RECME
Editorial Smart math
Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA
Revista Colombiana de matemática educativa

Coordinación de registros de representación semiótica: un estudio de caso con problemas de optimización

Ever Cruzado Quispe & Jesús Victoria Flores Salazar
ever.cruzado@pucp.edu.pe; jvflores@pucp.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (Egresado);
Pontificia Universidad Católica del Perú (Profesora)
Perú, PE

Resumen:

El presente artículo forma parte de la investigación realizada en la tesis de maestría en Enseñanza de las Matemáticas del primer autor y tiene como finalidad analizar, por medio de la teoría de Registros de Representación Semiótica, cómo los estudiantes de Ingeniería resuelven problemas de optimización en los cuales es necesario movilizar el concepto de derivada de funciones reales de variable real. En cuanto al método utilizado en la investigación es el estudio de caso y, además, se utiliza, como tecnología mediadora, al GeoGebra. Los resultados indican que los estudiantes de Ingeniería, sujetos de la investigación, al resolver los problemas de optimización, movilizan los registros de lengua natural, figural, algebraico y gráfico.

Palabras clave:

Problemas de optimización; registros de representación semiótica; GeoGebra.

Abstract:

The present paper is part of a research carried out for the master's thesis in Mathematics Education of the first author, and it aims at analyzing, by means of the theory of Registers of Semiotic Representation, how Engineering students solve optimization problems, in which it is necessary to mobilize the concept of derivative of real functions of a real variable. The method used in the research is the case study, besides using GeoGebra as the mediating technology. Results indicate that Engineering students, who were the subject of the research, mobilize the natural language, figural, algebraic and graphic registers by solving the optimization problems.

Key words:

Optimization problems; registers of semiotic representation; GeoGebra.

Resumo:

O presente artigo forma parte da dissertação do mestrado em Ensino de Matemáticas do primeiro autor e tem como finalidade analisar, por meio da teoria de Registros de Representação Semiótica, como estudantes de Engenheira resolvem problemas de optimização nos que é necessário mobilizar o concepto de derivada de funciones real de variável real. Com relação ao método usado na pesquisa é estudo de caso e, além disso, se utiliza, como tecnologia mediadora, ao GeoGebra. Os resultados indicam que os estudantes de Engenheira, sujeitos da pesquisa, ao resolver os problemas de optimização, mobilizam os registros de língua natural, figural, algébrico y gráfico.

Palabras clave:

Problemas de optimização; registros de representação semiótica; GeoGebra.

1 Consideraciones iniciales

El artículo presenta un recorte de la investigación de Cruzado (2018) que se centra en analizar la coordinación de registros de representación semiótica en estudiantes de Ingeniería cuando resuelven problemas de optimización de funciones reales de variable real, con ayuda del GeoGebra. Por ello, a continuación, se presenta las investigaciones de referencia que dan sustento a este trabajo.

Una de las primeras investigaciones que se revisa fue la de Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013) quienes realizan un análisis exploratorio con la finalidad de identificar las posibles causas que puedan ocasionar la aparición de dificultades en los procedimientos usados para resolver problemas de optimización de funciones en una variable real. De la misma, los autores concluyen que la principal dificultad de los estudiantes es el planteo de la función objetivo en una variable y las condiciones del problema; es decir, modelar matemáticamente el problema de optimización.

Por otro lado, la investigación de Encinas, Ávila y De las Fuentes (2013) muestra que el principal impedimento que tienen los estudiantes al resolver problemas de optimización se presenta al construir la función que modela matemáticamente al problema planteado; es decir, no identifican las magnitudes que varían y las relaciones que hay entre ellas y, los estudiantes que logran construir dicha función, no tienen dificultades para resolver el problema, ya que muestran un buen dominio de los procesos algorítmicos.

Asimismo, las investigaciones de Navarro, Robles, Ansaldo y Castro (2016), Bustos y Vásquez (2016) y Cuevas, Rodríguez y Gonzáles (2014) muestran cómo un ambiente de representaciones dinámicas (ARD), como el GeoGebra, favorece en la comprensión de manera intuitiva e interpretación de los métodos de la derivada para hallar máximos y mínimos de funciones en una variable real.

En ese sentido, Otero (2012) también afirma que el uso del GeoGebra ayuda en la visualización y condiciones de un problema de optimización; sin embargo, algunas deficiencias propias del Software, como por ejemplo la escala, no permiten que los estudiantes logren la conversión entre registros.

Las investigaciones revisadas brindan valiosos aportes a este trabajo, ya que evidencian las principales dificultades que tienen los estudiantes de nivel superior para resolver problemas de optimización, así como también muestran limitaciones en la comprensión de la derivada de funciones reales de variable real.

Como los sujetos de la investigación son estudiantes de Ingeniería, se buscó información de universidades peruanas, en las que destacan, por ejemplo, la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) y la Universidad Nacional del Callao (UNAC) para evidenciar, mediante los sílabos, cómo se presenta el tema en estudio.

Se pudo constatar que los problemas de optimización están presentes como aplicaciones de la derivada en los cursos de Matemática I, Análisis Matemático I, Cálculo I o Cálculo Diferencial (el nombre varía según la universidad), el cual es un primer curso de Matemáticas de las carreras de Ingeniería.

El perfil de los ingenieros es resolver problemas para la toma de decisiones, por ello, en su actividad profesional, deben enfrentarse a problemas que impliquen optimizar, ya que una de las labores de estos profesionales es lograr la productividad máxima utilizando la mínima cantidad de recursos disponibles. Así, por ejemplo, en Ingeniería Química, la optimización se aplica para optimizar operaciones y procesos químicos; en Ingeniería Eléctrica se usa para optimizar redes eléctricas y, finalmente, en Ingeniería Industrial la optimización tiene aplicaciones en procesos industriales, ya que se debe optimizar la cantidad de recursos disponibles y tomar las mejores decisiones que le conviene a una determinada empresa generándole la mayor ganancia posible.

Por lo presentado en las investigaciones de referencia y por los documentos revisados de las diferentes carreras de Ingeniería de universidades peruanas, se considera que investigar sobre este tema es necesario y relevante porque es un tema que compete a la formación del futuro ingeniero en el Perú.

A continuación, presentamos los principales aspectos metodológicos y teóricos que se utilizan en el estudio.

2 Aspectos teóricos y metodológicos

2.1 *Aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica*

Según Duval (2004), aprender Matemáticas involucra una secuencia de actividades cognitivas,

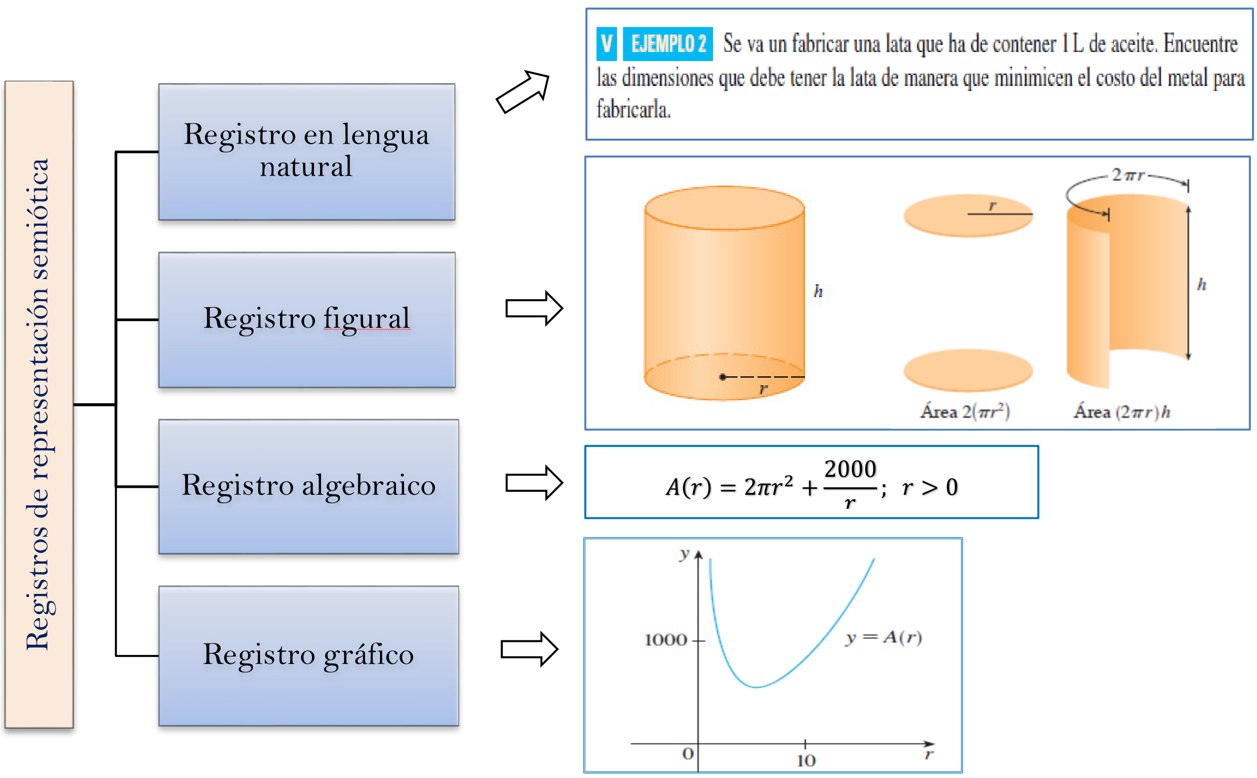

Figura 1: Registros de representación semiótica en un problema de optimización.
Fuente: Stewart (2012, p. 327)

como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. Por ello, el autor afirma que para aprender y enseñar Matemáticas se requiere la utilización de distintos registros de representación y de expresión como, por ejemplo, el lenguaje natural, la representación mediante imágenes, símbolos, entre otros.

El autor también indica que los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción o la experiencia intuitiva inmediata, ya que no son objetos reales o físicos. Por ello, se hace necesario usar las diferentes representaciones semióticas de un objeto y que no se debe confundir el objeto con su representación, ya que si esto sucede nos conduce a una pérdida de la comprensión y los conocimientos adquiridos del objeto matemático.

Por lo descrito anteriormente, Duval (2012) indica que un registro es un campo de variación de representación semiótica en función de los factores cognitivos que le son propios.

De acuerdo con el investigador, las representaciones semióticas se pueden considerar como un medio para exteriorizar las representaciones mentales. Por ello, afirma que para que un sistema semiótico sea un registro de representación semiótica, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales que detallamos a continuación:

- La formación de una representación identificable: Esta actividad se refiere a la expresión mental; es decir, a la expresión de un objeto en un determinado registro semiótico, lo cual implica que se debe seleccionar un conjunto de símbolos o gráficos, además de las relaciones y datos que permiten constituir lo que se representa.
- Tratamiento: Esta actividad consiste en la transformación de una representación en el mismo registro donde fue formado; es decir, es una transformación interna que se hace dentro del mismo registro.
- Conversión: Esta actividad se refiere a la transformación de una representación hecha de un objeto de un registro a otro, en el cual se puede conservar la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial y por ello se dice que es una transformación de carácter externo.

Además, Duval (2004) señala que en la actividad matemática se encuentran presentes diferentes registros de representación semiótica. Así tenemos:

- Registro en lengua natural: Este se manifiesta de manera oral o escrita; es decir, si se quiere modelar matemáticamente un fenómeno o situación se debe partir de una descripción del mismo, ya sea de manera oral o escrita.

- Registro figural: Este registro involucra esquemas, bosquejos, líneas y figuras geométricas.
- Registro algebraico: En este registro un objeto matemático se puede representar por medio de expresiones algebraicas.
- Registro gráfico: Se usa para representar un objeto matemático usando un sistema de coordenadas cartesianas.

En seguida, en figura 1, se presenta un problema de optimización en sus diferentes registros de representación semiótica.

Duval (2012) añade, con respecto a la coordinación de registros, que "La coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles" (traducción propia, p. 5).

La pregunta de investigación que guía este trabajo es: ¿La coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica favorece la resolución de problemas de optimización del concepto de derivada de funciones de una variable real en estudiantes de Ingeniería?

Para responder esta pregunta, se plantea el siguiente objetivo general: Analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de Ingeniería al resolver problemas de optimización en los cuales sea necesario movilizar el concepto de derivada de funciones de una variable real.

2.2 *Aspectos del estudio de caso en la investigación*

Ponte (2006) afirma que un estudio de caso busca conocer una entidad bien definida, que puede ser una persona, una institución, un curso, un sistema educativo o cualquier otra disciplina de la sociedad, ya que el objetivo de esta metodología es conocer en profundidad el cómo y por qué de dicha entidad y pone en evidencia las características y los aspectos que son de interés para el investigador.

Asimismo, el investigador indica que, en Educación Matemática, los estudios de caso se usan para investigar cuestiones de aprendizaje de los estudiantes, así como también del conocimiento y de las prácticas profesionales de los profesores.

Por otro lado, Martínez (2006) explica que en un estudio de caso se estudia una entidad en su contexto real y para ello se usan diversas fuentes de evidencia, como por ejemplo entrevistas, observaciones entre otros documentos. Además, este autor indica que un estudio de caso puede tener diversos propósitos, siendo así algunos trabajos de investigación, basados en esta metodología, exploratorios, si lo que se busca es conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio; se dice que son descriptivos si el objetivo es identificar y describir cómo es el caso en estudio y se dice que un trabajo de investigación es analítico si pretenden problematizar el objeto en estudio y desarrollar una nueva teoría o confrontarla con una ya existente.

Yin (2009) indica que, para diseñar una investigación basada en estudio de caso, se deben tener en cuenta las siguientes componentes importantes:

1. Las preguntas de investigación: Son las que sirven de referencia o como un punto de partida para la colección de la información.
2. Las proposiciones de estudio: Al igual que las preguntas de investigación, las proposiciones de estudio también sirven como referencia para la recolección de la información, pero estas destinan su atención a alguna cosa que se debe analizar dentro del campo de estudio.
3. Unidades de análisis: Esta componente se relaciona al problema fundamental de definir cuál es el caso. Según el investigador citado anteriormente, señala que, en los estudios de caso clásicos, un caso está conformado por una persona y el mismo individuo es la unidad primaria de análisis, pero si se recolecta información de varios individuos se trataría de un estudio de caso múltiple. También el mismo investigador afirma que el caso puede ser algún evento o entidad y la definición de las unidades de análisis se relaciona a la manera en que las preguntas de la investigación se han definido.
   En ese sentido, ya que la pregunta de investigación de este trabajo es: ¿la coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica favorece la resolución de problemas de optimización del concepto de derivada de fun-

ciones de una variable real en estudiantes de Ingeniería?, se define el caso como: Problemas de optimización y como para la parte experimental se elabora dos problemas de optimización, dichos problemas conforman las unidades de análisis, pues del análisis de la resolución de dichos problemas, por parte de los estudiantes participantes en la parte experimental, se podrá concluir si tales problemas favorecen o no en la coordinación de registros de representación semiótica.

4. La lógica que une los datos a las proposiciones: Este componente se refiere al proceso donde el investigador relaciona la información recolectada con las proposiciones de estudio.
5. Los criterios para interpretar: Este componente del estudio de caso se refiere al proceso de análisis, que hace el investigador, a partir de la información recolectada de las unidades de análisis y qué resultados o conclusiones se obtienen del análisis de la información recolectada.

Para asegurar la objetividad de un estudio de caso, en función de su fiabilidad y validez, Yin (2009), citado por Martínez (2006), propone adicionalmente el protocolo de estudio de caso, el cual está constituido por la guía de procedimientos que deben realizarse en la fase de obtención de la evidencia y que tiene los siguientes elementos: Semblanza del estudio de caso, preguntas del estudio de caso, procedimientos a ser realizados y guía del reporte del estudio de caso.

El primer elemento es necesario para integrar a los miembros del equipo de investigación; es decir, a las personas que colaboran en la investigación. En nuestro caso, se integra a una profesora, que cumple el papel de observadora durante la aplicación de los problemas de optimización elaborados para esta investigación.

El segundo elemento consiste de la pregunta de investigación, la cual tiene conexión con los aspectos teóricos del estudio, mientras que los procedimientos establecen los medios necesarios para la recolección de datos. Para esta investigación se establece como medios de recolección de datos a las fichas de los problemas de optimización, los cuáles deben ser resueltos por los estudiantes participantes, siendo esta nuestra principal fuente y como fuentes complementarias se usa las fichas de observación, grabaciones de audio y archivos GeoGebra que usan los estudiantes, de los cuales se revisa los protocolos de

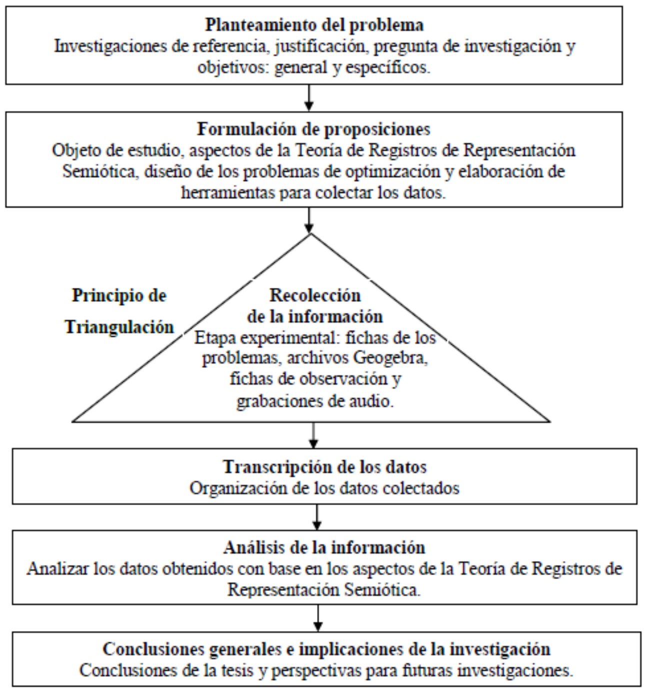

Figura 2: Procedimientos metodológicos
Fuente: Adaptado de Martínez (2006, p. 182)

construcción para saber qué acciones realizaron en el Software.

En base a estas fuentes, se hace la triangulación de la información y se elabora la guía para el reporte (ver figura 2).

Como parte del primer elemento "semblanza de caso", el autor sugiere que antes del inicio de la recolección de la información se debe especificar los procedimientos metodológicos a realizar durante la investigación.

3 Parte experimental y análisis

La parte experimental de la investigación consiste en que los estudiantes participantes resuelvan dos problemas de optimización, que detallaremos más adelante, y se desarrolla en un laboratorio de cómputo de una universidad nacional peruana, en el cual se contaba con una pizarra acrílica, un proyector multimedia y computadoras, tanto para el profesor investigador como para los estudiantes, en las cuales estaba instalado el Software GeoGebra, versión 5.0.392.0 de libre distribución.

3.1 *Los participantes*

Los participantes en la investigación son estudiantes de la carrera de Ingeniería Mecánica de la misma universidad nacional peruana en la cual se realiza la parte experimental.

Estos estudiantes llevan el curso de Cálculo Integral en el semestre académico 2017-2 y se comprometen en participar de manera voluntaria luego que el docente investigador invitara en su aula a un total de 40 estudiantes, aproximadamente; sin embargo, en este artículo, solo se comenta los resultados obtenidos de un estudiante, teniendo en cuenta que tiene un mejor desempeño durante el desarrollo de la parte experimental y se piensa que la información obtenida de dicho estudiante será la más provechosa para realizar el análisis de los resultados.

Antes de presentar a los estudiantes la ficha de los problemas de optimización, se aplicó una prueba diagnóstica con la finalidad de identificar si los estudiantes poseen los conocimientos necesarios para desarrollar satisfactoriamente los problemas de optimización elaborados para la parte experimental, como por ejemplo saber derivar y hallar los números críticos de una función en una variable real, también que reconozcan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, así como también los intervalos donde la función es positiva y negativa.

Los resultados de la prueba diagnóstica indicaron que los estudiantes no tuvieron dificultades en hacer tratamientos en el registro algebraico, pues las preguntas que implicaban procesos algebraicos no fallan, por el contrario, se identifica que dichos estudiantes tuvieron dificultades para entender ciertos conceptos en el registro gráfico, pues en las preguntas que implican interpretar los conceptos en dicho registro, estos estudiantes fallan. Por ello, una vez finalizada la prueba diagnóstica, se dieron algunas indicaciones puntuales sobre las respuestas de las preguntas presentadas en la prueba, ya que se considera que dichos conceptos involucrados eran de vital importancia para desarrollar los problemas de optimización de manera satisfactoria.

Por otro lado, se menciona que antes de entregar la ficha de los problemas de optimización a los estudiantes se hizo una introducción breve al GeoGebra, donde básicamente se les indicó cómo usar las herramientas necesarias de dicho Software para el desarrollo de los problemas de optimización, pues se consideran de utilidad para realizar tratamientos en el registro gráfico. Por ejemplo, se les indica cómo graficar una función con dominio restringido, cómo colocar un punto sobre la gráfica de la función e identificar sus coordenadas, tanto en la vista grafica como en la vista algebraica del Software en mención, así como también se les indica cómo aumentar o disminuir la escala de los ejes, cómo hallar el intercepto de la gráfica de una función con los ejes coordenados o con cualquier otra función y cómo derivar una función usando el programa.

Se observó que los estudiantes comprendieron rápidamente el uso de las herramientas mencionadas, por tanto, se pasó a repartir la ficha del primer problema de optimización.

3.2 *Los problemas de optimización y sus análisis*

Tal como se menciona en la sección anterior, los problemas de optimización elaborados para la parte experimental conforman las unidades de análisis.

Los dos problemas de optimización se desarrollaron, por los estudiantes, en una sola sesión y se planificaron para que lo hicieran de manera individual, donde cada uno contó con una computadora. También se dio la indicación a los estudiantes que anotaran en la ficha de los problemas todos los procedimientos que realizaran y escribieran las respuestas de las preguntas planteadas en el registro en lengua natural.

Durante el desarrollo de los problemas, además del profesor investigador, se encontraba una profesora observadora a la cual se le proporcionó una ficha de observación en la cual básicamente se le pidió que anotara cuáles son las dificultades más resaltantes que pudiera notar de los estudiantes.

A continuación, se presenta la descripción de cada unidad de análisis (tabla 1).

Si bien la parte experimental consta de dos problemas de optimización y se llevó a cabo con seis estudiantes, para este artículo se presenta solo el análisis del primer problema de optimización y se analiza los resultados de un estudiante, al que, en adelante, llamaremos estudiante A.

Análisis del primer problema de optimización

El desarrollo del primer problema de optimización se inicia repartiendo a los estudiantes la ficha del problema, luego se les señala que lean las indicaciones, que resuelvan de manera individual y que escriban todos los argumentos y/o procedimientos que usen para responder las preguntas planteadas en cada ítem y, finalmente, se les pide guardar el archivo GeoGebra en el escritorio de la computadora para su posterior análisis. Además, se hizo un cierre

Problema	Descripción	Duración
1	El objetivo de este problema es que los estudiantes coordinen registros de representación semiótica. Para ello, se les presenta la ficha del problema de optimización, la cual contiene una serie de cinco ítems que orientan al estudiante a resolver el problema. Además de la ficha, también se les proporciona un archivo GeoGebra, el cual deben manipular para responder algunos de los ítems planteados y que posteriormente lo conducen a dar la solución del problema. Para tal fin, deben movilizar sus conocimientos de derivada de funciones de una variable real; es decir, debe hacer tratamientos en el registro gráfico con ayuda del GeoGebra.	40 min.
2	El objetivo del segundo problema es el mismo que del primero, con la diferencia que ya no se proporciona a los estudiantes ningún archivo GeoGebra y tampoco se le da ítems, solamente se les presenta el enunciado del problema de optimización y se le pide que lo resuelvan con ayuda del GeoGebra. Para ello, debe seguir un procedimiento similar a lo hecho en la resolución del problema 1.	20 min.

Tabla 1: Descripción de las unidades de análisis. Fuente: Elaboración propia.

de dicho problema poniendo énfasis en las dificultades que se notaron durante su desarrollo.

El objetivo de este problema se indica en la Tabla 1, además puede ver la ficha del problema en Anexo 1.

El problema que se presenta a los estudiantes está en lengua natural y es el siguiente:

> *Dos postes de 10 m y 12 m distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo (alineado entre los postes) con los extremos superiores de los postes.*

En el primer ítem, se pide: "Determine la expresión matemática que modela la longitud del cable, en función de la distancia de uno de los postes al punto donde se debe fijar el cable" y se da como sugerencia que represente geométricamente el problema para determinar la expresión matemática pedida.

El objetivo de este ítem es que los estudiantes transiten del registro en lengua natural al registro figural; es decir, deben hacer una representación geométrica del problema, tal como se ve en la figura 3.

Se considera que con ayuda de esta representación figural y usando propiedades geométricas, específicamente el Teorema de Pitágoras, el estudiante debe realizar tratamientos algebraicos para hacer la conversión del problema del registro figural al registro algebraico; es decir, con ayuda de esta representación figural, los estudiantes deben determinar la función en una variable real que modela la longitud del cable.

Una representación algebraica que los estudiantes podrían determinar es:

$$f(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{144 + (30 - x)^2};$$
$$0 \leq x \leq 30,$$

Donde $f(x)$ representa la longitud del cable en metros y x la distancia del punto A al punto E en metros.

Como se puede observar, los estudiantes no solo deben determinar la función que modela la longitud del cable, sino también la restricción de la variable o, en otras palabras, el dominio de la función. Si los estudiantes logran ello, se puede decir que han logrado coordinar el registro en lengua natural con el registro algebraico.

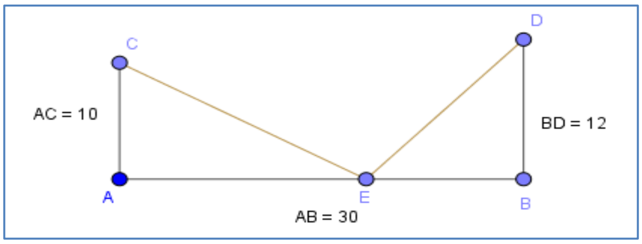

Figura 3: Representación figural del problema de optimización.
Fuente: Elaboración propia.

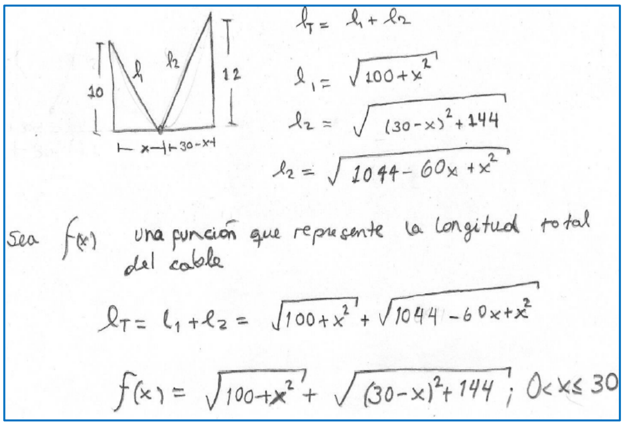

Figura 4: Procedimiento para el primer ítem del estudiante A.
Fuente: Cruzado (2018, p. 62).

Al analizar la ficha del estudiante A, se observa que en su resolución hizo un procedimiento detallado, como se puede ver en la figura 4; sin embargo, no definió variables en lengua natural, pero sí los indicó en el registro figural.

Además, se puede observar que el estudiante A hizo una representación figural del problema, luego una conversión del registro figural al registro algebraico y en este último registro, previo tratamiento algebraico, llegó a determinar la función que modela la longitud del cable y su respectiva restricción o dominio; es decir, el estudiante hizo tratamientos y conversiones entre el registro en lengua natural, figural y algebraico.

Sin embargo, en el registro en lengua natural, presenta algunas dificultades, ya que, por ejemplo, no definió la variable. Por tanto, se puede decir que lo hecho por el estudiante está en contraste con lo que esperaba el investigador y se concluye que éste pudo coordinar el registro en lengua natural con el registro figural.

También se muestra que el estudiante estableció la función, para lo cual usó el Teorema de Pitágoras y relacionó la distancia del punto fijado en el suelo hacia los postes como la variable independiente. Esto lo hace en la representación figural, como se puede observar en la figura 4

En ese mismo sentido, de los apuntes hechos de la profesora observadora, se tiene que los estudiantes establecieron la función, para lo cual usaron el Teorema de Pitágoras y que relacionaron la distancia del punto fijado en el suelo hacia los postes como la variable independiente. Esto lo hacían en la representación figural, aunque no lo definieron en lengua natural, estando en concordancia con lo descrito anteriormente por el investigador.

El enunciado del segundo ítem dice, "Con ayuda del GeoGebra, represente gráficamente la función definida en el ítem a). Después, con la herramienta "punto en objeto", ubique un punto sobre la representación gráfica de la función, luego arrastre dicho punto e identifique sus respectivas coordenadas. ¿Qué indican los valores de las coordenadas del punto A en el contexto del problema? Explique."

El objetivo de este ítem es que el estudiante transite del registro algebraico al registro gráfico y luego al registro en lengua natural. Por ello, se espera que el estudiante, con ayuda del GeoGebra, haga la representación gráfica de la función definida en el primer ítem, tal como se ve en la figura 5

Luego, usando la herramienta "punto en objeto" del GeoGebra, debe ubicar un punto cualquiera sobre la gráfica de la función e identificar sus coordenadas. Una vez hecho esto, se espera que responda que la ordenada del punto indica la longitud del cable cuando la distancia del punto ubicado en el suelo hacia un poste es el valor de la abscisa; es decir, debe responder lo que indican las coordenadas del punto en lengua natural.

Por ejemplo, si ubicase el punto $A(9{,}14; 37{,}61)$ podría responder que "las coordenadas de ese punto indican que la longitud del cable es $37{,}61m$ cuando la distancia del primer poste al punto fijado en el suelo es $9{,}14m$"

Por lo tanto, la finalidad del ítem es que el estudiante logre comprender que la distancia de uno de los postes al punto donde se fija el cable está representada en el eje X y la longitud del cable está representada en el eje Y. Si el estudiante logra esta comprensión y redacta su argumento, se puede decir que el estudiante coordina el registro gráfico con el registro en lengua natural.

Sin embargo, al analizar la ficha del estudiante A, se observó que solo indica las coordenadas de un punto sobre la gráfica, ya que en el protocolo del GeoGebra se observa que el estudiante ingresó la función al Software y ubicó un punto sobre la gráfica; es decir, hizo un tratamiento en el registro gráfico, pero no respondió a la pregunta planteada, probablemente no lo hizo porque no logró coordinar el registro gráfico con el registro en lengua natural.

En concordancia con lo descrito en el párrafo anterior, al revisar los protocolos de GeoGebra, se

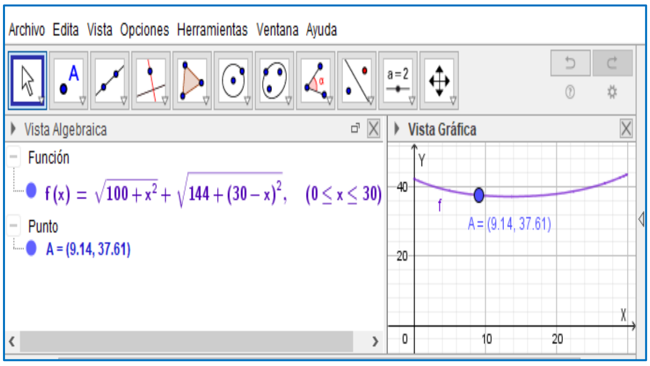

Figura 5: Representación gráfica de la función definida en el primer ítem.
Fuente: Cruzado (2018, p. 65)

ve que los estudiantes ingresaron la función al Software, manipularon un punto sobre la gráfica y observaron cómo cambiaron las coordenadas de dicho punto, lo cual indica que los estudiantes hacen tratamientos en el registro gráfico; sin embargo, no coordinan dicho registro con el registro en lengua natural, ya que no responden a la pregunta planteada.

En el tercer ítem se pide: "En base a la representación gráfica anterior, ¿Dónde se debe ubicar el punto sobre el suelo para fijar el cable de tal modo que su longitud sea mínima? Explique detalladamente."

La finalidad de este ítem es que el estudiante conjeture en qué punto se debe fijar el cable para que su longitud sea mínima y esto lo podría lograr haciendo tratamientos en el registro gráfico con ayuda del GeoGebra. Por ello, se espera que arrastre el punto A que ubicó en el segundo ítem y distinga sus coordenadas e identifique cuándo se da la longitud mínima del cable, tal como se observa en la figura 6, y de este modo se piensa que el estudiante debería responder que la longitud mínima del cable es de $37{,}2\ m$ y se ubica a $13{,}7\ m$ del poste de $10\ m$.

Es evidente que, para que los estudiantes respondan lo planteado en el párrafo anterior, deben tener claro lo que significan las coordenadas del punto, en términos de la teoría de Registros de Representación Semiótica, ya que deberían hacer tratamientos en el registro gráfico, luego hacer una conversión para el registro en lengua natural y a la vez explicar el por qué; es decir, en términos de Duval, deberían coordinar dichos registros.

Por otro lado, al analizar el protocolo del GeoGebra usado por el estudiante A, se observa que realizó lo que se había previsto en los resultados esperados por el investigador; es decir, hizo tratamientos en el registro gráfico para ubicar el punto donde se da la longitud mínima del cable e incluso lo grafica en su ficha, tal como se puede observar en la Figura 7; sin embargo, no respondió adecuadamente a la pregunta planteada, ya que escribió que en el punto $13{,}81$ la función $f(x)$ es mínimo, pero indica que $f(13{,}81) = 37{,}2$ (ver figura 7), pero es una respuesta netamente matemática y se esperaba que interprete este resultado en el contexto del problema; es decir, que diera una respuesta en lengua natural.

Por lo descrito, se evidencia que el estudiante hizo tratamientos en el registro gráfico y no tuvo problemas para ubicar el punto donde se da la longitud mínima del cable, pero no hay una coordinación entre el registro gráfico y el registro en lengua natural, lo cual ya había sido evidenciado en el ítem anterior.

A continuación, se muestra el enunciado del cuarto ítem: Abra el archivo **Función.ggb** y arrastre el punto A ubicado sobre la gráfica de la función f y en base a su observación, responda:

- ¿En qué intervalo la función crece? Explique.
- ¿En qué intervalo la función decrece? Explique.

Este ítem está compuesto por dos sub ítems y su finalidad es que los estudiantes movilicen el concepto de derivada para determinar en qué intervalo la función f crece y en qué intervalo decrece. Para ello, los estudiantes primero deben abrir el archivo GeoGebra que se les indica, ya que en el mismo están las gráficas de la función f y de su derivada, además sobre la gráfica de f está ubicado un punto A, el cual está enlazado con un punto llamado B, ubicado sobre la gráfica de la derivada de f, con la finalidad de que arrastre el punto A e identifique, en el registro gráfico, las coordenadas de ambos puntos y, movilizando el concepto de derivada, debe responder en qué intervalo la función crece y en que intervalo decrece.

Los estudiantes previamente deben entender que la ordenada del punto B representa la derivada de f evaluada en su respectivo valor de la abscisa, luego, con ese conocimiento, ya podrían responder las preguntas planteadas en los sub items i) y ii).

En ese sentido, para responder al sub ítem i), los estudiantes deben saber que cuando la derivada es mayor a cero la función crece. Por esto, se espera que los estudiantes realicen tratamientos en el registro gráfico e indiquen que el intervalo donde la función

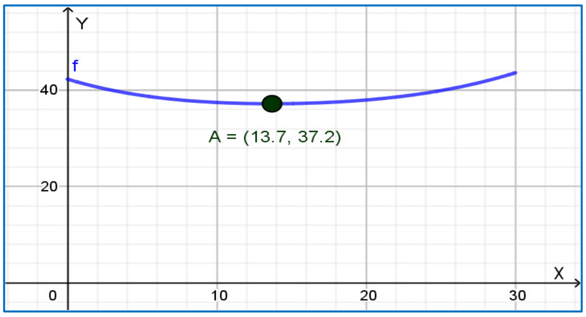

figura 6: Mínimo de la función f hallado con ayuda del GeoGebra.
Fuente: Cruzado (2018, p. 67)

es creciente es $]13{,}64; 30]$ aproximadamente, pues el valor de la derivada es positivo.

Al analizar la ficha del estudiante A, se observa que sí identificó el intervalo de crecimiento de la función e indicó que tal intervalo es $[13{,}83; 30]$. Esto lo logró, según indicó, gracias a que notó que desde el punto $(13{,}83; 37{,}2)$ se traza una recta con pendiente mayor o igual a cero (ver figura 8), donde se entiende que el estudiante quiere decir que, a partir de ese punto a la derecha, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función es positiva, lo que indica que este estudiante tiene claro el concepto de la derivada, ya que teóricamente la pendiente de la recta tangente en un punto es el valor de la derivada de la función en dicho punto y, por ende, este estudiante hace tratamientos en el registro gráfico y coordina con el registro en lengua natural, pues explica por qué, en dicho intervalo, la función crece.

De modo similar, en el sub ítem ii), se espera que el estudiante indique que el intervalo, donde la función es decreciente es $[0; 13{,}64[$ aproximadamente, ya que el valor de la derivada, en ese intervalo, es negativo.

En contraste con los resultados previstos, el estudiante A respondió que la función decrece en el intervalo $[0; 13{,}83]$, aunque su explicación no fue tan clara, ya que indicó que en el punto $(0;\ 42{,}31)$ la gráfica decrece y que en ese punto se trazan rectas tangentes a la curva con pendiente menor a cero (ver figura 9).

Se cree que el estudiante quería decir que en ese punto la función empieza a decrecer, pero no lo explica de esa manera; es decir, no hubo una coordinación entre el registro gráfico y el registro en lengua natural, pero a pesar de ello también indica que la función decrece cuando su derivada es menor a cero, lo cual indica que sí hace tratamientos en el registro gráfico.

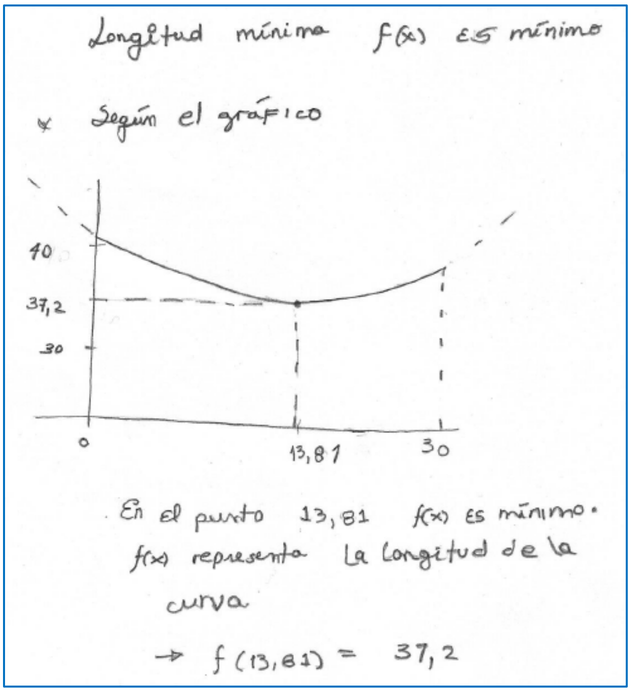

Figura 7: Respuesta para el tercer item del estudiante A
Fuente: Cruzado (2018, p. 68)

Por lo descrito anteriormente, se puede decir que se lograron de manera parcial los resultados previstos, ya que este estudiante no solo usó el valor de la derivada para determinar en qué intervalo la función crece o decrece, sino que también usó el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto indica que dicho estudiante moviliza los conceptos asociados a la derivada para determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función; sin embargo, queda evidenciado una vez más que cuando tienen que dar una respuesta en lengua natural tienen dificultades.

Respecto a este ítem, la profesora observadora señaló en la ficha de observación que un estudiante, del total de los participantes, intentó derivar algebraicamente la función para hallar sus raíces; es decir, para hallar los valores críticos, el cual es un procedimiento algebraico para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, lo que indica que, dentro del grupo de estudiantes participantes, había un estudiante que estaba familiarizado con el proceso algorítmico (algebraico) y no usó el registro gráfico proporcionado por el GeoGebra.

Finalmente, en el quinto ítem, se pide a los estudiantes lo siguiente "En base al ítem anterior y con ayuda del GeoGebra muestre matemáticamente lo explicado en el ítem c)".

La intención de este ítem es que los estudiantes expliquen, en lengua natural, cómo usan lo hecho en

i. ¿En qué intervalo la función crece? Explique.

$f(x)$ CRECE DESDE $[13,83\ ;\ 30]$

* En la gráfica mostrada, NOTAMOS QUE DESDE EL PUNTO $(13,83; 37,2)$ SE TRAZA UNA RECTA CON PENDIENTE: $m \geq 0$

Figura 9: Respuesta para el sub ítem i) del cuarto ítem del estudiante A
Fuente: Cruzado (2018, p. 71)

el ítem anterior para que, con ayuda de algún método para hallar extremos relativos o absolutos de funciones reales de variable real, justifiquen o validen que lo conjeturado en el tercer ítem es la longitud mínima del cable. Para tal fin, los estudiantes deben coordinar los registros en lengua natural, algebraico y gráfico.

Por ello, se espera que los estudiantes consigan realizar el siguiente análisis: $x = 13{,}62$ es un valor crítico de la función, ya que el valor de la derivada es cero, por lo tanto, puede ser un máximo o mínimo de f, pero, de acuerdo al cuarto ítem, se determinó que cuando $x \in [0; 13{,}62\rangle$ la función decrece, pues $f'(x) < 0$ y cuando $x \in \langle 13{,}62; 30]$ la función crece, pues $f'(x) > 0$. Entonces, usando el criterio de la primera derivada, se tiene que un mínimo relativo de la función f se da cuando $x = 13{,}62$. Además, si se evalúa en los extremos del intervalo donde se define f, se tiene que $f(0) = 42{,}31$ y $f(30) = 43{,}62$, pero como $f(13{,}62) = 37{,}2$, entonces, usando el método del intervalo cerrado para hallar extremos absolutos de una función real de variable real, se tiene que el mínimo absoluto de f es $37{,}2$ y se da cuando $x = 13{,}62$. De esta manera, el estudiante justifica matemáticamente que lo conjeturado en el tercer ítem es la longitud mínima del cable y dicho cable se debe fijar a una distancia de $13{,}62$ metros del poste de la izquierda.

Al analizar los resultados del estudiante A, se observa que llegó a justificar que la longitud mínima del cable es $37{,}2$. Para ello, indicó que usó el GeoGebra; es decir, usa el registro gráfico para determinar que $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \langle 13{,}83; 30\rangle$ y $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in \langle 0; 13{,}83\rangle$ y además indica que en $13{,}83$ la derivada se hace cero, por tanto $x = 13{,}83$ es un número crítico. Por ello, en este valor, la función tiene un mínimo absoluto y que al evaluar la función, en dicho valor, resulta que $f(13{,}83) =$

ii. ¿En qué intervalo la función decrece? Explique

$f(x)$ DECRECE DE $[0;\ 13,83]$

* EN EL PUNTO $(0; 42,31)$ LA GRÁFICA DECRECE. EN ESTE PUNTO SE TRAZAN RECTAS TANGENTES A LA CURVA CON PENDIENTE:

$m < 0$

* $f(x)$ DECRECE CUANDO $f'(x) < 0$

Figura 8: Respuesta para el sub item ii) del cuarto item del estudiante A
Fuente: Cruzado (2018, p. 72)

$37{,}2$ y, por ende, $37{,}2$ es la longitud mínima del cable.

Por lo comentado en el párrafo anterior, se afirma que el estudiante A movilizó el concepto de derivada en el registro gráfico para hallar el mínimo de la función y además justificó su proceso en lengua natural. Por tanto, hasta este último ítem, se advierte una mejora en cuanto a la coordinación de registros con respecto a los primeros ítems, aunque también cabe señalar que existen aún algunas deficiencias en la formalidad matemática, como por ejemplo en los intervalos de crecimiento y decrecimiento, ya que el estudiante consideró intervalos abiertos y no semi abiertos, como deberían ser. Asimismo, cuando indica que en $x = 13{,}62$ se da el mínimo absoluto, no justificó por qué o qué criterio utilizó para afirmar lo mencionado, ya que se esperaba que usara el criterio de la primera derivada o el método del intervalo cerrado para dicho fin; sin embargo, esto no afecta a que la respuesta sea correcta, ya que no había más puntos críticos.

Finalmente, se comenta que, si desea revisar un análisis más detallado, tanto del primer problema de optimización como del segundo problema de optimización, puede ver Cruzado (2018).

4 Consideraciones finales

En la investigación, los aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica utilizados permitieron realizar el análisis de las acciones de los estudiantes cuando resuelven un problema de optimización con ayuda del GeoGebra. Además, el estudio de caso favoreció orientar la investigación, ya que esta metodología nos permitió organizar el desarrollo de la investigación, pues el uso de diferentes fuentes de recolección de datos permitió realizar la triangulación de la información; es decir, se contrastó la información obtenida de las fichas de los problemas resueltos por los estudiantes, de los archivos GeoGebra, las fichas de observación y los resultados previstos por el investigador.

Se identificó que los estudiantes, cuando resuelven un problema de optimización con ayuda del GeoGebra, movilizan el registro figural, algebraico y gráfico, además de realizar tratamientos y conversiones en dichos registros.

En el primer problema de optimización, se identificó que los estudiantes tienen dificultades para plantear la función que modela al problema de optimización, tal como fue manifestado en investigaciones de referencia. También se identificó que una vez que los estudiantes tienen el problema de optimización en el registro gráfico, movilizan el concepto de derivada haciendo uso del GeoGebra.

En el segundo problema de optimización, se observó una mejoría en cuánto a la coordinación de los registros, ya que los estudiantes hicieron tratamientos y conversiones entre dichos registros, logrando determinar la solución de dicho problema con menor intervención del docente investigador.

5 Referencias Bibliográficas

Baccelli, S., Anchorena, S., Moler, E., & Aznar, M. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 84, 99-113. Recuperado de: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/QRDM_20_suppl1_Guzman_al.pdf

Bustos, L., & Vásquez, J. (2016). Uso del Software Carmetal para potenciar el aprendizaje de la noción de derivada al resolver problemas de optimización. (Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia). Recuperada de http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2686

Cruzado, E. (2018). Problemas de optimización mediados por el GeoGebra que movilizan el concepto de derivada de funciones reales de variable real en estudiantes de Ingeniería. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Cuevas, A., Rodríguez, A., & González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 2335-2345). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/6205/

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Encinas, A., Ávila, R., & De Las Fuentes, M. (2013). Eficacia en la resolución de problemas de optimización por estudiantes de Ingeniería. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 663-671). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 20, 165-193. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/646/64602005.pdf

Navarro, L., Robles, A., Ansaldo, J., & Castro, F. D. (2016). Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 171-187. Recuperado de: http://www.asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/article/view/32

Otero, D. (2012). Propuesta de intervención en el aula para resolver problemas de optimización relacionados con la minimización de costos, implementando como apoyo el Software GeoGebra. (Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia). Recuperado de: http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/132

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 19(25), 105-132. Recuperado de: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3007

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas* (7 ed.). México: Cengage Learning.

Yin, R. (2009). *Case Study Research: Design and Methods.* Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Como citar este artículo:

Cruzado Q., E., Salazar, J.V.F (2017). Coordinación de registros de representación semiótica: un estudio de caso con problemas de optimización. *RECME. Revista Colombiana de Matemática Educativa* 2(1), 39-50.

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación *Tecnologías y Visualización en Educación Matemática* – TecVEM por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Anexo 1

PRIMER PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Estudiante: ....

Problema adaptado de Haro F. (2013).

Dos postes de 10 m y 12 m distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo
(alineado entre los postes) con los extremos superiores de los postes.

De acuerdo a la información dada:

a) Determine la expresión matemática que modela la longitud del cable, en función de la distancia de uno de los postes al punto donde se debe fijar el cable.

Sugerencia: Puede representar geométricamente el problema para determinar la expresión matemática pedida.

b) Con ayuda del Geogebra, represente gráficamente la función definida en el ítem a). Después, con la herramienta "punto en objeto", ubique un punto sobre la representación gráfica de la función, luego arrastre dicho punto e identifique sus respectivas coordenadas.

¿Qué indican los valores de las coordenadas del punto A en el contexto del problema? Explique.

c) En base a la representación gráfica anterior:

¿Dónde se debe ubicar el punto sobre el suelo para fijar el cable de tal modo que su longitud sea mínima? Explique detalladamente.

d) Abra el archivo **Función.ggb** y arrastre el punto A ubicado sobre la gráfica de *f* y en base a su observación, responda:

i. *¿En qué intervalo la función crece? Explique.*

ii. *¿En qué intervalo la función decrece? Explique.*

e) En base al ítem anterior y con ayuda del Geogebra, muestre matemáticamente lo explicado en el ítem c).