LA INTEGRACIÓN DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA[1]

Marta Molina
martamg@ugr.es
Universidad de Granada

RESUMEN

Se describe una propuesta curricular basada en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el currículo de la Educación Primaria, la cual está siendo objeto de numerosas investigaciones en la actualidad. En este contexto, partiendo del constructo Pensamiento Relacional, se presentan resultados de un experimento de enseñanza, basado en el trabajo con sentencias numéricas, que ejemplifica el potencial de dicha propuesta y permite evidenciar la capacidad de alumnos de tercer curso de Educación Primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

ABSTRACT

We describe a curricular proposal, based on the integration of algebraic ways of thinking in the elementary curriculum, which is currently aim of numerous research studies. In this context and by using the construct Relational Thinking, we present some results from a teaching experiment based on working with number sentences. It exemplifies the potential of this proposal and allows us to evidence third grade students´ capacity to work algebraically in arithmetic.

1 La investigación que aquí se presenta ha sido desarrollada dentro del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de I + D + I, como parte de una tesis doctoral (Molina, 2007) dirigida por la Dra. Encarnación Castro y el Dr. Enrique Castro. Este trabajo se realiza dentro del proyecto "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en Educación Matemática" (SEJ2006-09056) financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Económica Europea.

En las últimas dos décadas se han realizado, a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la Educación Primaria. Esta propuesta curricular, conocida con el nombre de Early-Algebra (EA), plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar, desde los primeros cursos escolares (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000). En términos de Kaput (2000), la propuesta consiste en la "algebrización del currículo".

Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. Para ello, se recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2005).

Esta propuesta persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del álgebra. Se considera que diferentes modos de pensamiento algebraicos pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la Educación Primaria y tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética. Estos modos de pensamiento pueden favorecer, en los alumnos, el desarrollo conceptual de matemáticas más profundas y complejas, desde edades muy tempranas (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 1998). En particular, se considera que unas matemáticas elementales "algebrizadas" darán poder a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar generalidad.

La propuesta Early-Algebra es diferente de lo que se denomina pre-álgebra. Ambos son enfoques relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra. Entre sus diferencias destacamos su finalidad. La pre-álgebra persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas. En cambio, la EA tiene unos objetivos más amplios, como ya se ha detallado, y considera que las dificultades que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del álgebra son debidas principalmente al modo en que las matemáticas elementales son introducidas y trabajadas. Otra diferencia radica en que la pre-álgebra no cuestiona la idea de que la enseñanza del álgebra comience en la Educación Secundaria (Carraher y Schliemann, 2007).

VISIÓN DEL ÁLGEBRA EN LA PROPUESTA EARLY-ALGEBRA

La EA va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al., 2003).

Esta amplia visión del álgebra no es nueva en el panorama investigador. Usiskin (1988), Bednarz, Kieran y Lee (1996) y Drijvers y Hendrikus (2003) son algunos de los autores que han prestado atención a la multidimensionalidad del álgebra. La identificación de componentes o concepciones del álgebra ha sido utilizada para proponer diferentes enfoques en la introducción y enseñanza del álgebra escolar, como la resolución de clases específicas de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la transformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable y de función (Bednarz et al., 1996).

Los estándares del NCTM (2000) comparten esta visión multidimensional al distinguir como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Conexión entre la aritmética y el álgebra

La mayoría de las investigaciones realizadas en relación con la EA se centran en la aritmética como acceso clave al álgebra (Warren, 2003) como consecuencia de la intensa relación existente entre ambas. Sobre esta conexión dual, destacamos dos perspectivas compatibles con la EA.

Drijvers y Hendrikus (2003) argumentan que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis.

Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) presentan una perspectiva diferente. Según estos autores, el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética: "*la aritmética necesita del pensamiento algebraico"* (Mason et al., 2005, p. 59), "*la aritmética es imposible sin álgebra*" (Hewitt, 1998, p. 19). La razón de estas afirmaciones es que la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Dicho aprendizaje implica que los alumnos interioricen generalidades que se encuentran implícitas, relativas a la estructura de la aritmética. Desde esta perspectiva, la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado (Hewitt, 1998). De este modo, por ejemplo, ser capaz de contar requiere trabajar algebraicamente ya que es necesario tener una forma, estructurada y organizada, de contar.

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LA PROPUESTA EARLY-ALGEBRA

Los trabajos en los que se describe y defiende la EA permiten identificar varias de las razones que motivaron su origen (Blanton y Kaput, 2005; Freiman y Lee, 2004; Kaput, 1998, 2000; Lins y Kaput, 2004). Por una parte, la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de esta sub-área de las matemáticas y la preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar formas más efectivas de abordar su enseñanza. Por otra, el reconocimiento, reciente, de que los niños desde muy jóvenes pueden hacer mucho más de lo que se les suponía previamente ha llevado a proponer, para las aulas de Educación Primaria, una actividad matemática que implique modos de pensamiento más elevados. Adicionalmente, ha influido la constatación de que los niños necesitan de un periodo prolongado de tiempo para desarrollar los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar.

En general, hasta principios de los 90, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y su potencial de desarrollo. La mayoría de las investigaciones realizadas durante la década de los 80 y 90 estuvo dedicada a producir sistemas de etapas de desarrollo o a elaborar catálogos de errores cometidos por los alumnos. Estos trabajos contribuyeron, en general, a la asunción de que es mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004).

A principios de los noventa algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva significativamente diferente: (a) al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico, (b) al sugerir que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada, y (c) al incorporar las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Lins y Kaput, 2004). En esta época se defiende y se hace manifiesta la consideración de que los alumnos llegan al colegio con capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, y que el desarrollo del razonamiento algebraico es, en gran parte, cuestión de explotar estas capacidades naturales de los alumnos (Mason, 1996).

En décadas anteriores, algunos estudios (Davydov, 1962; Freudenthal, 1974) abordaron la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la Educación Primaria siguiendo la asunción teórica propia de la Escuela Soviética de que el aprendizaje precede al desarrollo. En la década de los ochenta, Davis (1985) y Vergnaud (1988) argumentaron la necesidad de iniciar, en la Educación Primaria, una enseñanza del álgebra que prepare a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra. Esta propuesta no se refería al álgebra formal propia de los últimos cursos de Educación Secundaria, sino *"a una pensada exploración de ideas algebraicas"* (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006, p.196). Investigaciones realizadas en los 70 y 80 habían ayudado a observar que el álgebra podía proveer a los alumnos con muchas oportunidades para la resolución de problemas y para el desarrollo de creatividad, originalidad y una comprensión profunda de las matemáticas (Davis, 1985).

En la actualidad va en aumento el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la Educación Primaria (Carraher et al., 2006), rompiendo así con la consideración de que el álgebra está fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los alumnos jóvenes.

La observación, en el aprendizaje del álgebra, de dificultades como la limitada interpretación del signo igual, los concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, han sido atribuidas previamente a la inherente abstracción del álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos (Schliemann et al. 2003). En cambio, otros investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Brizuela y Schliemann, 2003; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2006; Fujii, 2003; Kaput, 2000) sugieren que las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida. Estudios empíricos recientes, en línea con la EA, apoyan esta última afirmación, al menos en relación a ciertos contenidos y modos de pensamiento algebraicos, dando muestras de la capacidad de alumnos de Educación Primaria de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos.

Concretamente se han aportado evidencias de que estos alumnos pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter et al., 2003), pensar sobre operaciones aritméticas como funciones, en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003), trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000), usar representaciones algebraicas, como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas (Brizuela y Schliemann, 2003), y representar y analizar problemas en los que hay involucradas cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad, utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003), por citar algunos ejemplos.

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que *"cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tienden a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida"* (Bastable y Schifter, 2007, p. 2).

El NCTM también ha mostrado apoyo a la EA adelantando la edad en la que recomienda la introducción del álgebra en el currículo escolar y ampliando su concepción del álgebra. En la primera versión de los Estándares (NCTM, 1989) se recomendaba introducir el álgebra, como generalización de la aritmética, en los dos últimos cursos de Educación Primaria y dos primeros de Educación Secundaria. Posteriormente, en la última edición de los Estándares del NCTM, se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a *"construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior"* (N.C.T.M., 2000, p. 37).

INVESTIGACIONES RECIENTES

Debido a la cada vez mayor difusión de la EA, se han realizado recientemente una gran diversidad de estudios empíricos que exploran este enfoque. Estos trabajos ponen de manifiesto dos perspectivas en línea con esta propuesta. Algunos autores consideran que se debe promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños. Otros, en cambio, opinan que los cambios en la forma de pensar de los niños son promovidos, de mejor modo, mediante el uso de herramientas, como notaciones o diagramas, que les permitan operar en un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004).

Otros aspectos en los que se detectan discordancias entre unos autores y otros es qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas, qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico y qué enfoques pedagógicos y tipo de formación de profesores deben promoverse (Carraher y Schliemann, 2007).

Desde una u otra perspectiva, en la última década se ha explorado, entre otros aspectos, la viabilidad de esta propuesta, sus diferentes dimensiones, su interpretación y puesta en práctica por docentes, y las capacidades y modos de pensamiento algebraicos que ponen de manifiesto los alumnos de Educación Primaria (Bastable y Schifter, 2007; Blanton y Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Sutherland, 2007). Estos autores, reconociendo el potencial de la EA, señalan la necesidad de:

a) explorar la puesta en práctica de esta propuesta y analizar el desarrollo de pensamiento y razonamiento algebraico por alumnos de Educación Primaria,
b) identificar qué contenidos algebraicos pueden y deben ser presentados, promovidos y enfatizados en el aula de Educación Primaria y cómo pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras sub-áreas de las matemáticas,
c) analizar qué herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) pueden conducir con éxito, a los alumnos, a desarrollar modos algebraicos de pensar, así como,
d) estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores (Lins y Kaput, 2004).

Early-Algebra y aritmética

Un gran número de investigaciones realizadas en relación con la EA se centran en el contexto de la aritmética (Carraher et al., 2000, Carraher et al., 2006; Kaput, 2000; Subramaniam, 2004; Warren, 2004). Estos autores, siendo conscientes de que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos, proponen trabajar con actividades que faciliten la transición e integración de ambas, mediante un enfoque estructural que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares y que favorezca el desarrollo de modos de pensamiento algebraicos. El objetivo es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético; enfoque que conduce a una enseñanza de la aritmética más atractiva y promueve un aprendizaje con comprensión.

Concretamente, desde el contexto de la Aritmética, se ha abordado la introducción del concepto de variable previamente a la introducción del simbolismo algebraico (Carpenter et al., 2003; Fujii, 2003), el proceso de generalización y la prueba y justificación de conjeturas (Carpenter y Franke, 2001), el estudio de relaciones funcionales (Brizuela y Lara-Roth, 2001), el desarrollo y uso de conocimiento estructural de la aritmética (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005; Warren, 2001), la comprensión del signo igual (Freiman y Lee, 2004; Koehler 2002; Molina y Ambrose, en prensa; Molina, Castro y Ambrose, 2006; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998) y el uso de simbolismo algebraico para representar funciones o propiedades (Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2001), entre otras cuestiones.

PENSAMIENTO RELACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE IGUALDADES Y SENTENCIAS NUMÉRICAS

Nuestro interés en la EA se concreta en el análisis del uso de pensamiento relacional por parte de los alumnos. Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas (algebraicas), consiste en la actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas (algebraicas), considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (Molina, 2006).

Este constructo es semejante a lo que Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) denominan meta-estrategias conceptuales, en contraposición con las meta-estrategias procedimentales. Estas últimas se basan en la aplicación de ciertos procedimientos estándares aprendidos, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el pensamiento relacional y las meta-estrategias conceptuales hacen referencia a modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que la definen para construir la estrategia de resolución, y dejando a un lado la aplicación de métodos estándares. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad.

Carácter algebraico

El uso de pensamiento relacional, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, comprende (o puede comprender) varios aspectos que evidencian su carácter algebraico:

- La consideración de expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, promoviendo un enfoque no computacional de la aritmética al alejar la atención del valor numérico de las expresiones, es decir, de la obtención del resultado de las operaciones expresadas.
- La concepción de las expresiones como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y transformadas, y, por tanto, la aceptación de la falta de clausura.

- El favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional, facilitando el avance hacia la concepción de las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos.
- La potenciación de la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones, primeros pasos en el proceso de su generalización.
- El uso del lenguaje horizontal, tradicionalmente más propio del álgebra que de la aritmética.
- El favorecer la exploración de la igualdad como la representación de una relación estática entre dos expresiones así como la interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias.
- La potenciación de un enfoque aplicable a la resolución de ecuaciones, en el contexto de la resolución de igualdades numéricas abiertas. En el álgebra, los alumnos deben manejar expresiones en las que aparecen operaciones que no son posible realizar (Ej. $3x+7y-4z$). Tienen, por tanto, que pensar en relaciones entre expresiones, por ejemplo, para averiguar el modo en que las ecuaciones pueden ser transformadas para resolverlas o en que las expresiones algebraicas pueden ser comparadas. A este respecto, conjeturamos que el pensamiento relacional puede ayudar a los alumnos a desarrollar métodos propios, personales y flexibles, para la resolución de ecuaciones. Algo que suele trabajarse en el aprendizaje de la aritmética pero no en el aprendizaje del álgebra.

Importancia del pensamiento relacional en el aprendizaje de la aritmética y el álgebra

En la Aritmética, el trabajo centrado en el uso y desarrollo de pensamiento relacional persigue que el alumno desarrolle su comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas, antes de que sea necesario trabajar con variables e incógnitas, y que se trabajen de manera explícita las relaciones que subyacen a la aritmética, las cuales no son habitualmente articuladas en el aula.

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional representan un cambio fundamental de un foco aritmético (procedimental, centrado en el cálculo de respuestas) a un foco algebraico (estructural, centrado en examinar relaciones). El uso de pensamiento relacional ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y hace que los alumnos piensen sobre las propiedades de las operaciones, la manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a las expresiones, favoreciendo un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios), el desarrollo de fluidez en el cálculo y la adquisición de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Molina, 2006).

Promover el uso de pensamiento relacional en el trabajo con expresiones aritméticas facilita la integración eficaz de las relaciones y propiedades aritméticas en la actividad matemática y que el conocimiento y capacidades que los alumnos desarrollan durante la Educación Primaria estén mejor alineados con los conceptos y capacidades que son necesarios en el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2005).

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Guiados por la EA y centrados en analizar, entre otros aspectos, el uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por los alumnos, hemos realizado un experimento de enseñanza con un grupo de 26 alumnos de tercero de Educación Primaria. Este estudio se enmarca dentro del paradigma de la investigación de diseño. La metodología utilizada se detalla en Molina (2006). En este apartado describimos brevemente este estudio con la intención de ejemplificar la EA y dar muestras de la capacidad de los alumnos de primaria de utilizar pensamiento algebraico en contextos aritméticos.

El contexto elegido para analizar el uso de pensamiento relacional de los alumnos ha sido la resolución de sentencias numéricas, de suma y resta, basadas en propiedades aritméticas básicas. Con el término sentencia numérica nos referirnos a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo. Estos enunciados puedes ser verdaderos o falsos. Por ejemplo, son sentencias las siguientes expresiones 5+7=9 y $e^{\Pi}=1$. Ocurre que toda sentencia verdadera es una igualdad (por definición las igualdades son siempre verdaderas).

Concretamente, se consideraron sentencias verdaderas y falsas basadas en las siguientes propiedades de la estructura aditiva: conmutativa de la suma (Ej., 75+23=23+75), complementaria de la suma y la resta (Ej., 100+94-94=100), composición/descomposición (Ej., 24--15=24-10-5), compensación (Ej., 53+41=54+40), magnitud (Ej.,7+3=10+3), elemento neutro de la suma (Ej., 0+325=326), elemento neutro de la resta por la derecha (Ej.,125-0=125) y elemento opuesto (Ej.,24-24=0). También se les propuso algunas sentencias basadas en la propiedad reflexiva de la igualdad (Ej., 93 = 93, 5 + 5 = 5 + 5).

El trabajo en el aula, durante seis sesiones repartidas en el periodo de un año, consistió en la discusión de las respuestas de los alumnos y la potenciación del uso de multiplicidad de estrategias, especialmente aquellas que hacen uso de pensamiento relacional. Inicialmente nuestro estudio del uso de pensamiento relacional fue observacional, siendo a partir de la tercera sesión cuando favorecimos su uso y manifestación, preguntando a los alumnos por formas de resolver las sentencias sin realizar las operaciones y mostrando especial apreciación por aquellas explicaciones que lo ponían de manifiesto. No se promovió el aprendizaje de estrategias concretas basadas en el uso de pensamiento relacional, sino la comprensión de las sentencias como totalidades, que expresan una relación entre dos expresiones, y el desarrollo del hábito de observarlas en su totalidad y buscar relaciones entre los términos y expresiones que contienen. Tratamos de ayudar a los alumnos a hacer explícito y a aplicar su conocimiento sobre las propiedades estructurales de la aritmética, que poseían de su experiencia aritmética previa.

A continuación, presentamos parte del análisis del uso de pensamiento relacional evidenciado por los alumnos, realizado a partir de la identificación de las estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias propuestas. Este estudio se realiza de forma más completa y detallada en Molina (2006).

ESTRATEGIAS

En la tabla 1 se presenta una muestra de las explicaciones dadas por los alumnos a la resolución de algunas de las sentencias planteadas. Estas explicaciones, procedentes de extractos de las discusiones realizadas en el aula o de las hojas de trabajo de los alumnos, permiten apreciar la diversidad de estrategias puestas de manifiesto.

Sentencia	**Explicación**
13+11 = 12+12	**“**Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro”.
17-12 = 16-11	“Verdadera porque he hecho una cuenta y otra cuenta y me ha salido lo mismo” (Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 – 05 = 05).

Sentencia	Explicación
19-3 = 18-2	“Es que como dos es menor que tres… [I: Sí]... Pues es más fácil restarlo, entonces he restado dieciocho menos dos, que es más fácil, y dan dieciséis, y el otro diecinueve menos tres dan dieciséis”.
257-34 = 257-30-4	“Falsa, porque en vez de restarle 34 le restan 30 y el cuatro va aparte” (Aparte realiza, mediante el algoritmo de la resta, las siguientes operaciones: 257-34=1223, 257-30=227 y 227-4=223).
122+35-35 = 122	“Verdadera, porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo”. (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157).
75+23 = 23+75	“Es verdadera setenta y cinto más veintitrés dan noventa y nueve y veintitrés más setenta y cinco es el mismo resultado”.
53+41 = 54+40	“Verdadera, porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 [y] te da lo mismo”. (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma el valor numérico de ambos miembros).
51+51 = 50+52	“Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno, si le quitas [uno], cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos”.
7+7+9 = 14+9	“He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés”.
7+15 = 8+15	“Falsa, porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño” (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma el valor numérico de ambos miembros).
11-6 = 10-5	“Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual”.
125-0 = 125	“Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco”.
325+0 = 326	**“**Que es falsa. […] Porque trescientos veinticinco más cero son trescientos veinticinco, y trescientos veintiséis no es nada…”.

Tabla 1: Explicaciones dadas por los alumnos sobre la veracidad o falsedad de algunas de las sentencias propuestas.

Como puede observarse en la Tabla 1, las explicaciones de los alumnos hacen referencia al cálculo de todas o algunas de las operaciones que componen los miembros de las sentencia y a la observación de relaciones numéricas entre los términos de dichos miembros. Teniendo esto en cuenta, al realizar un análisis de las estrategias utilizadas, distinguimos dos modos en los que los alumnos abordan <u>inicialmente</u> la resolución de las sentencias:

- proceden a realizar algún cálculo para hallar y comparar el valor numérico de ambos miembros, o bien,
- observan la sentencia, detectan alguna característica particular de ésta o relaciones entre sus elementos y utilizan cierto conocimiento aritmético relacionado para resolverla.

Según esta distinción diferenciamos entre estrategias tipo HC (hallar y comparar) y estrategias tipo DR (detectar relaciones). Por ejemplo, se identifica el uso de estrategias tipo HC en las diez primeras explicaciones recogidas en la Tabla 1. En las tres explicaciones restantes se identifica el uso de estrategias tipo DR.

Una vez hecha esta distinción, al centrar nuestra atención en el papel del cálculo y del pensamiento relacional en las estrategias evidenciadas por los alumnos, se observa que éstos no siempre siguen su intención inicial y que la riqueza de las estrategias que utilizan es mayor, distinguiéndose ocho diferentes (ver figura 1); la mayoría de ellas no son puramente meta-conceptuales ni puramente meta-procedimentales.

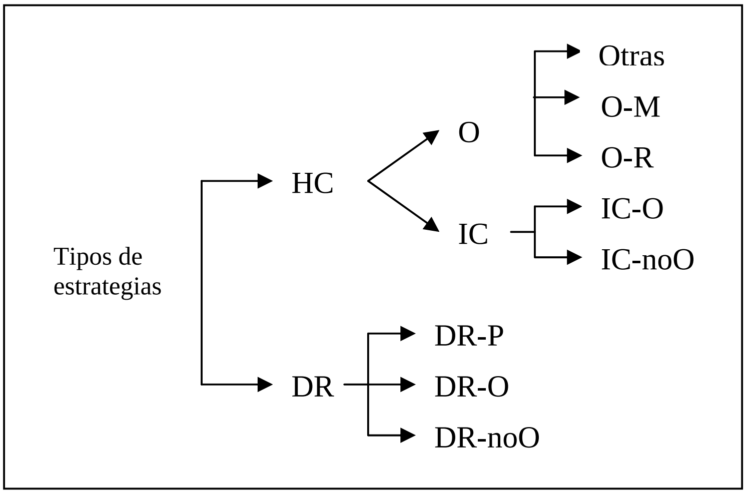

Figura 1: Esquema de las estrategias utilizadas por los alumnos

En el caso de las estrategias tipo HC, en el proceso de realización de cierto cálculo (o al escribir de forma vertical los números a operar), algunos alumnos ponen de manifiesto un cambio de estrategia, al apreciar cierta característica de la sentencia o relaciones entre sus términos, no observadas previamente. Ello les conduce a resolver la sentencia sin necesidad de concluir el cálculo iniciado. En estos casos, el inicio del proceso de cálculo sirve al alumno para tomar conciencia de la composición de la sentencia y prestar atención a sus elementos, favoreciendo la apreciación de relaciones.

Diferenciamos entre estrategias tipo HC-IC (interrupción del cálculo) y estrategias tipo HC-O (operacional), según si se produce, o no, este cambio de estrategia, el cual es apreciado a partir de la comparación de las explicaciones y las anotaciones realizadas aparte por los alumnos, o a partir de explicaciones como la dada por un alumno, durante la discusión de la sesión 3, en la sentencia 51+51=50+52 (ver tabla 1). Este alumno realiza el cálculo de uno de los miembros y, al prestar atención al otro miembro, aprecia algunas relaciones entre los términos, abandonando su estrategia inicial. Otro caso se muestra en la Figura 2 donde se observa como una alumna inicia la escritura en vertical de la operación contenida en el miembro izquierdo de la sentencia, pero no llega a realizar ningún cálculo. Su explicación, “*es verdadera porque es igual*”, sugiere que ha apreciado alguna mismidad entre los miembros de la sentencia. Se aprecia, por tanto, un cambio en su estrategia inicial.

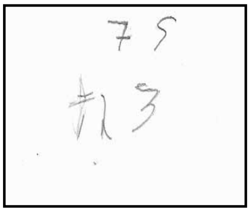

Figura 2: Anotaciones aparte sobre la resolución de la sentencia:
75 + 23 = 23 +75.

En la mayoría de los casos la relación observada por el alumno podía haber sido detectada inicialmente, antes de realizar ningún cálculo, analizando la sentencia. No obstante, la realización de los cálculos, incluso con errores (Ej., ver la resolución de la sentencia 257-34=257-30-4 en la tabla 1), parece ayudarles a tomar conciencia de la estructura y composición de la sentencia.

Dentro de las estrategias tipo HC-O, en las cuales se evidencia dependencia de la realización del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para determinar la veracidad o falsedad de la sentencia, se destacan dos estrategias: O-M y O-R. La primera de ellas se refiere al caso en que, en el proceso de cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, tras calcular el valor numérico de uno de ellos, el alumno detecta que las operaciones presentadas en el otro miembro coinciden con algunos de los cálculos ya realizados (sin necesidad de aplicar la propiedad conmutativa), determinando su valor numérico sin realizar más cálculos. Por ejemplo, una alumna utiliza esta estrategia en la sentencia 7+7+9=14+9 (ver tabla 1). En este caso es necesario escuchar la entonación de la explicación para apreciar que la alumna reconoce la operación contenida en el miembro derecho como una de las operaciones realizadas previamente.

La estrategia O-R consiste, además de en la obtención y comparación de los valores numéricos de ambos miembros, en la detección, a partir de la realización de dicho cálculo, de alguna característica particular de la sentencia o algunas relaciones entre sus elementos, que permiten al alumno determinar la veracidad o falsedad de la misma haciendo uso de algún conocimiento aritmético previo. Al utilizar esta estrategia algunos alumnos aportan dos justificaciones de la veracidad o falsedad de la sentencia: una, basada en la comparación de los valores numéricos de ambos miembros y, otra, haciendo uso de relaciones o alguna característica apreciada. Un ejemplo del uso de esta estrategia es evidenciado por la actuación de una alumna en la resolución de la sentencia 7+15=8+15 (ver tabla 1). Esta alumna utiliza el algoritmo para calcular el valor numérico de ambos miembros, según muestran sus anotaciones realizadas aparte y, además, justifica la falsedad de la sentencia a partir de la observación de una relación ("diferencia de magnitud") entre los términos que la componen.

Otras estrategias incluidas dentro de la tipología HC-O consisten en el cálculo de ambos valores numéricos sin apreciar ninguna relación o característica especial en la sentencia, o bien, atendiendo previamente a los términos que conforman la sentencia y las operaciones a realizar, para decidir el modo de abordar dicho cálculo (ver, en la tabla 1, la explicación dada a la sentencia 19-3=18-2). En general, en ningún caso es posible asegurar que el alumno no haya apreciado alguna relación en la resolución de una sentencia. Nuestra identificación de la estrategia utilizada está limitada por la información que el alumno manifiesta.

Las estrategias de los tipos HC-IC y DR, se subdividen en otras de tipo O o tipo no-O según si la determinación de la veracidad o falsedad de la sentencia se basa, o no, en la comparación de los valores numéricos de ambos miembros (los cuales habrán sido obtenidos de diferente forma según la estrategia utilizada). En esta distinción se observa, en la mayoría de los casos, la influencia del tipo de sentencia considerada. Las explicaciones dadas a las sentencias 11-6=10-5 y 125-0=125, recogidas en la tabla 1, ponen de manifiesto el uso de estrategias DR-noO y DR-O, respectivamente.

Dentro de las estrategias DR, destacamos un tipo de estrategia a la que hemos denominado DR-P *(predicción)*. En este caso la característica o relaciones apreciadas sólo son utilizadas para determinar si la sentencia es verdadera o falsa, recurriéndose al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para la justificación de la respuesta.

Por último señalamos que al analizar las respuestas de los alumnos en cada una de las sentencias no siempre es posible identificar con exactitud la estrategia utilizada. En ocasiones, una respuesta puede ser resultado de más de una de las estrategias. Esto es consecuencia, en la mayoría de los casos, de la brevedad o ambigüedad de algunas respuestas o de la pérdida de la temporalidad de las acciones expresadas por los alumnos. Es importante observar que nuestra identificación de la estrategia se basa en la producción del alumno, por tanto, en los aspectos de su estrategia que hace explícitos, no siendo posible conocer otros aspectos de su pensamiento, no explicitados, que hayan podido intervenir en la resolución de la sentencia en cuestión.

Análisis del uso de pensamiento relacional

A partir de la identificación de las diferentes estrategias, es posible analizar los modos en que el pensamiento relacional es utilizado por los alumnos para resolver las sentencias. Se observa que, aunque en alguna estrategia tipo O puede no tener lugar este tipo de pensamiento, en las demás se manifiesta de algún modo, siendo variable la sofisticación de dicho uso, así como la influencia en él del proceso de cálculo.

La forma más simple en que es puesto de manifiesto algún uso de pensamiento relacional corresponde a la comparación de los términos de la sentencia para tomar decisiones relativas a la realización del cálculo, por ejemplo, para determinar qué miembro operar primero, según la dificultad de las operaciones a realizar en cada caso. El uso de pensamiento relacional que subyace a la estrategia O-M es también básico, en tanto que se reduce a la observación de mismidad entre las operaciones a realizar y aquellas ya realizadas, no requiriéndose hacer uso de ninguna propiedad o principio aritmético. No obstante, a diferencia de otras estrategias tipo O, pone de manifiesto que parte de la atención del alumno no está centrada en la realización del cálculo, permitiéndole distinguir semejanza entre los términos que está operando.

El uso de pensamiento relacional en la estrategia O-R es más sofisticado, pues el alumno considera la sentencia como una totalidad, hace distinciones y aprecia relaciones entre sus términos. Este uso está vinculado a la realización del cálculo, el cual le ayuda a tomar conciencia de los elementos que componen la sentencia y a relacionarlos entre sí. Se constata que los alumnos que utilizan esta estrategia manifiestan cierta dependencia o tendencia a la comparación de los valores numéricos de ambos miembros para determinar y justificar la veracidad o falsedad de la sentencia.

Al igual que en la estrategia O-R, al hacer uso de las estrategias tipo IC los alumnos manifiestan un uso de pensamiento relacional vinculado a la realización del cálculo. Es posible que cierta tendencia a realizar los cálculos les influya y les condicione a no apreciar la relación o característica previamente. No obstante, en esos casos, los alumnos abandonan el cálculo iniciado, mostrando menor dependencia de éste al justificar la veracidad o falsedad de la sentencia haciendo uso de la relación o característica apreciada.

En las estrategias del tipo DR, el alumno aborda inicialmente la resolución de la sentencia en busca de relaciones o características destacadas de la misma, con disposición a utilizar pensamiento relacional, no mostrando dependencia alguna de la realización de las operaciones contenidas en la sentencia. Esto nos conduce a considerar estas estrategias como aquellas que muestran un uso más sofisticado o avanzado de pensamiento relacional.

Algunas conclusiones del experimento y cuestiones abiertas

Si bien no es posible concretar la capacidad de uso de pensamiento relacional en cada alumno, los resultados de este estudio muestran la capacidad de la mayoría de poner de manifiesto este tipo de pensamiento, el cual desarrollan a partir de su aprendizaje/experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza. También se observa que las sentencias consideradas favorecen, por sí mismas, este tipo de estrategias, cuando los alumnos son conscientes de la existencia de estrategias basadas en pensamiento relacional y de su valoración por el docente.

Las estrategias identificadas describen diversidad de modos en los que el pensamiento de los alumnos fluctúa al resolver las sentencias, siendo variable la intervención del cálculo, así como el momento de dicho proceso en el que se hace uso de pensamiento relacional y el papel de éste. Se observa el papel destacado del cálculo, en algunas estrategias, para tomar conciencia de la estructura de la sentencia, así como la importancia de otros elementos como el lugar y modo en que está centrada la atención del alumno al iniciar la resolución de la sentencia, la fluctuación de dicha atención a lo largo de su resolución, la carga cognitiva de la tarea para el alumno, sus conocimientos aritméticos y su modo de concebir los números, las expresiones aritméticas y la sentencia.

A partir del trabajo realizado, se identifican algunas cuestiones, de mayor o menor especificidad, de interés a abordar en la investigación. ¿De qué modo se relacionan las estrategias identificadas en este trabajo con las que utilizan los alumnos en la resolución de igualdades abiertas basadas en propiedades aritméticas? ¿Se encuentra la dependencia o independencia de la realización del cálculo, manifestada por los alumnos al hacer uso de pensamiento relacional, basada en modos diferentes de conocimiento de las relaciones o propiedades aritméticas? ¿Cómo evolucionan las explicaciones (el lenguaje) de los alumnos conforme desarrollan su capacidad para utilizar pensamiento relacional? ¿Cuándo es apropiado dar importancia al rigor de las explicaciones de los alumnos sobre relaciones observadas? ¿Qué constituye, para los alumnos de Educación Primaria, una justificación de la veracidad de una sentencia aritmética?

¿Puede favorecerse la transferencia del uso de pensamiento relacional a otros contextos matemáticos? Y en su caso ¿de qué modo? ¿Cuál es el papel del pensamiento relacional dentro de otras sub-áreas de las matemáticas? ¿Qué capacidad de uso de pensamiento relacional manifiestan los alumnos en otros contextos matemáticos? ¿Qué contextos específicos, de otras sub-áreas, pueden ser de utilidad para promover el desarrollo, uso y manifestación de pensamiento relacional?

Adicionalmente, se identifican dos líneas de interés en las cuales profundizar: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas, una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional, y el uso de este tipo de pensamiento en contextos algebraicos, en especial en el trabajo con expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

CONCLUSIONES

Existe cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional en que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la Educación Primaria, pero la investigación sobre la integración del álgebra en el currículo escolar está todavía emergiendo, se conoce aún poco y está lejos de ser consolidada (Carraher y Schliemann, 2007).

La EA abre una línea de investigación de gran riqueza, debido a la variedad de cuestiones a explorar tanto en relación con la integración del álgebra en el currículo de Educación Primaria como sobre la influencia de este cambio curricular en la enseñanza de matemáticas en la Educación Secundaria y el potencial de esta propuesta al ser considerada dentro de los planes de formación de maestros de Educación Primaria[2].

2 En Palarea (2004) se presenta una propuesta de introducción del álgebra en la formación matemática de futuros profesores de Educación Primaria (para la especialidad de Educación Física), con la intención de ayudar a los futuros maestros a ahondar en los saberes de las matemáticas que deben enseñar. El planteamiento que recoge este trabajo se centra, en gran medida, en el lenguaje algebraico.

La algebrización del currículo matemático escolar puede ayudar a enriquecer la enseñanza tradicional de las matemáticas, en todos los niveles educativos, facilitando el desarrollo de un aprendizaje con comprensión. En particular, permite organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ambas.

Nuestro experimento de enseñanza es una muestra del tipo de investigaciones que tienen cabida dentro de esta línea de investigación. Los resultados presentados evidencian parte del potencial de este cambio curricular, así como un modo factible de ponerlo en práctica, en un contexto muy concreto, utilizándose el pensamiento relacional como un constructo clave en la operativización de esta propuesta. Permite, además, mostrar la capacidad de alumnos de tercer curso de Educación Primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

El constructo pensamiento relacional nos ha permitido distinguir una gran riqueza de estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de sentencias numéricas que ilustran diversidad de grados en que el pensamiento algebraico y aritmético puede combinarse al abordar una actividad. Y, de ese modo, aporta una muestra de integración del uso de ambos modos de pensamiento, surgida naturalmente en los alumnos, a partir de promoverse en el aula la observación de las sentencias y la búsqueda de relaciones.

En otra parte de este estudio, recogida en Molina (2006), se identifican diferentes perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos en el uso de pensamiento relacional, los cuales permiten distinguir niveles en la manifestación de este tipo de pensamiento y trazar la evolución de los alumnos a este respecto.

REFERENCIAS

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Booth, L. R. (1999). Children’s Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM’s school-based journals and others publications*, 299-307. Reston, Virginia: N.C.T.M.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.110 -119). Melbourne: University of Melbourne.

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2, 137-144. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 155-162. Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2005). *From children's Mathematics to Thinking Mathematically: Integrating Algebraic Reasoning with the Development of Basic Number Concepts and Skills.* Documento no publicado.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston, Virginia: N.C.T.M. e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000, octubre). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4*, 195-208.

Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Freiman, V. y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, 415-422. Bergen, Norway: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics,* 5, 391-412.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1, 49-66. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma*, *20,* 61-68.

Hejny, M., Jirotkova, D. y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, (pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME Program Committee.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education], 37*(1), 68-76.

Koehler, J. (2002). *Algebraic Reasoning in the Elementary Grades: Developing an Understanding of the Equal Sign as a Relational Symbol*. Tesis de master no publicada. Wisconsin: Universidad de Wisconsin–Madison.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

Molina, M. y Ambrose, R. (en prensa). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics.*

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, *1*(1), 31-46.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

Palarea, M. M. (2004). *Del lenguaje numérico al lenguaje algebraico.* La Laguna: Área de Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4, 127-134. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Subramaniam, K. (2004, Julio). Naming practices that support reasoning about and with expressions. Presentado en *the 10th International Congress on Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark.

Sutherland, R. (2007). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique*, 189-199. Paris: La Pensée Sauvage.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 399-406. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2003).Young children's understanding of equals: a longitudinal study. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4, 379-387. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 417-424. Bergen, Norwey: Bergen University College.