¿CÓMO ESTABLECER RELACIONES ENTRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO Y CONCEPCIONES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS?

Álvaro Aguilar-González, Cinta Muñoz-Catalán, José Carrillo-Yáñez y Luis José Rodríguez-Muñiz

Este trabajo describe cómo establecer relaciones entre los subdominios del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) y las concepciones del profesorado de matemáticas, según el modelo concepciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (CEAM). Se presenta una metodología para identificar y analizar estas relaciones, que ha permitido comprender la práctica en el aula de una maestra de 5º grado de primaria. Se aporta la descripción del indicador "concepción de la matemática escolar" y las relaciones establecidas al aplicar este método. Finalmente, se discute la potencialidad de uso del instrumento propuesto.

Términos clave: Concepciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; MTSK; Relaciones de conocimiento especializado

How to establish connections between specialized knowledge and mathematics teachers' beliefs?

This paper describes how to establish relationships between the subdomains of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model and the conceptions of the mathematics teaching, according to the Conceptions of Teaching-Learning Mathematics model. We present a methodology for identifying and analyzing these relationships, which has allowed to understand the practice in her classroom of one fifth grade primary teacher. As a result, the description of the indicator "conception of school mathematics" and the established relationships are provided. Finally, the potential use of the proposed instrument is discussed.

Keywords: Conceptions of teaching-learning mathematics; MTSK; Specialised knowledge relations

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, *13*(1), 41-61.

La naturaleza del conocimiento profesional del profesor es un tema que en los últimos años ha atraído el interés de la comunidad científica (Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013). Dentro de los distintos modelos de caracterización de este conocimiento destaca el llamado modelo del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK[1]) Carrillo et al., (2018). El modelo, como se señalará en la sección dedicada al marco teórico, identifica varios subdominios, con sus correspondientes categorías, en el conocimiento del profesor. El objetivo principal del presente estudio es analizar cómo se establecen las relaciones entre los distintos subdominios con las concepciones, ejemplificándolas a partir de la observación de una sesión de aula.

La aproximación que aquí se utiliza (véase Aguilar-González, 2016) se ha basado en una doble perspectiva teórica. Por una parte, a partir del análisis de los subdominios de conocimiento especializado que proporciona el modelo MTSK como herramienta de investigación (Flores-Medrano, 2015). La otra perspectiva la determinan las Concepciones sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas (CEAM), desarrolladas por Carrillo (1998) y adaptadas por Climent (2005) a la educación primaria. Ambos aspectos de análisis son observados en una maestra de educación primaria y su quehacer en el aula cuando establecía procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

Además de la propia propuesta metodológica, que constituye en sí misma un resultado, en este artículo (que es parte de una investigación mayor) presentamos también las diferentes relaciones que se fueron identificando y describiendo en una única sesión analizada. Este análisis de la sesión contribuye principalmente mejorando, en general, la identificación de la naturaleza del modelo teórico utilizado y, en particular, ilustrando la comprensión en profundidad del conocimiento que esta maestra observada desarrolla cuando aborda en el aula el tema de las figuras planas.

En la siguiente sección se presenta la aproximación que se utilizará en relación con el conocimiento profesional, describiendo con detalle el modelo MTSK y las CEAM. Posteriormente, se mostrará el proceso que se utilizó para establecer las relaciones entre los subdominios del modelo, y se ilustrarán mediante un caso real observado en el aula. Por último, se realizará la discusión de los resultados, incluyendo las conclusiones, limitaciones y líneas de investigación para el futuro.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este apartado se destacan aspectos sobre el conocimiento profesional del profesor, los modelos de investigación sobre este conocimiento en matemáticas, y las concepciones que tiene el profesorado sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

[1] Del acrónimo ingles *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK)

Conocimiento profesional del profesor

Desde el trabajo planteado por Shulman (1986), se han realizado multitud de investigaciones tanto sobre SMK (Subject Matter Knowledge) (eg. Ball, 1988; Even, 1990; Ma, 1999; Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001), como sobre PCK (Pedagogical Content Knowledge) (eg. Marks, 1990; Even, 1990; Llinares y Krainer, 2006; Pinto y González, 2006). De este modo, podemos afirmar que el conocimiento del profesor es un tema de gran importancia en la comunidad investigadora en Educación Matemática.

Modelos de investigación sobre el conocimiento profesional en matemáticas

A partir de la introducción por Shulman (1986) del concepto de PCK, muchos investigadores en educación matemática empezaron a trabajar en esta temática, acometiendo adaptaciones para el dominio de la enseñanza matemática de las ideas expresadas por este autor en un contexto educativo genérico.

En el Congreso PME (Psychology of Mathematics Education) de 2009, se discutió en un fórum sobre el tema "Teacher knowledge and teaching: Considering a complex relationship through three different perspectives" (Ball, Charalambous, Thames y Lewis, 2009). Las tres perspectivas consideradas fueron el "Mathematics for teaching" (Mft) (Davis y Simmt, 2006), el "Knowledge Quartet" (KQ) (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y el "Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), y todas tienen como base el trabajo de Shulman (1986), en tanto que suponen una adaptación de ese modelo al dominio de la matemática.

Centrándonos en modelo del MKT, estos autores se interesaron por el estudio de qué conocimientos matemáticos serían necesarios para enseñar matemáticas. Estos investigadores observaron que, para realizar las tareas necesarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, eran exigidos conocimientos específicos como, por ejemplo, conocimientos matemáticos más allá de los conocimientos de los alumnos que tienen en ese nivel educativo. Además, un profesor debe tener conocimientos en matemáticas diferentes, pero no menos exigentes que los de otros profesionales que también estén formados en matemáticas. Es más, el profesor tiene que ser capaz no solo de detectar un error, sino también de saber cuál es el origen de ese error matemático, y ser capaz de reaccionar rápidamente para solventarlo (Ball et al., 2008).

Carrillo (2010) establece semejanzas y diferencias entre los referidos modelos teóricos y afirma que constituyen herramientas útiles para los profesores que deseen reflexionar sobre su conocimiento profesional. Cada modelo ofrece una perspectiva diferente que nos permite aproximarnos al conocimiento profesional.

El modelo MTSK

Este modelo de conocimiento surge de los estudios planteados por Shulman (1986) y Ball et al. (2008). Toma en cuenta el carácter especializado del conocimiento del profesor integrándolo en todos los subdominios que componen el modelo. Esta ampliación supone una evolución respecto del MKT, donde se consideraba que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que le permitía realizar su actividad diaria, se podía comprimir en un único subdominio: el llamado Conocimiento Especializado del Contenido (Specialised Content Knowledge, SCK). En Flores, Escudero y Carrillo (2013) se realiza un análisis del SCK y se llega a la conclusión de que resulta conflictivo considerar el subdominio como exclusivo del dominio matemático. Sin embargo, la especialización de MTSK debería permitir que el conocimiento especializado se diferencie de conocimientos generales de pedagogía (conocimiento de la pedagogía y la psicología educativa, que también forma parte del conocimiento profesional de los profesores de matemáticas).

En la figura 1, que se explica a continuación, se puede apreciar el esquema general y los subdominios de los que está compuesto el modelo MTSK.

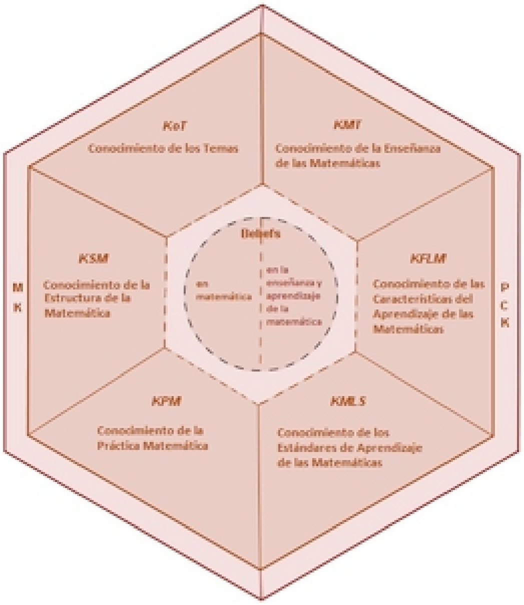

*Figura 1***.** Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018)[2]

El modelo MTSK mantiene la diferenciación en dos dimensiones del conocimiento, por un lado, el dominio de Conocimiento Matemático (MK) y por el otro, Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (PCK). A su vez, estas dimensiones están divididas en tres subdominios cada uno de ellos.

---

[2] MK: Mathematical Knowledge; KoT: Knowledge of Topics; KSM: Knowledge of the Structure of Mathematics; KPM: Knowledge of Practices in Mathematics; PCK: Pedagogical Content Knowledge; KMT: Knowledge of Mathematics Teaching; KFLM: Knowledge of Features of Learning Mathematics; KMLS: Knowledge of Mathematics Learning Standards.

El dominio MK abarca el conocimiento de las conexiones entre los conceptos, la estructuración de las ideas, el razonamiento de los procedimientos, las pruebas y las diferentes formas de proceder en matemáticas, teniendo en cuenta también el conocimiento del lenguaje matemático. Dentro del MK encontramos los siguientes subdominios: El Conocimiento de los Temas (KoT) se define como un conocimiento bien fundado y profundo de los contenidos matemáticos (Escudero-Ávila, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015); el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) comprende el conocimiento de las conexiones entre contenidos posteriores y anteriores, incluyendo las conexiones internas de las matemáticas (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013); y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) que incluye la jerarquización y la planificación como formas de proceder en la resolución de problemas, las formas de validación y la demostración, los procesos asociados con la resolución de problemas como una forma de producir matemática y las prácticas particulares de la tarea matemática.

El dominio de PCK se refiere al conocimiento del profesor del contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje. El dominio PCK se divide en tres subdominios: el conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) incluye el conocimiento de diferentes estrategias para desarrollar capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, el conocimiento de representaciones para hacer comprensible un tema específico, el conocimiento de recursos para ayudar a los estudiantes a descubrir ciertas ideas matemáticas, entre otros; el subdominio de Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) se refiere al conocimiento de las características de los procesos de comprensión de los estudiantes, el lenguaje asociado a cada concepto, así como posibles errores, dificultades, obstáculos o lenguaje utilizado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en la clase; y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de Matemáticas (KMLS) que es el conocimiento que el profesor tiene de lo que el estudiante debe o puede lograr en un año escolar dado, y, adicionalmente, lo que se prescribe en el plan de estudios de la institución, en la investigación y en las opiniones de los expertos sobre los logros de aprendizaje, etc.

Concepciones del profesorado sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática

En la literatura de investigación sobre la formación del profesorado las concepciones han sido un foco de atención principal, por el papel que posee para la comprensión del comportamiento de los profesores durante su instrucción. Esta literatura pone de relieve que la formación del profesorado debería centrarse en el desarrollo de las creencias (e.g. Thompson, 1992; Cooney y Shealy, 1994; Ponte, 1992; Wilkins y Brand, 2004; Polly, et al., 2017). La mayoría de las investigaciones centran su foco de atención en los profesores de Secundaria, y en maestros de Primaria en formación (eg. Ren y Smith, 2018; Skott, 2015).

Existen diversos enfoques por parte de los investigadores respecto a las creencias de los profesores. Algunos investigadores asumen las creencias como una parte del PCK de los profesores (Ball, 1988). Otros hacen una distinción explícita entre el conocimiento y las creencias; así Thompson (1992) subraya estas diferencias: en primer lugar, las creencias pueden ser consideradas con diferentes grados de convicción, mientras que los conocimientos generalmente no se consideran de esta manera. Además, las creencias no son consensuales, pero el conocimiento sí lo es.

Haciendo uso de la base teórica presentada en Carrillo (1998), de la que se derivó el instrumento CMTL, y Contreras (1999), decidimos considerar las creencias como un elemento tan cercano a las concepciones que no tiene sentido distinguirlas, como afirman Philipp (2007), Maasepp y Bobis (2015) y Zoitsakos, Zachariades y Sakonidis (2015). No hay beneficios significativos para la comprensión de la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, ya que tanto las creencias como las concepciones están vinculadas de la misma manera al conocimiento. Esto nos permite abordar el estudio de ambas construcciones, así como las relaciones entre ellas. Las concepciones son un elemento diferente del conocimiento, pero íntimamente ligado a él de tal manera que impregna el conocimiento que el profesor tiene en cada uno de los subdominios.

Instrumento CEAM

El instrumento CEAM (Concepciones sobre Enseñanza y el Aprendizaje de Matemáticas), desarrollado por Climent (2005), se elaboró a partir del Instrumento de análisis de las concepciones del profesor sobre la enseñanza de la matemática (Carrillo, 1998), el cual muestra su potencial para estudiar las concepciones de los profesores de Secundaria. Este instrumento CEAM respeta la distinción de las cuatro tendencias didácticas que sirven como indicadores generales y sus abreviaturas dentro de las categorías: tradicional (TR), tecnológica (TE), espontaneísta (E) e investigativa (I); y las agrupa en las siguientes categorías: la metodología, la concepción de la matemática escolar, la concepción del aprendizaje, el papel del alumno y el papel del maestro. Las categorías están numeradas de manera correlativa para hacer operativo los descriptores que las componen.

Estos descriptores podemos incluirlos dentro de las tendencias didácticas anteriormente nombradas, haciendo uso de una numeración consecutiva para hacernos referencia a ellos, quedando de la siguiente manera construido el instrumento.

Tradicional. La metodología fomenta la ejercitación repetitiva; el maestro da las pautas; interesan los conceptos y reglas; el proceso de aprendizaje es deductivo (regla-aplicación); y el aprendizaje es un proceso individual.

Tecnológica. La metodología se basa en la ejercitación reproductiva; el maestro da las pautas poniendo énfasis en que los alumnos comprendan; interesan los conceptos y reglas, procedimientos locales y lógica de la asignatura; procesos de aprendizaje inductivos simulados (por el maestro) y deductivos; el aprendizaje es un proceso individual.

Espontaneísta. El "activismo" como metodología; el maestro propone las actividades, promoviendo la participación de los alumnos; interesan actitudes y procedimientos generales; proceso de aprendizaje inductivo; el aprendizaje es un proceso social.

Investigativa. La metodología se basa en la resolución de situaciones problemáticas; el maestro propone investigaciones, apoya la reflexión y el trabajo autónomo del alumno; interesan conceptos, procedimientos y actitudes; el proceso de aprendizaje es inductivo-deductivo; el aprendizaje es un proceso social e individual.

La elección de este instrumento para el trabajo aquí presentado se basa en las características del caso de estudio que se detalla en el apartado siguiente.

Las creencias y concepciones del profesorado acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, consideradas como objeto de investigación, han tenido un desarrollo a menudo independiente a los modelos de conocimiento, pero algunos modelos, como el MTSK, vinculan las concepciones no como un elemento integrador del conocimiento sino como un factor íntimamente ligado a él, que lo permea en la actividad diaria del profesorado.

DISEÑO METODOLÓGICO

En este apartado se presentan los elementos que caracterizan el estudio según el diseño metodológico considerado.

Caracterización de la investigación

La aproximación al fenómeno de estudio que se ha seguido en este trabajo se encuentra bajo un paradigma interpretativo (Bassey, 1999), ya que el propósito es comprender, descubrir, e interpretar la realidad, más que probar hipótesis previamente determinadas (Merriam, 1988). No se pretende "explicar, controlar y predecir" como en el paradigma positivista, ni "conseguir la emancipación y transformación de la realidad, como pretende el paradigma crítico" (Muñoz-Catalán, 2009, p.149). Cuando el propósito principal es comprender e interpretar la realidad entonces, consecuentemente, se suele hacer uso principalmente de métodos y técnicas de naturaleza cualitativas que permitan conocer la realidad en un proceso de indagación. En este abordaje interpretativo se ha de ser consciente de que se construye la propia interpretación del fenómeno a partir de lo que, a juicio del investigador, se considera que se pone de manifiesto en las actuaciones de la maestra observada.

El diseño de la investigación consiste en un estudio de caso único, que sigue las características del estudio de caso instrumental de Stake (2005).

Instrumentos de recogida y cómo elaborar el análisis de la información

Como se ha señalado anteriormente, el foco de esta investigación no está tanto en el nivel de profundización del conocimiento de la maestra, así como en las conexiones con las concepciones sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Si no que, se ha centrado en determinar cómo las concepciones permiten encontrar relaciones entre los subdominios del MTSK.

Para ello, se parte del análisis como un proceso de interpretación (Blumer, 1969) en el que juega un papel crucial la habilidad del investigador para reconocer y atribuir significado, la cual procede tanto de su inmersión en los datos como de su conocimiento y experiencia profesional. A esto se le conoce como sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994).

El análisis de las sesiones se abordó en tres fases. Primero, las transcripciones de las sesiones; segundo, la organización y estructuración de cada sesión, y tercero, la elaboración de informes por sesión (en los que se identifican las relaciones entre MTSK y CEAM), que son los resultados de la investigación. Por ello, el desarrollo de los informes se incluye dentro del apartado de resultados describiendo aquí únicamente los aspectos de organización metodológica.

Fase 1. Transcripciones. Son el primer nivel de análisis y suponen una construcción realizada por el investigador de la realidad observada en función de sus objetivos de investigación. En este caso, se han transcrito ocho sesiones de aula en 5º curso de educación primaria, de una duración aproximada de una hora cada una, tratándose en todas ellas el tema de los polígonos. La primera sesión comienza con un trabajo sobre la construcción de la definición de polígono y la última sesión termina con la clasificación de los cuadriláteros. Se han numerado consecutivamente utilizando la codificación de V1 a V8. En este artículo presentamos la sesión V2 debido a que la sesión anterior había sido introductoria, y en esta sesión comienza con el trabajo en los diferentes tipos de triángulos a partir de una actividad diseñada por la maestra.

Fase 2. Organización y estructuración de los datos. Se ha utilizado el modelo de Schoenfeld (2000) y las adaptaciones efectuadas por Monteiro (2006), Monteiro, Carrillo y Aguaded (2008) y Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2009). Cada sesión se ha estructurado en episodios y, para efectuar el análisis, se combina una descripción de cada episodio con la transcripción asociada. Se trata de nueva selección de unidades de información relevantes para cada episodio. Las unidades se localizan mediante la numeración atribuida a cada línea de la transcripción, lo que ayuda a estructurar la sesión en episodios y subepisodios descriptivos, cuando sean pertinentes. En la figura 2 se presenta un ejemplo hipotético de organización y estructuración de una sesión, donde se observa que existen episodios y subepisodios.

<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. [líneas de transcripción]
Episodio 1</td><td>1.1 [líneas de transcripción]
Título de subepisodio
Resumen de lo ocurrido</td><td>[líneas de transcripción]
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td>1.2 [líneas de transcripción]
Título de subepisodio
Resumen de lo ocurrido</td><td>[líneas de transcripción]
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. [líneas de transcripción]
Episodio 2</td><td>2.1 [líneas de transcripción]
Título de subepisodio
Resumen de lo ocurrido</td><td>[líneas de transcripción]
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td>2.2 [líneas de transcripción]
Título de subepisodio
Resumen de lo ocurrido</td><td>[líneas de transcripción]
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td>2.3 [líneas de transcripción]
Título de subepisodio
Resumen de lo ocurrido</td><td>[líneas de transcripción]
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td>3. [líneas de transcripción]
Episodio 3</td><td colspan="2">[líneas de transcripción] Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. [líneas de transcripción] Episodio 3
Transcripción de la sesión de aula</td></tr>
</table>

Figura 2. Estructura de una hipotética sesión de clase

Fase 3. Elaboración de informes por sesión. Supone un tercer análisis individual de cada grabación. Se han identificado tres tipos de relaciones en las sesiones:

- Relaciones entre dos o más subdominios de conocimiento. Para que se pueda afirmar que dos (o más) subdominios de conocimiento están relacionados en un episodio, se identifican indicios o evidencias (Flores-Medrano, 2015) que ayuden a interpretar qué conocimiento ha manifestado la maestra y, con dicha identificación, se establece la relación.
- Relaciones entre un subdominio de conocimiento y una concepción. Se debe poder inferir que la concepción actúa permeando el subdominio de

conocimiento en el episodio, permitiendo acceder a una comprensión más detallada del conocimiento de la maestra.

- Relaciones entre una concepción y dos o más subdominios de conocimiento. La concepción debe guiar el análisis de modo que las relaciones ayuden a entender y poner de relieve cómo se pone en acción esa concepción en el episodio, permeando al tiempo los dos o más subdominios de conocimiento.

El interés está centrado solamente en ese tipo de relaciones, por lo tanto, las posibles relaciones entre dos o más concepciones no son consideradas en este trabajo.

RESULTADOS

Tomando como referente los tres tipos de relaciones que se han descrito en la metodología, la elaboración de los informes de la tercera fase se estructura de la siguiente manera: (a) análisis interpretativo por episodio, (b) relaciones MTSK y (c) esquema de MTSK.

Análisis interpretativo por episodio

Aplicando los instrumentos de análisis de MTSK y CEAM a las videograbaciones de cada sesión de aula, se han obtenido informes que reflejan la interpretación de los investigadores sobre qué conocimientos y/o concepciones ha involucrado la maestra en su puesta en práctica en el aula. Se han analizado solo aquellos episodios que se han considerado más relevantes. Cada informe se ha realizado utilizando un enfoque interpretativo puesto que el objetivo principal era profundizar en los datos con el fin de encontrar estructuras y relaciones de significado que no eran aparentes en el texto (Kvale, 1996), y cada conocimiento o concepción identificado se ha codificado mediante su acrónimo y un número consecutivo, para facilitar al lector su localización posterior. Esta numeración es continua a lo largo de todas las sesiones. Al tratarse de la V2 existen codificaciones en subdominios que comienzan, por ejemplo, en el número 7 en el caso del subdominio de conocimiento del tema matemático (KoT), debido a que en la sesión anterior ya se han observado 6 descriptores sobre el subdominio mencionado. También se han incluido las unidades de información, codificadas con su localización mediante las líneas de transcripción, conservando los códigos definidos en el instrumento CEAM.

Mostramos a continuación, a modo de ejemplo, fragmentos de transcripción extraídos de la sesión V2, donde se muestran ejemplos de diferentes evidencias de conocimiento y concepciones de la maestra. Se han ordenado según han aparecido los subdominios en el apartado referente a ellos, por lo que las líneas de transcripción pueden no ser consecutivas.

Dentro del dominio de Conocimiento Matemático (MK), destacamos los siguientes ejemplos.

[V2. 14-21] *Maestra:*	Para que sea una definición y podamos identificar perfectamente lo que son polígonos tenemos que decir más cosas sobre las figuras planas. […] Luego salieron más detalles por parte del alumnado, que no sólo estaba cerrada y era plana, sino que además tenía otros detalles. Tenía…vértices y tenía ángulos, y así ya se quedó completa la definición.

Cuando la maestra enfatizar sobre el propio procedimiento de definir (expresión, clara, ordenada y precisa), está manifestando un [KoT7] sobre qué es una definición y cuáles son sus características.

[V2. 7-9] *Maestra:*	Volvimos a ver las dificultades de la otra vez, cuando definimos ejes de simetría, ¿verdad, que nos costó mucho trabajo?, pero parece que, al menos, teníamos las cosas un poquito más claras en esta ocasión cuando hemos definido qué es un polígono.

En esta unidad de información nos encontramos con una práctica matemática [KPM2] en la que se establece una relación entre la construcción de la definición de dos contenidos matemáticos (simetría y polígono) y la maestra manifiesta una estructura lógica de pensamiento que le ayuda a entender el funcionamiento de ambos aspectos matemáticos.

Dentro del dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), destacamos los siguientes ejemplos.

[V2. 54-56] *Maestra:*	Así que hoy, vamos a pensar, lo primero, en a ver qué polígono sois capaces vosotros de formar, o que conocéis y que tenga el mínimo número de lados.

Cuando la maestra comienza esta actividad le da significado al propio concepto de triángulo, problematizándolo. De este modo, parece justificado su estudio como un tipo de polígono especial. También de esta manera motiva a los alumnos a su estudio, le da sentido. Manifiesta un conocimiento sobre la potencialidad que tiene el problematizar esta actividad [KMT3].

[V2. 10-12] *Maestra:*	Los errores más importantes del alumnado, fue que no completaban la definición, dejaban la definición a medias, con lo cual, algunas figuras tal y como habían dicho la definición, sí eran polígonos y otras no.

Podemos afirmar que la maestra conoce los errores asociados a la definición de polígono [KFLM5].

Respecto a las Concepciones sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas, encontramos los siguientes ejemplos.

[V2. 12-14] *Maestra:*	Algunos alumnos decían: "un polígono es una figura plana y cerrada". Entonces, claro, una figura plana y cerrada hay muchas ahí, y sin embargo no son polígonos, ¿verdad, Jaime?

El alumno siente que sus ideas, sus problemas, sus logros son considerados, y son importantes para la maestra [I24. Papel del alumnado].

Relaciones CEAM-MTSK

Este apartado podría compararse con la finalidad que posee el zoom de las cámaras fotográficas. Cuando nos acercamos al máximo al objeto de nuestro interés logramos captar con gran profundidad y detalle todas sus características, pero perdemos la visión de conjunto, que es precisamente lo que conseguimos cuando nos alejamos (en cuanto a distancia) de nuestro foco. El objetivo de este apartado es destacar las conexiones entre las concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que se han inferido de la práctica de la maestra y los conocimientos con los que parecen estar relacionadas. De este modo, el informe que resulta convierte las concepciones en el hilo conductor transversal del análisis. Así, se presenta una concepción determinada y se destaca la conexión que se observa con elementos de conocimiento de los subdominios, de modo que esas conexiones ayudan a entender cómo la concepción se incardina en el conocimiento. Se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

[V2. 23-31] *Maestra:*	Entonces una cosa es los elementos de que está compuesta una definición y otra son las propiedades […]. Y a la hora de ordenar la definición salían elementos y por otro lado propiedades. […]. Entonces ordenamos la definición. Por un lado, se decían las propiedades y por otro lado se decían los elementos que componían los polígonos, ¿verdad? Y ya pues más o menos quedó estructurada y ordenada la definición de polígono.

Esta manifestación de conocimiento podemos evidenciar [KoT8] referente al orden de la definición, así como al conocimiento propio sobre la definición de polígono (está compuesto por elementos y esas figuras poseen propiedades). Aunque, se acepta una definición en los términos en los que se expresan los alumnos, no hay un énfasis en llegar a la definición formal, ya que es con la definición que van a trabajar (es correcta, pero no completa), el alumno ha sido quien ha condicionado la actividad [I24 Papel del alumnado]. La definición de polígono con la que trabaja es la que se ajuste a las figuras que considera como tal, no se tienen en cuenta las posibles consecuencias matemáticas de la definición que se construye. No atribuye importancia al hecho de que en la definición se incluyan los elementos y que la propia definición no recoja las características de las figuras sin que sea necesario hacer mención a éstos. El punto de vista de la matemática escolar muestra su doble perspectiva de exactitud/aproximación dependiendo del contexto y se concibe en construcción [I10 Concepción de la matemática escolar].

Esta definición con la que trabaja la maestra parece recoger en "tiene ángulos y lados" el hecho de estar formada por una línea poligonal (basándose en esto desecharon las figuras con lados curvos). La definición usada (con esa identificación) se ajusta a la aceptada académicamente. Es de especial relevancia el papel que le otorga al alumno [I24 Papel del alumnado] cuando la maestra hace destacar la importancia de la construcción de la definición de polígono [KPM1], manifestando una estructura lógica de pensamiento que le ayuda a entender el funcionamiento de los aspectos matemáticos involucrados, así como los errores asociados a la construcción propiamente dicha [KFLM5]. Para ello la maestra, desde su conocimiento [KoT7] sobre qué es una definición y cuáles son las características que debe poseer, está supeditada a la matemática escolar [I10 Concepción de la matemática escolar], puesto que la definición depende del contexto en el que se está desarrollando y, en este caso, aunque en la definición se incluyen elementos de las figuras y no recoge las características de las figuras sin que sea necesario hacer mención a éstos.

Esquema de MTSK-CEAM

Finalmente, se genera un gráfico de relaciones internas MTSK-CEAM correspondiente a la sesión (figura 3). El gráfico contiene, por un lado, los indicadores de conocimiento y concepciones identificados en la sesión, expresados mediante los códigos utilizados. En este artículo, además, se han encuadrado en color rojo los indicadores que se han manifestado como ejemplos de resultados, para ayudar al lector a localizarlos dentro del gráfico.

Los indicadores de cada subdominio, ya sea de conocimiento o de concepciones (ubicadas en el centro de la imagen del modelo), se han inscrito en círculos con dos tamaños diferentes: el de menor tamaño se usa para conocimientos o concepciones que se hayan identificado en una o dos ocasiones y el de mayor tamaño para los conocimientos o concepciones que se hayan usado con más regularidad (tres o más ocasiones) a lo largo de la sesión. Esto sirve como apoyo visual para poder identificar cuál es el subdominio de conocimiento o la concepción predominante durante la sesión. Si algún subdominio o concepción no es identificado en el análisis, no se muestra con círculo. No obstante, la predominancia no sólo se pone de relieve mediante el tamaño del círculo, sino también en función del número de conexiones que llegan o salen de un determinado subdominio. La figura 3 muestra el gráfico al completo para la sesión V2.

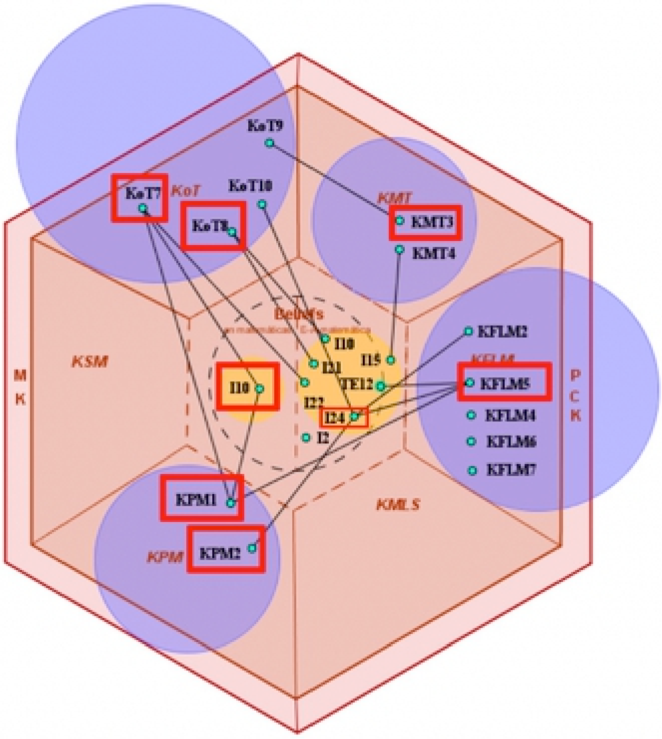

Figura 3. Relaciones internas MTSK-CEAM establecidas en la sesión V2

Discusión

Relaciones establecidas con la concepción de "matemática escolar"

En cuanto a la cuestión de cómo las concepciones ayudan a encontrar relaciones MTSK, se ha puesto de manifiesto que sirven para poder comprender de manera más completa el conocimiento especializado que fue puesto en acción, gracias a la identificación de las concepciones cuando permean el conocimiento. Esta permeabilidad nos ayuda como investigadores a poder comprender el caso en estudio con mayor profundidad, aportando otras características no incluidas en la mera descripción de los subdominios.

En la sesión descrita al completo (véase, Aguilar-González, 2016), y también a lo largo de las 8 sesiones que fueron videograbadas, se ha apreciado cómo la maestra ha mostrado en sus clases un interés por buscar una armonía entre conceptos, procedimientos y actitudes. Así, por ejemplo, ha pretendido trabajar de manera conceptual la suma de los ángulos interiores (triángulos y cuadriláteros), el proceso de comprobación y de las diferentes estrategias que usa para ello; el procedimiento llevado a cabo de clasificar los triángulos y cuadriláteros, con el propio procedimiento de clasificar, comparar y analizar las diferentes figuras. Se puede afirmar que la maestra está pretendiendo orientar a los alumnos hacia la adquisición de habilidades, enfatizando la comprensión tal y como definía Serrazina (1998) el estudio de las concepciones de los maestros.

El conocimiento de la maestra sobre las propiedades que se necesitan para establecer la definición de polígono se pone de relieve claramente a lo largo de todas las sesiones analizadas. La introducción del concepto de polígono es un ejemplo de cómo la concepción de la matemática escolar está relacionada con el conocimiento. Cuando la maestra pide a los alumnos que analicen las figuras, las comparen, establezcan criterios e identifiquen qué propiedad tienen, se pone de manifiesto su conocimiento sobre las propiedades necesarias para construir la definición de polígono, interesándole, también, el concepto desde un punto de vista comprensivo por parte del alumnado. Asimismo, se puede observar cómo su conocimiento sobre el concepto de ángulo y sus dificultades de aprendizaje favorece que los alumnos no asocien estos conceptos a su posición ni a la longitud de los lados, volviendo a manifestarse una concepción sobre la matemática escolar.

Se deduce en las intervenciones de la maestra que el conocimiento sobre la práctica matemática (KPM) es fundamental para que la maestra pueda saber cómo se razona y produce en matemáticas. Así, se pone de relieve la solidez del conocimiento acerca del tema que está trabajando. Es remarcable también cómo la maestra, desde su conocimiento, sabe gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos, o refinarlos, en caso de ser necesario. Queda de manifiesto en todas las sesiones esta constante interacción con el papel que tiene el alumno y cómo ella quiere que expliquen el porqué de su razonamiento matemático, como se ha mencionado anteriormente en el ejemplo [V2. 12-14] [I24. Papel del alumnado].

Junto a los conocimientos matemáticos que se relacionan con esta concepción de la matemática escolar, cabe mencionar un conocimiento asociado a las dificultades que presentan los alumnos cuando tratan de definir qué es un polígono. Se puede evidenciar que el conocimiento de la maestra de la práctica matemática lleva asociado una componente didáctica, que es la dificultad de entender cómo se razona en matemáticas (KFLM).

El estudio de las relaciones entre concepciones y conocimiento

Este trabajo pretende ser un avance respecto de los trabajos de investigación que se han planteado en el marco teórico. En dicha revisión se incluían trabajos de gran diversidad, (SMK, PCK y creencias/concepciones) pero cada uno de ellos intentaba estudiar cada una de las componentes de manera aislada. La aproximación que hacemos trata de dar una visión de conjunto en la comprensión del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Leatham (2006) ofrece una conceptualización alternativa sobre las concepciones de los profesores, que las considera como un sistema razonable en la medida en que adquieren su sentido con respecto a otras concepciones del individuo. Para este autor, las concepciones poseen una organización interna consistente, consecuencia del proceso de atribución de significado del individuo, conformando un sistema razonable. Con el método de análisis aquí presentado y las relaciones establecidas a partir de él, podemos afirmar que las concepciones no sólo se exploran, sino que se comprenden de manera más profunda, aportando evidencias sobre su naturaleza, y de cómo la profesora las mantiene en relación con su conocimiento especializado.

Por otro lado, para facilitar la comprensión de la información se han elaborado unos gráficos MTSK-CEAM. Estos incluyen las categorías de las concepciones en su relación con los subdominios de conocimiento. Para la realización de estos gráficos nos hemos basado en los Mapas cognitivos de las estructuras de acción propuestos por Monteiro, Carrillo y Aguaded (2008), pero nuestra construcción da un paso más ya que en lugar de exponer cómo las acciones relacionan diferentes aspectos cognitivos, el gráfico aquí introducido relaciona los diferentes conocimientos mostrados con las concepciones interpretadas que la maestra posee en la acción.

CONCLUSIONES

La metodología aquí propuesta se muestra pertinente y útil para identificar las relaciones de las concepciones CEAM y los subdominios de MTSK. Los gráficos producidos por esta aproximación metodológica ayudan al investigador a comprender de una manera más efectiva el conocimiento que ponen en juego los profesores de matemáticas en sus aulas. A nuestro juicio, esta metodología puede resultar de utilidad no sólo con los modelos teóricos utilizados aquí, sino que podría ser adaptada a otros marcos, de modo que se contraste su utilidad como herramienta metodológica a investigaciones sobre las interacciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado.

La comprensión del conocimiento del profesorado y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas no se debe ceñir al establecimiento de los subdominios del conocimiento, sino que se debe indagar de manera más precisa en sus características (Sosa, Flores-Medrano, y Carrillo, 2015). Para ello, indiscutiblemente, es preciso establecer instrumentos metodológicos que permitan una descripción más profunda de la tarea del profesor. Hasta el presente trabajo, la literatura solo recogía un documento que estudiaba las relaciones entre concepciones y conocimiento dentro del modelo MTSK (Flores y Carrillo, 2014) pero no existía, en conocimiento de los autores, ningún otro trabajo explorando estas relaciones bajo otros modelos de conocimiento. Este hecho subraya la importancia de la presente investigación, puesto que representa un paso más en la fundamentación como marco teórico del modelo MTSK y responde la observación realizada en Sosa et al. (2015): “Aún faltan estudios sobre cómo la investigación sobre el conocimiento del profesor puede afectar a la práctica, además de otras investigaciones que den cuenta de la relación que guardan estas y otras categorías y sus respectivos indicadores" (p. 186).

Antes de finalizar, debemos señalar las principales limitaciones de este trabajo. Al tratarse de una propuesta metodológica, debemos señalar que la principal limitación de ese tipo radica en los niveles de subjetividad involucrados en la observación por parte del investigador cuando se analizan las sesiones de aula. A este respecto proponemos para futuras investigaciones un método de doble observación que permita detectar diferencias entre investigadores y buscar consensos entre las opiniones discrepantes. Por otra parte, al partir de un estudio de caso, es evidente que también hay limitación en cuanto a la muestra utilizada, si bien esta alcanzaría de modo más directo al análisis de los resultados que la faceta metodológica.

Por último, apuntamos, además de la ya señalada de la doble observación, más líneas de trabajo futuro. En concreto, se pretende analizar con esta metodología otros casos tanto de otros maestros o maestras como de otras unidades didácticas y en otros niveles educativos, para corroborar la consistencia del método propuesto, analizando con detalle la categorización y descripción de los subdominios del MTSK y su relación con las concepciones del profesorado. Este análisis en profundidad de los subdominios del MTSK a través de distintos matices (por ejemplo, categorías e indicadores) contribuirá a la identificación, comprensión y análisis del conocimiento didáctico del contenido de otros profesores y del conocimiento disciplinar, los cuales podrán ser tomados en cuenta en la formación inicial y continua del profesor, así como para o por los formadores de profesores, en la línea sugerida por Sosa y Ribeiro (2014).

REFERENCIAS

Aguilar-González, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso* (Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España). Recuperada de http://hdl.handle.net/10272/12006.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* (Tesis doctoral no publicada). Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. L., Charambous, C., Thames, M. y Lewis, J. M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: Viewing a complex relationship from three perspectives. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1)* (pp. 121-125). Thessaloniki, Grecia: PME.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5)*,* 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham, Estados Unidos de América: Open University Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism. Perspective and Method.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. (2010). Building mathematical knowledge in teaching by means of theorised tools. En K.Ruthven y T. Rowland (eds.), *Mathematical knowledge in teaching.* New York, N. Y.: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Universidad de Michigan, Estados Unidos de América.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problema*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cooney, T. J., y Shealy, B. E. (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME* (Vol II, pp. 225-232). Lisboa, Portugal: PME.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teahing: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*(6)*,* 521-544.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-77.

Flores, E. y Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 81-88). Vancouver, Canadá: PME.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E. (2015). Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España).

Recuperada de http://hdl.handle.net/10272/11503. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, D.C.: National Research Council. National Academy Press.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications, Inc.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (Vol I, pp. 429-459). Netherlands: Sense Publishers.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maasepp, B. y Bobis, J. (2015). Prospective Primary Teachers' Beliefs about Mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(2), 89-107.

Marks, R. (1990). *Pedagogical content knowledge in elementary mathematics* (Tesis doctoral no publicada). Stanford University, Palo Alto, CA.

Merriam, S. B. (1988). *Case Study Research in Education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Monteiro, R. (2006). *La Enseñanza de las Ciencias Naturales desde el Análisis Cognitivo de la Acción* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Monteiro, R., Carrillo, J. y Aguaded, S. (2008). Emergent theorizations in Modelling the Teaching of Two Science Teachers. *Research in Science Education, 38* (3), 301-319.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* (Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España). Recuperada de http://goo.gl/OA4ydJ. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Estados Unidos de América: Information Age Publishing.

Pinto, J. y González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno y M. González (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la*

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 237-255). Huesca, España: SEIEM.

Polly, D., Martin, C. S., McGee, J. R., Wang, C., Lambert, L. G. y Pugalee, D. K. (2017). Designing Curriculum-Based Mathematics Professional Development for Kindergarten Teachers. *Early Childhood Education Journal*, *45*(5), 659-669. https://doi.org/10.1007/s10643-016-0810-1

Ponte, J. P. (1992). Concepçoes dos professores de matemática e processos de formaçao. *Educaçao Matemática*. Lisboa, Portugal: Instituto de Inovaçao Educacional.

Ren, L. y Smith, W. M. (2018). Teacher characteristics and contextual factors: links to early primary teachers' mathematical beliefs and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(4), 321-350. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9365-3

Ribeiro, C. M., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica ? Análisis e influencia en la práctica de una maestra. En M. J. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415- 423). Santander, España: SEIEM.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3)*,* 255-281.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Serrazina, L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Lisboa, Portugal: Associaçao de Professores de Matemática.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in Teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Skott, J. (2015). The promises, problems, and prospects of teacher related belief research. En H. Fives y M. G. Gill (Eds.), *International handbook of research on teachers' beliefs* (pp. 13-30). New York, NY: Routledge.

Sosa, L. y Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 1, 1-15.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 173-189.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research. Third edition* (pp. 443-166). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications Inc.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded Theory Methodology: An overview. En N. K. Denzin, y Y. Lincoln (Eds), *Handbook of qualitative research* (pp. 273- 285). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications Inc.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Varas, L., Lacourly, N., López, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas elementales. *Enseñanza de las ciencias*, *31*(1), 171-187.

Wilkins, J. L. M., y Brand, B. R. (2004). Change in preservice teachers' beliefs: An evaluation of a mathematics methods course. *School Science and Mathematics*, *104*(5), 226-232.

Zoitsakos, S., Zachariades, T. y Sakonidis, C. (2015). Secondary mathematics teachers' content knowledge for teaching in two contexts: Interpreting versus managing didactically students' understandings. En K. Krainer y N. Vondrová. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3296-3302). Praga, República Checa: CERME.

Álvaro Aguilar-González
Universidad de Oviedo
aguilaralvaro@uniovi.es

Cinta Muñoz-Catalán
Universidad de Sevilla
mcmunozcatalan@us.es

José Carrillo-Yáñez
Universidad de Huelva
carrillo@ddcc.uhu.es

Luis José Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo
luisj@uniovi.es

Recibido: 16/09/2018 . Aceptado: 03/11/2018
doi: 10.30827/pna.v13i1.7944

ISSN: 1887-3987