suma+
Secciones
Julio 2016
82
pp. 81-89

Felix Christian Klein. Cómo ver la botella medio vacía o medio llena (1.ª parte)

Francisco Maíz Jiménez
Antonio Pérez Sanz (coordinador)

Letizia Álvarez de Toledo ha observado que la vasta biblioteca es inútil; en rigor, bastaría un sólo volumen, de formato común impreso en cuerpo 9 o en cuerpo 10, que constará de un número infinito de hojas infinitamente delgadas. (Cavalieri, a principios del siglo XVII, dijo que todo cuerpo sólido es la superposición de un número infinito de planos). El manejo de este *vademecum* sedoso no sería cómodo: cada hoja aparente se desdoblaría en otra análoga, la inconcebible hoja central no tendría revés.

(Jorge Luis Borges, *La biblioteca de Babel,* 1941)

¿Una hoja de papel de una sola cara? Esto me suena de algo…

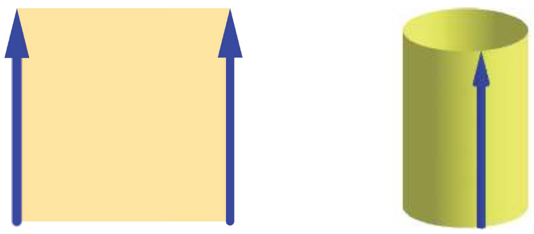
1. El plano

El chico se llamaba Santiago. Se acercó al estrado tras oír su nombre y recogió emocionado el grueso papel donde aparecía su nombre y el título del Primer Premio de las Olimpiadas Matemáticas de 2217. El tacto del papel le produjo una sensación muy agradable.

En puertas del tercer milenio

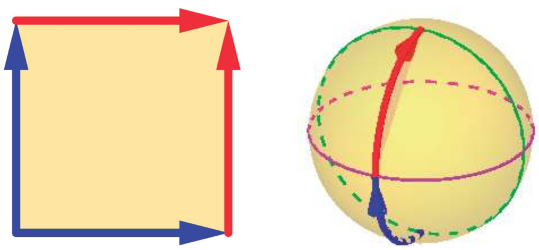
Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2016 y aceptado en mayo de 2016

El premio principal consistía en un viaje a un planeta establemente terraformado donde se había creado la última colonia humana. Sería el invitado de honor en el acto de inauguración de la creación de la Sociedad Matemática Klein.



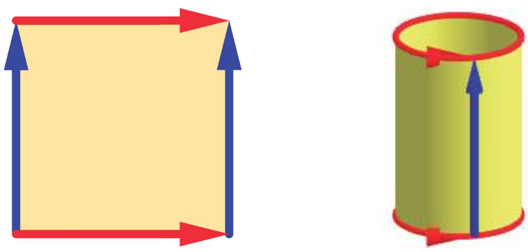
2. El cilindro

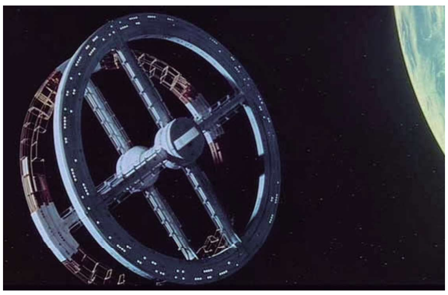
Santiago embarcó en el cohete-lanzadera que lo alejaría de la esclavitud gravitatoria planetaria y lo haría llegar al crucero espacial. El espacio del habitáculo vital era muy básico y reducido, pero la funcionalidad era lo esencial; se había optimizado al máximo.



3. La esfera

Resulta extraño ver desde la distancia el planeta donde siempre ha vivido y comprender intuitivamente la curvatura del planeta, que antes sólo conocía de forma teórica. Poco a poco la idea de haber vivido sobre un plano se fue alejando de su pensamiento, sustituyéndola por la de una superficie curva.





4. El toro

La parte habitable del crucero espacial era un gigantesco toro que giraba sin pausa produciendo en su interior una gravedad artificial cerca de su ecuador máximo, parecida a la terrestre.

Mientras Santiago deshacía la maleta se preparaba para pasar una buena temporada de viaje porque para dar un *salto* era necesario alejarse a velocidad *ordinaria* suficientemente de la influencia gravitatoria de cuerpos masivos del tipo satélites, planetas, estrellas…

A Santiago le habían asignado para el viaje una personalidad artificial.

Todos le habían recomendado que se relacionara todo lo posible con su personalidad virtual, ya que aprendería mucho de sus conocimientos. Su personalidad virtual había sido dotada con autoaprendizaje para adaptarse al interlocutor.

Además, le habían dicho que formaría parte de un experimento de enseñanza de las matemáticas basado en la historia y en personalidades recreadas por el ordenador central. Este era un proyecto patrocinado por la IMU, la Unión Matemática Interplanetaria (anteriormente Unión Matemática Internacional), mediante la ICMI, Comisión Interplanetaria para la Enseñanza de las Matemáticas (anteriormente Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas), que es el órgano de la IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza matemática en los distintos niveles educativos.

Santiago preguntó a la personalidad virtual sobre los detalles de este experimento y esta le comentó que el primer presidente y fundador del IMU fue el matemático alemán Felix Klein y que por eso su nombre aparece en el *proyecto Klein,* creado en 2008 por el IMU y el ICMI. Dicho proyecto tenía inicialmente la tarea de revisar la obra de Felix Klein *Matemática Elemental desde un punto de vista superior.*

Logo de la IMU, logo de la ICMI

Actualmente, existen tres galardones que otorga la ICMI:

El Premio *Felix Klein Award*, que recuerda al que fue primer presidente del ICMI (1908-1920), para honrar los logros de toda una vida.

El Premio *Hans Freudenthal Award*, honrando al octavo presidente de ICMI (1967-1970), que reconoce un programa destacado en investigación.

Medallas de los Premios Klein y Freudenthal

El Premio *Emma Castelnuovo,* para premiar la excelencia en la práctica en la educación matemática.

Los dos primeros galardones fueron establecidos en el año 2000 y el tercero en el año 2014 y fue entregado por primera vez en el XIII Congreso Internacional de Educación Matemática que se celebró en julio de 2016 en Hamburgo, Alemania.

En este experimento educativo, Santiago podría aprender matemáticas siguiendo sus propios intereses y en cualquier momento podría conversar con recreaciones virtuales de las personalidades de matemáticos de toda la historia, generadas por el ordenador central de la nave, con las limitaciones propias debidas a la pérdida de datos históricos, pero con el interés de conocer de primera mano los descubrimientos contados por sus artífices.

Santiago preguntó a la personalidad virtual:

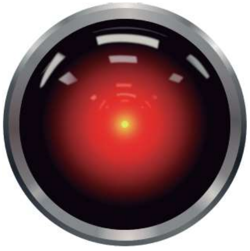
—¿Tienes algún nombre?

Esta le respondió:

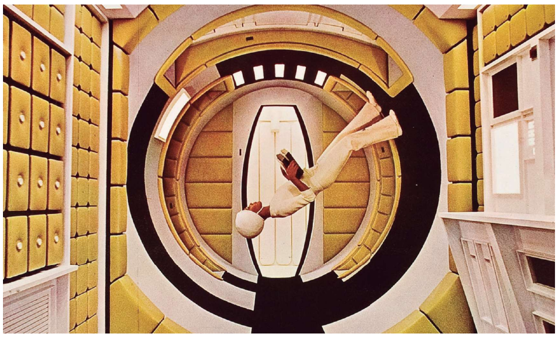
—El anterior viajero al que fui asignado me puso el nombre de HAL 9000 como homenaje a una antigua novela: *2001 una odisea espacial.*

HAL le mostró un extracto de la película basada en dicha novela.

—Ya entiendo la elección de tu nombre. Me parece un nombre adecuado; puedes conservarlo.

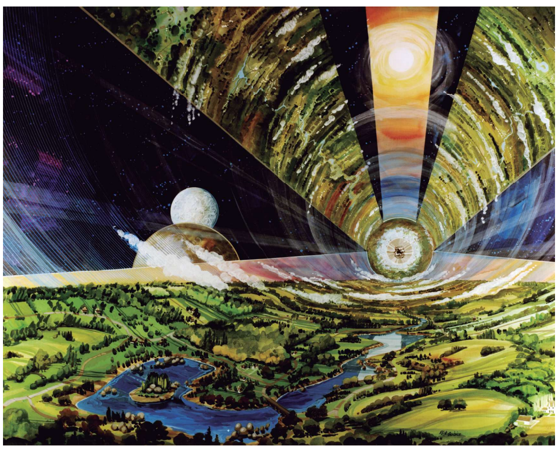


El ojo del ordenador HAL 9000 y una escena de la película *2001, una odisea del espacio*, de Stanley Kubrik



Santiago estaba interesado en los diseños de naves espaciales, como todos los chicos de su edad, y le preguntó acerca de los distintos diseños de naves a HAL.

HAL le contó que se habían probado varios diseños, pero para poder generar gravedad artificial se utilizaron superficies de revolución como inspiración. La última nave en forma de cilindro gigante se llamó Rama, en honor a una novela de Arthur C. Clark: *Cita con Rama*.



Una superficie de revoución para Rama, por Grafiker61

A partir de entonces se había adoptado como estándar la forma de toro para el habitáculo principal.

—¿Me puedes contar algo acerca del diseño de esta nave?

—El habitáculo en forma de toro que aparecía en la película se parece mucho al de esta nave, aunque el de la nave es mucho más grande. Te recomiendo que leas la novela *Mundo Anillo,* de Larry Niven.

Pasado un tiempo, Santiago se acostumbró al gran habitáculo toroidal, casi no notaba la curvatura debido a su gran tamaño. Un día se dio cuenta de este detalle en uno de sus paseos y se lo comentó a HAL.

—Es lógico que te ocurra; suele suceder. Entiende que al andar por el *ecuador,* localmente parece que andas por una superficie plana. En tu planeta natal también te ocurría lo mismo, pero la curvatura era la contraria. Localmente estos tipos de superficies son equivalentes.

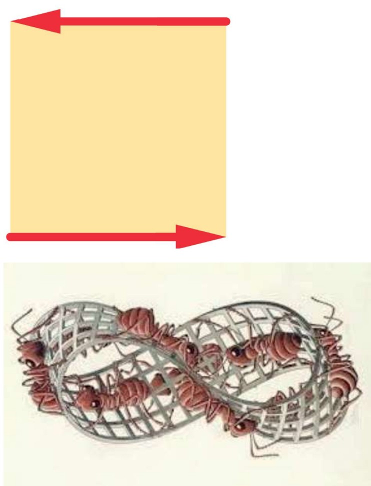
—¿Y qué otro tipo de superficies hay?

—Las superficies de las que estamos hablando: plano infinito, esfera, toro, cilindro… son superficies orientables, es decir, que tienen una cara-envés, o dentro-fuera. Expresado de manera más general, son la frontera de la división del espacio en dos subespacios.

—Lo de dentro-fuera lo he entendido mejor.

—Pero también hay otro tipo de superficies, las no orientables, por ejemplo la banda de Möebius.

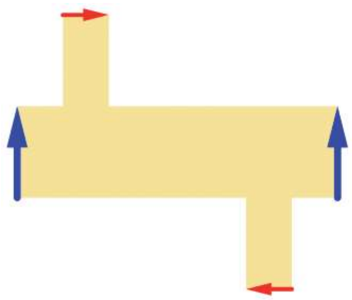
—Sí, recuerdo una clase de mi tutor, que utilizó dos tiras de papel. Con una formó un cilindro pegando la cinta por dos de sus extremos.



El modelo topológico plano para la cinta de Möebius
y las hormigas de M. C. Escher paseándose por ella

5. Banda de Möebius

Con la otra tira de papel hizo lo mismo, pero previamente giró la banda una vez antes de pegarla y la nombró como banda de Möebius. Después estuvimos jugando tanto con el cilindro como con la banda de Möebius y mi tutor nos enseñó algunas propiedades curiosas como por ejemplo, que la banda de Möebius solo tiene una cara y un borde, mientras que el cilindro tiene dos caras y dos bordes. Esto nos lo mostró coloreando ambas superficies. Del mismo modo nos mostró las intimidades de la ropa de Möebius, que curiosamente solo tenían un lado.



— Pero también existen otras superficies no orientables; están el plano proyectivo y la botella de Klein.

—No puedo imaginarme el plano proyectivo.

—La verdad es que es una idea un poco compleja y que tiene que ver con el quinto postulado de Euclides.

—¿Y que tiene que ver Euclides con todo esto?

—Doy paso a Euclides para que te lo cuente:

Euclides: Los postulados con los que construí mi geometría fueron enunciados del tipo *se pide que* y que no demostré:

1. Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a cualquier otro punto.

2. Y que toda recta limitada se pueda prolongar indefinidamente por derecho (en su misma dirección).

3. Y que con cualquier centro y cualquier distancia se pueda describir un círculo.

4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

5. Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.

Los postulados se supone que deben ser una proposición primitiva que es aceptable como inmediatamente verdadera, pero debo confesar que incluso para mí mismo el quinto postulado difícilmente satisface este requisito e intenté por todos los medios evitarlo mientras pude.

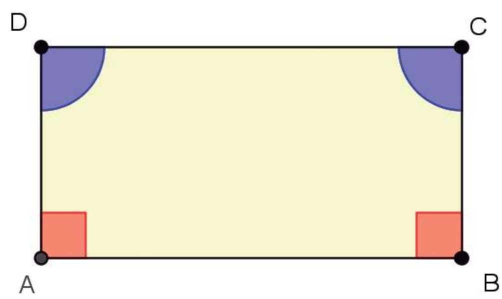
Proclo: El quinto postulado fue atacado desde el principio y se intentó demostrar a partir de los otros, pero sin resultado. También se crearon alternativas equivalentes del quinto postulado entre las que se encuentran las siguientes:

5A. Dados una recta r y un punto P exterior a ella, existe una única recta s paralela a r tal que P pertenece a s (Proclo en el siglo v, John Playfair en 1795 y Hilbert a finales del siglo xix).

5B. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

5C. Existe un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos (Sachieri).

Girolamo Sachieri, jesuita italiano: En 1733, mientras era profesor de matemáticas en la Universidad de Pavía, publiqué una pequeña obra titulada *Euclides ab omni noevo vindicatus* (es decir, Euclides liberado de todo fallo). En dicha obra demostré que si en un cuadrilátero $ABCD$ los ángulos A y B son rectos y los lados AD y BC son iguales, entonces los ángulos D y C son iguales, por lo que existen tres posibilidades: los ángulos D y C son ángulos agudos iguales, rectos iguales u obtusos iguales. Estas tres posibilidades las denominé hipótesis del ángulo agudo, hipótesis del ángulo recto e hipótesis del ángulo obtuso. Esta última conseguí eliminarla con facilidad, pero la del ángulo agudo se me resistió y forcé mis demostraciones para que la única hipótesis correcta fuera la coincidente con el quinto



postulado de Euclides. Craso error por mi parte, porque podría haber sido considerado el descubridor de la geometría no euclídea. También intentó establecer el postulado de las paralelas Lambert y posteriormente Legendre, que fue uno de los más persistentes, que unido a su estilo sencillo y directo difundió mucho este problema, llegando al interés popular el problema del postulado de las paralelas.

Bernhard Riemann: Sachieri, desechaste demasiado rápido la hipótesis del ángulo obtuso. En la conferencia de mi tesis de graduación de 1854 demostré que si se descarta la infinidad de una recta y se admite simplemente que es indefinida, entonces, reajustando los otros postulados, se puede desarrollar otro tipo de geometría no euclídea compatible con la hipótesis del ángulo obtuso. Esto abrió el camino a las llamadas geometrías *riemannianas*.

Hal: No es de extrañar que ninguno encontrara contradicción en la hipótesis del ángulo agudo, pues como se demostró posteriormente, no puede haberla.

Gauss: Yo lo sospeché, pero no lo publiqué.

Santiago: ¿Por qué?

Gauss: Por temor al escándalo que produciría.

Santiago: No te creo.

Bolyai: Yo publiqué mis hallazgos referentes a la hipótesis del ángulo agudo en 1832 en un apéndice a una obra de mi padre.

Nikolái Lobachevski: El primero que publicó resultados concluyentes fui yo.

Santiago: ¡Demuéstralo!

Lobachevski: En la revista *El mensajero de Kazan,* de la Universidad de Kazan, hice referencia a una presentación que hice en una sesión de facultad el 11 de febrero de 1826 referente a lo que denominé como *Geometría Imaginaria,* al tomar en el sentido contrario el postulado de las paralelas: «Por un punto *P*, exterior a una recta *r* pasa más de una paralela a *r* en el plano determinado por *P* y *r*». A continuación seguí construyendo sobre esta extraña geometría. Por lo tanto, el 11/02/1826 fue el nacimiento de la geometría no euclídea.

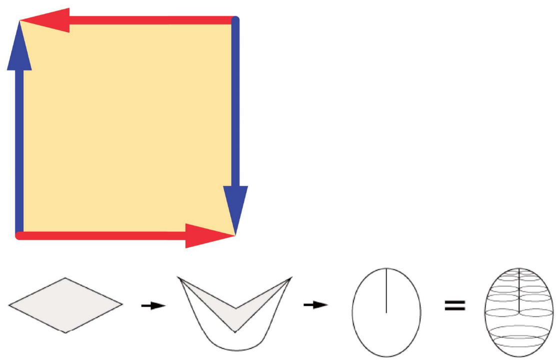
Bolyai: Pero mis estudios se conocieron antes.

Lobachevski: Solo porque yo estaba separado del resto del mundo científico por las barreras de la distancia y el lenguaje.

Hilbert: Creo que Gauss, Bolyai y Lobachevski deben compartir la gloria de haber creado una *nueva geometría*. Este es el más notable resultado obtenido por la matemática del siglo xix.

Hal: Las demostraciones de compatibilidad de la hipótesis del ángulo agudo fueron realizadas por Eugenio Beltrani, Arthur Cayley, Felix Klein, Jules Henri Poincaré y otros. Lo consiguieron creando modelos dentro de la geometría euclídea de forma que se pudiera interpretar la hipótesis del ángulo agudo.

Santiago: ¿Pero cómo se pueden entender esas otras geometrías, por ejemplo el plano proyectivo?



6. Plano proyectivo

Hal: Imagínate que dos rectas nunca pueden ser paralelas porque se cortarán en el infinito; en un punto del infinito. Si miras una fotografía de una habitación cuadrada o de un pasillo y prolongas las líneas rectas del techo y del suelo, observarás que se cortan en un punto de la fotografía que se llama punto de fuga; este punto pertenece al infinito.

Santiago: Pero, si usamos las ecuaciones de dos rectas en el plano, tenemos casos en los que estas rectas no se cortan.

Plücker: Eso es porque no usas una buena notación.

Santiago: ¿Cómo es posible que sólo cambiando la notación se cambien las soluciones?

Plücker : Debes usar las coordenadas homogéneas que necesitan de tres valores para describir un punto (x, y, t). Estas coordenadas no son únicas, ya que también $(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot t)$, con k distinto de 0, corresponden a la pareja $(x/t, y/t)$ de coordenadas cartesianas. Para obligar a que las coordenadas sean únicas, puedes obligar, por ejemplo a que $t=1$, en cuyo caso $(x, t, 1)$ corresponden a (x, y).

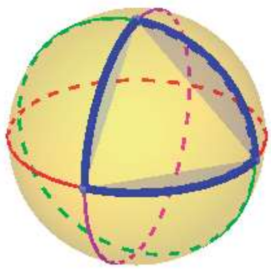
Santiago: Entonces ¿cuáles son los puntos del infinito?

Plücker: Son los que tienen $t=0$, que sería nuestra ecuación de la *recta del infinito*. Las coordenadas homogéneas son muy útiles para estudiar los haces de cónicas, dualidad entre puntos y rectas… Hubiera seguido por ese camino mis investigaciones, sin embargo Steiner y los sintéticos se opusieron al uso del Análisis en Geometría en Alemania, por lo que en 1847 abandoné la Geometría por la Física, en particular el magnetismo y la espectroscopia. Sorprendentemente para m mismo, encontré apoyo a mis antiguas teorías geométricas entre los matemáticos ingleses y en 1865 volví a publicar resultados geométricos en revistas inglesas y no en el *Journal de Crelle*.

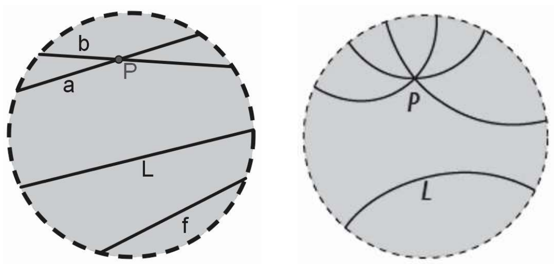
Hal: Prosigamos con otro tipo de geometría, la hiperbólica, que es algo especial porque se tienen los siguientes resultados no intuitivos:

1. No todos los ángulos tienen la misma suma angular.
2. Por tres puntos no colineales no pasa necesariamente un círculo.
3. No existen rectángulos ni rectas equidistantes.
4. El Teorema de Pitágoras es falso.

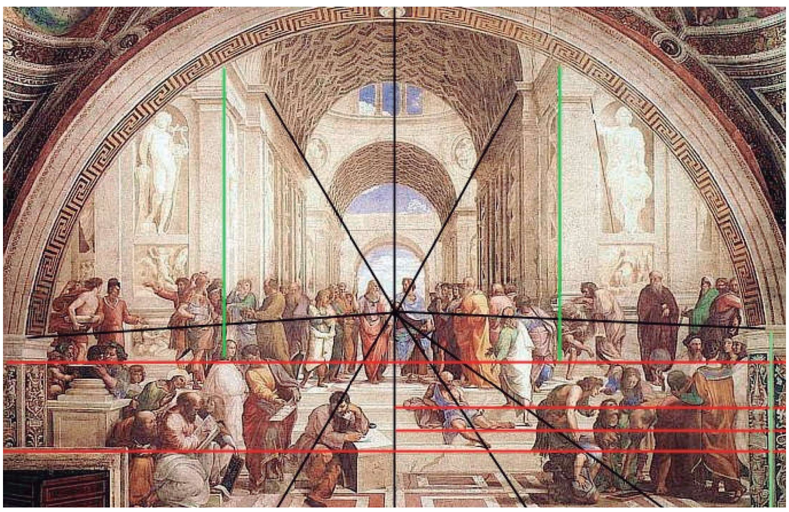
Aunque no son intuitivos, puedes ver fácilmente que estos resultados son ciertos en la geometría esférica. Por ejemplo, el triángulo formado por un octavo de esfera tiene ángulos de 90º, 90º y 90º, lo que sumados hacen un total de 270º.



Si quieres puedes *ver* otras geometrías hiperbólicas mediante los modelos más conocidos del plano hiperbólico, que fueron creados por Felix Klein en 1871 y Henri Poincaré en 1882.



Modelos de los planos hiperbólicos de Félix Klein (izquierda) y Henri Poincaré (derecha)



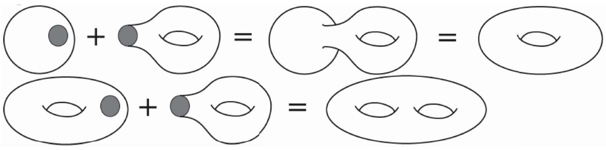
Santiago: Yo sé clasificar las figuras planas, por ejemplo polígonos, contando sus lados, si son regulares o no, figuras curvas… Y figuras tridimensionales, pirámides, conos, prismas, poliedros…

¿Cómo puedo clasificar estas superficies de las que me hablas?

Hal: Supongo que conoces algo de topología.

Santiago: Sí, es eso de las superficies elásticas y deformables, ¿no?

Hal: Eso es, las superficies cerradas orientables son equivalentes a esferas y, si tienen huecos, son equivalentes a un toro o una esfera con varias asas.



Santiago: Por ejemplo una taza, ¿no?

Hal: Sí. El concepto de superficie no orientable fue descubierto por Johann Listing y August Möebius en 1858. El ejemplo más conocido es la cinta de Möebius, que ya aparece en mosaicos romanos en el siglo III.

Santiago: Sí, ya hemos hablado de la cinta de Möebius. ¿Qué tiene esto que ver con la clasificación de las superficies?

Hal: A eso voy. Por los resultados de Riemann (1857), Möebius (1863) y Klein (1882), se demostró que toda superficie bidimensional cerrada es equivalente topológicamente a una de las superficies de las dos familias infinitas que paso a enunciarte:

1ª Familia: Esfera y las superficies orientables que se obtienen agregando a la misma un número finito de aros. Si no tiene ningún aro, se trata de la esfera. Con un aro la esfera se convierte en un toro. Estas superficies quedan determinadas por el número de huecos.

2ª Familia: Superficies no orientables que se obtienen de la esfera separando un número finito de círculos y sustituyéndolos por cintas de Möebius (esto se puede hacer porque la cinta tiene un solo borde).

Con una cinta de Möebius tenemos el plano proyectivo. Con 2 cintas de Möebius tenemos la botella de Klein.

A cada una de estas superficies bidimensionales se le puede asignar un tipo de geometría:

La euclídea, es la usual para el toro y la botella de Klein.

La esférica, para la esfera (no tiene rectas paralelas porque las rectas son círculos máximos y estos siempre se cortan entre si) y para el plano proyectivo.

La hiperbólica, para el resto.

Santiago: ¿Entonces ya quedan clasificados?

Hal: No del todo. ¿Conoces la característica de Euler? Este gran matemático redescubrió los trabajos de Descartes (1639) y Leibniz (1675) y los publicó en 1750.

Santiago: Si, es eso de contar vértices, lados y aristas.

Hal: Muy bien. Más concretamente: Para un poliedro convexo se cumple que $V-L+F=2$, donde V es el número de vértices, L es el número de aristas y F es el número de caras. Por ejemplo, el cubo cumple que $8-12+6=2$.

Esta relación es válida para grafos dibujados sobre una esfera, por lo que se entiende que es una propiedad topológica. Se trata de una característica ($V-L+F$) que depende sólo del tipo de superficie sobre la cual el grafo está dibujado. $2-2n$, si es una esfera con n aros. $2-n$ si es esfera con n cintas de Möebius. Te pondré algunos ejemplos:

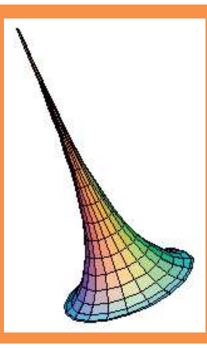
Esfera (0 aros): $2-2\times 0=2$
Toro (1 aro): $2-2\times 1=2-2=0$
Plano proyectivo (1 banda de Möebius): $2-1=1$
Botella de Klein (2 bandas de Möebius): $2-2=0$

HAL: Te propongo un ejercicio.

Eugeni Beltrani demostró que también había un modelo para la geometría de Lobachevski: la superficie engendrada al girar una tractriz alrededor de su asíntota (fíjate en la figura adjunta).

Dicha superficie se conoce con el nombre de *pseudoesfera* porque tiene curvatura constante negativa, mientras que la esfera tiene curvatura constante positiva y el plano tiene curvatura constante nula (= 0), por lo que la geometría del plano o euclídea sería una geometría intermedia entre la hiperbólica y la elíptica. Las rectas en esta superficie serían las geodésicas (tractriz o circunferencia).

Puedes comprobar que se cumplen todas las propiedades de los postulados de Lobachevski. Como ayuda te recomiendo que leas *El Mundo Invertido,* de Christopher Priest.



Por lo que conociendo si una superficie es orientable o no y conociendo su característica de Euler es posible clasificarla completamente.

William Thourston: La clasificación que realicé de las superficies de 3 dimensiones (aunque incompleta) hizo que se me concediera la medalla Fields en 1983.

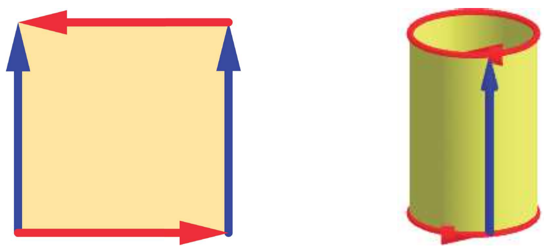
Henri Poincaré: En 1904 expuse la siguiente conjetura que permitía completar la clasificación de Thourston: «¿La hiperesfera, es la única superficie tridimensional cerrada y orientable cuyo grupo fundamental es trivial?»

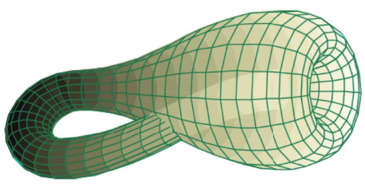
Hal: Más tarde se daría respuesta a esta pregunta, lo que permitió que los anhelos de viajes espaciales que había tenido durante tanto tiempo la humanidad, dejaran de ser una utopía para convertirse en realidad cuando los físicos entendieron que para el plegado del continuo espacio-tiempo necesitaban dimensiones mayores, tal y como se necesitan 3 dimensiones para convertir una superficie de 2 dimensiones como el plano en una banda de Möebius o se necesitan 4 dimensiones para el plegado de la botella de Klein.

Santiago: Otra vez vuelve a salir el nombre de Klein. ¿Es este el mismo que el del motor Klein de esta nave que nos permitirá el «salto»?

Hal: Sí, el mismo.

Santiago: Lo de la banda de Möebius lo entiendo, pero ¿cómo es eso de la botella de Klein en 4 dimensiones?



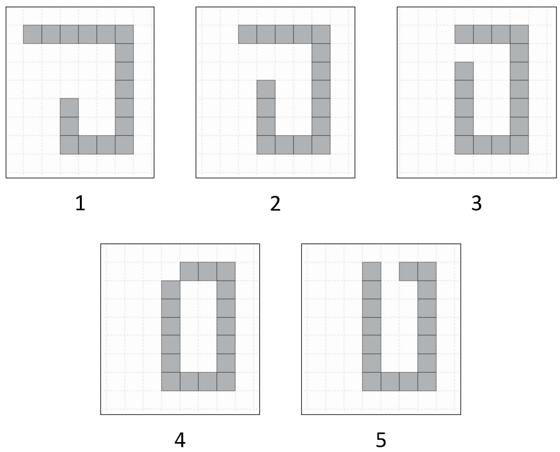


7. Botella de Klein

Hal: Imagínate que construyes con papel un cilindro que formaría tu botella, y doblas el cuello de esta botella de forma que atraviese el lateral y conecte por dentro de la botella con su fondo.

Santiago : Pero eso es trampa; has cortado la superficie.

Hal: Ya te dije que necesitaba una dimensión más. En este caso es el tiempo. Deja que te muestre un antiguo videojuego llamado *Snake* o Serpiente, que en su versión más simple consiste en una pequeña serpiente que va aumentando su longitud según se va alimentando, que no puede parar nunca su movimiento y que pierde el juego cuando se choca con su propio cuerpo. Al principio es bastante fácil, pero cuando la longitud del cuerpo es muy grande hay que tener en cuenta el tiempo para predecir cuándo dejará libre un espacio la parte caudal del cuerpo:



Santiago jugó durante un rato con el videojuego y lo entendió.

Santiago : Y ese Klein jugaba con este juego y por eso se inventó su botella, ¿no?

Hal: No; Felix Klein vivió antes de que existieran los videojuegos.

Santiago : ¡Cuéntame más de Klein!

…continuará

Francisco Maíz Jiménez
IES Salvador Dalí (Madrid)
<tercermilenio@revistasuma.es>