suma+ 83
SECCIONES
Noviembre 2016
pp. 93-102

Felix Christian Klein. Cómo ver la botella medio vacía o medio llena (2.ª parte)

FRANCISCO MAÍZ JIMÉNEZ
ANTONIO PÉREZ SANZ (COORDINADOR)

En puertas del tercer milenio

En la primera parte del artículo dedicado a Felix Klein, publicado en *Suma* 82, nos centramos en los aspectos topológicos por los que este gran matemático de inicios del tercer milenio es conocido.

Por una parte, vimos cómo de un cuadrado se derivan el cilindro, la esfera, el toro, la banda de Möbius y la botella de Klein utilizando instrucciones de pegado topológico con nomenclatura de colores y vectores.

Por otra, se destacó el papel que la topología de esos objetos geométricos ha desarrollado en ámbitos, en un principio no matemáticos, como el cine. Y todo ello a través de los diálogos futuros que un chico llamado Santiago mantenía con personajes ilustres de la historia de las matemáticas recreados virtualmente por el ordenador de la nave espacial en la que viajaba. Dicho ordenador estaba encarnado en la personalidad virtual denominada HAL, como el ordenador consciente de la célebre odisea espacial dirigida por Stanley Kubrick en 1968.

Ahora, en esta segunda parte del artículo, el punto de atención pasa de las matemáticas al matemático y a la persona. Siempre acompañados por Santiago conoceremos con más detalle cómo pensaba y cómo vivió el hombre Felix Klein.

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2016 y aceptado en septiembre de 2016

8. Felix Klein. Primeros pasos

Felix Klein: Hola, yo nací en cuadrados de números primos.

Santiago: ¿Cómo es eso?

Felix Klein: Nací el 25 de abril de 1849, es decir, 5^2 del 2^2 del 43^2. El lugar de mi nacimiento fue Düsseldorf, Prusia (que después formó parte de Alemania) de la que mi padre era Secretario del Gobierno, por lo que mi nacimiento fue todo un acontecimiento que incluso fue publicado en los periódicos de la época.

Viví en mi ciudad natal hasta que entré en la Universidad de Bonn, donde estudié matemáticas y física (1865-1866). Esta última materia era la que más me atraía y por lo que obtuve un puesto de asistente de laboratorio del matemático y físico Plücker, pero este me supervisó mi doctorado con una tesis matemática sobre geometría lineal y aplicaciones a la mecánica, que era de su interés por esa época. Justo cuando me estaba doctorando falleció mi tutor, dejando incompleta su inmensa obra sobre fundamentos de la geometría lineal, por lo que se me asignó para terminar la segunda parte de la nueva geometría del espacio de Plücker.

Alfred Clebsch: Yo estaba en Göttingen en 1868, y en 1869, Klein visitó nuestra universidad y lo conocí. Me causó una fuerte impresión; tanto es así que recibió mi apoyo para ocupar una cátedra a sus cortos 23 años, pues yo ya podía prever que se convertiría en uno de los principales matemáticos de su tiempo.

Klein: Durante 1869 estuve, además de en Göttingen, en Berlín y en París.

Sophus Marius Lie

9. Sophus Lie. Viajes y comienzo de una amistad

Sophus Marius Lie: Recuerdo perfectamente la temporada que compartimos en París… Conocí a Klein durante el invierno de 1869, en Berlín. Al principio me pareció una coincidencia asombrosa, pues Klein era alumno de Plücker, uno de los matemáticos que junto con Jean Victor Poncelet más me inspiraron con sus escritos. Pero después nos unió además una gran amistad y mucho trabajo de colaboración.

En 1870 decidimos viajar juntos a París para después ir a Inglaterra, por lo que Klein pidió infructuosamente recomendaciones para ambos al Ministerio de Educación de Berlín.

En París conocimos a Gaston, Darboux y Jordan, que nos dio a conocer los trabajos de Galois gracias al *Traité des sustitutions et des équations algébriques* que había publicado en 1868. Klein y yo trabajamos mucho juntos, por lo que decidimos tomar habitaciones adosadas. Fruto de esta colaboración publicamos tres volúmenes: *Gesemmelte mathematisque Abhandlungen*. Por mi parte, en esa época descubrí la transformación que lleva mi nombre.

Klein: Descubrimos propiedades fundamentales de las rectas asintóticas de la superficie de Kummer y trabajamos en la investigación de las

Nota histórica

El Parlamento español había ofrecido el trono vacante al príncipe Leopoldo de Hohenzollern-Sigmaringen, primo del rey de Prusia, Guillermo I Hohenzollern. La tensión entre Francia, que se oponía a estar entre dos reyes prusianos, y Prusia estaba en aumento. La guerra fue provocada por el canciller prusiano, Otto Von Bismark, que insultó a Francia alterando un mensaje de su rey (el telegrama de Ems), que buscaba paradójicamente dar fin a la crisis entre Francia y Prusia. El canciller buscaba la guerra para unificar bajo dominio prusiano a los estados del sur de Alemania y lo provocó redactando un comunicado de prensa en el que supuestamente resumía el contenido del telegrama.

W-curvas. Nuestro objetivo era convertir el hacer geométrico en hacer algebraico. Para ello cambiamos nuestro punto de vista, dejando de ser la geometría el estudio de objetos en el espacio, pasando a ser el estudio del propio espacio. En París descubrí las posibilidades unificadoras que encerraba el concepto de grupo y realicé mis primeros descubrimientos matemáticos importantes en colaboración con Lie, en 1970.

Nuestro objetivo era convertir el hacer geométrico en hacer algebraico. Para ello cambiamos nuestro punto de vista, dejando de ser la geometría el estudio de objetos en el espacio, pasando a ser el estudio del propio espacio.

Un conjunto forma grupo respecto de una operación si:

—El conjunto es cerrado bajo la operación.
—El conjunto contiene un elemento identidad respecto de la operación.
—Todo elemento del conjunto tiene un elemento inverso respecto de la operación.
—La operación es asociativa.

Lo interesante del concepto de grupo es que los elementos del conjunto pueden ser números (aritmética), puntos u otros elementos geométricos, transformaciones (en álgebra o geometría) u otro tipo de objetos. Por otra parte, la operación puede definirse desde el punto de vista aritmético (suma, multiplicación…), geométrico (rotaciones en torno a un punto…) o cualquier otra regla que cumpla las condiciones de grupo.

Lie: Antes de que pudiéramos partir a Inglaterra, en julio de 1870 Otto Von Bismark, el Canciller prusiano, publicó un mensaje que hizo que Francia declarara la guerra a Prusia el 19 de julio, por lo que Klein tuvo que volver rápidamente a Berlín. Yo por mi parte decidí ir a pie hasta Italia, atravesando Francia, pero a los 50 kilómetros de marcha, en el bosque de Fontainebleau, me detuvieron como sospechoso de ser espía alemán. Y hubiera sido disparado a las seis de la mañana si no hubiera sido por Darboux. Incluso en diarios noruegos se publicó «Científico noruego encarcelado por ser espía». Seguramente las cartas y documentos matemáticos que portaba, los confundieron con mensajes cifrados de espionaje. Además alguno de ellos estaba escrito en alemán.

Klein: Y sin duda también por tu apariencia. Por algo te llamaban el gigante germano.

Lie: ¡Pero yo no soy germano! ¡Soy noruego! Y lo sabes bien, pequeño (esta es una broma entre ellos, ya que *klein* significa pequeño en alemán y Lie era muy alto)

Klein: Además ya te advertí que tu adicción por las largas caminatas es inmoderada.

Klein (susurra a Santiago): Tiene un carácter terrible, aunque su amistad y su capacidad matemática son sumamente apreciables.

Klein: Volviendo a mis viajes por Europa. Mi precipitada salida de París hizo que se pausara mi relación profesional con Lie. Desde entonces nuestra amistad y colaboración matemática fue básicamente por correspondencia.

Durante la guerra tuve que cumplir con el servicio militar como asistente médico. Finalmente volví a mis quehaceres docentes, siendo nombrado profesor a principios de 1871 en Göttingen, donde publiqué dos artículos sobre la geometría no euclídea, en los que probé que tanto la geometría euclídea como la geometría no euclídea son casos particulares de la geometría proyectiva con una sección cónica específica adjunta. Esto implicó el resultado siguiente: la geometría no euclídea es consistente si y solo si lo es la geometría euclídea. Este resultado zanjó la controversia de la geometría no euclídea, aunque algunos científicos como Cayley aún no estaban preparados para este salto, acusándome de argumentaciones circulares.

Posteriormente fui nombrado profesor en Erlangen en 1872.

10. El programa Erlangen, la geometría y las matemáticas

Klein: La generalidad del concepto de grupo y su potencia como idea unificadora me inspiraron para mi disertación inaugural de acceso a mi puesto de profesor en Erlangen. Ahí reflejé la posibilidad de utilizar los grupos para caracterizar las geometrías que hasta ese momento se estudiaban por separado. Básicamente se trataba de describir una geometría como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes al actuar sobre ellas un grupo de transformaciones. Por lo tanto, toda clasificación de los grupos de transformaciones se convierte en una clasificación de las geometrías (*Erlanger Programm*).

Fíjate que en el programa define la geometría de forma que incluye tanto a la euclidiana como a la no euclidiana.

Santiago: Eso es demasiado general para mí. ¿Podrías darme un ejemplo?

Klein: Claro. La geometría euclídea plana, que seguro conoces, sería el estudio de las propiedades de las figuras del plano (como áreas, longitudes…) que permanecen invariantes mediante las transformaciones que vulgarmente llamamos movimientos en el plano (simetrías, traslaciones y rotaciones).

Fíjate que si añadimos las homotecias a los movimientos, se mantendrían los ángulos, pero no las áreas ni longitudes.

Por indicarte otros ejemplos: la geometría afín sería el estudio de los invariantes mediante el grupo de las traslaciones, la geometría proyectiva sería el estudio de los invariantes mediante el grupo de las proyectividades y la topología sería el estudio de los invariantes mediante el grupo de las funciones continuas y de inversa continua.

Hal: Con su disertación, Klein puso fin a la distinción entre el método sintético y el algebraico-analítico. En su época supuso la consagración de la Geometría Proyectiva como reina de las geometrías. Por otra parte, era la primera vez que una ciencia (la Geometría) fue capaz de autodefinirse rigurosamente.

Su disertación de Erlangen y sus posteriores trabajos al principio no tuvo mucha repercusión, aunque poco a poco se fue extendiendo por todos los ámbitos científicos.

Santiago: Klein, tienes unas ideas que generalizan mucho. Seguro que tienes también una idea globalizadora de las Matemáticas.

Klein: Yo concibo la matemática en su evolución como un árbol que crece no solo en sus ramas, sino también en sus raíces: «las relaciones puramente lógicas deben quedar como el esqueleto del organismo de las matemáticas, pero lo vivo de las matemáticas, su eficacia externa, sus estímulos estriban siempre en sus aplicaciones, es decir en las correlaciones entre los entes puramente lógicos y todos los demás dominios del saber».

Establezco también una división de las Matemáticas en dos partes:

—Matemáticas de la aproximación (por ejemplo, el estudio de π).
—Matemáticas de la precisión (por ejemplo, la división de la circunferencia en partes iguales).

En mi libro, en el apartado titulado «Intermedio: sobre el moderno desarrollo y la construcción de la matemática», hago un estudio de la construcción de la matemática, distinguiendo tres tipos de procesos o conceptos generales que han tenido los matemáticos sobre la ciencia:

—Descomponer toda la ciencia en regiones estancas y aisladas del resto, sin que ninguna de ellas dependa ni recurra a los recursos de las otras.

Este tipo de pensamiento se usó en la ciencia griega en general y Euclides en particular. También fue utilizado en la matemática del siglo XVI por Cauchy, por Weierstrass (en 1860) y en las axiomáticas de la geometría.

—Se da especial importancia al enlace entre las distintas partes de la ciencia, usando mutuamente los recursos de estas. Se prefieren los métodos que abarcan varias regiones de la ciencia y el ideal es ver la ciencia matemática como un todo.

Este tipo de pensamiento fue usado por algunas tendencias de la matemática griega, por la geometría analítica de Descartes en la relación entre número y espacio, por el cálculo diferencial e integral del siglo XVII, por Leibniz (sobre todo en física matemática y teoría de funciones de variable compleja) y Newton en el cálculo infinitesimal. También en la matemática de los siglos XVIII y XIX (en la geometría proyectiva).

—Se trata del procedimiento algorítmico, que a veces se considera los cimientos del edificio matemático.

Este tipo de pensamiento fue usado en las matemáticas de la India y de los árabes. Leibniz se vio influenciado por esta forma de entender la ciencia y Newton lo usó cuando dio la serie del binomio general.

11. Munich y Leipzig

Lie: En 1872, el Parlamento noruego creó para mí una cátedra en la Universidad de Cristianía (la antigua Oslo), donde desarrollé mis ideas. Por otra parte la vida me dio penas y alegrías en esas fechas: en 1873 murió mi padre, en 1874 me casé con Anna Sophie Birch, hija de una prima hermana del famoso matemático noruego Niels Henrik Abel. Tuve dos hijas y un hijo.

Klein: La boda de Lie me sorprendió, ya que ambos éramos reacios a casarnos. Ya le advertí que «en esas condiciones no se puede trabajar».

Lie: No te hagas el sorprendido. Al año siguiente también tú te casaste y también lo hiciste, igual que yo, con una pariente de un famoso científico.

Klein: Es cierto. En Erlangen había pocos estudiantes, por lo que me trasladé a la Escuela Superior Técnica de Munich en 1875. Ese mismo año me casé con la nieta del famoso filósofo Georg Wilhelm Fiedrich Hegel.

Estuve cinco años en Munich, donde tuve unos grandes estudiantes, como Hurwitz, von Dyck, Rohn, Runge, Planck, Bianchi, Ricci y Curbastro, que con el tiempo brillaron con luz propia como científicos de primer nivel. Este fue el primer momento donde realmente sentí la vocación de maestro. Seguramente por los excelentes resultados que obtuvieron mis alumnos.

En 1880 conseguí una cátedra de geometría en Leipzig, donde también había otros colegas interesados en una docencia de excelencia: von Dyck, Rohn, Study y Engel. Esto hizo que intentara crear una escuela fuerte en Leipzig, inspirado en todas las que había observado en mis viajes y fundamentada en el enfoque geométrico que utilizó Riemann para la teoría de funciones.

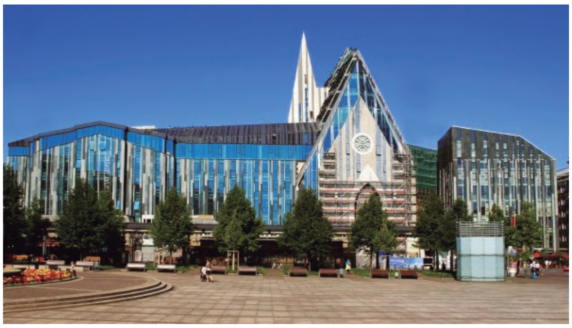
Comencé a realizar una doble función: la puramente académica, por un lado; y la otra, que estaba enfocada a la creación de una escuela propia: maestro, editor, organizador de eventos y encuentros científicos… En estos momentos fue cuando estuve en mi cumbre como matemático:

Había trabajado en teoría de funciones, que yo considero como mi mayor contribución a las matemáticas, gracias a las ideas de Riemann mezcladas con otros conocimientos y ramas de las matemáticas: álgebra, geometría multidimensional y teoría de invariantes, de grupos, de números y de ecuaciones diferenciales (especialmente en mis propios campos: funciones modulares elípticas y funciones automorfas).

Consideré las ecuaciones de 4.º y 5.º grado, usando para ello resultados de Hermite y Kronecker. Quedó resuelto el problema usando el grupo del icosaedro, lo que me llevó a publicar en 1884 un libro sobre el icosaedro.

También escribí una serie de artículos sobre funciones modulares elípticas.

Desarrollé una teoría de funciones automorfas, al igual que Poincaré en 1881. Con él comencé a escribirme y entablé una amistosa riva-


Universidad de Leipzig


Henri Poincaré

lidad. Era un formidable matemático y ambos buscábamos formular y probar un gran teorema de uniformización.

Con gran trabajo y estrés conseguí adelantarme a Poincaré al formular el teorema que buscábamos y esbozar una estrategia de demostración.

Pero este gran esfuerzo y el intentar compaginarlo con el resto de mis tareas administrativas hicieron que durante el otoño de 1882 mi delicada salud se derrumbara y tuviese que darme una pausa. Como consecuencia de mis problemas de salud, sufrí una depresión entre 1883 y 1884.

Lie: En mi estancia en Cristianía, la falta de reconocimiento matemático me hacía sentir decepcionado, pero Klein me mandó en 1884 a uno de sus discípulos recientemente doctorado en Leipzig, Fiedrich Engel, para ayudarme en la redacción de mis trabajos. Este primer encuentro con Engel durante 9 meses fue especialmente fructífero matemáticamente para ambos.

Klein: En 1884 publiqué junto con Robert Fricke cuatro volúmenes sobre funciones modulares automorfas y elípticas, que con el tiempo llegó a ser un clásico.

Aunque en 1885 fui elegido miembro de la Real Sociedad de Gran Bretaña, finalmente, en 1886 di por concluida mi carrera en la investigación matemática de primer nivel y acepté una cátedra en la Universidad de Göttingen.

12. Educación matemática

Santiago: Perdona que te interrumpa, pero al escucharte sobre el cambio de la investigación a la docencia me surge una duda. ¿Siempre tuviste claro en qué ibas a trabajar?

Klein: No, como ya te he contado, mi primera intención fue estudiar Física. Después me interesé por las matemáticas y posteriormente, a partir de 1900 sobre todo, por la docencia. En 1905 se me permitió formular los *Meraner Lehrplan-entwürfe* (diseños de programas de estudios) e intenté por todos los medios la modernización de la instrucción matemática en Alemania.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma, en 1908, me eligieron presidente de la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática.

¿Tú tienes claro lo que deseas estudiar?

Santiago: Estoy pensando en ser profesor de matemáticas.

Klein: Si me permites, te voy a dar mi opinión sobre el tema, que puedes leer más profundamente en mi libro Matemática Elemental desde un punto de vista Superior. Si realmente te interesa la educación…

Hal: Santiago, ten en cuenta que la personalidad virtual de Klein te dará su opinión personal, si bien no es muy desacertada, ya que ningún gran matemático se preocupó antes que él por la enseñanza de las matemáticas.

Santiago: Estoy interesado en oírlo, HAL, deja que prosiga.

Klein: Como te iba diciendo, en mis tiempos (no sé si esto habrá cambiado) la enseñanza matemática en Educación Primaria y Secundaria era muy elemental y al pasar a la Universidad se producía un gran salto que imprimía en el estudiante universitario otras formas de pensamiento, olvidando al menos parcialmente lo aprendido anteriormente. Cuando el estudiante termina sus estudios universitarios y pasa al profesorado, no puede enseñar del mismo modo que a él le han impartido clases en la Universidad, por lo que vuelve a tener que cambiar su pensamiento. El comportamiento más usual ante estos cambios es impartir clase, en el mejor de los casos, como le impartieron Educación Primaria en su momento, olvidando rápidamente todo lo aprendido en la universidad.

Esta situación es la que me provocó que escribiera esta obra. Está claro que será una tarea infructuosa si a un niño le intentas explicar el concepto de número axiomáticamente, y te recomiendo que nunca te lo propongas. Es mejor hacerlo usando conocimientos de la vida real que él conozca. Esto debería extenderse al resto de la enseñanza, relacionando la matemática con la vida cotidiana.

Otra cosa muy importante es el concepto de función, que relaciona cualquier par de magnitudes en un plano, y debería explicarse aunque dejes de impartir otros conceptos del temario.

Santiago (susurra a HAL): Pero las funciones se dan siempre en secundaria ¿no?

HAL: Esto no fue así hasta que Klein hizo cambiar la educación. Primero se cambió en Alemania y luego en el resto del mundo.

Klein: … es muy importante también la introducción al cálculo infinitesimal, así como la enseñanza del cálculo, que debe dar seguridad en el manejo de sus reglas. También es necesario unificar los criterios entre maestros y profesores, ya que no solo imparten conceptos de forma diferente, sino que incluso usan notación distinta. Por ejemplo, «×» y «·» como signos de la multiplicación.

La sustitución de números por letras para el cálculo literal debe ser paulatina, acostumbrándose poco a poco a dicha abstracción.

Hay que tener una especial sensibilidad en la introducción de los números negativos y de los paréntesis, pues no son intuitivos. De hecho creo que sería mejor que en los primeros cursos no intentaras explicar la regla de los signos.

No se debe ahondar en exceso en el concepto de número y su origen, en extremo difícil; de hecho, se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación.

Te recomiendo también que tanto tú como tus futuros alumnos utilicéis las máquinas de calcular y la tecnología que tengas a tu alcance.

Las matemáticas son más atractivas si son expuestas usando elementos intuitivos y figuras apropiadas, porque se facilitaría mucho su comprensión con estos recursos.

Las cuatro recomendaciones principales que les hacía a los futuros profesores eran:

1. Las exposiciones de conceptos abstractos deben ser intuitivas y utilizando representaciones gráficas.

2. Hay que resaltar los enlaces con conceptos previamente conocidos.

3. Hay que dar importancia a la evolución histórica de los conocimientos científicos.

4. Hay que presentar algunos ejemplos de libros populares u otros soportes para diferenciar entre los conceptos del gran público influidos por tales obras y los mismos conceptos expresados por matemáticos profesionales.

Todos los puntos descritos deben ser conocidos por los aspirantes al magisterio secundario, pues al llegar a la práctica de la enseñanza tropezarán con que los conceptos de los alumnos son aquellos vulgares. Si no conocen bien los elementos intuitivos de la Matemática ni las relaciones vivas entre las distintas ramas de esta, ni la relación entre ella con las demás ciencias ni, sobre todo, su desarrollo histórico, les fallará siempre el terreno que pisen y una de dos: o volverán su atención al campo de la matemática pura y no serán entendidos por sus discípulos o sucumbirán a la lucha, olvidando cuanto aprendieron en los cursos superiores cayendo en la rutina de siempre.

Estos consejos son especialmente importantes en el campo del cálculo infinitesimal, donde la discontinuidad en la enseñanza alcanza un grado máximo.

Hal: Santiago, tienes que tener en cuenta que en sus tiempos, la enseñanza secundaria estaba siempre destinada a los futuros universitarios. Por otro lado, su libro estaba destinado a formar profesores de enseñanza primaria y secundaria.

Universidad de Göttingen

13. Göttingen

Klein: Desde que acepté mi cátedra en Göttingen en 1886 hasta que me retiré en 1913 intenté que Göttingen volviera a ser el centro de investigación en matemática más importante del mundo. Aunque no lideraba las investigaciones, ya que no me veía con el ánimo suficiente después de mi depresión, en Göttingen impartí gran variedad de cursos, cambiando la geometría por la física matemática. Incluso llegué a publicar un trabajo sobre el giróstato.

Se me permitió establecer un centro de investigación siguiendo mis directrices: reuniones semanales de discusión, biblioteca matemática con sala de lectura… También conseguí traer a Hilbert desde Königsberg para el grupo de investigación en 1895.

Santiago: ¿Pero en las universidades también se ficha a estrellas como en equipos deportivos?

Hal: Así ha sido siempre. En muchas ocasiones, las estrellas invitadas daban más fama a las universidades que el resto del profesorado. Te pondré algunos ejemplos para que te hagas una idea.

Hilbert: Mi nombre empezaba a sonar más allá de Königsberg y a apesar de tener otras ofertas acepté la de Klein para Göttingen porque me gustó su forma de llevar la investigación matemática, sus sesiones grupales y su gran capacidad de administrador; sin duda, un gran estadista. También tenía una gran apertura de miras, tanto en las propias matemáticas, que no cerraba a sus aplicaciones prácticas, como a la apertura de las puertas de Göttingen a las mujeres, hasta ahora cerradas para ellas en la mayoría de centros de estudios del planeta.

Hal: Entre los cerebros que atrajo a Göttingen, se encuentran dos de las mujeres matemáticas más célebres de su época:

Grace Chisholm: En 1893, después de haber aprobado los exámenes finales y obtenido mi título en el Grintón College, me decidí a dirigirme a Göttingen para continuar con mis estudios. En 1895 obtuve mi doctorado bajo la tutela de Félix Klein. Le estoy muy agradecida por ello.

Hal: Grace es considerada la primera mujer en doctorarse de una manera «normal».

Emmy Noether: Estudié matemáticas en la Universidad de Erlangen–Nüremberg y en 1903 aprobé el examen final. Mis primeras clases las impartí en el instituto matemático de la Universidad de Erlangen, sustituyendo ocasionalmente a mi padre entre los años 1908 y 1915. Luego, en 1915, fui invitada a la Universidad de Göttingen por Felix Klein y David Hilbert. Allí impartí clases en nombre de David Hilbert (que me las cedió) hasta 1919, cuando me fue otorgada la habilitación como *privatdozent*.

Hal: Gracias a Klein cambió el estudio de las ciencias aplicadas en las universidades alemanas. También le debemos a él en gran parte que se erigieran los Institutos de Matemáticas puras y aplicadas. Perdura en el recuerdo además su labor en la Enciclopedia Matemática, de la que fue uno de los creadores y editores.

Clebsch: Klein también escribió en revistas especializadas. Yo mismo fundé la revista *Mathematische Annalen*, pero no fue hasta que Klein se hizo cargo de ella que su fama rivalizó e incluso rebasó a *Crelle Journal* (apoyada por la escuela de matemáticas de Berlín). Y esto lo consiguió por sus grandes dotes matemáticas y administrativas.

Klein: Unos pocos editores bien agrupados fueron los artífices, además de una buena elección de temas, seleccionados democráticamente: análisis complejo, geometría algebraica, teoría de invariantes, análisis real y teoría de grupos (si bien esta última elección estoy seguro que se hizo en deferencia a mi persona).

Santiago: ¿También hay competencia entre revistas matemáticas?


David Hilbert (1862-1943)


Grace Chisholm (1868-1944)


Emmy Noether (1882-1935)

Hal: Así es.

Lie: En 1886 fui llamado por la Universidad de Leipzig para suceder a Klein, que había sido nombrado profesor de la Universidad de Göttingen. Fue en Leipzig donde, siguiendo la recomendación de Klein, comencé a reunir alumnos brillantes que dieron difusión a mis ideas. De nuevo volví a trabajar con Engel, pero esta vez durante nueve años, hasta mi principal publicación: *Theorie der Transformationsgruppen*, entre 1888 y 1893.

Aunque mi estancia en Leipzig fue prolífica, no fue del todo feliz. Por una parte tuve ciertas desavenencias con mis compañeros, de los que decidí alejarme.

Klein: Su carácter no era fácil de entender y había que tenerle un especial aprecio para tener un trato de continuo con él. Además, por aquella época su esposa Anna enfermó, lo que le produjo una crisis nerviosa que concluyó en 1889 en una depresión por la que estuvo ingresado siete meses en una clínica psiquiátrica en los alrededores de Hannover.

Lie: Cuando salí del sanatorio volví a mi trabajo, aunque los otros matemáticos se estaban aprovechando de mis descubrimientos, usándolos y copiándolos.

Klein: ¡Vamos Sophus!, sabes que eso es como tu apellido («lie» significa mentira).

Lie: Después de mi estancia en la clínica corté mi comunicación con Klein e incluso llegué a escribir: «Yo no soy pupilo de Klein, ni es el caso opuesto, aunque esto podría acercarse más a la verdad».

Anne Hegel (esposa Klein): Felix no llegó a comentar nunca esa frase en público. Prefirió dejarlo pasar por bondad y porque lo entendía en su enfermedad.

Tumba de Félix Christian Klein en Göttingen

Lie: Finalmente, en 1892 decidí irme a París, donde mis trabajos fueron bien reconocidos por los jóvenes matemáticos franceses con los que solía charlar en el Café de la Source.

El 7 de junio de 1892 me nombraron miembro de la sección de Geometría de la Academia de Ciencias de París. Por su parte, Klein recibía la medalla De Morgan de la Sociedad Matemática de Londres en 1893. Gracias a un informe de Klein, la Sociedad Físico-Matemática de Kazan me otorgó el Premio Lobachevski en 1897.

Anne Hegel: Una tarde de verano, cuando volvíamos a casa de una excursión, allí, delante de nuestra puerta, estaba sentado un hombre pálido y enfermo. ¡Lie!, exclamamos grátamente sorprendidos. Los dos amigos se dieron la mano, se miraron uno a otro a los ojos, todo lo pasado desde su último encuentro lo daban por olvidado. Lie se quedó un día con nosotros, el querido amigo, y ya había cambiado… Poco después murió, pero no antes de que el gran matemático fuese recibido en Noruega como un rey.

Klein: Poco antes de mi retiro recibí la Medalla Copley de la Sociedad en 1912. Y a pesar de mi retiro, seguí enseñando matemáticas en mi casa durante la Gran Guerra.

Hal: Klein murió en Göttingen el 22 de junio de 1925.

14. El manifiesto de los 93

André Weil: En 1914 se publicó un texto firmado por 93 intelectuales alemanes para contrarrestar la negativa opinión pública que tenían el resto de países por el bombardeo de la catedral de Reims (elegida por los alemanes por ser el lugar de la consagración de los monarcas de Francia) y de la ciudad belga de Lovaina. Pero lejos

Explosión de una bomba alemana en la catedral de Reims de calmar los ánimos, más bien hicieron todo lo contrario, y los antigermanos utilizaron el manifiesto como una muestra de la barbarie teutona. Entre los nombres que aparecían en el manifiesto estaba el de Klein.

André Weil: Pude informarme de que muchos de los firmantes, entre ellos Felix Klein, no habían visto el texto. Solo se les pidió por teléfono una adhesión que les fue presentada como un deber patriótico. También he de decir que Hilbert se negó a firmarlo.

Grace Chisholm Young, de Collonge, La Conversion (Suiza): El Times publicó un escrito que envié con motivo de la muerte de Felix Klein. En este escrito dejo constancia de las circunstancias de un lamentable error que me aclaró el propio Klein en respuesta a una carta. Me contestó, el 7 de diciembre de 1918, que su primera noticia del manifiesto fue mediante su lectura en un periódico. Para su sorpresa, vio su nombre impreso cuando él únicamente había dado su consentimiento telegrafiado al preguntarle si firmaría que los intelectuales del mundo civilizado mantendrían una actitud objetiva durante la guerra.

Hal: Al parecer, la manipulación de telegramas era algo habitual, como pudiste comprobar con Bismark y Klein. También otros firmantes del manifiesto declararon no estar de acuerdo con el texto, tal como comunicó el astrónomo Foerster, que se encontró en la mismas circunstancias que Klein.

Klein: Al parecer, en lo referente al manifiesto, yo mismo dejé de seguir mi máxima favorita: «Nunca ser tonto».

Conclusiones

Santiago: Me ha gustado mucho esta experiencia de aprendizaje contada por sus protagonistas, aunque a veces no he entendido todo lo que explicaban. Sin duda, Klein fue un gran maestro.

Hal: Me alegro. Tu apreciación será transmitida en los informes que se generen para el proyecto Klein. Si quieres conocer algo más sobre este personaje de la historia de las matemáticas te recomiendo el artículo sobre él publicado en la revista *Suma* (números 82 y 83) en 2016.

Si te parece, ahora podríamos hablar con la personalidad virtual de…

Referencias bibliográficas

Borges, J. L. (1971), «La biblioteca de Babel», *Ficciones*, EMECE editores en el libro de bolsillo, Alianza Editorial.

Boyer, C. B. (1986), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial.

Chisholm, G. (1925), Obituario del Times tributo a Felix Klein.

Gutiérrez, S. (2006), «Lobachevski: El Copérnico de la geometría», *Suma*, n.º 52, 91-96

Martínez, P. (1993), «La curiosa historia de... Los calzoncillos (con perdón) de Möebius», *Suma*, n.º 13, 66.

Núñez, J., A. Prieto y V. Sánchez-Canales, (2010), «Un paseo fotográfico por la vida de Sophus Lie», *Lecturas Matemáticas,* n.º 31, 55-75.

Núñez, J., «Historia»; sección a cargo de Antonio J. Durán, *La Gaceta de la RSME*, 5.1, 121-130.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson (2003), *Felix Christian Klein*, MacTutor History of Mathematics.

Odifreddi, P. (1984), *La matemática del siglo XX: de los conjuntos a la complejidad,* Ed. Katz.

Recio, T. (2009), «El Proyecto Klein», *Suma*, n.º 62.

Rodríguez, R. (2009), *Felix Klein: botellas y enseñanza de las matemáticas,* CDL, septiembre.

Thibaut, E. (2008), «Topología para 2º de ESO con la técnica del puzzle de Aroson», *Suma*, n.º 58, 41-48.

Villarroya, F. (1996), «Klein y la enseñanza de las matemáticas», *Suma*, n.º 21, 107-113

Weil, A. (2002), *Memorias de aprendizaje,* Nivola.

Francisco Maíz Jiménez
IES Salvador Dalí (Madrid)
<tercermilenio@revistasuma.es>