

LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y EL USO DE C.A.S. EN EL  
ANÁLISIS MATEMÁTICO.

RÉPLICA A LA PONENCIA “LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE  
DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO HACIENDO USO  
DE C.A.S. (Computer Algebra System)”  
DEL PROFESOR MATÍAS CAMACHO

Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències  
Universitat Autònoma de Barcelona

---

**INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI**

Jordi Deulofeu (2007). LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y EL USO DE C.A.S. EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO. RÉPLICA A LA PONENCIA “LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO HACIENDO USO DE C.A.S. (Computer Algebra System)” DEL PROFESOR MATÍAS CAMACHO, pp. 393-397.

## 1. INTRODUCCIÓN

No hay duda que el binomio análisis matemático y TIC's es un aspecto muy relevante de la didáctica de las matemáticas en los niveles avanzados, pero además de relevante plantea un conjunto de retos y problemas de enseñanza-aprendizaje a los cuales la investigación actual trata de dar respuestas, a mi entender todavía parciales, que se enmarcan en una problemática de investigación mucho más general: el uso y la influencia de las TIC's en la enseñanza de las matemáticas.

En mi intervención voy a tratar de subrayar tanto algunas características y resultados de las investigaciones presentadas por el profesor Matías Camacho como también ciertas dificultades y limitaciones de las mismas, y de otros trabajos recientes relacionados con el mismo tema, que a mi entender explican cual es la situación presente de este tipo de investigaciones.

Centrare mis observaciones en dos aspectos complementarios, que también aborda la ponencia que replico: el papel que juegan los sistemas de representación en relación con el análisis matemático y los problemas de transferencia entre distintos entornos, en particular el trabajo con lápiz y papel versus el trabajo con un determinado CAS (Computer Algebra System). Ambos aspectos permiten enmarcar estas investigaciones en el ámbito de la didáctica del análisis matemático.

## 2. ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Hacer ya más de 25 años que Claude Janvier en su tesis doctoral (Janvier, 1978, citada en Janvier 1987) planteó, creo que por primera vez, la importancia de las representaciones en relación con el concepto de función, y la constatación que el núcleo del trabajo con funciones radica en la interpretación que subyace a cada representación, así como a lo que Janvier llamó traducciones de una representación a otra.

El hecho anterior permite explicar en buena parte la relevancia del uso de CAS en el trabajo sobre el análisis matemático, dado que una de las características de aquellos es precisamente la posibilidad de utilizar distintas representaciones de manera simultánea, lo cual facilita la realización de procesos de traducción; pero, al mismo tiempo, se plantea un problema fundamental: el uso de un cierto CAS altera tanto el entorno de trabajo de los estudiantes, como la aproximación a los principales conceptos del análisis: función, derivada, integral, límite.

Mi referencia al concepto de función se debe, por un lado, al hecho que algunas de nuestras investigaciones (Fabra-Deulofeu, 2000, Burrel, 2005, Cuesta, 2005) se centran en dicho concepto en distintos niveles de la educación secundaria, donde el mismo ocupa un lugar central, pero también al hecho que en la mayoría de investigaciones que conozco relacionadas con el análisis, incluidas las que abordan los niveles universitarios, siempre se encuentran referencias (a veces indirectas y a menudo no explícitas) a dificultades de los estudiantes relacionadas con dicho concepto. También en el trabajo que ha presentado el profesor Camacho, al referirse a las dificultades detectadas en los estudiantes cuando aprenden a usar las calculadoras, cita, entre otros, los problemas de interpretación del gráfico de una función: límites de la pantalla al representar la gráfica y consideración de las asíntotas como parte de la función. En varios de nuestros trabajos citados anteriormente, hemos encontrado dificultades muy similares, sin diferencias relevantes debidas al contexto de trabajo: lápiz y papel

o con un determinado CAS. Entendemos que, más allá de los condicionantes del contexto, se trata de un problema de tipo conceptual relacionado con la interpretación del significado de una función expresada a través del lenguaje gráfico, pero aplicable a otros lenguajes de representación.

A pesar de las dificultades que subsisten, aunque muchas veces se presenten de forma distinta, esto no es un impedimento para considerar que el uso de un CAS, como por ejemplo Derive que es uno de los adecuados para la secundaria y en particular para el trabajo con funciones elementales, constituye un potente instrumento para que los alumnos descubran las relaciones de los conceptos que subyacen a las funciones, principalmente por las posibilidades que ofrece para relacionar los distintos lenguajes de representación y también para el trabajo dentro de un mismo lenguaje, especialmente el gráfico.

No obstante, investigaciones como las que presenta en su ponencia el profesor Camacho muestran que no basta con poner un CAS al alcance de los estudiantes para que estos puedan elaborar concepciones coherentes y complejas sobre las funciones o sobre cualquier otro concepto fundamental del análisis. Entonces, para que ello sea posible, es necesario un trabajo extenso que permita, por un lado, familiarizarse con un CAS, y por otro, posibilitar el abordaje de problemas de cierta complejidad, que eviten, por ejemplo, la tendencia al uso de prototipos (Fabra – Deulofeu, 2000, Burrel, 2005), y donde se produzca una auténtica interrelación entre distintos lenguajes y conceptos, con la finalidad de incidir en las concepciones de los estudiantes.

### 3. LA TRANSFERENCIA ENTRE DISTINTOS ENTORNOS

Uno de los problemas que subyace a muchas investigaciones de este campo y que también la ponencia del profesor Camacho cita como una cuestión por resolver, es la relación y el sentido que tiene el combinar el trabajo con lápiz y papel con el que se realiza mediante el uso de CAS.

En una investigación reciente, Florencio Burrel (2005) constata que alumnos de cuarto de ESO responden de manera distinta a cuestiones similares según se utilice un cuestionario con lápiz y papel o con el uso de Derive. Estos alumnos han trabajado de manera combinada en los dos entornos. Resulta interesante analizar el tipo de respuestas en un entorno y en otro: así, mientras en general las respuestas a través del CAS resultan ser de mayor riqueza, en el sentido que los alumnos son capaces de apoyarse en ejemplos variados, al mismo tiempo tienen un carácter mucho más procedimental (el CAS les permite, efectivamente, realizar cálculos y cambios de representación con mucha más facilidad). En cambio, des de un punto de vista conceptual, las respuestas a través del CAS son, en la mayoría de los casos, bastante más limitadas e incluso presentan un mayor número de contradicciones. Así, se confirma una vez más, la ya mencionada falta de transferencia y la importancia del entorno utilizado que actúa como condicionante, y se constata que, a pesar de su similitud desde el punto de vista del trabajo matemático solicitado, existe muy poca interrelación entre los dos tipos de trabajo.

A nuestro modo de ver, la situación anterior cuestiona algunos de los planteamientos de un gran número de experiencias, donde se alternan las sesiones de trabajo con el ordenador y sin el, algo frecuente en las investigaciones con el uso de CAS.

Por otro lado, la constatación que a través del uso de CAS los estudiantes son capaces de desarrollar un trabajo de carácter procedimental y de mejorar en relación a la capacidad para abordar problemas de cierta complejidad, aún cuando sus concepciones sobre los conceptos manejados son todavía muy limitadas, me lleva a considerar que quizás su utilización debería avanzarse y en todo caso preceder al trabajo con papel y lápiz, puesto que las CAS constituyen un entorno que facilita la experimentación y esta debe estar presente, precisamente, en las primeras fases del aprendizaje de cualquier concepto.

Así pues, entiendo que el uso de CAS plantea de nuevo un viejo problema de la Didáctica de las Matemáticas: el diseño y la organización de secuencias de aprendizaje para un tema determinado. En este sentido, no pretendemos decir que el objetivo sea hallar una secuencia óptima, algo demasiado pretencioso y seguramente inviable, dado el número de factores que inciden en cada situación de aprendizaje, sino que las investigaciones pueden aportar elementos valiosos, como el que acabamos de mencionar, que lleven a priorizar unas determinadas secuencias por encima de otras.

El punto anterior nos lleva a preguntarnos por la diferencia que hay entre las dos experiencias presentadas por Matías Camacho, en relación con el uso de un CAS, y considerar que desde la perspectiva del aprendizaje es importante que el uso del ordenador no se limite a unas sesiones puntuales, ya que sólo un trabajo largo en el tiempo puede posibilitar la reflexión y las necesarias puestas en común sobre conceptos y procesos complejos, como son los del análisis matemático.

En este sentido, entendemos que la primera de las investigaciones presentadas en la ponencia va en esta línea, al centrarse en la influencia que un CAS determinado tiene en el uso de las representaciones por parte de los estudiantes. Aún así, el análisis de los resultados permite constatar, a través de los perfiles de actuación de los estudiantes, que solamente una parte de ellos fue capaz de utilizar las auténticas potencialidades del CAS.

#### 4. CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de las dificultades reflejadas por muchas investigaciones en relación con el aprendizaje de los aspectos de carácter conceptual, el uso de CAS es una herramienta potente para el trabajo relacionado con el análisis matemático. Además de un instrumento para “liberar al estudiante de memorizar fórmulas y procedimientos de cálculo”, como expresa el profesor Camacho en sus conclusiones, el uso de software permite ampliar el significado del análisis para los estudiantes, desde un conjunto de técnicas para resolver ejercicios más o menos complejos, a una disciplina que tiene por objetivo en la educación secundaria, dar cuenta de cómo cambian unas magnitudes que dependen de otras, y como se puede conocer este cambio a través de conceptos como la tasa de variación y la acumulación de dicha tasa de variación. Algunos de los ejemplos presentados en la ponencia muestran claramente esta característica, al posibilitar el uso de estrategias que utilizan la representación gráfica, entre otras cosas, para el cálculo de integrales.

Por otra parte, es fundamental diseñar, realizar y evaluar secuencias de enseñanza-aprendizaje que potencien el carácter experimental que posibilita el uso de CAS, relacionado con los distintos conceptos del análisis; en dichas secuencias el uso del ordenador debe ser exten-

so y continuado. Esto no excluye, sino que prepara y complementa, un trabajo de tipo teórico y de manipulación simbólica igualmente importante y necesario en los niveles avanzados.

En definitiva, el uso de CAS puede actuar de catalizador para seguir repensando la didáctica del análisis, iniciada poco antes de la aparición de aquellos, tratando de presentar a los estudiantes secuencias de enseñanza-aprendizaje que promuevan la experimentación, la relación entre lenguajes y la búsqueda de estrategias propias para la resolución de problemas.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 7 (3), p. 245-274.
- Borba, M.C. – Confrey, J. (1996) A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 3.
- Burrell, F. (2005) *Movilización de los procesos de pensamiento de los alumnos en un entorno de múltiple representación: Los modelos elementales de funciones*. (trabajo de investigación no publicado). Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona
- Camacho, M. (2005) La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS. *Investigación en Educación Matemática. Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Córdoba. p. 97-110.
- Camacho, M., Depool, R. (2003) Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (CAS) Derive. *Educación Matemática* 15(3), 119-140.
- Cuesta, A. (2005) *Dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función*. Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Fabra, M., Deulofeu, J. (2000) Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Relime*, vol 3, 2, p. 207-230.
- Janvier (1978) The interpretation of complex Graphs. Ph D Thesis (no publicada). University of Nottingham
- Janvier (1987) Representations and understanding: The notion of function as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. NJ: Lawrence Erlbaum A.
- Tall (1996) Functions and Calculus. En *International Handbook of Mathematics Education*. Bishop et al (Ed.). Dordrecht (Netherland): Kluwer A. P.
- Valdeperez, C., Deulofeu, J. (2000) Las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables. *SUMA*, 33, p. 73-81.
- Yerushalmy, M. (1997) Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol 2, 1.