LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU PROCESO DE MATEMATIZACIÓN

Melby Cetina-Vazquez, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Jhony Alexander Villa-Ochoa

Resumen

Se estudian procesos de matematización desarrollados por estudiantes de bachillerato mientras reflexionan y modelan situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. Este proceso de matematización emerge de analizar *qué*, *cómo* y *cuánto* varían las variables involucradas en dos situaciones realistas. En un primer nivel de reflexión, emergen conocimientos informales, que favorecen que reconozcan y establezcan el modelo matemático que organiza esa variación. Los resultados se expresan en términos de los modelos, reflexiones y de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes.

Palabras clave: Matematización, función cuadrática, niveles, modelos.

Introducción

En la reforma integral del nivel medio superior en México, las competencias se presentan como una opción para promover el desarrollo de aprendizajes funcionales que contribuyan a que los estudiantes afronten los desafíos de la realidad que les toca vivir e incidir sobre ella (Cabrera & Cantoral, 2010). Se traduce en el interés porque los estudiantes le den sentido y significado a la matemática mientras interpretan y explican situaciones o fenómenos diversos; es decir, que en el aula de matemáticas se propongan situaciones problemáticas reales que promueva al estudiante a transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar sus procedimientos y resultados (SEP, 2011a, 2011b; UAGro, 2010). Una manera de promover dicho tránsito es mediante la **modelación matemática**. En el contexto de la modelación, una distinción que se hace comúnmente en la literatura (Stillman, 2012 en Ärlebäck & Doerr, 2015) es entre modelación y aplicación. Como aplicación, la ruta que siguen quienes la conciben de este modo es *matemáticas* → *realidad* y se preguntan ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, se entiende al menos hipotéticamente, que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, estos investigadores sostienen, que la dirección que se sigue es contraria, es *realidad* → *matemáticas* y la pregunta central es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificación y matematización de la situación del mundo real. Ambos tipos de tareas, ocupan un lugar importante en el salón de clases. Vista como **proceso de matematización** (u organización) de la realidad favorece un aprendizaje significativo y gradual de la matemática (Gravemeijer, 1999), mediante la puesta en escena de situaciones problemáticas realistas, suscitando que el estudiante parta de sus saberes informales asociados, con el contexto de la situación hacia una matemática formal. La investigación se centra en dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué procesos de matematización desarrollan estudiantes de segundo grado de bachillerato al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática?

Perspectiva Teórica

El proceso de matematización se estudia en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), teoría de instrucción de la educación matemática enfocada en describir el cómo y el qué considerar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Seis principios la fundamentan: (1) *de actividad*, la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola; (2) *de realidad*, si la matemática surge como matematización de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad (haciendo referencia no solo al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes); (3) *de reinvención*, la educación matemática debe dar a los estudiantes la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática; (4) *de interacción*, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, cuya discusión y reflexión entre pares permite alcanzar niveles más altos de compresión; (5) *de interconexión*, no hay distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones realistas bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo y; (6) *de niveles de comprensión*, los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática; durante este proceso de matematización se admite que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva (Bressan, 2011).

Los niveles de compresión son cuatro: El *situacional*, se da una interpretación de la situación problemática y un uso de estrategias y conocimientos informales ligadas al contexto de la situación. El *referencial* aparecen representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. El *general* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. El *formal*, se comprende y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales, propios de la rama de la matemática con que se está trabajando (Bressan & Gallego, 2011).

Estos principios se consideran de manera conjunta en el diseño de las situaciones realistas y también, para el ambiente en el aula que se espera desarrollar el proceso de matematización.

Metodología

Es un estudio de caso descriptivo-cualitativo. Participan 15 estudiantes (16 a 17 años) matriculados en segundo grado de bachillerato de una institución educativa en el estado de Guerrero, México. La actividad matemática en el aula, se organizó en equipos de tres integrantes. Los datos del estudio provienen de dos situaciones realistas diseñadas bajo los principios de la EMR, en un contexto de procesos de variación y cambio. La toma de datos considera las producciones escritas de los estudiantes, grabaciones de video y diarios de clase. Las situaciones se describen a continuación.

Situación 1. Cuadrados y áreas. (Situación retomada y ajustada de Llluzi & Sessa, 2014, p. 39). La situación se plantea en un contexto geométrico. El propósito es que los estudiantes construyan modelos matemáticos que organizan la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la distancia que hay de sus vértices a los del circunscrito.

Situación 2 (S2). La promoción del Video Club. La situación se plantea en un contexto de la economía y las finanzas. El propósito es que el estudiante arribe a modelos matemáticos que organizan la variación del ingreso mensual que obtiene el dueño de un Video Club, al variar el precio de la mensualidad que les cobra a sus socios.

Se establece un análisis preliminar de los modelos esperados por cada situación, así como de su correspondencia con los niveles de comprensión establecidos por la EMR.

Datos y análisis

El proceso de matematización se analizó teniendo en cuenta los desempeños de los estudiantes en cada situación (S1, S2). Se tuvo en cuenta las reflexiones, los modelos y el nivel de comprensión (situacional, referencial, general y formal) alcanzado por los equipos (E1, E2, E3, E4 y E5), bajo la guía del profesor.

Por cuestiones de espacio, se muestra sólo el proceso de matematización revelado por los estudiantes, al modelar S2, la cual los sitúa a analizar la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club, al variar el precio de la mensualidad que les cobra a sus socios, y a partir de ello deben determinar modelos matemáticos que organicen esa variación. Como información inicial aparece la cuota mensual ($79), el número de socios (93 personas) y la relación para obtener la recaudación mensual a partir del incremento que se le hace a la cuota a fin de que las ganancias aumenten.

Mediante la forma de proceder de los estudiantes se distingió como conocimiento informal detonante al producto entre dos factores (PF), dado que reconocieron, que la recaudación mensual puede determinarse mediante el producto entre el costo de la cuota y el número de socios. Sabían que tanto el costo de la cuota como el número de socios es un valor a determinar. El primero, resultó de sumarle al costo inicial el valor de un incremento. El segundo, se obtuvo de restarle al número de socios inicial el valor del incremento que se le suma al costo de la cuota. Esta forma de proceder (figura 1) la repitieron cada vez que iban a determinar la recaudación mensual para un cierto incremento.

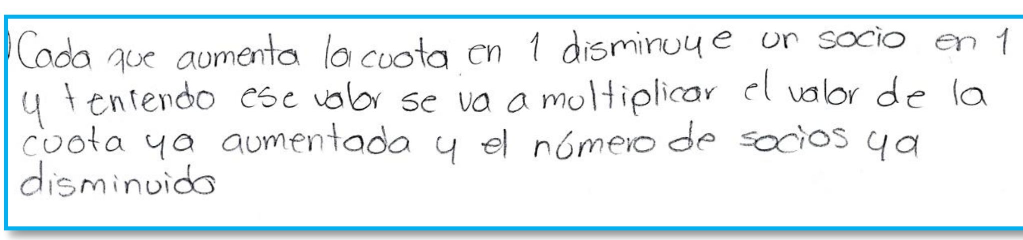
Cada que aumenta la cuota en 1 disminuye un socio en 1
y teniendo ese valor se va a multiplicar el valor de la
cuota ya aumentada y el número de socios ya
disminuido

Figura 1. Evidencia del conocimiento informal PF en E1.

Evidencia de esta forma de proceder se muestra en la figura 2, donde los estudiantes determinaron las recaudaciones mensuales para cuando el incremento es $0, $4 y $7.

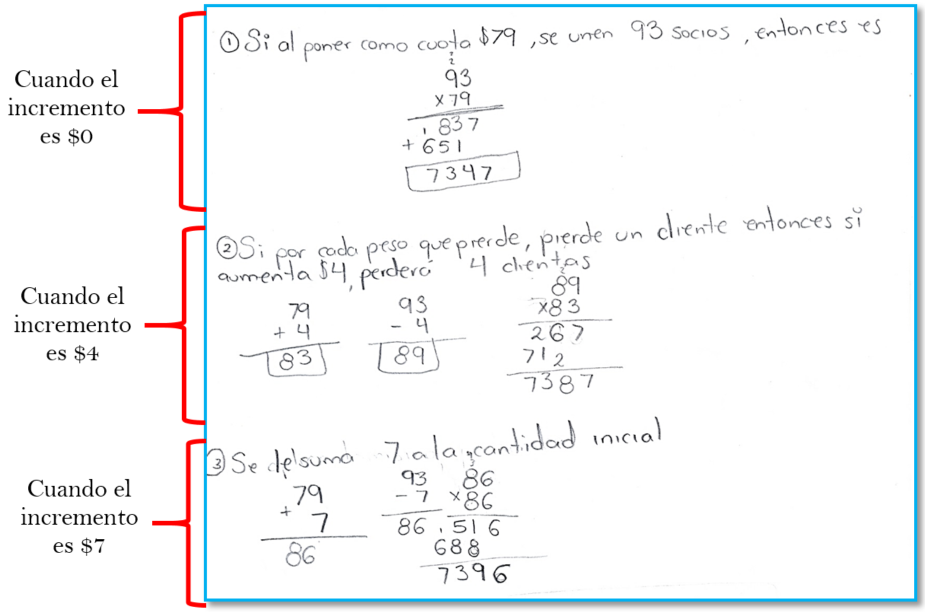

Figura 2. Forma de proceder de E4 mediante TP.

La determinación de estos valores puntuales demandados en la situación, motivó a los estudiantes a reconocer el **qué varía**. Pues identificaron que varía la recaudación mensual al modificar la cantidad de incremento que se le hace a la cuota mensual. Reconociendo también, que los valores que podía tomar la cantidad de incremento, iban de 0 a 93 pesos. Ello dio cuenta, que se ubicaron en un **nivel situacional**, dado que el conocimiento que pusieron en juego está ligado al ***contexto*** de la situación.

Evidencia de que los estudiantes transitaron a un **nivel referencial** se dio cuando organizaron mediante tablas (figura 3) los valores determinados en el nivel anterior, así como determinaron nuevos valores. Las tablas muestran la relación de correspondencia que establecieron entre la cantidad de incremento y la recaudación mensual. Además de que les permitió hacer deducciones del **cómo** y **cuánto varía**.

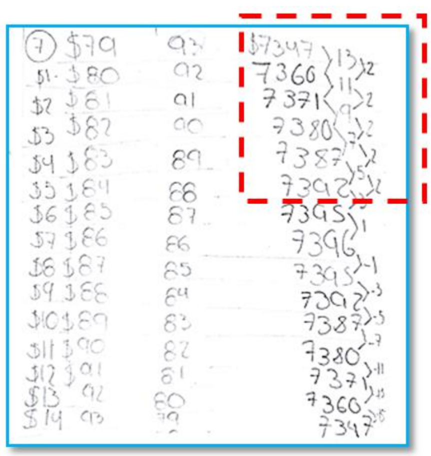

Figura 3.Tabla de valores realizada por E3.

En relación con el *cuánto varía*, los estudiantes distinguieron que la segunda diferencia es constante, con contante 2; y con el *cómo varía* reconocieron que los valores de la recaudación aumentaban para valores de incremento de 0 a 7, y luego disminuían para valores de incremento de 8 a 93. Identificaron que cuando el incremento es $7 se generaba una ganancia única de $7396 y es la ganancia máxima de entre todas las que se podían obtener luego de variar el incremento. Estas características también las expresaron mediante una representación gráfica (figura 4). Si bien empezaron a identificar características de una función cuadrática, éstas las expresaron en términos del contexto de la situación, por lo que dichas producciones son ***modelos de*** la situación.

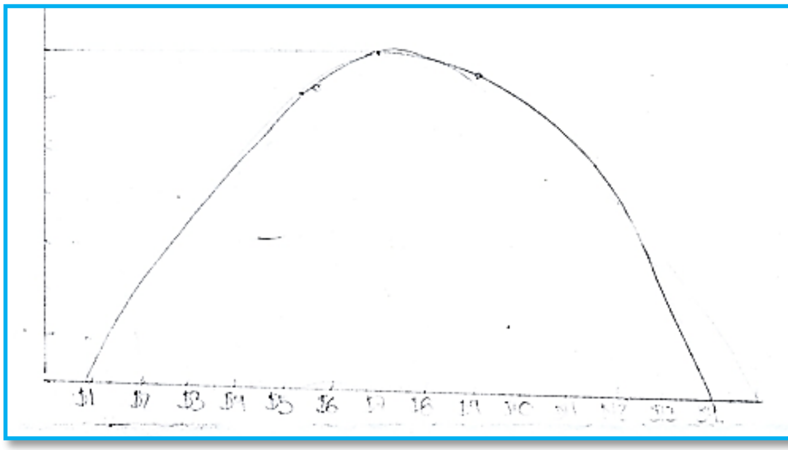

Figura 4. Gráfica de la variación analizada, construida por E3.

También establecieron una expresión algebraica que resultó de generalizar los modelos desarrollados en los niveles anteriores. La figura 5 muestra el modelo algebraico que organizó la variación inmersa, al cual llegaron los estudiantes, siendo este un ***modelo para*** resolver otras situaciones que presenten una variación cuadrática con las mismas características, por lo que se dice que alcanzaron el **nivel general**.

$$f(x)=(79+x)(93-x)$$

Figura 5. Expresión obtenida por E2

El **nivel formal** lo alcanzaron en la discusión y reflexión grupal de sus producciones, como son los modelos tabular, gráfico y algebraico. Una de las discusiones, se centró en el reconocimiento de que la gráfica era una parábola, la cual representa una función cuadrática. Los estudiantes mencionaron que en la expresión algebraica, a la cual se llegó, no se mostraba el término cuadrático, por lo que sugirieron desarrollarla. En la figura 6 se muestra el procedimiento realizado en la pizarra por una estudiante, para dar cuenta del término cuadrático en la expresión.

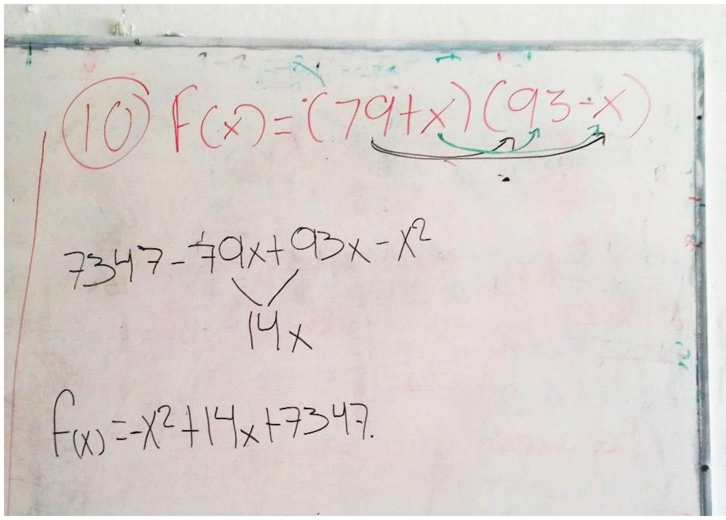

Figura 6. Procedimiento realizado por una estudiante de E3 para determinar el término cuadrático.

Entorno a ello, el profesor cuestionó a los estudiantes sobre las características que habían determinado de la función cuadrática mediante la variación analizada. Mencionaron que vieron la presencia de un máximo, el crecimiento y decrecimiento de los valores, que su segunda diferencia entre los valores de la variable dependientes es constante y la simetría de los valores. Fue en este tipo de reflexiones, que los estudiantes alcanzaron el nivel formal de compresión, puesto que reconocieron la matemática inmersa en la situación, la función cuadrática y la expresaron mediante un ***lenguaje matemático formal***. Incluso, reconocieron que el modelo gráfico, representa una parábola. Esto es producto del conocimiento que poseen, puesto que en cursos de geometría analítica estudiaron a la parábola como lugar geométrico.

Reflexiones finales

Los modelos generados en S2 fueron de tipo aritmético, tabular, gráfico y algebraico, asociados a una variación cuadrática, que a su vez la relacionaron con la función cuadrática. Las características que reconocieron al explorar y explicar las variaciones de ambas situaciones son: (1) sus valores son simétricos; (2) presenta un valor mínimo o máximo; (3) sus valores decrecen/crecen o crecen/decrecen; (4) la gráfica de las variaciones son parábolas; (5) su segunda diferencia entre los valores de la variable dependientes es constante. El aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes se favoreció de forma *gradual* y *significativa*.

Se reconoció que tanto las *interacciones* en equipo, como grupales favorecieron en los estudiantes a discusiones y reflexiones, que a su vez promovieron a que convergieran en procedimientos y herramientas. Pues sus producciones escritas evidenciaban ritmos de trabajo y vías de solución diferentes. Se distinguió que el proceso de matematización no es neutro o no es uniforme debido a las diferentes categorías cognitivas de los estudiantes.

Los seis principios que establece la EMR tuvieron implicaciones en el proceso de matematización de los estudiantes, tanto a nivel del aula de clase como de la teoría. Es decir, se hacen presentes en el desarrollo de las situaciones y brindan también, a la teoría de explicaciones hacia los mismos. De modo que si se aspira a diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje que favorezca el proceso de matematización, debe tenerse en cuenta dichos principios. Pues son los que provocaron significados, interacciones, vías de solución, reflexiones y modelos matemáticos en la actividad matemática de los estudiantes participantes.

Referencias bibliográficas

Ärlebäck, J., & Doerr, H. (Febrero, 2015). *At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models*. Trabajo presentado en 9TH Congress of Euripean Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. Resumen recuperado de https://www.dropbox.com/sh/2twajch6jj6ky5v/AAAioQIrtx4YKiIumrSgAT--a/25-Arleback-Doerr.pdf?dl=0

Bressan, A. (2011). Los principios de la Educación Matemática Realista. Recuperado de https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Bressan, A., & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista. Bases teóricas. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Cabrera, L. & Cantoral, R. (2010). El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 859-867. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Heuvel-Panhuizen, M. Van Den. (2002). Realistic Mathematics Education as Work in Progress. In Common sense in Mathematics education de Fou-Lai Lin (Ed.), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taiwan.

Llluzi, A., & Sessa, C. (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

SEP. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011b). *Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

UAGro. (2010). *Plan de estudios por Competencias 2010. Mateáticas II: Interpretando la realidad.* Guerrero: Comisión General de Reforma Universitaria Educación Media Superior.

Autores

Melby Cetina Vazquez; CIMATE, UAGro. México; melby_gcv@hotmail.com
Guadalupe Cabañas Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabañas.sanchez@gmail.com
Jhony Alexander Villa Ochoa; UdeA. Colombia; Jhony.villa@udea.edu.co