SUMA+
ARTÍCULOS
Noviembre 2016
83
pp. 55-64

La proporción áurea en la Lonja de Valencia a través de Hambidge*

IRENE FERRANDO PALOMARES
PAULA DONAT GIRONÉS

A través de este artículo pretendemos mostrar una propuesta didáctica dirigida a alumnos de Bachillerato en la cual se introducen unos métodos geométricos, los métodos de Hambidge, para hallar la proporción áurea en los planos de un edificio. La propuesta está diseñada para trabajar sobre los planos de la Lonja de Mercaderes de Valencia, obra maestra del gótico civil declarada Patrimonio Universal por la Unesco, e incluye una serie de actividades que se desarrollan mediante el software de geometría dinámica GeoGebra.

Palabras clave: GeoGebra, Razón áurea, Propuesta didáctica, Arquitectura.

The golden ratio in the Lonja of Valencia through Hambidge

Through this article we intend to show an educational proposal addressed to high school students. Our aim is to introduce Hambidge's methods in order to find the golden ratio in the plans of a historical building. The proposal includes a series of activities carried out by dynamic geometry software GeoGebra.

Keywords: GeoGebra, Golden ratio, Educational proposal, Architecture.

Jay Hambidge (1867-1924) fue un artista estadounidense de origen canadiense que, entre otras cosas, defendió la idea de que el estudio de la aritmética y de los diseños geométricos fundamentaron el uso de la proporción y la simetría en la arquitectura, escultura y cerámica griegas. Esta idea, a través de cuidadosos exámenes y medidas de obras de arte de la Antigua Grecia, le llevaron a formular la teoría de la «simetría dinámica» (Hambidge, 1920 y 1924). Tal como explica Javier Navarro de Zuvillaga (2008), Hambidge observó que en muchas de las obras de la Antigüedad Clásica que contenían rectángulos se daba lo que Platón había denominado «simetría dinámica» en su obra *Teeteto*, y en su estudio, plantea tres métodos para conseguirlo. La utilización de los métodos de descomposición de Hambidge para analizar el uso de las proporciones sobre los trazados de edificios históricos se ha realizado por parte de algunos autores tales como Fernando Chueca Goitia sobre la catedral de Valladolid (1999), o de la Fuente Martínez que ha trabajado sobre el Antiguo Colegio de San Nicolás (2008).

Una de las autoras de este artículo realizó un análisis pormenorizado de las matemáticas que aparecen tras los métodos geométricos de Hambidge en Donat (2014). En dicho trabajo

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2016 y aceptado en julio de 2016

los métodos de Hambidge se utilizaron para estudiar las proporciones de distintos rectángulos de la planta de un edificio monumental de la ciudad de Valencia y se observó que estos permitían obtener, con precisión, estimaciones de distintos elementos de la misma. Basándonos en esta idea, hemos diseñado una propuesta didáctica dirigida a alumnos de segundo curso de Bachillerato a través de la cual se pretende que estos comprendan conceptos matemáticos relacionados con la proporción áurea desarrollando actividades que les conducirán a utilizar los métodos de Hambidge sobre un edificio singular y bien conocidos por todos en la ciudad de Valencia, la Lonja de la Seda, también llamada Lonja de Mercaderes. Estos métodos que en un primer momento tendrán un significado matemático, alcanzarán una mayor importancia cuando se analicen desde un punto de vista práctico, es decir, cuando se utilicen para llevar a cabo un examen detallado de los planos de la Lonja de la Seda de Valencia. Así, el objetivo final de la implementación de esta serie de actividades en el aula será que los alumnos lleguen a obtener de forma aproximada el diámetro de una columna del Pabellón de Contratación así como el largo y ancho del torreón, a partir de la realización procedimental de los trazados impuestos por estos métodos de descomposición sobre el plano de planta de la Lonja de Valencia.

Consideramos que el hecho de llevar al aula una propuesta didáctica sobre el patrimonio arquitectónico de la ciudad puede ser motivador para los alumnos y particularmente interesante ya que permite desarrollar conceptos de diferentes disciplinas de forma transversal. Además la propuesta que presentamos se ajusta a uno de los fines en la etapa de Bachillerato establecidos por el currículo:

> Desarrollar metodologías didácticas activas e innovadoras que incluyan el uso de métodos y técnicas de investigación por parte del alumnado para aprender por sí mismo, el trabajo autónomo y en equipo, la aplicación de los aprendizajes en contextos reales, y el uso sistemático de las tecnologías de la información y la comunicación. (art. 32,decreto 87/2015 sobre el currículum de la ESO y el Bachillerato en la Comunitat Valenciana).

La resolución de problemas como contenido y método es un objetivo prioritario en esta propuesta

La resolución de problemas como contenido y método es un objetivo prioritario en esta propuesta. El proceso incide en la habilidad de leer atentamente y reflexionar para entender diferentes planteamientos, establecer un plan de trabajo que se revisa mientras dure la resolución, modificar el plan si no da resultado, comprobar la solución y resaltamos plantear aplicaciones del conocimiento y de las habilidades matemáticas a diferentes situaciones de la vida real. En este caso, intentaremos hacer ver a los estudiantes que los métodos de Hambidge pueden ser útiles para conseguir una aproximación fiable de algunas partes de la Lonja de Valencia. De este modo pondremos en juego contenidos de carácter extracurricular y contenido de carácter curricular de forma contextualizada. Además, algunas de las actividades de la propuesta se realizarán con la ayuda del software GeoGebra que, por ser un programa de geometría dinámica, permite a los alumnos desarrollar competencias relativas a la visualización y construcción geométrica.

A continuación se detallan los objetivos que se pretenden desarrollar en este artículo.

— Diseñar una propuesta didáctica teniendo en cuenta los siguientes aspectos.
  1. Que los alumnos sean capaces de utilizar conceptos matemáticos o procedimientos adquiridos durante su vida académica y los pongan en práctica en actividades dedicadas a otras áreas mejorando así la capacidad integradora de conocimientos y promoviendo una educación interdisciplinar.
  2. Fomentar el uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje de conceptos o procedimientos matemáticos.
  3. Potenciar la habilidad visual para facilitar la resolución de problemas geométricos aprovechando la visualización dinámica e interactiva que ofrece GeoGebra a partir de la cual se puede

comprender, profundizar y construir con exactitud rectángulos áureos y los métodos de Hambidge.
— Describir los resultados de la implementación de la propuesta en una aula de 2.º de Bachillerato con la intencionalidad de mostrar de forma práctica cómo llevarla a cabo en un aula al tiempo que comentamos cuáles fueron algunas de las dificultades que tuvieron los alumnos.

La intención, en cualquier caso, es que la propuesta mostrada en este trabajo pueda ser fácilmente utilizada

La estructura de este artículo sigue los objetivos marcados previamente, en la primera parte se describirá de forma pormenorizada el diseño de la propuesta didáctica mostrando en primer lugar alguno aspectos generales y detallando las actividades que la componen. En la segunda parte pasaremos a describir la implementación de la misma en un aula de segundo curso de Bachillerato y realizaremos un examen preliminar sobre esta experiencia. La intención, en cualquier caso, es que la propuesta mostrada en este trabajo pueda ser fácilmente utilizada e, incluso, adaptada a otros contextos arquitectónicos.

Aspectos generales de la propuesta didáctica

Antes de abordar la descripción del diseño de la propuesta didáctica veamos cuáles son los contenidos trabajados, tanto curriculares como extracurriculares, y la metodología de trabajo en el aula.

Tal y como se ha explicado más arriba, uno de los objetivos de la propuesta es introducir los métodos geométricos de Hambidge como herramienta de análisis y de búsqueda de proporciones notables, en particular de la proporción áurea. Este objetivo que, por si mismo, es extracurricular, nos da la oportunidad de introducir, diferentes contenidos curriculares de diversas etapas educativas contextualizados de forma que los estudiantes puedan integrarlos ya que, habitualmente, se trabajan de forma aislada.

A continuación desglosamos el contenido curricular que se desarrolla en la propuesta:

— Razón y proporción.
— Idea de semejanza (razón de semejanza y escalas).
— Uso de conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes.
— Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes.
— Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en un conjunto de números.
— Resolución de problemas a través de la utilización de ecuaciones y sistemas.
— Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
— Uso de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.
— Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.
— Aplicación de las razones trigonométricas hacia la resolución de problemas.

Respecto a la metodología utilizada durante la implementación de esta propuesta, los alumnos trabajaron de forma individual. Al tratarse de una propuesta contextualizada es importante que el profesor dé a los alumnos la oportunidad de relacionar cada una de las actividades entre sí, de forma que se consiga dar una visión completa al finalizarla. Además, en algunos casos se realizan puestas en común durante las cuales el docente adquiere el rol de moderador dando la oportunidad a los alumnos de participar aportando distintos puntos de vista y, si es necesario, repasando contenidos que no hayan quedado del todo claros. Por último el profesor tomará el rol de experto que, al finalizar cada sesión, realizará una síntesis de lo aprendido completando aquellos aspectos que no hayan sido establecidos y, por tanto, institucionalizando los conceptos que se pretenden introducir.

A continuación vamos a detallar el diseño de la propuesta, incidiendo en aquellas actividades que, a nuestro parecer, tienen más interés. La propuesta está diseñada para ser implementada a lo largo de siete sesiones, aunque durante la experiencia realizada en el IES Benlliure de Valencia se realizó, además, una sesión adicional para pasar una pequeña prueba de evaluación y una salida a la Lonja de la Seda de Valencia. Consta de tres partes diferenciadas. En primer lugar se introducirán conceptos básicos relativos a la proporción áurea, partiendo de la definición aritmética que aparece en el *Libro de los Elementos* de Euclides los alumnos realizarán una serie de actividades que les llevarán a deducir la construcción geométrica de la sección áurea de un segmento. A continuación se abordarán los métodos de Hambidge sobre rectángulos áureos y cuadrados y, por último, dedicaremos especial atención a las actividades que se desarrollan haciendo uso del plano de planta de la Lonja de Valencia en las que se aplican los métodos de Hambidge para hallar en él las dimensiones de la planta del torreón y el diámetro de las columnas del salón de contratación.

La primera sesión de trabajo consta de una serie de actividades, algunas de ellas siguen las ideas presentadas por Meavilla (2007: 264-267) y que se basan en la búsqueda de un método que nos permita hallar el procedimiento geométrico para la construcción de la sección áurea y la abordaremos aquí por su originalidad en el desarrollo.

El punto de partida de la actividad 1 es la definición 3 del «Libro Sexto» de *Los Elementos* de Euclides (ca. 300-265 a. C.):

> Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.

Actividad 1. Interpretación algebraica de la Definición de Euclides

Dado un segmento *AB* de longitud 1, ¿cómo dividirlo en dos partes *AC* y *CB* de forma que la razón entre el total y el lado mayor (*AB*/*AC*) coincida con la razón entre el mayor y el pequeño (*AC*/*CB*)?

a) Plantea la ecuación que de forma analítica describe la situación anterior

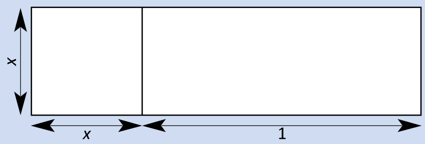
b) Manipula la ecuación anterior para que quede de la forma: $1=(\ldots)\cdot(\ldots)$

Un vez los alumnos llegan a la obtención de la ecuación $1=x\cdot(x+1)$ que permitiría obtener la división de un segmento en media y extrema razón les invitamos a obtener el valor de x, la longitud del lado menor. Dado que $x=(\sqrt{5}-1)/2$ les hacemos observar que, puesto que $\sqrt{5}$ es un número irracional, resulta del todo imposible representar de forma exacta con ayuda de una regla. Esta es una buena oportunidad para hacer reflexionar a los alumnos sobre los números irracionales y, al mismo tiempo, nos permite introducir la actividad 2 en la que vamos a deducir, a partir de la ecuación previamente obtenida, un método geométrico, para hallar de forma exacta el punto que divide un segmento en media y extrema razón.

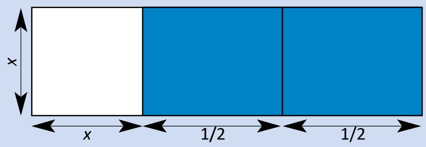
Actividad 2

Ahora vamos a ver cómo deducir, a partir de la ecuación anterior, los pasos para obtener, geométricamente, la sección en extrema y media razón de un segmento cualquiera.

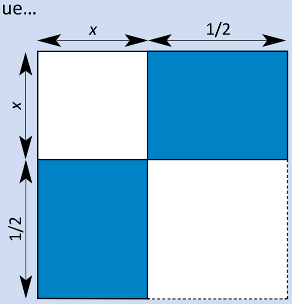
Observa la siguiente figura geométrica, se trata de un cuadrado de lado *x* adosado a un rectángulo de lados *x* y 1.



Esta figura se puede descomponer como se observa en las imágenes siguientes y, obviamente, el área no varía:



Es lo mismo que…



a) Reformula la expresión obtenida en la actividad observando que la figura original, al descomponerse, puede inscribirse en un cuadrado de lado $x+1/2$.

b) ¿A que te recuerda la expresión obtenida? Intenta, con la ayuda del programa GeoGebra, obtener, a partir de la expresión anterior, la sección de un segmento en media y extrema razón.

En la actividad anterior pretendemos que los alumnos deduzcan, partiendo de la expresión $1 = x \cdot (x+1)$ y basándose en la manipulación del rectángulo de lados x y $x+1$, una expresión a partir de la cual deducir la construcción geométrica de la sección de un segmento en media y extrema razón. En efecto, se trata de que, en llegar a la tercera representación deduzcan que $(x+1/2)^2-(1/2)^2=1$ y, por tanto: $(x+1/2)^2=(1/2)^2+1$

Efectivamente, esta expresión permite hallar geométricamente, el valor de x, ya que lo que deducimos es en un triángulo de catetos 1 y 1/2 y la hipotenusa mide, necesariamente $1/2+x$. Por tanto, si realizamos el siguiente trazado con la ayuda de GeoGebra obtenemos de forma exacta la posición del punto C sobre un segmento cualquiera AB de forma que se verifique la condición de Euclides (véase figura 1).

En este punto conviene comentar con los alumnos que la proporción hallada entre el lado menor y el lado mayor del segmento es conocida como proporción áurea y, para comprobar que han comprendido cómo se realiza la construcción geométrica conviene plantear que construyan, con ayuda de GeoGebra, un rectángulo con razón áurea.

La siguiente sesión de trabajo consistirá en la introducción de los trazados de uno de los métodos de Hambidge. Antes de abordar los trazados mostraremos a los alumnos cómo obtener rectángulos recíprocos en el interior de un rectángulo dado.

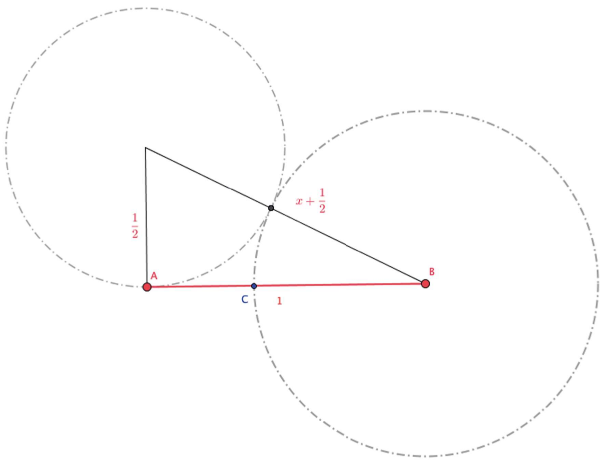


Figura 1. Trazado para obtener la sección de un segmento en media y extrema razón

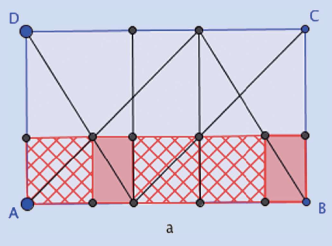
Les plantearemos una serie de preguntas para llevarlos a deducir que la proporción se conserva al pasar del rectángulo original a rectángulo recíproco interior y que, por tanto, el rectángulo original y su recíproco son semejantes. Para ver una descripción detallada de la construcción y de las propiedades de los rectángulos recíprocos remitimos al lector al texto de Iglesias (2006: 15-16).

Una vez los alumnos ya conocen los pasos para hallar un rectángulo recíproco interior se les plantea que observen que, en el caso del rectángulo áureo, para hallar el rectángulo recíproco es suficiente con construir dentro de rectángulo inicial un cuadrado y que, de esta forma, el rectángulo que queda es semejante al original. Esta propiedad permite a los alumnos obtener una construcción geométrica para identificar si un rectángulo tiene razón áurea y será utilizada en actividades posteriores.

A continuación pasamos a describir en detalle la actividad para introducir la segunda forma de descomposición de un rectángulo áureo de Hambidge.

Actividad 3. Segunda forma de descomposición de un rectángulo áureo

Dibuja un rectángulo áureo de forma que la longitud del lado mayor sea $x_1 = a$. Utilizando GeoGebra haz los siguientes trazos: Primero dibuja los dos rectángulos recíprocos interiores (recuerda que la forma más sencilla de hallarlos es construyendo sendos cuadrados interiores). A continuación traza las diagonales principales de los cuadrados que surgen con la obtención de los recíprocos y las diagonales secundarias de los recíprocos. Dibuja una recta paralela a la base del rectángulo por el punto de corte de la diagonal del cuadrado y la diagonal del recíproco izquierdo. Completa la construcción con el fin de encontrar en la parte inferior tres cuadrados y dos rectángulos tal y como aparece en la figura siguiente.



a) Denota por y_1 la longitud del lado menor del rectángulo inicial. Dado que es un rectángulo áureo, ¿cuál será el valor de y_1 en función de $x_1 = a$?

b) Denota por x_2 la longitud del lado mayor de los rectángulos resultantes de la aplicación del método y por y_2 la longitud su lado menor. Halla el valor de ambas dimensiones en función de a y φ. ¿Qué puedes decir de estos dos rectángulos?

Obviamente, dado que el rectángulo inicial es áureo se verifica que $y_1 = a/\varphi$ y, para hallar las dimensiones de los rectángulos resultantes tras el primer paso del método es necesario resolver el siguiente sistema (para plantearlo conviene recordar que, dado que los rectángulos recíprocos también tienen razón áurea, el lado menor de éstos medirá a/φ^2):

$$\frac{a}{\varphi^2} = y_2 + x_2 \quad [1]$$
$$a = 3x_2 + 2y_2 \quad [2]$$

Despejando y_2 en la ecuación [1] obtenemos:

$$\frac{a}{\varphi^2} - x_2 = y_2$$

Sustituimos en la ecuación [2]:

$$a = 3x_2 + \frac{2a}{\varphi^2} - 2x_2 = \frac{2a}{\varphi^2} + x_2$$

Y, por tanto

$$x_2 = a - \frac{2a}{\varphi^2} = \frac{a(\varphi^2 - 2)}{\varphi^2}$$

Pero, dado que $\varphi^2 = \varphi + 1$ y que $1/\varphi = \varphi - 1$, deducimos que $x_2 = a/\varphi^3$ y, por tanto

$$y_2 = \frac{a}{\varphi^2} - \frac{a}{\varphi^3} = \frac{(a\varphi - a)}{\varphi^3} = \frac{a(\varphi - 1)}{\varphi^3} = \frac{a}{\varphi^4}$$

Es fácil deducir de las expresiones de x_2 y de y_2 que el rectángulo obtenido en la primera iteración de la segunda forma de Hambidge tiene razón igual a φ, se trata por tanto de un rectángulo áureo.

A través de esta actividad se intuye que el procedimiento realizado para obtener la primera iteración de la segunda forma de Hambidge puede reiterarse con los rectángulos que van apareciendo en cada caso. La siguiente actividad pretende que los alumnos observen la recurrencia que aparece tras sucesivas iteraciones de la segunda forma de Hambidge.

Actividad 4. Sucesiones que resultan de la segunda forma de descomposición

a) Fíjate bien en los valores que has obtenido de x_1 y x_2, ¿qué relación encuentras entre ellos?
b) Si realizamos la descomposición en uno de los rectángulos de lados x_2 e y_2, obtendremos dos nuevos rectángulos de lados x_3 e y_3. ¿Cuál crees que será el valor de x_3 e y_3?
c) ¿Puedes intuir qué ocurrirá en la *n*-ésima iteración? Halla el valor de x_n e y_n.

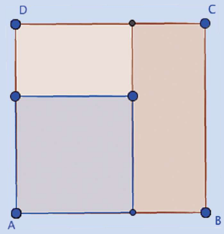
Esta actividad pretende que los alumnos trabajen interpretando una construcción geométrica recursiva con el objetivo de que hallen la expresión general de las sucesiones de los lados mayor y menor de los rectángulos que van apareciendo en cada iteración.

Una vez asimilado desde el punto de vista geométrico y analítico el método que subyace tras la segunda forma de descomposición de Hambidge, pasaremos a introducir otro de los métodos que permite realizar descomposiciones dentro del cuadrado y que también resultará útil para trabajar sobre los planos de la Lonja de la Seda de Valencia.

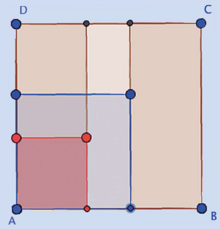
En primer lugar, igual que en la actividad anterior, daremos los pasos para que los alumnos realicen la construcción geométrica sobre el programa GeoGebra. Una vez realizada la construcción deberán responder a una cuestión relativa a la figura obtenida.

Actividad 5. Descomponiendo cuadrados

Dibuja un cuadrado de lado q_0 con GeoGebra que llamaremos Q_0. A continuación dibuja un rectángulo áureo en el interior de Q con altura q_0. Llamaremos Q_1 al cuadrado interior a dicho rectángulo y q_1 al lado de Q_1.



a) Determina cuál será el valor de q_1 a partir de las propiedades que se derivan de la construcción.
b) Repite los pasos que dirigen el método en el interior de Q_1. Encontrarás de nuevo un cuadrado que llamaremos Q_2 de lado q_2. Averigua el valor de q_2.



c) ¿Qué relación encuentras entre q_1 y q_2? Si has sido capaz de ver esta relación, también serás capaz de deducir una expresión general para q_n, el lado del cuadrado que hallaremos tras la realización del método *n* veces.

En esta actividad el objetivo es que los alumnos continúen desarrollando razonamientos recursivos para interpretar analíticamente una sucesión de construcciones geométricas. Para hallar el valor de q_1 es suficiente con observar que las dimensiones del rectángulo áureo que se construye en la primera iteración del método son q_0 y q_1, por tanto se verifica que $\varphi = q_0/q_1$, así $q_1 = q_0/\varphi$.

Si nos centramos en Q_1 cuyo lado mide q_1 y repetimos el mismo proceso que con Q_0 obtendremos, emulando el razonamiento anterior, que $\varphi = q_1/q_2$ y, por tanto, $q_2 = q_1/\varphi = q_0/\varphi^2$. Reiterando obtenemos, por recurrencia finita, que $q_n = q_0/\varphi^n$.

A continuación vamos a describir las actividades centradas en el uso de los dos métodos de Hambidge en el análisis de la Lonja de la Seda de Valencia. Las construcciones geométricas se realizarán sobre el plano de la Lonja a través del programa GeoGebra. En primer lugar los alumnos observarán que el Salón Columnario tiene planta rectangular con razón áurea y, a continuación, aplicarán los métodos de Hambidge en su interior para hallar el largo y ancho del torreón y el diámetro de las columnas. A continuación se describen en detalle las actividades propuestas.

Actividad 6. Análisis del Salón Columnario

La puerta principal de la Lonja de la Seda de Valencia se abre hacia un precioso salón en cuyo interior se pueden observar tres naves separadas por dos filas de magníficas columnas de forma helicoidal. Las matemáticas están, como puedes ver, muy presentes en esta estructura. Observa el plano de la Lonja con ojos matemáticos y comprueba, con la ayuda del programa GeoGebra, que la planta del salón columnario es áurea.

a) Halla los rectángulos recíprocos y expresa sus dimensiones en función de *a*, longitud del lado mayor, y de φ.

b) Representa los rectángulos recíprocos de los recíprocos y halla sus dimensiones.

Para abordar esta actividad lo alumnos dispondrán de un archivo de imagen con el plano de la Lonja de la Seda, la idea que es que, a través de la herramienta «imagen» inserten el plano en la interfaz de GeoGebra para poder realizar construcciones geométricas sobre el mismo. Hay varias opciones para responder a la actividad 6, la más inexacta es usar las herramientas de medición de GeoGebra para hallar las dimensiones del rectángulo de la planta del Salón Columnario y comprobar si este tiene razón aproximadamente igual a φ. Otra opción consiste en dibujar un rectángulo áureo con GeoGebra y, a través de traslaciones y homotecias superponerlo a la planta del salón columnario, tal y como mostramos en la figura 2.

Otra opción es dibujar mediante GeoGebra el rectángulo de la planta del Salón Columnario y comprobar, a través de la construcción del rectángulo recíproco que el rectángulo inicial es áureo. Para ello bastará comprobar que al realizar la descomposición obtenemos un rectángulo (el recíproco del inicial) y un cuadrado, tal y como se observa en la figura 3.

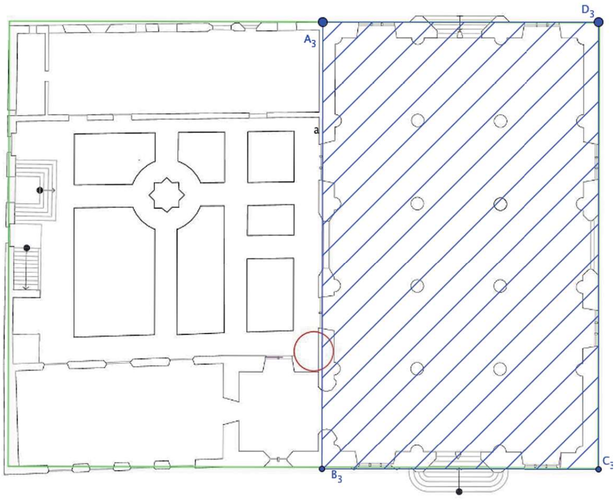


Figura 2. Planta de la Lonja de la Seda de Valencia en la que se observa que el salón Columnario es un rectángulo áureo

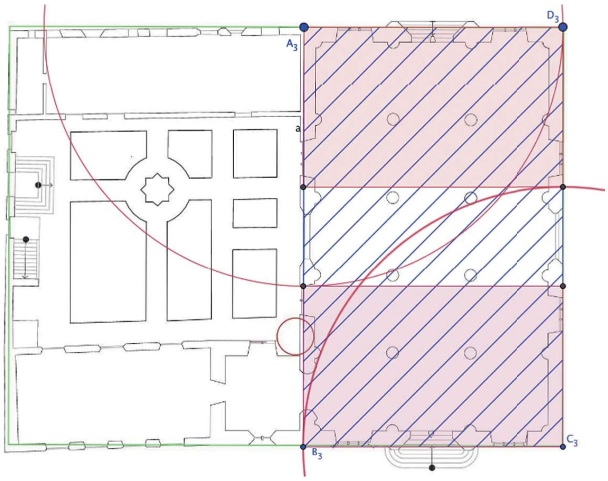


Figura 3. obtención de los dos rectángulos recíprocos y comprobación de que el complementario es un cuadrado

Dado que se comprueba que la planta del Salón Columnario es un rectángulo áureo, deducimos que si llamamos a al lado mayor de este, el otro lado medirá a/φ. Puesto que los rectángulos recíprocos de uno áureo son asimismo áureos, podemos realizar de nuevo un razonamiento recursivo para hallar las dimensiones de los rectángulos recíprocos que aparecen en cada iteración: los primeros rectángulos que aparecen tienen dimensiones a/φ y a/φ^2 el primero y a/φ^3 y a/φ^4 el siguiente. En la figura 4 se muestra la construcción de los segundos rectángulos recíprocos sobre el plano de la planta del Salón Columnario.

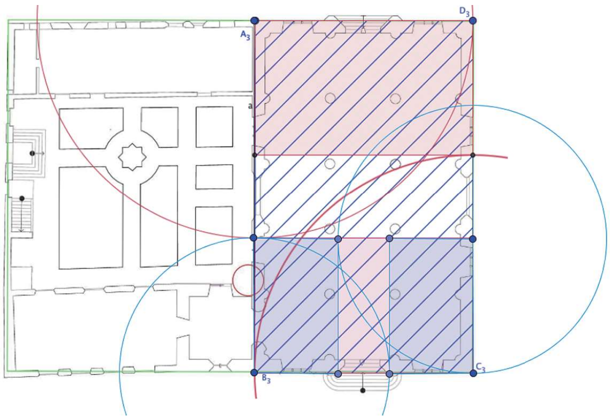


Figura 4. Representación de dos iteraciones de rectángulos recíprocos sobre la planta del Salón Columnario

Una vez realizada esta actividad pasemos a estimar el largo y ancho del torreón, que como ven coincidirá porque tiene forma cuadrangular. Para ello planteamos la siguiente actividad.

> *Actividad 7. Deduciendo las dimensiones de la planta del torreón*
>
> El cuadrado verde que puedes ver en el plano de la planta de la Lonja (figura 5) corresponde a la planta del torreón. A continuación vamos a usar los cálculos obtenidos a partir de la segunda forma de descomposición para hallar la longitud del lado del torreón. Fíjate en los dos rectángulos recíprocos que has obtenido en la segunda iteración de la construcción en la actividad anterior. El de la izquierda contiene a la planta del torreón. Traslada el rectángulo correspondiente a la segunda forma de descomposición de Hambidge sobre ese rectángulo recíproco.
>
> *a*) Halla las dimensiones de los cuadrados y rectángulos resultantes de aplicar un paso del método de Hambidge en el rectángulo en función de a (el lado mayor del Salón Columnario) y de φ.
>
> *b*) ¿Puedes hallar las dimensiones de la planta del torreón?

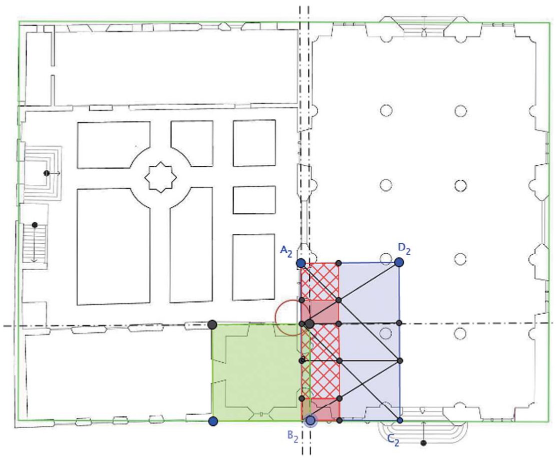


Figura 5

Para realizar esta actividad los alumnos deben partir del rectángulo que tiene en su interior la construcción del método de Hambidge y colocarlo en la esquina inferior izquierda para darse cuenta que dicho rectángulo que han incorporado tiene las mismas dimensiones que el recíproco izquierdo del recíproco inferior. Como conocen las medidas de este rectángulo recíproco resulta fácil hallar el ancho o largo del torreón que viene dado por 2 veces la longitud del lado del cuadrado y la longitud del lado menor del rectángulo derivado de la aplicación del método de Hambidge.

Por tanto, tendremos que:

$$x_1 = a/\varphi^2$$
$$y_1 = a/\varphi^2$$
$$x_2 = a/\varphi^5$$
$$y_2 = a/\varphi^6$$

A partir de esto podemos deducir el lado de la base del torreón ya que este coincide con la suma de los lados de dos cuadrados de lado x_2 y el lado corto del rectángulo (y_2), obteniendo que es igual a

$$2\cdot\frac{a}{\varphi^5}+\frac{a}{\varphi^6}=\frac{a(2\varphi+1)}{\varphi^6}=\frac{a\varphi^3}{\varphi^6}=\frac{a}{\varphi^3}.$$

La última de las actividades se centra en usar el método de descomposición del cuadrado para hallar el diámetro de una de las columnas del Salón Columnario. En este caso no es necesario realizar desde el primer punto la segunda forma de descomposición de Hambidge ya que el programa GeoGebra permite desplazar la descomposición obtenida en la actividad anterior. Esta actividad servirá para comprobar hasta qué punto los métodos de Hambidge resultan fiables para realizar estimaciones de las medidas de partes de la planta de la lonja ya que, a partir de la medida del lado largo del Salón Columnario los alumnos deducirán una aproximación del diámetro de una columna con un error de 26 cm.

Actividad 8

Traslada el rectángulo que hemos colocado en la esquina inferior izquierda hasta colocarlo justo encima de la planta del torreón. Ahora aplica un giro de 180° al mismo rectángulo de forma que los polígonos derivados de la aplicación del segundo método de Hambidge estén enfrente de como estaban posicionados para hallar el largo/ancho del torreón (figura 6).

a) Fíjate en el cuadrado central resultante de la aplicación de la segunda descomposición. Realiza en este cuadrado la construcción relativa a la descomposición del cuadrado siguiendo los pasos de la actividad 5. Encuentra la dimensión q_2 que corresponde al diámetro de las columnas.

b) Sabiendo que el largo del salón columnario es de 35,6 m, deduce a partir del cálculo de q_2, el diámetro de las columnas. El diámetro real de una columna es 0,97 m, halla el error respecto a la medida obtenida a partir del método de Hambidge.

Por construcción no cambian las dimensiones de este rectángulo, ya que solo le hemos aplicado una translación y un giro de 180° al rectángulo que ocupaba la posición inferior izquierda en la actividad anterior. Por tanto, siguiendo el razonamiento realizado en la actividad 5 se deduce que la longitud del lado del cuadrado central se corresponde con $q_0 = x_2 = a/\varphi^5$ y, por lo tanto, $q_0 = a/\varphi^7$.

Así, si $a = 35{,}6$ cm, sustituyendo en la fórmula anterior deducimos que el valor estimado del diámetro de la columna a partir del método de Hambidge es 1,23 m. Por tanto hemos cometido un error de 26 cm.

Resumen de reflexiones tras la puesta en marcha en un aula y conclusiones

Esta experiencia se desarrolló durante el curso 2014-2015 con un grupo natural de 2.º de Bachillerato de Ciencias (17-18 años). La mayoría de estos alumnos no habían trabajado con GeoGebra, de hecho solo unos pocos lo conocían debido a que habían cursado dibujo técnico en 1.º de Bachillerato. Estos alumnos tampoco habían trabajado con actividades contextualizadas como las que presentamos que están estrechamente ligadas a la arquitectura.

Las dos primeras sesiones se realizaron en el aula de grupo ya que fueron introductorias de la definición de número áureo, sección áurea y sus propiedades a través de actividades de carácter más o menos elemental pero indispensables para el desarrollo de las siguientes, sobretodo para aquellos alumnos que no tenían presente el concepto. Las cinco siguientes se llevaron a cabo en el aula de informática, donde los alumnos por parejas, resolvieron las actividades fomentando el trabajo cooperativo. En la octava sesión se pasó una prueba para comprobar hasta qué punto los alumnos habían entendido los contenidos trabajados durante las sesiones anteriores. La última sesión consistió en realizar una salida a la Lonja para que los alumnos comprobaran la fiabilidad de la aproximación del diámetro de las columnas hallado.

Las dificultades que se observaron vienen asignadas mayoritariamente al registro figurativo, es decir, las imágenes conceptuales que los alumnos tienen de rectángulo áureo y del concepto de semejanza de rectángulos son pobres. Esto no significa que los alumnos no conozcan la definición de rectángulo áureo o de semejanza de rectángulos (dicen «un rectángulo áureo es aquel que cumple que la razón entre sus lados es el número áureo» o «la razón entre los lados de este rectángulo es la misma que en el otro y por eso son semejantes»), pero nos muestra que, pese a conocer las definiciones y las propiedades de determinados conceptos geométricos, los alumnos carecen de un amplio registro de imágenes mentales ricas asociadas a dichos conceptos. Esto se observa particularmente en las actividades de carácter geométrico en las que han de trabajar sobre el plano de la Lonja para identificar posibles rectángulos áureos y mover (mediante traslaciones u homotecias) sus construcciones con el objetivo de hallar las longitudes propuestas. Otra dificultad identificada corresponde a la falta de relación que los alumnos encuentran entre las expresiones algebraicas y sus correspondientes representaciones geométricas. Esto se observa particularmente en la actividad 1, los alumnos tienen dificultades para entender que, tras el procedimiento que están llevando a cabo para lograr un método geométrico que les permita construir la sección áurea de una manera precisa, se encuentra el teorema de Pitágoras.

A pesar de todo ello, los alumnos respondieron bastante bien ante los ejercicios planteados, tenían inquietudes sobre todo al tratar con la Lonja de Valencia por ser un edificio arquitectónico próximo y familiar, y por ello es lógico pensar que aproximar a los alumnos a la realidad a través de las matemáticas o de la relación de las matemáticas con otras disciplinas puede ser un buen comienzo para lograr un aprendizaje eficiente. De esa manera, es factible superar las dificultades que tienen los alumnos al enfrentarse a tareas donde se mezclan estilos de razonamiento analíticos y geométricos puesto que todos ellos resultan ser idóneos para tener una idea global de los conocimientos que se instruyen.

La propuesta presentada en este trabajo ayuda a desarrollar una actividad con contenidos interdisciplinares en la que las matemáticas son utilizadas en un contexto arquitectónico. Así, los alumnos reflexionarán a través del análisis de la proporción áurea con la ayuda de un plano y con eso se motivarán para desarrollar sus conocimientos alrededor de las matemáticas. Se darán cuenta de que en este estudio las matemáticas tienen diferentes usos, como en este caso que es de gran utilidad para examinar medidas de un edificio arquitectónico valenciano sin hacer uso de métodos experimentales. Por último, queremos incidir en la posibilidad de reproducir una propuesta similar a la descrita en este trabajo en otros edificios históricos,. Invitamos a los lectores a buscar las matemáticas al tiempo que disfrutan del patrimonio cultural de su entorno más próximo.

Referencias bibliográficas

Donat, P. (2014), *Matemàtiques i arquitectura: Ulls matemàtics miren la ciutat de València,* Trabajo Fin de Grado de Matemática, Universitat de València.

Fuente, C. de la (2008), «La divina proporción en el instituto Cardenal Lopez de Mendoza. Un análisis de las proporciones del antiguo colegio San Nicolás», *Sigma*, n.º 33, 131-164.

Goitia, F. C. (1999), *La catedral de Valladolid*, vol. 4. Reverté, Barcelona.

Hambidge, J. (1920), *Dynamic Symmetry. The Greek Vase*, Yak University Press, New Haven.

— (1924). *The Partenon and other greek temples.Their dynamic symmetry*, Yak University Press, New Haven.

Iglesias, M. E. R. (2006), «Cuando la geometría se hace arte», en *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, 9-30.

Meavilla, V. (2007), *Las matematicas del arte: Inspiración ma(r)temática*, Almuzara, Córdoba.

Zuvillaga, J. N. de (2010), «Forma y Representación», *Un Análisis Geométrico. InArchitecture, Mathematics and Perspective,* Birkhäuser Basel*,* 159-161.

Paula Donat Gironés
Universitat de València
<paudogi@alumni.uv.es>

Irene Ferrando Palomares
Universitat de València
<irene.ferrando@uv.es>

* Este trabajo ha sido realizado con ayuda de la financiación aportada por el MINECO-FEDER a través del proyecto EDU2015-69731-R así como por la Generalitat Valenciana a través del proyecto GV/2016/129.