NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 93, noviembre de 2016, páginas 7-13

Matemáticas en la Educación[1]

Antonio Martinón (Universidad de La Laguna. España)

Dedicado a la memoria de
Manuel Linares Linares,
amigo y compañero

Debo comenzar recordando que la Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas nació como resultado de la intensa preocupación que un grupo de jóvenes profesores sentimos por la situación de las Matemáticas en la Educación, lo que va más allá de la enseñanza y aprendizaje de nuestra disciplina.

Fue a finales de 1977 cuando Luis Balbuena, Ángel Isidoro, Manuel Linares y yo mismo, que nos habíamos conocido como profesores en los comienzos de los estudios de Matemáticas en la Universidad de La Laguna, decidimos constituir esta Sociedad, para aglutinar a los colegas más interesados y preocupados. Al hablar ahora de los tres amigos, rindo homenaje emocionado a Manuel Linares, recientemente fallecido [2].

Expondré en este texto algunas ideas sobre las Matemáticas en la Educación que me parecen muy importantes y que, a mi juicio, deberían ser tenidas en cuenta por quienes nos dedicamos a su enseñanza.

Dos pequeñas investigaciones

El profesor debe convertirse en un investigador sobre el propio proceso de enseñanza y aprendizaje en el que está inmerso. Presentaré ahora los resultados de dos pequeñas investigaciones.

La primera se refiere al significado de la división de dos enteros positivos. Supongamos que a y b son enteros positivos, siendo el primero múltiplo del segundo. La división $a:b$ posee dos significados.

El primero se refiere al *número de grupos* que aparecen al repartir a objetos en grupos de tamaño b. Ejemplo. Cada caja de bombones cuesta 9 euros y he gastado 45 euros. ¿Cuántas cajas compré?

---

[1] Conferencia pronunciada el 14 de abril de 2016 en la inauguración de las XXXIV Jornadas de la Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas, celebradas en La Laguna.
[2] Manuel Linares Linares falleció el 4 de junio de 2016. En el momento de la conferencia estaba ingresado en el Hospital Universitario de Canarias.

El segundo trata del *tamaño de cada grupo* al repartir *a* objetos en *b* grupos de igual tamaño. Ejemplo. He comprado 5 cajas de bombones por 45 euros. ¿Cuánto cuesta cada caja?

Se preguntó a estudiantes de dos niveles diferentes mediante la resolución de sencillos problemas y los resultados de éxito se indican en la Tabla 1.

Edad de los estudiantes	Número de grupos	Tamaño de grupos
9-10 años	57%-67%	72%-82%
10-11 años	28%-41%	24%-74%

Tabla1. Resultados sobre el doble significado de la división

Lo que aquí se obtiene forma parte de un fenómeno que hemos denominado *la asimetría en el aprendizaje* y que está presente en numerosos aspectos.

La segunda pequeña investigación se refiere al papel del cero en la suma. A los estudiantes se les plantearon cuestiones que pueden resumirse en llenar el espacio en blanco en las siguientes igualdades:

$$a + \_ = a \quad ; \quad \_ + a = a \quad ; \quad \_ + 0 = a \quad ; \quad 0 + \_ = a$$

Los resultados que se recogen en la Tabla 2 ponen en evidencia una apreciable diferencia.

Edad de los estudiantes	$a + \_ = a$ $\_ + a = a$	$\_ + 0 = a$ $0 + \_ = a$
13-14 años	76%	96%
14-15 años	49%	77%

Tabla 2. Resultados sobre el papel del 0 en la suma

Estos datos llaman la atención sobre la singularidad de cero en la enseñanza de las Matemáticas.

Ambas investigaciones fueron realizadas en un amplio proyecto desarrollado por el Grupo Anaga, que estuvo compuesto por Teresa Vázquez, Ana A. Pérez, Justo Fernández, Juan R. Rojas, José M. Álamo, Dolores Sauret, Catalina D. García, Francisca García, Emilio M. Hernández, Isabel Ledesma, M. Carmen Manrique, Juan M. Moreno, M. Mercedes Paniagua, Pedro Perestelo, M. Dolores Prieto, Ángeles Rodríguez, M. Teresa Sánchez, M. Luisa Torres y yo mismo. Un resumen de los resultados del proyecto puede encontrarse en la *Revista de Educación* (1993).

Problemas aditivos de cambio

Ahora consideramos situaciones numéricas de tipo aditivo y muy simples. Nos centramos en situaciones en las que tenemos un estado inicial, se produce un cambio y obtenemos un estado final. Esquemáticamente:

Inicial + cambio = final

Por ejemplo:

Luis tiene 5€ + cambio = Luis tiene 2 €

Hay varias formas de expresar el cambio que se ha producido en el dinero que tiene Luis. Por ejemplo, se puede comparar lo que tenía y lo que tiene usando las expresiones "más que" y "menos que":

Luis antes tenía 3€ más que ahora

Luis tiene ahora 3€ menos que antes

Esta situación y las dos formas señaladas de expresar el cambio dan lugar a seis diferentes problemas, que se recogen en la siguiente tabla, según el orden en el que se dan los datos y según cuál sea la incógnita:

Dato 1	Dato 2	Incógnita
Inicial	Final	Cambio
Final	Inicial	Cambio
Inicial	Cambio	Final
Cambio	Inicial	Final
Final	Cambio	Inicial
Cambio	Final	Inicial

Tabla 3. Problemas aditivos de cambio según la incógnita y el orden de los datos

Pese a lo simple de la situación hay notables diferencias en el éxito de esos seis problemas. Por ejemplo:

- Luis tiene ahora 2€ y antes tenía 3€ más que ahora. ¿Cuántos euros tenía antes? [90%]

  Características de este problema: datos en orden inverso a la evolución temporal, se usa una expresión consistente (se dice "más que" y se debe sumar), el referente es un dato conocido (lo que tenía antes), y lingüísticamente tiene la estructura "ahora… antes… ahora… antes…"

- Luis tiene ahora 2€ y ahora tiene 2€ menos que antes. ¿Cuántos euros tenía antes? [20%]

  Características de este problema: datos en orden inverso a la evolución temporal, expresión inconsistente (se dice "menos que" y se debe sumar), el referente es la incógnita (lo que tenía antes), y lingüísticamente tiene la estructura "ahora… ahora… antes… antes…"

Como se ve, la gran diferencia de éxito se debe a las distintas maneras de expresión y pone de manifiesto que hay una dificultad en la comprensión lectora.

Estos datos forman parte de una investigación sobre problemas aditivos que realicé con Alicia Bruno y Fidela Velázquez, publicada en la revista *Suma* (2001).

Debo mencionar otras investigaciones que he desarrollado en el ámbito de la Educación Matemática que he realizado con Candelaria Espinel y Juan Antonio García Cruz.

Demostraciones

Los humanos decidimos de maneras muy diversas: recurrimos a un razonamiento, seguimos una corazonada o nuestros sentimientos, apelamos a una votación, o dispone la autoridad por todos nosotros... Así será fácil que nos equivoquemos. Sin embargo, en la Ciencia decidimos en base a una explicación. Buscamos la verdad y tenemos que convencernos unos a otros de cuál es la verdad.

En el sistema educativo de cualquier país encontramos que las Matemáticas, junto con el estudio de la Lengua, tienen un papel central. Hay una doble justificación para que sea así. Las Matemáticas resultan útiles en la vida cotidiana: las operaciones aritméticas son necesarias con frecuencia y ciertos rudimentos de Geometría y de las medidas de figuras simples también son imprescindibles. Además, el estudio de las Matemáticas contribuye a la formación intelectual.

Que en la escuela razonemos las verdades matemáticas es parte fundamental de ese papel formativo que nuestra disciplina posee. Sin embargo, un grave problema está extendido en nuestros sistemas educativos: las demostraciones matemáticas en el aula están en retroceso, prácticamente ausentes. Pero para que las Matemáticas jueguen su papel de formación intelectual es necesario que haya razonamiento matemático y eso se alcanza si las demostraciones forman parte del currículo escolar.

Por supuesto, no hay que demostrarlo todo y hay que adaptar las demostraciones al nivel de los alumnos. Pero sí creo muy conveniente que se implante la costumbre de la demostración, de la justificación, de la explicación científica. Ante una propiedad matemática que no se demuestra caben varias justificaciones: “no tenemos tiempo para hacerla, pero se hace de modo similar a aquella otra”, e incluso cabe decir “es difícil y ya se estudiará en un curso posterior”, pero siempre se debe dar una explicación demostrativa. Debe quedar claro que en Matemáticas se demuestra todo, aunque al alumno, por una u otra razón, no se le ofrezca la correspondiente argumentación.

Quizás lo más difícil de una demostración es entender lo que una demostración significa. Como no se trabajan las demostraciones, o son muy pocas las que se presentan, la misma noción de demostración resulta extraña a los estudiantes de la Educación Secundaria y se convierte en una auténtica novedad en los estudios universitarios.

Hemos de dejar claro que las verdades matemáticas no lo son por arte de magia, ni porque lo dice el profesor, ni porque está en el libro, ni porque siempre ha sido así...

Puesto que no es posible demostrarlo todo, se debe procurar elegir aquellas demostraciones más claras, más simples y, también, las más elegantes y atractivas.

El teorema más conocido y más popular es el de Pitágoras. Una demostración sencilla está contenida en los dos dibujos de la figura 1:

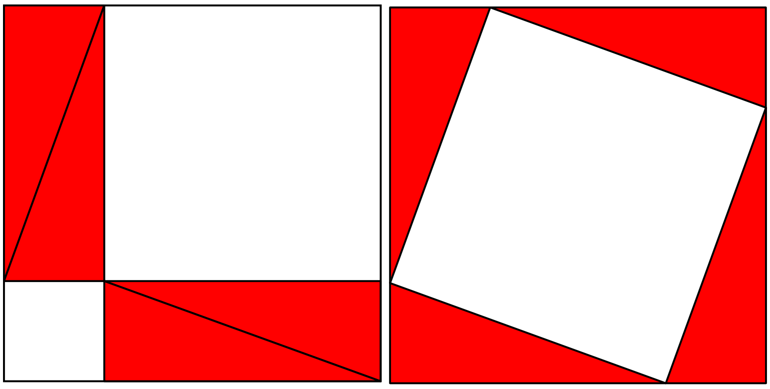

Figura 1. Demostración visual del teorema de Pitágoras

Más difícil es demostrar que hay infinitos números primos. Recordemos que los primeros números primos son 2, 3, 5, 7... Supongamos que los números $a, b, c, \ldots, m$ son primos. Los multiplicamos todos ellos, sumamos 1 y obtenemos el número:

$$p = abc\ldots m + 1$$

el cual es diferente de $a, b, c, \ldots, m$ (¡es "bastante" más grande que todos ellos!) El número p no es múltiplo de a, ya que si lo fuera, entonces también 1 tendría que ser múltiplo de a, lo que no puede ser. Análogamente, p no es múltiplo de ninguno de los otros números primos: ni de b, ni de c, ..., ni de m. Por tanto, o bien el mismo p es primo o bien es múltiplo de algún otro primo, que es diferente de los primos iniciales $a, b, c, \ldots, m$. En cualquier caso podemos decir que hay más primos además de los iniciales $a, b, c, \ldots, m$.

Las ideas aquí expuestas se presentan con más detalle en mi artículo publicado en la revista *Unión* (2009).

Meridianos y paralelos

Estamos ahora interesados en un problema sobre la esfera terrestre que puede servir para que los alumnos puedan desarrollar una pequeña investigación.

Deseamos dar un paseo sobre la superficie terrestre que consista en recorrer 1 km hacia el sur (por un meridiano), 1 km hacia el este (por un paralelo) y 1 km hacia el norte (por un meridiano), pero de manera que volvamos al mismo punto de partida. Ver Figura 2 y Figura 3.

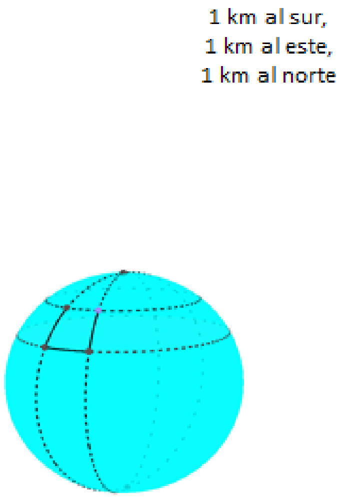

Figura 2. Paseo por la esfera

Es fácil convencerse de que una solución es salir del polo norte.

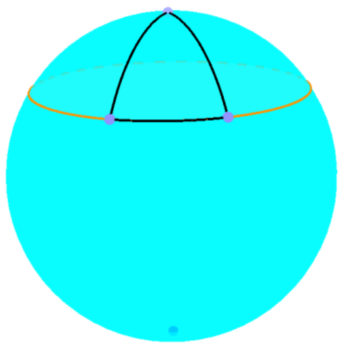

Figura 3. La solución del polo norte

¿Hay más soluciones? No…, si nos limitamos al hemisferio norte. Pero en el hemisferio sur sí que hay más soluciones, bastantes más. Realmente hay infinitas familias de infinitas soluciones cada una: cualquier punto del paralelo que está a 1 km al norte del paralelo que mide 1 km de longitud, cualquier punto del paralelo que está a 1 km al norte del paralelo que mide 1/2 km de longitud…. cualquier punto del paralelo que está a 1 km al norte del paralelo que mide 1/n km de longitud…

La hormiga y el ecuador

Vamos finalmente con otro problema. Suponemos que el ecuador de la Tierra mide 40 millones de metros. Imaginemos una cinta ajustada al ecuador y la alargamos 1 metro. Ahora tenemos una nueva cinta que mide 40.000.001 metros. Estiramos la nueva cinta y la ponemos paralela al ecuador. ¿Puede pasar una hormiga entre la cinta y el ecuador?

La respuesta es simple, sólo hay que conocer que la longitud de la circunferencia es igual al producto de 2π (= 6'28…) por el radio de la circunferencia.

La longitud del ecuador es

$$E = 2\pi R = 40.000.000$$

siendo *R* el radio de la Tierra. La longitud de la cinta ampliada es

$$C = 2\pi(R + a) = 2\pi R + 2\pi a = 40.000.001$$

donde a es la distancia entre el ecuador y la cinta, la holgura que tiene la cinta por encima del ecuador. Por lo tanto

$$2\pi a = 1$$

Es decir,

$$a = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6'28\ldots} = 0'16\ldots$$

Por tanto, la distancia entre el ecuador y la cinta tiene más de 16 centímetros. ¡Cabe una hormiga y algún animalito bastante más grande!

Aquí se produce un choque entre lo que nos parece “más natural”, lo intuitivo, y el resultado del cálculo numérico. La conclusión es que en este asunto tenemos mal educada la intuición. Estamos tratando con una de las funciones más simples, la lineal, y no hemos asumido que no sólo los valores de la función son proporcionales a los de la variable, sino que también las variaciones de la función son proporcionales a las variaciones de la variable. Dicho de otro modo, si realizamos la misma operación sustituyendo el ecuador por el borde de una moneda de 1 euro, de modo que alargamos en 1 metro una cinta pegada al borde de la monera, el resultado sería el mismo: algo más de 16 centímetros separarían el borde de la moneda de esa cinta alargada colocada de forma paralela.

Conocí este problema del ecuador y la hormiga en el delicioso libro La educación matemática del hombre de la calle, de Hug Gray y Lillian R. Lieber (Editorial Iberia – Joaquín Gil, 1946).