RÉPLICA À CONFERÊNCIA: UMA APROXIMAÇÃO ONTOSEMIÓTICA DA DIDÁCTICA DA DERIVADA DO PROFESSOR VICENÇ FONT

António Domingos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
António Domingos (2007). RÉPLICA À CONFERÊNCIA: UMA APROXIMAÇÃO ONTOSEMIÓTICA DA DIDÁCTICA DA DERIVADA DO PROFESSOR VICENÇ FONT, pp. 399-403.

Neste comentário à conferência do Professor Vicenç Font centrar-me-ei essencialmente nos aspectos relativos à teoria das funções semióticas, o papel das representações externas (ostensivas) presentes no estudo da função derivada e a complexidade semiótica que este estudo envolve. Sempre que seja oportuno farei referência ao caso português, utilizando para tal dados empíricos recolhidos junto de alunos do ensino superior, que frequentavam pela primeira vez a disciplina de Análise Matemática.

De um modo global considero que esta conferência traz um grande contributo para toda a comunidade de educadores matemáticos que se interessam pelo ensino e aprendizagem da Matemática, quer pela teoria apresentada, quer pela análise que é feita dos dados empíricos que representam uma diversidade de abordagens presentes em diversos sistemas de ensino.

No que se refere à aproximação ontosemiótica podemos considerar que se trata de uma ferramenta poderosa que nos permite desenhar abordagens didácticas bastante completas dos conceitos matemáticos, bem como analisar em profundidade a compreensão que os alunos manifestam desses mesmos conceitos. Ela partilha dos mesmos pressupostos gerais que outras teorias defendidas por autores como Anna Sfard (teoria da reificação), David Tall (visão proceptual dos conceitos) ou Ed Dubinsky (teoria APOS), para citar apenas alguns dos que se têm dedicado ao estudo dos conceitos matemáticos no domínio do pensamento matemático avançado, tem no entanto especificidades que lhe conferem características próprias que permitem uma análise mais profunda da natureza desses conceitos.

O modo como a teoria aborda os objectos matemáticos e a sua emergência mostra-nos uma das suas faces mais importantes. O facto de considerar que estes objectos têm a sua origem nas práticas e não se cingem apenas aos conceitos acabados, podendo ser também considerados como tal a *linguagem*, *acções*, *argumentações*, *propriedades* e *situações problemáticas*, reforça a dimensão construtivista da aprendizagem bem como o papel desempenhado pelos contextos onde essa prática se encontra inserida. A distinção entre os objectos institucionais e pessoais vem reforçar a ideia anterior diversificando os significados e sentidos que podem ser atribuídos a estes mesmos objectos. Desta forma podemos fazer a distinção entre os diferentes significados (institucional de referência, institucional pretendido, institucional implementado e institucional avaliado) que o conceito apresenta e aqueles que o aluno pode manifestar (pessoal global, o declarado e o obtido). Esta distinção é fundamental para o desenho didáctico de situações de ensino dos conceitos a estudar. É ainda com base nas práticas que se estabelece uma outra ferramenta, as configurações (cognitivas ou epistémicas), que se tornam fundamentais no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Ao realizar e avaliar as práticas desenvolvidas na resolução de um determinado problema matemático podemos ter acesso a um conjunto de objectos matemáticos traduzidos pelas representações tornadas externas (ostensivas) que nos permitem estabelecer as configurações presentes nessa prática e desta forma compreender a estrutura cognitiva que lhe está associada.

A escolha do sistema de práticas como forma de originar os objectos matemáticos é bastante rica, mas ao mesmo tempo complexa. A necessidade de ter que considerar em simultâneo os objectos que emergem das práticas e os que intervêm nas mesmas interpretando o jogo de linguagem que se estabelece entre ambos (dualidades cognitivas) introduz um grau de complexidade bastante elevado que passa pela dificuldade em articular todas as dimensões presentes. A sua riqueza reside no facto de permitir conhecer em profundidade a compreensão que os alunos manifestam do conceito (objecto), ainda que nem sempre seja possível estabelecer generalizações dentro de um mesmo grupo que esteja sujeito a uma determinada abordagem didáctica.

O ensino de um dado conceito com o objectivo de que os alunos tenham uma compreensão efectiva do mesmo é uma das principais preocupações que o professor deve ter. No caso concreto do conceito de derivada é apresentada uma configuração epistémica, baseada num questionário que recorre à função exponencial. Esta configuração tem em conta a construção do conceito, partindo de uma abordagem operacional (no sentido que é dado ao termo por Anna Sfard) que se baseia em algumas das suas representações externas (ostensivas) sem esquecer todo um conjunto de outros objectos que são necessários para a tradução entre estas representações (linguagem, situação problema, acções, argumentos, propriedades prévias e emergentes e conceitos prévios e emergentes). Esta configuração apresenta-se como um bom exemplo para introduzir o cálculo da derivada nalguns casos concretos (funções lineares, exponenciais e logarítmicas), destacando no entanto o papel desempenhado pelas representações externas que são activadas com o seu cálculo. Como se mostra no texto o cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ corresponde a uma prática que activa várias das representações externas que vão sendo convertidas umas nas outras, nomeadamente, traduções e conversões entre distintas formas de representar a função $f(x)$, a passagem de uma representação de $f(x)$ para outra forma de representação de $f'(x)$ e traduções e conversões entre diferentes formas de representar $f'(x)$. A forma como estas representações são activadas e a tradução que é feita entre elas tornam-se determinantes na forma como o conceito é compreendido pelos alunos. Uma das vantagens deste tipo de abordagem é a que permite diversificar as técnicas de cálculo da função derivada sem recorrer a técnicas como as regras de derivação ou o uso de limites.

Dada a diversidade de representações presentes no cálculo da função derivada, a tradução que é feita entre elas e os objectos que intervêm nessa tradução é de esperar que esteja presente uma complexidade semiótica que pode variar com a forma como as representações são activadas e o modo como as traduções entre elas são feitas. Como é referido no texto esta complexidade pode ser reduzida ou aumentada dependendo do modo como a prática é realizada. É neste tipo de situações que a teoria da aproximação ontosemiótica se revela como uma ferramenta poderosa para reduzir esta complexidade desenhando contextos de prática que conduzam ao significado institucional dos objectos matemáticos. Nestes contextos é quase sempre possível observar o aparecimento de conflitos semióticos (termo com significado semelhante ao utilizado por Tall e Vinner, quando se referem a conflito cognitivo potencial ou actual) e que se traduz numa discrepância entre os significados que o aluno e o ensino atribuem a uma mesma expressão ou conceito. Tomando como exemplo o caso português, num estudo realizado com alunos do primeiro ano do ensino superior na disciplina de Análise Matemática (Domingos, 2003), foi possível observar alguns destes conflitos. Quando se procurou saber o que significava dizer que uma função tinha derivada num ponto, um aluno fez uma interpretação geométrica dizendo que “é o declive da recta tangente ao gráfico no ponto”, no entanto não conseguiu relacionar a afirmação que fez com a definição de derivada ($\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$), que entretanto também não sabia representar simbolicamente. Noutro caso o aluno relaciona a derivada com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto e consegue escrever a definição simbólica, no entanto quando se pretende que dê uma interpretação geométrica da definição que escreveu não consegue fazer a tradução entre ambas as representações. Este tipo de resultados foi comum à maioria dos alunos entrevistados, revelando uma compartimentação entre as várias representações do mesmo conceito. Ainda que não fizesse parte dos objectivos do referido estudo, parece que o tipo de ensino ministrado pode ter contribuído para o aparecimento deste tipo de conflitos. O conceito de derivada foi abordado nas aulas a partir da sua definição formal (ainda que a sua introdução já tenha sido feita em anos anteriores) pondo desta forma em destaque a parte intensiva da dualidade intensivo/extensivo. Desta forma as regras do jogo de linguagem que são referidas no texto como determinantes para que os alunos possam compreender a complexidade semiótica associada a estas práticas não foram adquiridas pelos alunos levando-os a considerar cada uma das representações anteriores como constructos distintos. Os exemplos apresentados pelo autor no texto sobre esta dualidade extensivo/intensivo são reveladores do papel que é desempenhado pelo jogo da linguagem que se estabelece entre o professor e os alunos, onde, por vezes, estes últimos têm dificuldade em participar. O estabelecimento de normas sociomatemáticas que privilegiem aulas de natureza inquiridora (no sentido que é dado ao termo por Cobb e Yackel) podem revelar-se como facilitadoras deste jogo de linguagem.

Na parte final do texto é feita referência à implementação de um processo de ensino no estudo da derivada de uma função, onde com base nos constructos elaborados pela teoria da aproximação ontosemiótica se pretendia passar da derivada de uma função num ponto para a função derivada. As principais conclusões apresentadas são muito semelhantes às encontradas no estudo referido anteriormente com alunos portugueses.

Uma das conclusões está relacionada com o tempo disponível para implementar o estudo do conceito de derivada, que se revelou bastante insuficiente, levando a que não fossem tidos em conta os conhecimentos prévios dos alunos. O conceito foi introduzido a partir da sua definição formal referindo-se a objectos matemáticos que os alunos não conseguiam descapsular (no sentido que é dado ao termo por Ed Dubinsky) e revelando-se desta forma geradores de conflitos semióticos potenciais.

Outra das conclusões que se pode destacar refere-se ao significado pessoal que os alunos têm dos objectos que foram estudados anteriormente, que difere do significado institucional pretendido, revelando-se insuficiente para a compreensão deste, mostrando-se por vezes irrelevante no contexto em estudo.

O recurso à definição (limite da razão incremental) como forma de introduzir o conceito de derivada revelou-se bastante complexo quando se pretendeu que os alunos fizessem a tradução entre esta representação e a sua interpretação geométrica. Esta dificuldade parece ser um indicador da complexidade semiótica que está presente na definição. Quando esta tradução é feita, com a ajuda do investigador na situação de entrevista semi-estruturada com características de experiência de ensino (Domingos, 2003), os alunos revelam ser capazes de atribuir aos objectos em causa um significado pessoal bastante próximo do significado institucional pretendido. Esta abordagem vem reforçar as potencialidades referidas anteriormente da aproximação ontosemiótica da didáctica da derivada, mostrando ser possível criar contextos de aprendizagem autênticos onde a reificação dos objectos matemáticos se torna num lugar comum em todo o processo.

REFERÊNCIAS

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - a matemática no início do superior* (tese de doutoramento não publicada, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa). Lisboa.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall

(Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. e Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.