suma+ 83
Secciones
Noviembre 2016
pp. 83-88

Tareas ricas para practicar divisiones

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

En esta ocasión analizaremos una serie de actividades que podemos proponer para trabajar algoritmos de la división, cualquiera sea el algoritmo concreto que se haya decidido trabajar en clase.

Un algoritmo, ¿se presenta o se construye?

No cabe duda de que las propuestas para el aprendizaje de las matemáticas han ido evolucionando de la introducción de algoritmos a partir de un listado de órdenes a seguir y de su aplicación sistemática, a la construcción del algoritmo en un ambiente de resolución de problemas.

Si, por ejemplo, el objetivo era que los alumnos resolviesen problemas que implicasen sumas con llevadas solíamos empezar explicando paso a paso el algoritmo tradicional de la suma para, a continuación, proponer series de sumas para que ejercitasen el procedimiento explicado.

Actualmente podemos empezar proponiendo un problema y analizando y discutiendo las distintas estrategias que utilizan los alumnos para resolver la situación. Si proponemos el problema

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2016 y aceptado en septiembre de 2016

«Has pagado 45 € en la charcutería y 27 € en la verdulería, ¿cuánto has gastado en total?» y ponemos al alcance de los alumnos billetes y monedas podrán encontrar la respuesta manipulando este material. La tarea de la maestra a partir de este trabajo realizado por sus alumnos es dar una representación simbólica de las estrategias utilizadas que serán el germen del algoritmo de la suma. Ya profundizamos en esta idea en la tercera entrega de esta sección: «Calcular usando el contexto del dinero» (*Suma* 72, 91-98).

Aquí, se presenta un tema de debate importante: ¿cuánto tiempo mantenemos el uso de este tipo de algoritmo en el aula?, ¿retrasamos la presentación del algoritmo estándar o directamente no lo presentamos?, ¿pueden convivir en el aula alumnos usando diferentes tipos de algoritmos?

Nuestra opinión es que el algoritmo tradicional debería ser el punto de llegada del proceso de mecanización de una operación para la mayoría de los alumnos, pero en ningún caso el de partida. Consideramos que el trabajo sosegado con los algoritmos construidos en el aula da la oportunidad de realizar un trabajo numérico más global (descomposiciones de números en unidades, decenas y centenas, cálculo mental, estimación de resultados) y de transmitir una imagen de las matemáticas más apropiada que la que se deriva de aprender mecánicas y repetirlas.

El exagerado peso de los algoritmos... en el aula se agravaba en ciclo medio con los algoritmos de las operaciones multiplicativas, especialmente en las divisiones (y sobretodo, en las de dos cifras), ya que la tendencia a «dar la receta» y repetir páginas y páginas de divisiones era antes generalizada

Todo este trabajo con algoritmos no puede hacernos perder de vista que el objetivo es saber sumar, restar, multiplicar, dividir y que eso no se restringe a conocer y ejecutar un procedimiento. Por ejemplo, si planteamos a nuestros alumnos la resta 2 000 001 – 1 000 002 y una parte importante de la clase intenta solucionarlo aplicando el algoritmo, debemos preguntarnos si realmente estamos enfocando bien nuestro trabajo. ¿No deberíamos esperar que se planteen que una estrategia más eficiente consiste en calcular primero la diferencia entre 2 000 001 y 1 000 001 y después restar 1?

El exagerado peso de los algoritmos en el trabajo en el aula se agravaba en ciclo medio con los algoritmos de las operaciones multiplicativas, especialmente en las divisiones (y sobretodo, en las de dos cifras) ya que la tendencia a «dar la receta» y repetir páginas y páginas de divisiones era antes generalizada. A continuación, comentaremos la construcción de un algoritmo para la división que puede enriquecer el trabajo matemático en el aula dando la palabra a los alumnos.

Construcción del algoritmo de la división en columnas...

Esta construcción tiene su base en descomposiciones que ya habíamos mencionado en la quinta entrega de esta sección: «Introducción a las estrategias multiplicativas» (*Suma* 74):

Para dividir 57 : 3 la descomposición decimal 57 = 50 + 7 no ayuda porque las divisiones resultantes (50 : 3 y 7 : 3) no son más fáciles que la división inicial. Es mucho más conveniente descomponer 57 = 30 + 27, dividir 30 : 3 = 10 y 27 : 3 = 9 y concluir que 57 : 3 = 10 + 9 = 19.

Para 160 : 7 descomponemos 160 = 70 + 70 + 20. Y como 70 : 7 = 10 y 20 : 7= 2r6 [1], se puede concluir que 160 : 7 = 10 + 10 + 2r6 = 22r6.

Estas estrategias de cálculo se pueden organizar en forma de algoritmo en columnas dando lugar a un procedimiento mucho más transparente que el estándar. Veámoslo en un caso particular: el reparto de 375 naranjas en 8 cestos.

- Podemos comenzar colocando, por ejemplo, 30 naranjas en cada cesto, con lo cual hemos colocado 240 naranjas y todavía quedan por colocar 135.
- Para repartir estas 135 naranjas podemos, por ejemplo, colocar 10 en cada cesto, con lo cual hemos colocado otras 80 naranjas y todavía quedan por colocar 55.
- Para repartir estas 55 naranjas podemos colocar 6 en cada cesto, con lo cual hemos

colocado 48 naranjas y quedan por colocar 7 que ya no podemos repartir.

Este discurso puede ir registrándose de la siguiente manera:

375	8
−240	30
135	
−80	10
55	
−48	6
7	

De donde concluimos que 375 : 8 = 46r7.

Como características principales de este procedimiento podemos destacar que:

— Trabaja con números, no con cifras, lo cual nos facilita la estimación del resultado (desde el primer paso del reparto ya sabemos que el resultado estará entre 30 y 60).

— Evita tener que calcular el «mayor múltiplo del divisor sin pasarse del número que se busca dividir», alcanza con calcular un múltiplo del divisor que no sea mayor que el número de objetos que se busca repartir y poco a poco se puede ir llegando al resultado final (en el ejemplo, podrían haberse colocado 40 naranjas en cada cesto en el primer paso pero también se puede hacer como allí se hizo, colocando primero 30 y luego 10).

— Potencia la flexibilidad de estrategias y permite cierto tratamiento de la diversidad, en el sentido que permite que los alumnos más inseguros lleguen al resultado efectuando más pasos que los que utilizaría un compañero suyo.

— El procedimiento no requiere ningún ajuste para el caso en que el divisor tenga dos cifras. Lo podemos comprobar dividiendo en columnas 568 entre 17.

568	17
−340	20
228	
−170	10
58	
−34	2
24	
−17	1
7	

568 : 17 = 33r7

Vale la pena observar que si se optimizan los repartos la apariencia del algoritmo en columnas es indistinguible del algoritmo tradicional.

568	17
−510	30
58	
−51	3
7	

568 : 17 = 33r7

Actividades ricas para practicar las divisiones

Más allá de que creemos que el algoritmo de la división en columnas es el más apropiado para presentar este procedimiento y sea cual sea el algoritmo con el que finalmente trabajarán nuestros alumnos, sabemos que debemos dedicar tiempo de aula a su práctica. Pero tal como decíamos en la introducción esta práctica puede plantearse mediante tareas ricas.

A continuación, presentamos cuatro ejemplos de actividades relacionadas con la división en las que buscamos ir un poco más allá de la práctica de una mecánica. Se trata de actividades en las que pedimos que los alumnos realicen unas cuantas divisiones, pero que hagan estos cálculos con un objetivo de mayor valor matemático: detectar regularidades y plantear conjeturas.

Dividir entre 9

Con todos los números del 1 al 9 y usando una vez cada dígito forma tres números, súmalos y divide el resultado entre 9. Vuelve a hacerlo con otros números. ¿Qué tienen todas estas divisiones en común?

Ejemplos:

$45 + 612 + 9\,378 = 10\,035$

$10\,035 : 9 = 1\,115r0$

$1 + 2 + 345\,678 = 3\,456\,792$

$3\,456\,792 : 9 = 38\,488r0$

Respuesta:

Todas las divisiones realizadas tienen en común que el residuo siempre da cero.

Comentarios:

— En el enunciado pedimos que hagan otras divisiones, no podemos pedir que hagan todas las divisiones posibles por la gran cantidad de posibilidades pero sí se puede pedir a todos los alumnos que analicen casos diferentes para conseguir mayores evidencias que sostengan la conjetura. Si bien es cierto que no podrán asegurar a ciencia cierta que no hay algún caso en que el residuo sea diferente de cero[2].

— Aunque en esta actividad la atención está puesta sobre el residuo, se puede plantear como ampliación que encuentren el menor y el mayor cociente posible: $(147 + 258 + 369) : 9 = 86$ y $(9\,876\,543 + 2 + 1) : 9 = 1\,097\,394$.

— A aquellos alumnos que tengan interés por continuar investigando en esta línea se les puede plantear: ¿qué pasaría si en lugar de formar tres números con estos 9 dígitos se formaran cuatro o cinco números?, ¿qué pasaría si en lugar de formar tres números con estos 8 dígitos se formaran con los dígitos del 1 al 8?, ¿qué pasaría si en lugar de hacer las divisiones entre 9 se hicieran entre 3 o entre 8?

— Esta actividad proviene de una de nuestras principales fuentes de tareas ricas: el proyecto NRICH de la Universidad de Cambridge[3].

Dividir entre 3

Elige un número de tres cifras y ponlo en la celda azul, multiplícalo por 4 y ponlo en la celda roja. Haz las dos divisiones. Repite el procedimiento empezando por otros números. ¿Qué observas?

Ejemplos:

— Eligiendo 356 como número de partida, tenemos: $356 : 3 = 118r2$ y $1\,424 : 3 = 474r2$.

— Eligiendo 100 como número de partida tenemos: $100 : 3 = 33r1$ y $400 : 3 = 133r1$.

Respuesta:

En los casos analizados, independientemente del número elegido, el residuo de las dos divisiones siempre coincide.

Justificación:

La afirmación es cierta siempre, pues la diferencia entre los valores de los dos dividendos es un múltiplo de 3 y, por tanto, la distancia de cada dividendo al múltiplo de 3 más cercano es la misma.

Comentarios:

— En esta tarea la regularidad también se presenta en los residuos, aunque en principio podamos pensar que era más factible que se presentara en los cocientes: el segundo cociente no siempre es el cuádruple de primer cociente.

— La tarea se puede ampliar pidiendo que en la celda roja se coloque el valor de la celda azul multiplicada por 7 (o por 10, o por 13…) y los residuos siempre serán los mismos. Pero, ¿qué pasaría si en la celda roja se coloca el valor de la celda azul multiplicada por 5?

Dividir entre 4

Calcula:

$$(111-23):4$$
$$(1\,111-23):4$$
$$(11\,111-23):4$$
$$(111\,111-23):4$$
$$(1\,111\,111-23):4$$
$$(11\,111\,111-23):4$$

¿Qué observas?

Respuesta:

Todas las divisiones tienen residuo 0 y los cocientes son 22, 272, 2 772, 27 772, etc.

Comentarios:

— Aquí la regularidad no se presenta únicamente en el residuo sino también en el cociente. Que los residuos siempre sean 0 es un hecho sin mayor relevancia porque todas las restas tienen las mismas cifras en decenas y unidades y el residuo de las divisiones entre 4 solo depende de estos dos valores. Que los alumnos conozcan esta propiedad también se puede presentar como una tarea, tal como se explica en el post «El residuo sí importa 2.ª parte» del blog del *PuntMat*[4].
— Se puede plantear una actividad análoga a partir de otras divisiones. Por ejemplo: $(333+19):4$, $(3\,333+19):4$, $(33\,333+19):4$, $(333\,333+19):4$…

Dividir entre 12

Elige un número de tres cifras, divídelo entre 3 y el resultado divídelo entre 4. Divide el número inicial entre 12. Vuelve a hacer los dos pasos anteriores partiendo de otros números de tres cifras. ¿Qué observas?

Ejemplos:

— Eligiendo 110 tenemos que: 110 : 3 = 36r2, 36 : 4 = 9 y 110 : 12 = 9r2.
— Eligiendo 140 tenemos que: 140 : 3 = 46r2, 46 : 4 = 11r2 y 140 : 12 = 11r8.

Respuesta:

El cociente de la división entre 4 y entre 12 es el mismo pero el residuo no necesariamente.

Comentarios:

— Las divisiones entre 3 y entre 4 se pueden intercambiar de orden y el cociente final no variará, aunque sí puede variar el residuo.
— Se puede plantear a los alumnos la comparación entre el cociente de dividir entre 15 y el de dividir primero entre 5 y luego entre 3 o entre el cociente de dividir entre 16 y el de dividir dos veces entre 4, etc.

En el post «El residuo sí importa 2.ª parte» del blog del *PuntMat* mencionado anteriormente se pueden encontrar otras propuestas de tareas para practicar divisiones entre 3, 7 u 11.

Reflexión final

En esta entrega nos hemos centrado en la división, no tanto en la parte más conceptual de esta operación que ya habíamos tratado en el número 74 de esta revista, sino en la construcción de un algoritmo para esta operación entre números enteros y en las tareas de práctica de la mecánica.

La división es un contenido clave en las matemáticas de primaria que tratado de una manera tradicional lleva a algunos alumnos a fracasar en su proceso de automatización y a muchos más alumnos los lleva a adquirir una imagen falsa de las matemáticas como una materia en la que se hacen cálculos que bien podría hacer una calculadora.

En las páginas anteriores hemos reflexionado sobre la manera en que podemos construir un algoritmo con los alumnos y sobre el modo en que les podemos proponer que lo practiquen. También hemos presentado ejemplos de actividades que podemos proponerles para practicar la mecánica, pero queriendo ir más allá, buscando que el alumno descubra regularidades entre sus cocientes o sus residuos.

Referencias bibliográficas

Barba, B., y C. Calvo (2010), «La división: mucho más que un algoritmo», *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, n.º 54, 41-54.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001), *Children learn mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 En este artículo cuando escribimos «29 : 4 = 7r1» queremos indicar que la división de 29 entre 4 tiene cociente 7 y residuo 1. Debemos aclarar que esta notación, desde un punto de vista matemático formal, es discutible porque 29 : 4 = 7r1 y 57 : 8 = 7r1. Pero 29 : 4 ≠ 57 : 8. La manera precisa de registrar el resultado de la división 29 : 4 es 7¼, aunque no es un aula de primaria un sitio donde sea menester este tipo de precisiones.

2 La justificación de que esta afirmación es correcta queda fuera del alcance de los alumnos de primaria y se basa en la relación entre la suma de los dígitos de un número y el residuo de la división de este número entre 9.

3 La actividad en que se inspira esta propuesta es Adding All Nine:

http://nrich.maths.org/92

4 http://puntmat.blospot.com.es/2015/el-residu-si-importa-2na-part.html