connections between the different concepts, propositions and procedures, the

> absence of moments of argumentation or justification, make the task itself become a mere exercise of application of a rule. It does not mean that it is incorrect, but it would be appropriate to add statements as 'justify your answer', in this way students can establish relationships between previously studied concepts and the teacher can evaluate their knowledge on the subject. (Prospective teacher)

Discussion about the ecological facet

The participants were able to identify components and indicators that characterize this facet by articulating their responses with the previous analyses obtained from part 1 and 2 of the task. They evaluated the adequacy of the content and its implementation according to the curricular guidelines that mark the new reform of Mexico (2011), which conditions the development of the class. Some aspects to be improved are the implementation of problems emphasizing intra/interdisciplinary connections, as well as situations of innovation and reflective practice.

Discussion about the cognitive facet

The prospective teachers focused their attention on the prior knowledge needed to address the calculation of inaccessible height. If we focus on the section: *what prior knowledge students should have to approach the task?*, only three of twenty-seven prospective teachers do not answer 'the simple rule of three'. These participants are aware that 'the rule of three' is a procedure to solve a task and not the objective itself; their reflections are coherent and highlight the importance of justifying procedures. For instance, the following prospective teacher reflects:

> During fieldwork they [students] collect information and apply Thales' theorem when the conditions of the theorem are not met (e.g., parallelism). At least they should consider certain assumptions to solve them [tasks], or the teacher could take advantage to do it, and thus generate instances of institutionalization.

Twenty-one participants indicate that the simple rule of three is *a prior* knowledge necessary to solve the tasks. Among these answers, nineteen of them believe that the similarity of triangles and Thales's theorem are not prior knowledge. In addition, they value positively the cognitive facet, since they consider that the students are capable of satisfactorily applying the rule of three, or at least it is an accessible objective.

While this was discussed in class, it seems that the rule of three is a procedure that is deeply rooted in its formation, as well as the deliberate use of proportionality relations:

> Students use the rule of three because the segments are proportional; that is easily demonstrated from the measurement of the sides. (Prospective teacher)

The two remaining prospective teachers emphasize that the use of the simple rule of three is important as *a prior knowledge necessary* to solve the task. However, their later reflections are in contradiction since they value negatively the learning linked to the application of rules and mechanical procedures.

Discussion about the affective facet

The assessments that are identified as related to this facet are very superficial, such as: fieldwork generates motivation; it allows assessing mathematics in everyday life.

Discussion about the interactional facet

The participants' reflections are related to the information obtained from the previous questions. In general, competences about reflection on the different modes of interaction are observed: between students and teachers, between students and about the autonomous study. The participants identify rules established in class such as the classroom arrangement, raising a hand to call the teacher, the role of the teacher as an observer in the class. They also make reasonable judgments about these. Regarding the teacher's role, the prospective teachers classify him as the protagonist of the class. They admit that the purpose of sharing is to present the answer to the problem. Four answers show superficial analysis, such as: *There is a fluid dialogue between the students and the teacher, and between the students among themselves*. We consider it a false impression created by the collaborative work dynamics.

Discussion about the mediational facet

The prospective teachers referred to the use of different manipulative materials, as scarce and unproductive, valuing this facet as not very suitable; while recognizing the importance of problem guidance and the use of calculators, participants emphasize that computer resources are very valuable in this type of content but they are not present:

> It would be advisable to use dynamic software to show, for example, how the shadow of a tree varies as the sun passes through different points, thus generating moments where students should estimate, test hypothesis and search

for relationships between height and shadow, without needing to calculate it. (Prospective teacher)

The results indicate the effectiveness of the theoretical model put into practice, as well as awareness of the importance of incorporating reflective learning in university teaching.

Retrospective analysis and conclusions

Firstly, an *a priori* analysis of the didactic situation reveals a high *epistemic-ecological suitability*. The implementation stages are articulated to each other and appropriate to the formative level involved. In each educational situation proposed, the prospective teachers are faced with moments in which they have to investigate, interpret, relate meanings, discuss, and argue. In addition, this didactic design shows openness to innovation based on research and reflective practice. The mediational-interactional suitability can be considered average; it is attributed mainly to the limitations of the time allotted. While this type of design research occurs in real class environments, where it is not possible to have a greater workload, the short period of time between the implemented tasks reveals a great limitation of this study. The discussion of the final answers, delivered in the portfolio, did not take place within the class. In this sense, we consider that an exchange of final answers would have provided a greater opportunity for the participants to develop ways of reflecting on the different facets and appropriating the theoretical framework offered by this design. According to Amador (2016), the inclusion of additional experiences, or thinking about continuous cycles in teacher training, would be beneficial for prospective teachers to acquire greater competence in reflecting on the practice. Regarding the quality of the interactions in the classroom, we consider that it has been high, highlighting the dialogue and discussions in the classroom, the inclusion of the prospective teachers in the class dynamics, the appropriate presentation of the topic using various resources. In addition, moments of autonomous study and continuous evaluation were contemplated.

On the other hand, the use of video recordings as a resource has been widely recognized in teacher training (Alsawaie & Alghazo, 2010), and has undoubtedly proved to be a suitable training strategy, as it allows prospective teachers "[...] to view a lesson from a perspective of an observer" (Sherin, 2004, p. 22).

In summary, this study proposes an example of design research in which *Didactical suitability* tool is made operational in the different stages of implementation, addressing the achievement of the general objective OG-2. Although the different factors affecting the educational processes are complex, the participants of this study have positively evaluated this type of didactic situations for their formation, pointing them out as necessary. Moreover, highlighting their usefulness for the next stage of his/her professional work, such as lesson planning and implementation of professional practices in a school institution. It is worth noting that three students have continued their master's thesis using the didactic suitability tool to reflect on their own teaching practice.

APPENDIX 3

Task 1. Initial exploration of personal meanings

The attached figure shows the drawing of a building from the front-right angle.

1) Draw the view of the building from behind. Justify your answer.
2) What is it for you a mathematical concept? Identify the mathematical concepts involved in solving the task.
3) What is it for you a mathematical proposition? Identify mathematical propositions in solving the task.
4) What is it for you a mathematical procedure? Describe mathematical procedure in solving the task.
5) What is for you a mathematical proof? Provide a mathematical justification for the answer given in the task.
6) One of the concepts involved is *cube* used to indicate each of the pieces that make up the *building*:
    a. Give two different definitions (at least) for *cube* as a geometric concept.
    b. Indicate other uses or meanings that the word *cube* can have.
7) Indicates the role the propositions, that you have identified, plays in the answer justification.
8) Describe other possible procedures that could be applied to solve the task.
9) Describe a possible justification for the answer that could give a student using some kind of manipulative material, sequence of representations or other explanations.
10) The figure given is represented as a composition of cubic form pieces.
    a. Identify properties of a cube, as a geometric figure, which cannot be empirically represented.
    b. State the task by using natural or ordinary language.

Instructions for the onto-semiotic analysis and mathematical tasks

For the following three mathematical tasks, perform the following activities:

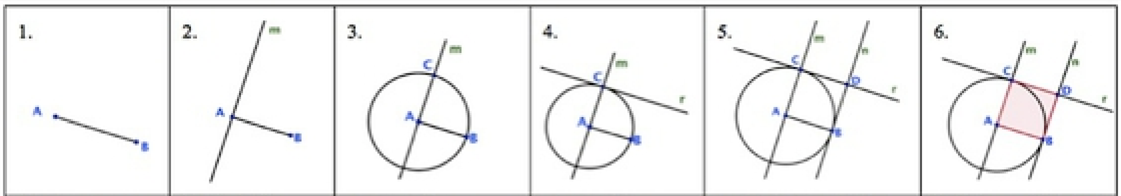
a) Solve the mathematical task
b) Describe the procedure followed, indicating the actions to be performed and the necessary explanations to justify the answers.
c) Identify knowledge at stake in the statement and each of the elementary practices, completing the table below (add the necessary rows)

Use and purpose of the practices	Statement and sequence of practices to solve the task	Objects referenced in the practices (Concepts, propositions, procedures, and arguments)
…	…	…
…	…	…

d) In addition to the processes of meaning indicated in the above table identify other mathematical processes involved in solving the task.

Task 2. Building a square with Geogebra

The procedure followed by a student to build a square using GeoGebra, is shown in the following sequence:



a) I represent a segment AB.	b) I build a straight line *m* perpendicular to segment AB through point A.	c) I build a circumference of centre A and radius AB. d) I call C to the point of intersection between the circle and the straight line *m*.	e) I build a straight line *r* parallel to the segment AB through point C.	f) I build a straight line *n* perpendicular to the segment AB through point B. g) I call D to the point of intersection between the straight lines *n* and *r*.	h) The quadrilateral ABCD is a square.

a) Justify why the quadrilateral ABCD is a square.

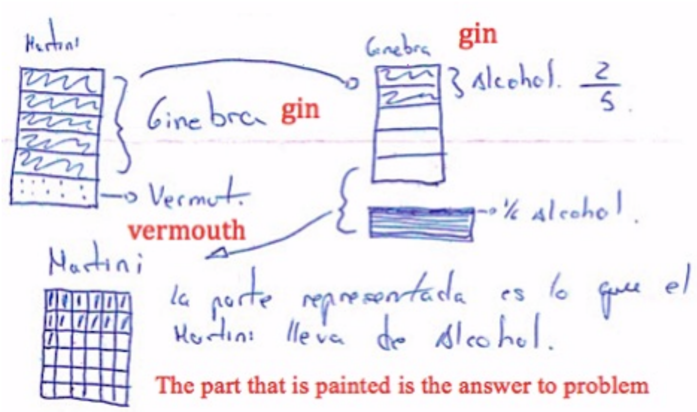
Task 3. Fractions and area diagrams

A student solves the following problem:

Martini cocktail problem:

> A Martini is a cocktail, which is made up of 5 parts gin and 1 part vermouth. Suppose that 2/5 of the gin is alcohol and 1/6 of the vermouth. What fraction of alcohol does a Martini have? Solve the problem by using an area diagrams.

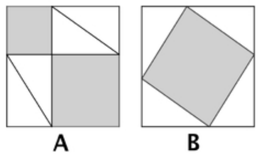
Solution:



a) Is it the solution given by the student correct? Justify

Task 4. Relationship between areas of plane figures

Observe the following figures:



a) What is the relationship between the areas of the figures shaded A and B?

b) How can you use this relationship to prove the Pythagorean theorem?

APPENDIX 4

Didactic reflection task (guide for prospective teachers)

At the following link we find a video of a math class: http://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8. After watching the video, work in teams and prepare a report answering the questions below:

1) Description: What is happening?

   a. What mathematical content is studied?

   b. Which meanings characterize the content studied?

   c. What are the context and the educational level in which the class takes place?

   d. What does the teacher do?

   e. What does the student do?

   f. What resources are used?

   g. What prior knowledge should students have in order to tackle the task?

   h. What learning difficulties/conflicts are manifested?

   i. What norms (regulations, habits, customs) make possible and condition the development of the class?

2) Explanation: Why is it happening?

   a. Why is that content studied?

   b. Why is a realistic problem used to study the content?

   c. Why does the teacher act the way he does?

   d. Why do students act the way they do?

3) Evaluation: What could be improved?

Issue a reasoned judgment on the teaching observed in the following aspects, indicating some changes that could be introduced to improve it:

   a. Epistemic (mathematical content studied)

   b. Ecological (relations with other subjects, curriculum)

   c. Cognitive (previous knowledge, learning, ...)

   d. Affective (interest, motivation, ...)

   e. Interactional (modes of interaction between teacher and students)

   f. Media (resources used)

4) Limitations of the available information:

What additional information would be necessary to make the analysis carried out more accurate and reasoned?

Transcription of the video-episode focused on the participants' voices.

1T	Good afternoon, everyone
2Ss	Good afternoon
3T	Look, today we are going to work with a new task. From the curriculum content: shape, space and measurement, under the topic geometric shapes and under the sub-topic (emphasis) Similarity
4T	We will work normally, as always, as we have been doing
5T	Professor Martín Eduardo Martínez Morales is here and will take evidence of the classes, of what we do and how we do it. You all have to work in a normal way, as usual.
6T	We hope all of you solve this task
	DISTRIBUTION OF TASKS [minute 00:52]
7T	Now, you all can turn over the tasks sheet and start reading
	READING INSTRUCTIONS [01:07]
8T	Attention boys and girls. Have you all read the problem?
9T	Who can tell me, what does the task ask?
10T	Mr. Legarre
11S	Based on the drawing that is there, calculate the height
12T	Good. What do the others say? Do you agree?
13Ss	Yes!!!
	VERBALIZATION [01:49]
14T	You have to calculate the height of the tree that appears in a drawing.
15T	Okay?
16Ss	Yes!!!
17T	Go ahead. Calculate the height of the tree according to the information.
18T	Now. Now. Look here
	USE OF ICT [02:18]
19T	There on the blackboard, we can see the projected problem that we are solving
20T	Use the knowledge acquired in the previous problems, because there, you have calculated the value of the measurements of some triangles with their homologous sides
21T	You have also previously calculated the value of proportionality
	DIDACTIC SITUATIONS [02:52]
	STUDENTS SPEAKING SPANISH [03:18]
22T	Understood?
	STUDENTS SPEAKING NAHUATL DIALECT [03:40]

23T	Here you have two possibilities. To solve the problem, you can use one of the two methods, ok, but also you can verify the solution using the other method.
24T	The most correct thing is to be “like that” (the teacher points out the student's sheet).
	SHARING [03:44]
25S	The answer to the problem is 5.23 (She explains the procedure used and writes it on the board)
26S	Then we apply a rule of three, and X is 5.23
27T	You got the same results by both methods. Good
28T	So, the height of the tree is 5.23
29	The students go to study outside, into the schoolyard
30T	‘This’ times ‘this’ divided ‘this other’ is equal to the height of the post
31S	Ah!
32T	Now you have to do the same procedure. You are going to choose a small tree and measure its shadow with the measuring tape.
	ADDITIONAL ACTIVITIES [06:41]
33I	Teacher, we have to present to the school supervision evidence of the problems that are carried out according to the secondary reform. Could you briefly comment on what are you doing, the students educational level, the kind of instruction, and what mathematical knowledge you are studying in this moment?
34T	These students are grade 3 (course A)
35T	We are studying the similar triangles. So, the reform involves exercises applying similarity. So we are solving some problems about that.
36T	We are working now in the schoolyard; in this way, the students have practical experience to calculate the height of some trees/poles, which are difficult to measure.
37T	This problem is solved using similarity of triangles
38T	They measure the shadow of some objects, and based on that data, they calculate their heights
39I	Okay teacher. Thank you so much. These are the problems currently proposed by the reform. In this moment, are you developing any particular task?
39T	Of course, Similarity triangles