DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO. UNA MIRADA DESDE LAS TAREAS MATEMÁTICAS

MÓNICA ALEJANDRA CASTRO CÓRDOBA

FREDY PALACIOS DÍAZ

UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

FLORENCIA, COLOMBIA

2018

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO. UNA MIRADA DESDE LAS TAREAS MATEMÁTICAS

MÓNICA ALEJANDRA CASTRO CÓRDOBA
FREDY PALACIOS DÍAZ

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ciencias de la Educación con énfasis en Didáctica de las Matemáticas.

Director:
Mg. LEONARDO MONTEALEGRE QUINTANA

UNIVERSIDAD DE LA AMAZONIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
FLORENCIA, COLOMBIA
2018

“El Director y el Jurado del presente Trabajo, no son responsables de las ideas y conclusiones expuestas en éste; ellas son exclusividad de los autores”.

Nota de Aceptación

____

____

____

____

____

____

Firma del Presidente del Jurado

____

Firma del Jurado

____

Firma del Jurado

Florencia, ____________________

Dedicatoria

A

La personita dueña de nuestro corazón, nuestro hijo

Matías Palacios Castro, has sido el motor de nuestras vidas

y quien nos impulsa cada día a lograr nuestros propósitos.

A nuestras familias por su apoyo infinito en este proyecto.

.

Agradecimientos

En primera instancia a Dios. Nuestro agradecimiento por permitirnos culminar un proyecto más en nuestras vidas y por guiarnos durante el camino para lograrlo.

A nuestro hijo, por ser la persona que nos alienta a seguir, a luchar por lo que queremos y a no rendirnos durante este duro camino.

A nuestra familias por apoyarnos de manera incondicional, por estar siempre ahí para nosotros y para nuestro hijo mientras llevábamos a cabo este propósito.

A nuestro asesor, por la inagotable paciencia que tuvo con nosotros, por la constante exigencia en la formación e investigación, por estar siempre dispuesto a escucharnos y sobre todo por la motivación a seguir actualizándonos.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Resumen

Esta investigación tuvo como propósito formular e implementar actividades matemáticas centradas en situaciones problemáticas del contexto que contribuyan al desarrollo del sentido numérico de estudiantes de grado sexto, de la Institución Educativa Municipal José Eustasio Rivera, de Pitalito – Huila. Básicamente, el bajo desempeño académico institucional y los bajos resultados obtenidos en las Pruebas Saber 2014 – 2017 en este componente, evidencian la necesidad de valorar el conocimiento numérico de los educandos y obligan desde la investigación la construcción de posibles alternativas para su mejoramiento. Metodológicamente, el desempeño de los estudiantes en una prueba diagnóstica relacionada con tres componentes del sentido numérico (composición y descomposición de los números; comprensión del efecto relativo de las operaciones e implementación de estrategias de cálculo apropiadas y valoración de la razonabilidad de una respuesta) descritos por McIntosh, Reys & Reys (1992) y Almeida & Bruno (2014), develó el apego a los algoritmos tradicionales para resolver situaciones numéricas. Durante ocho meses, se implementó una metodología de trabajo en el aula centrada en la resolución de tareas a partir de situaciones problemáticas del contexto, que requieren del uso de habilidades de pensamiento para ser resueltas. Una prueba posterior a la intervención realizada demostró que un cambio en las actividades matemáticas propuestas en el aula para la aritmética escolar de grado sexto propicia notablemente el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes.

Palabras clave: Pensamiento numérico, sentido numérico, algoritmos, tareas matemáticas.

Abstract

The purpose of this research was to formulate and implement mathematical activities focused on problematic context situations that contribute to the development of the number sense of sixth grade students, of the Institution Educativa Municipal José Eustasio Rivera of Pitalito – Huila. Basically, the low institutional academic performance and the low results obtained in the Tests Saber 2014 - 2017 in this component, show the need to value the numerical knowledge of the students and force from the research the construction of possible alternatives for its improvement. Methodologically, the performance of students in a diagnostic test related to three components of the numerical sense (composition and decomposition of numbers, understanding the relative effect of operations and implementation of appropriate calculation strategies and assessment of the reasonableness of a response) described by McIntosh, Reys & Reys (1992) and Almeida & Bruno (2014), revealed the attachment to traditional algorithms to solve numerical situations. For eight months, a work methodology was implemented in the classroom focused on the resolution of tasks from problematic situations in the context, which require the use of thinking skills to be solved. A post-intervention test showed that a change in the mathematics activities proposed in the classroom for sixth-grade school arithmetic significantly enhances the development of students' number sense.

Key words: Numerical thinking, number sense, algorithms, mathematical tasks.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación se funda institucionalmente en la necesidad de encontrar estrategias que permitan cualificar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el mundo de las matemáticas escolares. A nivel mundial, diversos contenidos, conceptos y aspectos de la aritmética han sido estudiados, analizados e investigados, en particular aquellos que confluyen en el ámbito educativo. La enseñanza y aprendizaje de los diversos sistemas numéricos, las operaciones, las destrezas y habilidades numéricas han sido objeto de preocupación por parte de científicos, sicólogos y educadores. Es así, como desde la didáctica de las matemáticas y la psicología cognitiva se han consolidado líneas de investigación relacionadas con el conocimiento numérico y en particular el sentido numérico.

Según Bracho, Adamuz, Jiménez y Gallego (2014) el desarrollo de un buen sentido numérico es fundamental en los primeros años de escolaridad, teniendo en cuenta que los algoritmos tradicionales son poco usados en el contexto extraescolar y que los cambios sociales deben implicar cambios en la educación, lo cual conduce a cuestionar la pertinencia de las metodologías de enseñanza y los propósitos de formación; por tanto y ante este nuevo reto que genera la educación matemática se decidió llevar a cabo un proceso investigativo, donde se lleva a los estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa José Eustasio Rivera de Pitalito – Huila, a través del objeto matemático los números naturales, a desarrollar estrategias y capacidades o habilidades del cálculo mental flexible, la estimación numérica, el razonamiento cuantitativo y la capacidad para determinar lo razonable de un resultado, destrezas que McIntosh, Reys & Reys (1992); Almeida y Bruno (2014) describen como características del constructo *sentido numérico*.

La metodología utilizada en el proceso de investigación inicialmente fue evidenciar las dificultades que presentaban los estudiantes del grado sexto de la institución señalada en cuanto a la flexibilidad mental y estratégica al momento de afrontar situaciones numéricas, por tanto se diseñó y aplicó una prueba piloto, la cual permitió visualizar la dependencia en cuanto al uso de algoritmos tradicionales para dar solución a la misma; luego, se realizó el diseño de algunas tareas y estrategias que fueron llevadas al aula de clase y al finalizar el proceso se realizó un postest para evidenciar el avance de los estudiantes en cuanto al uso de éstas estrategias propias del sentido numérico. Todos estos resultados fueron analizados con la ayuda de una matriz que registra el uso o no uso del sentido numérico y los componentes, dimensiones e indicadores del constructo mental que se evidencian en las respuestas y justificaciones de los estudiantes a las tareas propuestas.

El trabajo de investigación está organizado en cinco capítulos, en los que se expone el problema de investigación, referentes teóricos que son la base para el sustento de la misma, la metodología utilizada y las fases del proceso investigativo de la siguiente manera:

En el primer capítulo se encuentra todo lo concerniente al planteamiento del problema, en él se puede encontrar la formulación del problema, la sistematización, antecedentes, objetivos generales y específicos y la justificación del mismo. En este capítulo se describe cómo el panorama institucional en torno a los bajos resultados en el componente numérico de las pruebas saber durante cuatro años y el bajo desempeño de los estudiantes de grado sexto en situaciones numéricas conlleva al objetivo de contribuir al desarrollo del sentido numérico.

En el segundo capítulo se describe el marco referencial el cual se compone por: el marco teórico y conceptual, que constituyen las bases teóricas del estudio, en donde además de exponer los diferentes planteamientos teóricos de investigadores en educación matemática, se presenta la posición de los tesistas en torno a los conceptos o unidades de análisis que convergen en la investigación.

En el tercer capítulo, se hace una exposición minuciosa del proceso metodológico utilizado durante el proceso investigativo, allí se encuentra la metodología de la investigación, el diseño, el tipo de la misma y la descripción de la población y muestra con la que se llevó a cabo este proceso.

El capítulo cuarto contiene las fases de la investigación, donde se describe el proceso de construcción y aplicación de los instrumentos tales como la prueba diagnóstica, entrevistas, situaciones problémicas, tareas matemáticas, prueba final y la matriz de análisis de estrategias y razonamientos. También la recolección y análisis de los datos y la interpretación de los mismos.

En el quinto y último capítulo se abre paso a las conclusiones obtenidas de todo el proceso, donde se demuestra que la estrategia implementada en el aula durante ocho meses contribuyó a fortalecer el sentido numérico de los estudiantes participantes, hecho que puede constituir un aporte para docentes de básica primaria en torno a la implementación de metodologías alternativas de enseñanza para la aritmética en el aula de clase. El capítulo contiene además, las discusiones, recomendaciones y prospectivas y junto a ello los anexos de las pruebas, situaciones, tareas y matrices utilizadas.

CAPÍTULO I

1. Problema de investigación

1.1 Planteamiento del problema

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia promulga en sus referentes de calidad: Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que el gran reto de la escuela con relación a la formación de la disciplina es potenciar el pensamiento matemático. Un análisis de los componentes y aspectos relacionados a dicho pensamiento permite comprender la complejidad de la tarea.

Según los lineamientos curriculares del MEN (1998), el pensamiento matemático se clasifica en cinco tipos de pensamientos, a saber: Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Aleatorio. Por tanto, el desarrollo del pensamiento matemático está determinado de cierta manera por el fortalecimiento de cada uno de los pensamientos citados.

En lo concerniente al pensamiento numérico se expresa que es el nuevo énfasis al cual se debe enfocar el estudio de conceptos, sistemas y estructuras numéricas. Concebido este, desde la percepción de McIntosh, Reys y Reys (1992) como sentido numérico, para hacer alusión a:

> … la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. (pp. 210-211)

La propuesta, de investigadores en educación matemática, de favorecer el desarrollo de habilidades, destrezas, competencias y acciones del pensamiento en lugar del aprendizaje conceptual y memorístico de procedimientos, reglas y/o algoritmos en aritmética; ha sido acogida por asociaciones de docentes y plasmada en referentes curriculares de diversos países (MEN, 1998; NCTM, 2003; BOE, 2007; Velázquez & Hesiquio, 2011).

El nuevo énfasis implica una visión diferente de la enseñanza de la aritmética, induciendo en cierto modo un cambio metodológico de las prácticas de aula. En este aspecto Castro, Rico y Castro (1996) y Bracho, Adamuz, Jiménez y Gallego (2014) coinciden en que a pesar de la gran cantidad de tiempo y esfuerzo que se dedica en la escuela a la enseñanza de conceptos numéricos y operaciones básicas, los resultados en materia de aprendizaje siguen siendo “pobres” y “efímeros”. Adicional a lo anterior, se evidencian mayores dificultades cuando se requiere que los estudiantes trasfieran o apliquen los conocimientos abordados a la resolución de una situación problémica. De igual manera McIntosh et al. (1992); Kamii, (1996); Hedrén, (1998); Kamii y Dominick (2010); Aguilar, Navarro, Alcalde y Marchena (2006) y Almeida y Bruno (2014) han develado en sus investigaciones, que realizar cálculos y aplicar algoritmos correctamente no garantiza ni permite determinar que un estudiante esté desarrollando su pensamiento numérico, más aún, la instrucción algorítmica excesiva puede constituir un óbice en el progreso de este constructo mental.

La problemática planteada preocupa a entidades gubernamentales, investigadores en educación matemática y educadores de todos los niveles educativos, que ven con preocupación los bajos desempeños académicos obtenidos por una parte significativa de sus estudiantes en periodos escolares, pruebas internas y externas; donde se abordan contenidos básicos de la aritmética (Bernabé, 2008; Díez-Lozano, 2011).

En la experiencia profesional en la Institución, la aplicación de una prueba escrita de selección múltiple a 22 estudiantes de grado sexto y un dialogo con tres de ellos, posterior a la implementación de la prueba, develó que aunque los estudiantes han aprobado la básica primaria (por tanto han estudiado el sistema numérico de los números naturales, sus representaciones, las operaciones y las propiedades de las operaciones) existe poca comprensión sobre dicha estructura numérica. Los estudiantes evidenciaron dificultades relacionadas con la comprensión y uso del sistema de numeración decimal al identificar el valor posicional de un dígito en un número natural, en la dificultad para expresar la cantidad de decenas que se pueden formar con un número de tres cifras, en la representación simbólica de un número dada la expresión verbal y el uso inapropiado de algoritmos estándar (p.e. alinear números naturales de izquierda a derecha al realizar adiciones de forma vertical). Escribir en números "mil cincuenta" como 100050 o indicar que 2.150 + 350 = 5.650 sin duda alguna traerían como consecuencia problemas económicos en la vida cotidiana. Dichas debilidades inquietan debido a la relevancia del sistema de numeración decimal (Obando y Vásquez, 2000; Salinas, 2007) en el establecimiento de relaciones numéricas y la comprensión del funcionamiento de los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas.

Así mismo, otro indicador que preocupa a directivos docentes y docentes (por ser en la actualidad un instrumento de medición y clasificación institucional) son los resultados de las pruebas estandarizadas que realiza anualmente el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). Teniendo en cuenta que para grado sexto no existe prueba censal y que la siguiente se realiza en grado noveno, se estudian los resultados de la I.E.M José Eustasio Rivera en las pruebas saber de grado quinto y noveno.

Al analizar los reportes de los últimos cuatro años (2014 – 2017), se puede observar que el desempeño de los estudiantes en la Prueba Saber no ha sido satisfactorio.

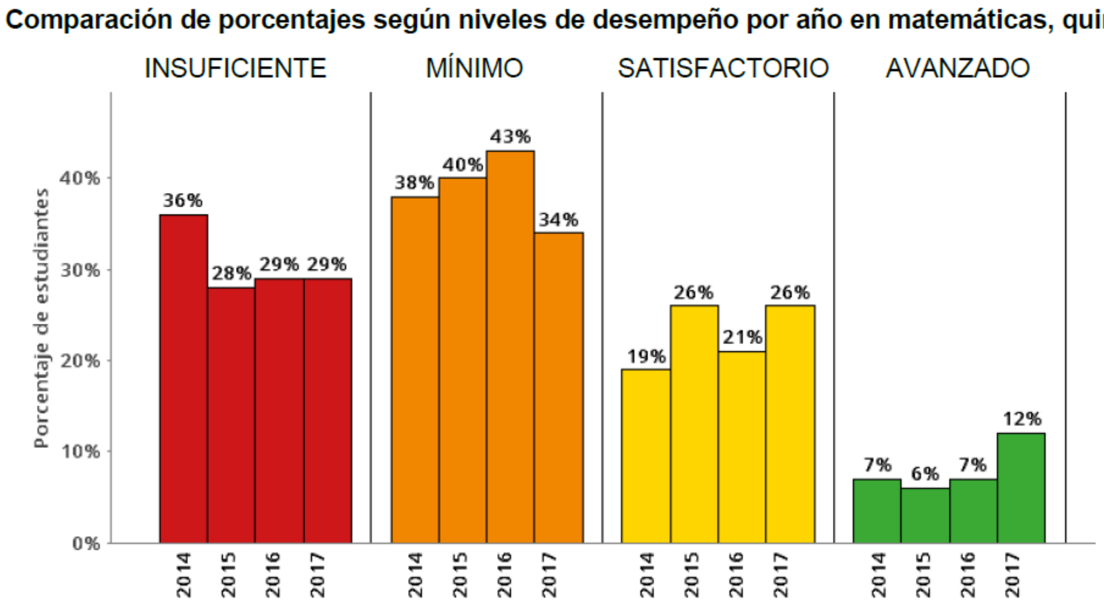


Ilustración 1. Comparación de porcentajes por niveles de desempeño por año en matemáticas, quinto.
Fuente: ICFES (2017). Reporte histórico comparativo saber 3, 5 y 9 entre los años 2014 – 2017.

De la ilustración 1 se puede inferir que durante los últimos cuatro años reportados, el 69,25% de los estudiantes de grado quinto evaluados, estuvieron ubicados en los niveles de desempeño no esperados (Insuficiente y Mínimo según categorización del ICFES), lo cual evidencia que gran parte de los estudiantes no supera las preguntas de menor complejidad o no usa operaciones básicas para solucionar problemas en algunos contextos (ICFES, 2016).

Por su parte, el reporte comparativo de las pruebas censales para el grado noveno, permite concluir que durante los cuatro últimos años, el 66% de los estudiantes valorados no alcanzó los niveles esperados (Ilustración 2).

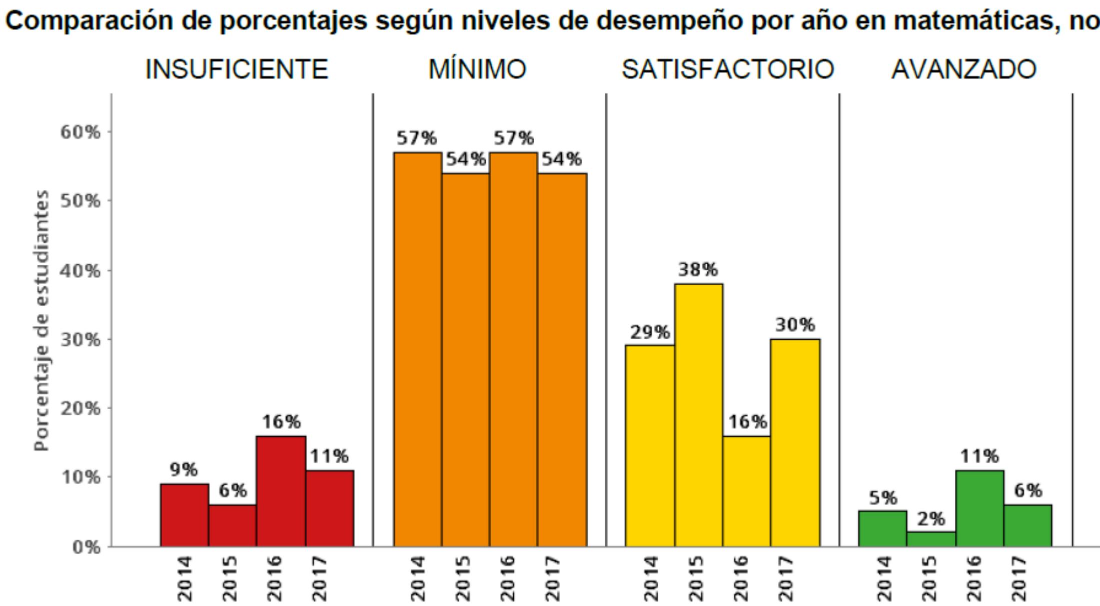


Ilustración 2. Comparación de porcentajes por niveles de desempeño por año en matemáticas, noveno.
Fuente: ICFES (2017). Reporte histórico comparativo saber 3, 5 y 9 entre los años 2014 – 2017.

En relación al pensamiento numérico o componente numérico – variacional según denominación del ICFES para la prueba, en la cual se evalúa para grado quinto, el uso de operaciones básicas y sus propiedades para solucionar situaciones problemas, el reconocimiento de estructuras multiplicativas de los números naturales, el reconocimiento y representación de los números en diferentes contextos; se concluye que este componente se encuentra en un nivel débil[1] para la institución en el grado respectivo. Para noveno, similar al caso anterior, según reporte del ICFES el componente numérico – variacional (que evalúa la resolución y planteamiento de problemas y el reconocimiento de propiedades y relaciones en el conjunto de los números reales) es una debilidad de los estudiantes de este grado. Los resultados obtenidos en la valoración del componente numérico – variacional durante el periodo 2014 – 2017 indican que no ha sido una fortaleza de los estudiantes de grado quinto y noveno que han presentado la prueba estatal. Los resultados se compilan en la siguiente tabla:

1 Las fortalezas o debilidades se determinan al comparar el puntaje promedio de la Institución en competencias o componentes de las áreas evaluadas, con los puntajes promedio en esa misma competencia o componente del conjunto de instituciones educativas del país que tuvieron un puntaje promedio similar en el área (ICFES, 2016).

Tabla 1. *Componente numérico-variacional. Prueba saber 2014 -2017 JER*

Componente Numérico – Variacional				
	2014	**2015**	**2016**	**2017**
Grado 5º	Débil	Similar	Débil	Débil
Grado 9º	Similar	Débil	Débil	Débil

Fuente: Elaboración propia a partir de los reportes del ICFES (2014 – 2017) recuperados de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

Al comparar los desempeños generales de los escolares de quinto y noveno en las pruebas saber, en particular en el componente numérico, se puede observar que en la transición de los estudiantes entre sexto y noveno, se mantienen las dificultades y que las actividades matemáticas de aprendizaje en el aula no están aportando a la solución de la problemática, por cuanto se considera que los niveles bajos del sentido numérico no tratados asertivamente en grados sexto y sucesivos, afecta ostensiblemetente los resultados en pruebas internas y externas de las competencias matemáticas asociadas al pensamiento numérico-variacional.

Adicional a los datos cuantitativos, el MEN, desde el 2015 entrega a cada institución educativa del país un informe de aprendizajes por mejorar en matemáticas, en relación con los componentes y competencias que evalúa la Prueba Saber 3º, 5º y 9º. A continuación la tabla 2 relaciona los aprendizajes del pensamiento numérico en los cuales según el informe 2016 y 2017 de la I.E.M José Eustasio Rivera se deben implementar acciones pedagógicas de mejoramiento para los estudiantes de quinto y noveno grado.

Tabla 2. *Aprendizajes a priorizar componente Numérico – Variacional*

APRENDIZAJES A PRIORIZAR		
GRADO	**GRADO 5º**	**GRADO 9º**
COMPETENCIA		
Comunicación	45% de los estudiantes no reconoce ni interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos. 61% de los estudiantes no describe ni interpreta	60% de los estudiantes no utiliza propiedades ni relaciones de los números reales para resolver problemas.

	propiedades y relaciones de los números y sus operaciones.	
Razonamiento	76% de los estudiantes no justifica ni genera equivalencias entre expresiones numéricas. 46% de los estudiantes no justifica propiedades ni relaciones numéricas usando ejemplos y contraejemplos.	41% no identifica ni describe las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia) que se pueden establecer en una secuencia numérica.
Resolución	49% de los estudiantes no resuelve problemas aditivos rutinarios y no rutinarios de transformación, comparación, combinación e igualación ni interpreta condiciones necesarias para su solución.	67% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.

Fuente: Elaboración propia basada en los informes por colegio de los resultados Pruebas saber 5º y 9º. MEN (2016) y MEN (2017) recuperados de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/siemprediae/86438

Lo reportes cualitativos del desempeño de los estudiantes de 5º y 9º en las Pruebas Saber, ratifican que un porcentaje considerable de los educandos de la Institución que cursan lo grados señalados, se les dificulta interpretar, comprender y resolver situaciones ligadas a los números y las operaciones. De manera concreta, se indica que los estudiantes no usan o relacionan su conocimiento numérico (conocimiento de los números naturales, racionales, reales, propiedades de los números, significado de las operaciones, propiedades de las operaciones) al momento de resolver problemas.

El panorama Institucional expuesto hasta el momento, aunado a la tasa promedio de reprobación académica de los estudiantes de grado sexto en el primer y segundo periodo escolar desde el año 2015, el cual equivale al 26% y 31.4% respectivamente (según datos del Sistema para la Administración y Gestión de Instituciones Educativas SYSEDUCA https://www.syseduca.com/), convoca a los educadores de la institución a proponer e implementar estrategias que contribuyan al mejoramiento del rendimiento escolar y de manera específica el desempeño de los estudiantes en situaciones asociadas al componente numérico; para lo cual se ha considerado el desarrollo del sentido numérico en situaciones de aprendizaje que no sólo se plantean en el ámbito educativo, también en el contexto personal y social de los escolares.

1.2 Formulación del problema

La problemática descrita anteriormente conlleva a los docentes investigadores al planteamiento de la siguiente pregunta:

¿Cómo contribuir al desarrollo del sentido numérico de los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Municipal José Eustasio Rivera de Pitalito – Huila?

1.3 Sistematización del problema

En coherencia con la pregunta formulada, el problema de investigación se disgrega en las siguientes cuestiones claves o preguntas orientadoras:

- ¿Qué elementos componen el sentido numérico?
- ¿Cuáles son algunos de los principales referentes teóricos y metodológicos que aportan a la comprensión y estudio del sentido numérico en grado sexto?
- ¿Qué características tiene la tarea matemática, lo cual permita potenciar el desarrollo del sentido numérico en los estudiantes?
- ¿Qué elementos componen el análisis de contenido del objeto matemático números naturales?
- ¿De qué modo se evidencia el avance (progreso) de los estudiantes en el desarrollo del sentido numérico sobre los números naturales?

1.4 Aproximación al estado del arte

A partir de una revisión bibliográfica, se presenta a continuación una discusión sobre los resultados de estudios e investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, el sentido numérico y sus componentes y las propuestas realizadas por investigadores en educación matemática para desarrollar el constructo mental.

1.4.1. La enseñanza y el aprendizaje de la aritmética

Investigadores como Gómez (1996), Castro, Rico y Castro Martínez (1996) y Díez Lozano (2011) conciben la aritmética como un saber o disciplina fundamental para el desarrollo social, cultural y científico de la humanidad, por tal razón se justifica su presencia en los planes curriculares de las distintas instituciones de alfabetización y formación de ciudadanos. Debido a la utilidad e impacto social de la aritmética, personas de distintos ámbitos (políticos, sociales y educativos) se interesan por la enseñanza, el aprendizaje y el rendimiento de los escolares en dicha disciplina.

Constance Kamii discipula de Jean Piaget ha planteado, en sus múltiples producciones investigativas, reflexiones en torno a la enseñanza de la aritmética. En el artículo de 1996, titulado "*La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética"* hace una distinción entre la enseñanza tradicional y la constructivista. Evidencia a través de datos que la enseñanza tradicional constituye un obstáculo para que los niños de básica primaria desarrollen "razonamiento numérico", el cual debe ser el objetivo de la formación. Además de explicar las diferencias entre la enseñanza tradicional y la constructivista, expone una propuesta metodológica para implementar en el aula con el propósito de desarrollar habilidades de pensamiento. De igual manera Kamii y Dominick (1998) en el artículo *"Los efectos negativos de enseñar algoritmos en grados primarios"* (traducido por Nellie Zambrano, 2010) presentan los resultados de la investigación realizada en una escuela con estudiantes de grado 1º a 4º de primaria en torno al desempeño de los niños en la resolución de operaciones (sumas y restas) usando algoritmos y otros creando sus propios procedimientos.

Para Kamii (1996) y Kamii y Dominick (1998), la enseñanza tradicional de la aritmética pretende que los estudiantes memoricen hechos, conceptos, reglas, definiciones y reproduzcan:

técnicas, estrategias, procedimientos, algoritmos convencionales o estandarizados y obtengan respuestas correctas. Dentro de esa lógica, la metodología de enseñanza en el aula radica en transmitir de manera explícita las técnicas del cálculo, luego ejercitar o practicar las técnicas enseñadas para finalmente aplicar dichos algoritmos en la resolución de problemas.

En los estudios señalados Kamii (1996) y Kamii y Dominick (1998) al comparar dos grupos de estudiantes; uno bajo la influencia de la enseñanza tradicional y otro que recibió formación constructivista se observó que los estudiantes que no se les había enseñado algoritmos obtuvieron mejores resultados en preguntas sobre la respuesta y el significado de algunas operaciones. De la observación y análisis del desempeño de los dos grupos la investigadora concluye que: 1) "La enseñanza de los algoritmos es perjudicial para el desarrollo del razonamiento matemático de los niños, porque los niños se ven obligados a renunciar a pensar por sí mismos para seguir reglas" (p. 117) y 2) "los niños pueden inventar sus propios procedimientos de cálculo y esos procedimientos son contrarios a las orientaciones de los algoritmos convencionales" (p. 113)

Como proyección de sus investigaciones, Kamii manifiesta que es de vital importancia cambiar el enfoque de enseñanza de la aritmética en los centros educativos, fundamentalmente en los grados iniciales. Propone aplicar estrategias del método constructivista, sin embargo no aporta datos para validar que la metodología descrita contribuya al rendimiento escolar de los niños en aritmética o fortalezca las habilidades de los niños para desenvolverse numéricamente en contextos extraescolares.

En sintonía con los teóricos anteriores, Hedrén (1998) en su documento *"the teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods"* expone las ventajas de no enseñar e imponer los algoritmos tradicionales de cálculo para las cuatro operaciones aritméticas en básica primaria, a su vez las bondades de incentivar a los estudiantes a inventar sus propias estrategias de cálculo. La investigación se llevó a cabo con un grupo de niños de una escuela sueca durante tres años (desde grado segundo hasta grado quinto). La metodología seguida se centró en no enseñar los algoritmos tradicionales, promover que los niños crearan sus propias estrategias para resolver situaciones numéricas, discutir en pequeños grupos o en plenaria dichas técnicas y valorar su efectividad.

Al igual que Kamii y Dominick (1998), Hedrén (1998) es un opositor de la enseñanza temprana de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones:

> Personalmente, dudo si es necesario enseñar los algoritmos estándar en absoluto. Si los maestros y los alumnos (o los padres de los alumnos) insisten, la enseñanza de ellos debería posponerse hasta quizás el sexto o séptimo año escolar. Para entonces, los alumnos ya han adquirido un buen sentido numérico, y por lo tanto la enseñanza de los algoritmos no hará ningún daño. (p. 243)

Según Hedrén (1998), la implementación de la metodología planteada durante tres años permitió que los estudiantes comprendieran: las propiedades del sistema de numeración decimal, que los números se pueden representar de diversas maneras, las propiedades de las operaciones y habilidades relacionadas con el cálculo mental y estimativo. Además de los beneficios en materia de conocimientos y comprensión, el investigador afirma que permitir la creación y desarrollo de estrategias de cálculo propias tiene un efecto positivo en la autoconfianza de sus destrezas y la disposición de los escolares hacia el área, no obstante, como en las investigaciones descritas anteriormente, no presenta evidencias sobre el impacto en el rendimiento académico o desempeño social.

Los investigadores relacionados hasta el momento (Kamii, 1996; Kamii & Dominick, 1998; Hedrén, 1998) exponen en sus trabajos información empírica a favor de la enseñanza de la aritmética bajo las ideas y estrategias del constructivismo social, oponiéndose a la enseñanza de reglas, procedimientos y algoritmos. Sin embargo no se ofrecen evidencias explicitas sobre la habilidad de los niños de primaria para crear procedimientos aritméticos sin intervención del docente (Gallardo, 2004) ni datos sobre los resultados e impacto de la enseñanza tradicional de los algoritmos.

Gallardo (2004) en su tesis doctoral *"Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales"* analiza la comprensión que tienen 24 estudiantes de Almería – España (con edades comprendidas entre 12 – 17 años, de distinto grado escolar y con diferente desempeño académico) respecto al algoritmo escrito de la multiplicación. En la metodología empleada utilizó dos instrumentos, un cuestionario escrito (nueve tareas asociadas a la multiplicación) y una entrevista semi-estructurada sobre las preguntas del cuestionario. En el diagnóstico el autor encontró que ninguno de los estudiantes alcanza el máximo nivel de comprensión esperado respecto a algoritmo de la multiplicación, a pesar de la cantidad de tiempo que han estado expuestos bajo la enseñanza de los algoritmos de cálculo. La totalidad de los estudiantes demostró una comprensión técnica del algoritmo de la multiplicación, lo cual reafirma que usar de manera correcta un algoritmo no implica que se comprenda lo que sucede tras el algoritmo o se comprenda el significado de la operación. (McIntosh et al., 1992; Gallardo, 2004)

1.4.2. Desarrollo del Sentido Numérico en estudiantes.

Investigadores y marcos normativos de algunos países en el ámbito educativo, coinciden en que es necesario orientar la enseñanza de la aritmética hacia el desarrollo de conocimientos, habilidades, destrezas o competencias, que le permitan al educando comprender la información circundante y resolver situaciones numéricas de los contextos en los que está inmerso (MEN, 1998; Bernabé, 2008; Castro et al., 1996; Giménez, 2010). Como ha sido señalado, a ese nuevo énfasis se le ha llamado, entre múltiples títulos, sentido numérico.

El análisis del desempeño de los estudiantes en aritmética ha impulsado el interés por el desarrollo del sentido numérico, el cual según Aguilar et al. (2006) se puede valorar – pese a su complejidad – mediante pruebas o test. En relación a la valoración del sentido numérico, es amplia la literatura que se encuentra a nivel internacional (Markovits & Sowder, 1994; Cortés, 2001; Yang, Hsu & Huang, 2004; Yang, Li & Lin, 2008; Bernabé, 2008; Parmjit, 2009; Veloo, 2012; Bracho, Adamuz, Gallego y Jiménez, 2014; Almeida y Bruno, 2014; Almeida y Bruno, 2016). En contraste, la búsqueda documental en el ámbito nacional de trabajos investigativos relacionados con el pensamiento o sentido numérico arrojó pocos resultados: Galeano y Ortíz (2008); Jiménez Díaz (2015); Bautista Díaz (2016) y Bocanegra Velasco (2017) los cuales en su mayoría se llevaron a cabo en básica primaria.

Bernabé (2008), en su tesis de maestría desarrollada en México, manifiesta que los conocimientos aritméticos que han adquirido los estudiantes de básica primaria son "insuficientes e inadecuados" dado que a gran parte de ellos, se les dificulta dotar de sentido a los datos numéricos que se les presenta o los que aparecen en el contexto social. Con su trabajo, la investigadora buscaba identificar: 1) aspectos del comportamiento de los escolares que evidenciaran usos del constructo mental al enfrentarse a contexto numéricos, 2) si los docentes de básica primaria promueven (a través de las acciones en el aula) el desarrollo del sentido numérico y 3) determinar si existe alguna relación entre el sentido numérico y el rendimiento escolar en aritmética.

El estudio se llevó a cabo con 4 docentes y 16 estudiantes de sexto de primaria en una escuela mexicana y develó que los estudiantes seleccionados tienden a preferir el cálculo escrito sobre el razonamiento de la información numérica que se les da, además se les dificulta realizar estimaciones y darle significado a los números, lo cual demuestra una bajo desarrollo del sentido numérico. En lo respectivo al vínculo entre rendimiento académico y sentido numérico no se identificó ninguna correlación. Del seguimiento a los estudiantes durante un año escolar se concluyó que:

> El ser bueno en aritmética o el dominar los conocimientos aritméticos no es una condición necesaria para el desarrollo del sentido numérico. Por otro lado, un desempeño bajo en relación con la aritmética, no necesariamente implica un mal desempeño en actividades que requieren del sentido numérico. (Bernabé, 2008, p. 256)

Lo anterior sugiere que un estudiante con "buen" historial académico en aritmética o hábil en el manejo de algoritmos, puede tener dificultades para -por ejemplo- resolver problemas sin ayuda del lápiz y papel o determinar lo razonabilidad de un resultado numérico dentro de un contexto, mientras que estudiantes no tan destacados académicamente pueden demostrar mejor desempeño en dichas situaciones. Esto ha sido confirmado por Nunes, Dias y Carraher (1993) en su trabajo *"Street Mathematics and School Mathematics"* donde exponen los resultados de una investigación realizada en Recife (Brasil), planteada con el objetivo de identificar las estrategias de cálculo (para la resolución de situaciones numéricas con y sin contexto) que usan los niños y jóvenes que trabajan en las calles y que han tenido pocos años de escolaridad.

Para alcanzar el objetivo planteado, Nunes y sus colaboradores hicieron un seguimiento a las actuaciones de cinco niños vendedores, de edades comprendidas entre los 9 y 15 años. Los niños y jóvenes se enfrentaron a dos pruebas, una informal y otra formal. La prueba informal se llevó a cabo en el contexto natural de trabajo de los menores, es decir, en las esquinas de las calles. En ésta valoración se les formuló preguntas sobre compras reales o simuladas de los artículos que venden, sus respuestas verbales fueron grabadas y transcritas por los investigadores, así como las estrategias usadas para resolver cada situación. En la prueba formal, los participantes se enfrentaron a una prueba escrita en la que debían resolver 99 preguntas (38 operaciones aritméticas sin contexto y 61 problemas relacionados con el contexto de compra y venta de dulces) adaptadas de la prueba informal.

El análisis de las dos pruebas implementadas, mostró que los niños tuvieron un porcentaje de acierto alto (98,2%) en los problemas o situaciones numéricas del contexto social en el que se mueven. Cuando se les solicitó resolver el mismo tipo de problemas de manera formal – con el uso de lápiz y papel – el desempeño bajó un poco (73,7% de efectividad) pero cuando se les solicitó resolver ejercicios netamente operatorios, sin contexto, el desempeño de los entrevistados fue significativamente bajo. Adicionalmente se observó que en la resolución de los ejercicios sin contexto de la prueba formal, los participantes intentaron seguir las rutinas enseñadas por la escuela y no relacionaron los resultados obtenidos con la operación propuesta (Nunes et al., 1993).

Similares resultados encontraron otros investigadores, Yang, et al. (2008) y Parmjit (2009) en sus respectivas investigaciones realizadas en Asia con jovenes entre los 11 y 16 años, manifiestan que aunque los participantes obtuvieron excelente puntuación en las pruebas de aplicación de algoritmos, su sentido numérico, conocimiento y comprensión de hechos numéricos es deficiente; en especial se les dificulta determinar si los resultados de sus cálculos son razonables o no. Para los autores, dicha deficiencia se debe a que la formación de los escolares ha estado enfocada al aprendizaje memorístico de conceptos numéricos y el uso mecánico de algoritmos.

Almeida y Bruno (2014), en su reporte de investigación *“Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico”* analizan las estrategias que utilizan 47 estudiantes de

2º grado de la Escuela Secundaria Obligatoria en España (cuyas edades están alrededor de los 13 años). En el artículo indican que los educandos tienen un “apego” a las reglas de cálculo y que “los estudiantes que son buenos en tareas algorítmicas tienen dificultades en tareas que requieren aplicar la comprensión sobre los números y las operaciones” (p. 128).

Basados en los resultados de los estudios señalados, los autores ratifican la necesidad de un cambio metodológico en la enseñanza o “instrucción” de los conocimientos numéricos. Surge de dicha sugerencia dos preguntas: ¿es posible desarrollar el sentido numérico? Y, si es posible ¿cómo hacerlo? Para Aguilar et al. (2006) el sentido numérico se puede potenciar o fortalecer a través de la intervención en el aula. “En definitiva, se establecen tres categorías de intervención: 1. Preparación para la aritmética; 2. Automatización de las combinaciones básicas y las cuatro operaciones, y 3. Estrategias de resolución de problemas”. (p. 66)

En ese sentido Markovits y Sowder (1994) ya aportaban evidencias. En su trabajo exponen la efectividad de una intervención planteada para desarrollar el sentido numérico en estudiantes entre 12 y 13 años. Los investigadores diseñaron cuatro unidades de instrucción para ser implementadas por la docente responsable del curso. De las cuatro unidades creadas, se destacan la unidad 1 Cálculo mental y 4 Estimación; señaladas por diversos teóricos como componentes o caracterísiticas fundamentales del sentido numérico (Cortés, 2001; Berch, 2005; Castro, 2008; Pilmer, 2008). Las unidades estaban compuestas por lecciones cortas, que se desarrollaban entre 5 y 10 minutos, sobre operaciones entre números naturales, racionales positivos y porcentajes. El enfoque de las lecciones fue la discusión de las estrategias alternativas de cálculo y estimación que proponian los estudiantes para la solución de situaciones numéricas.

Similar metodología empleó Veloo (2012) en su investigación *“The development of Number Sense proficiency: An intervention study with year 7 students in Brunei Darussalam”.* El estudio realizado en Asia, contó con la participación de 210 estudiantes de 12 y 13 años, los cuales fueron distribuidos en dos grupos: Grupo control y experimental (donde se desarrolló la intervención). El investigador aplicó tres test o pruebas para valorar las habilidades de los estudiantes en cinco dimensiones del sentido numérico: la comprensión del significado de los números y las operaciones, el reconocimiento del efecto de las operaciones sobre los números, la capacidad para juzgar lo razonable de un resultado, el uso de números clave y el uso de expresiones equivalentes en el cálculo. Tras la implementación del pre – test, se intervino en el aula con cinco unidades previamente planeadas, sobre: Cálculo mental, números naturales, Fracciones, Decimales y Porcentajes. Cada unidad contaba con un número específico de lecciones, algunas diarias y de tiempo corto, 10 minutos, como en el caso de las estrategias de cálculo mental.

Tras la intervención, Markovits y Sowder (1994) y Veloo (2012) coinciden en que hubo un cambio significativo en la habilidad de los estudiantes participantes para resolver situaciones numéricas, el cual no necesariamente se debe a nuevos aprendizajes sino al establecimiento de conexiones entre el conocimiento existente y el uso del conocimiento de una manera más reflexiva. Indican además que dicho cambio se mantiene en un largo tiempo.

> De mayor importancia es el hecho de que los estudiantes todavía eligieron usar estas estrategias en las medidas de retención seis meses después de que se hubieran completado las unidades de instrucción y que las explicaciones que acompañaban las tareas mostraran una comprensión profunda no aparente antes de la instrucción. (Markovits y Sowder, 1994, p.22)

Aunque los trabajos reseñados afirmen que las nuevas conexiones y el uso reflexivo de estrategias alternativas de cálculo perduran, queda pendiente determinar si esa tendencia se debe a que en el contexto escolar se mantiene la metodología que promueve el sentido numérico, o si se veran afectadas cuando los estudiantes estén nuevamente expuestos a una “instrucción tradicional", centrada en la reproducción de conceptos y algoritmos. Tampoco se ha logrado establecer (con evidencia sólida) si el desarrollo del sentido numérico aporta al desempeño académico o social de los jóvenes.

En conclusión, para potenciar el sentido numérico de los estudiantes, se requiere que el docente cree al interior de las aulas un ambiente donde se promueva (a través de tareas, actividades o situaciones relacionadas con los componentes del constructo mental) el uso reflexivo del conocimiento aritmético y la discusión e intercambio de estrategias alternativas de cálculo (Cortés, 2001; Yang et al, 2008; Parmjit, 2009; Courtney, 2012; Almeida y Bruno, 2016).

1.5 Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Implementar una estrategia centrada en la resolución de situaciones y tareas que promuevan el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Municipal José Eustasio Rivera de Pitalito – Huila.

1.5.2. Objetivos específicos

- Identificar en la literatura sobre educación matemática y didáctica de las matemáticas los diferentes elementos que componen el sentido numérico.
- Elaborar una aproximación al estado del arte de la problemática en cuestión para sustentar teórica y metodológicamente la investigación.
- Conceptualizar sobre las diferentes características de las tareas matemáticas en su relación con el sentido numérico en grado sexto.
- Identificar en las matemáticas y la educación matemática los diferentes elementos que componen el análisis de contenido del objeto matemático números naturales.

- Describir la evolución de los estudiantes de grado sexto en el desarrollo del sentido numérico en relación con la implementación de la estrategia centrada en la resolución de situaciones y tareas matemáticas.

1.6 Justificación

Las razones que sustentan la pertinencia de esta investigación se exponen desde los siguientes aspectos: teórico, práctico y social.

Desde lo teórico:

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se plantea que el estudio de los sistemas numéricos debe direccionarse al desarrollo del pensamiento numérico. Aunque en el mismo documento se expresa que el pensamiento numérico *"es un concepto más general que sentido numérico"* (p. 26), no se aclara de manera explícita cual es la diferencia entre ambos términos, es más, para definir el Pensamiento numérico, se usa la concepción de McIntosh et al., (1992) sobre sentido numérico. Desde la revisión teórico – documental de la presente investigación se pretende aportar a la resolución de dicha ambigüedad o falta de claridad.

Desde los planteamientos del MEN (1998) el desarrollo del sentido numérico como componente especial del pensamiento numérico contribuye al aprendizaje de las matemáticas y al gran reto de potenciar el pensamiento matemático de niños, adolescentes y jóvenes.

Desde lo práctico

El conocimiento de las dimensiones, características y/o componentes del sentido numérico permite a los docentes determinar concretamente las habilidades, destrezas y saberes numéricos que los estudiantes tienen y deben tener (Parmjit, 2009; Er & Dínç Artut, 2016). Pero, contar con instrumentos para valorar la conciencia numérica no sólo es necesario para conocer las competencias de los estudiantes en el campo aritmético, también es importante para la identificación de dificultades de aprendizaje de las matemáticas (Aguilar et al., 2006).

Además de ofrecer instrumentos concretos para recolectar y analizar información relacionada con el sentido numérico de estudiantes de grado sexto, el presente trabajo pretende exponer una propuesta metodológica para el trabajo en el aula, insumos que pueden ser utilizados por docentes interesados en diagnosticar y potenciar las habilidades asociadas al sentido numérico.

Otro aspecto que soporta la relevancia de éste trabajo, es la situación esbozada en el planteamiento del problema, respecto al desempeño de los estudiantes de la I.E.M. José Eustasio Rivera en las pruebas Saber 3º, 5º y 9º con altos porcentajes de insuficiencia en el componente numérico variacional asociados seguramente a los niveles mínimos de su sentido numérico identificados en pruebas diagnósticas ya comentadas.

Lo anterior indica que promover el sentido numérico en las aulas, según los antecedentes de esta investigación puede contribuir a que los niños y jóvenes fortalezcan sus habilidades para comprender y resolver situaciones numéricas. Incentivar a los estudiantes para que establezcan o construyan conexiones entre los conocimientos adquiridos y descubran diversas estrategias de cálculo traerá como consecuencia una mejora en el desempeño en pruebas estandarizadas, pues los estudiantes contarán con un conocimiento más sólido y un uso flexible de los números que les permitirá resolver preguntas de manera más ágil y eficaz, lo cual es de vital importancia.

Desde lo social

En el diario vivir, el ser humano se enfrenta a un sinnúmero de situaciones y actividades relacionadas con aspectos numéricos (ir a la tienda, trabajar, pagar facturas de servicios públicos, realizar transacciones bancarias, cambiar un billete, calcular la cantidad de ingredientes de una receta, ente otras) en mayor o menor grado. Esas actividades requieren del uso de operaciones, cálculos, estimaciones y razonamientos, demostrando “que la aritmética escolar es un conocimiento necesario para la vida cotidiana, importante para el desempeño económico, social y cultural de los ciudadanos y, por ello para la enseñanza” (Castro, Rico y Castro, 1987, citado por Diez Lozano, 2011, p.59).

En distintas investigaciones y documentos curriculares sobre educación matemática se plantea que la escuela como estamento formativo debe promover el desarrollo de las competencias de los estudiantes, las cuales le faciliten a estos desenvolverse en el ámbito social. Concibiendo el sentido numérico como la competencia numérica para enfrentarse a situaciones de la cotidianidad, se ratifica la importancia de promoverlo dentro de las aulas de clase (MEN, 2006; Castro, Rico y Castro, 1996; Giménez, 2010).

Fuera del contexto escolar, la mayoría de los estudiantes de la I.E.M. José Eustasio Rivera y sus familias se dedican a actividades agrícolas y comerciales. En dichos ámbitos también se requieren destrezas numéricas para: determinar la cantidad de abono, insumos o fertilizantes a usar en los cultivos; estimar la carga o cosecha de diferentes cultivos (café, plátano, naranja, lulo…); estimar la cantidad de trabajadores necesarios para recoger la cosecha a tiempo; calcular el dinero a pagar o cobrar por el trabajo realizado; decidir la conveniencia de cultivar ciertos productos analizando costo – beneficio; determinar el precio de venta de diferentes productos; estimar el área terrenos, lotes, fincas o parcelas, entre otras.

Así, promover el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes de grado sexto no sólo permitirá que los jóvenes ayuden a sus familias en las actividades antes mencionadas, también contribuirá a fortalecer las habilidades de los niños y jóvenes para resolver situaciones numéricas reales de otros contexto y tomar decisiones de manera flexible, sin sentirse incapacitados por no contar con instrumentos como el lápiz y el papel o la calculadora.

CAPITULO II

2. Marco referencial

En ésta sección se presenta el marco teórico y conceptual, apartados que constituyen los referentes y sustentos teóricos de la investigación. En primera instancia se abordan las posturas teóricas asociadas al constructo mental sentido numérico, sus componentes y algunas consideraciones para su desarrollo. A seguir se plantea una aproximación a la estructura conceptual del objeto matemático los números naturales y finalmente se relacionan las ideas importantes para la investigación indicando la postura que se asume.

2.1 Marco teórico

En este apartado se abordan los diferentes componentes teóricos que orientan y sustentan esta investigación. En primera instancia se centra el análisis en torno al sentido numérico, presentando concepciones, acepciones y posturas de diversos investigadores a nivel internacional. Para afianzar la comprensión sobre lo que es (el sentido numérico), se describen los componentes y/o características que se consideran relevantes para identificar cuándo una persona lo ha desarrollado en menor o mayor grado. Para cerrar esta sección se interpretan las condiciones planteadas, por algunos investigadores, como necesarias para potenciar el sentido numérico desde las aulas de clase de matemáticas.

Como segundo eje de análisis, se relacionan conceptos y posturas teóricas sobre qué se entiende por tarea y actividad en educación matemática. Respecto a las tareas, se recopila información sobre las características que deben tener, como por ejemplo el nivel de complejidad, para favorecer el desarrollo del sentido numérico.

Un último aspecto teórico a estudiar y no menos importante, es el objeto matemático mediante el cual se valora el sentido numérico de los escolares. Se tratará la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología del objeto matemático: Los números naturales.

2.2.1. El sentido numérico.

En la revisión documental realizada se encontró que expresiones como: pensamiento numérico, competencia numérica, conciencia numérica y razonamiento cuantitativo hacen referencia al mismo constructo para diferentes autores, como por ejemplo: McIntosh et al., (1992); Bracho et al., (2014); Giménez (2010); Castro (2008); Aguilar et al., (2006); Contreras et al., (2012). Lo anterior implica que en la literatura investigativa se encuentra un caso de "*Sinonimia"* (diferentes términos con la misma acepción) respecto al término sentido numérico (Whitacre, Henning & Atabaş, 2017).

Según Whitacre et al. (2017) además de la sinonimia, en la literatura investigativa relacionada con el sentido numérico, también se observa un problema de "*polisemia"*, es decir el uso de los diferentes significados del término "sentido numérico". Para los autores, la polisemia constituye un obstáculo para el desarrollo investigativo del constructo, siempre que no se explique con claridad la postura teória que se asume dentro de cada estudio.

2.1.1.1 Concepciones y posturas teóricas sobre el sentido numérico.

Existen diversas posturas teóricas para definir el sentido numérico. Bernabé (2008) y Whitacre et al. (2017) de forma separada y usando expresiones diferentes coinciden en tres concepciones:

- Sentido numérico como intuición o sentido numérico innato,
- Sentido numérico como habilidad o sentido numérico temprano, y
- Sentido numérico como proceso cognitivo complejo o sentido numérico maduro.

Uno de los primeros teóricos que usó el término sentido numérico (traducción de la expresión inglesa "number sense") fue el matemático ruso Tobias Dantzig en su obra *"Number: The language of science"* publicada por primera vez en 1930.

> El hombre, incluso en las etapas inferiores de desarrollo, posee una facultad que, a falta de un mejor nombre, llamaré sentido numérico. Esta facultad le permite reconocer que algo ha cambiado en una colección pequeña cuando, sin su conocimiento directo, un objeto ha sido eliminado o agregado a la colección. (Dantzig, 1954, p. 1)

La visión anterior surge de la psicología cognitiva y es compartida por otros teóricos como Dehaene (1997) en su libro *"The number sense: How the mind creates mathematics"*. Para Dantzig (1954) y Dehaene (1997) el sentido numérico es una facultad con la cual se nace, presente no sólo en el cerebro de seres humanos, sino también en el de algunos animales. Los investigadores señalados justifican su definición de sentido numérico como facultad innata basados en los múltiples experimentos realizados con bebés y animales, donde se percibe la habilidad para reconocer el cambio en cierta cantidad de objetos.

Bernabé (2008) señala que: "Desde la postura de la ciencia cognitiva la intuición es entendida como: el conocimiento que no sigue un camino racional para su construcción y formulación y por lo tanto no puede ser explicado o incluso, verbalizado" (p. 29). De aquí se infiere, que el sentido numérico comprendido como intuición no podría identificarse o medirse y en consecuencia su desarrollo (asumiendo que la intuición pueda fortalecerse) tampoco podría valorarse.

Pero la concepción del sentido numérico como intuición o facultad innata no sólo ha sido apropiada por teóricos de la psicología cognitiva. Investigadores en educación matemática han usado dicha postura para referirse al constructo en cuestión. Bernabé (2008), en su estudio relaciona algunos:

Tabla 3. *Posturas del sentido numérico como intuición***.**

Investigador	Ideas
Sowder, Judith (1988) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	Una intuición cuantitativa, un sentir de la representación de las cantidades a través de los números.
NCTM (1989) Contexto: Estándares Curriculares y de Evaluación	Es un sentido común de los números. Es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número".
Van de Walle y Browman (1993) Contexto: Concepto de número	Es una buena intuición acerca de los números y de sus relaciones. Es no algorítmico, genera múltiples soluciones, así como una eficiente aplicación con base a múltiples criterios.
De Corte y Verschaffel (2003) Contexto: Concepto de número	Una buena intuición acerca de los números y sus relaciones, retoman la postura del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM).
Menon y Ramakrishnan (2003) Contexto: Estrategias de cálculo	Una buena intuición acerca de los números y sus relaciones, las cuales están dadas por significados precisos, así como el desarrollo de estrategias de cálculo como la estimación y el cálculo mental.
Giménez (2005) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	Actualmente, se considera también la necesidad de que el alumnado posea **intuiciones** sobre el aspecto cuantitativo de las situaciones, entendiendo los números en sus diversos significados y relaciones, poseyendo buenos referentes para las cantidades y las operaciones. A ello se le llama adquirir sentido numérico y es fundamental en el trabajo aritmético escolar. (…) El desarrollo de un sentido numérico en su vertiente curricular y didáctica pasa por un **conocimiento intuitivo** de lo cuantitativo en relación con situaciones concretas. (pp. 115-116)

Fuente: Bernabé (2008), complementada por los tesistas.

La segunda postura presente en la literatura investigativa, concibe al sentido numérico como la habilidad que una persona ha adquirido y desarrollado en el transcurso de su vida, relacionada explícitamente con el uso de los números. Desde ésta perspectiva, el sentido numérico deja de ser una posesión o facultad semejante en todos los seres humanos, para considerarse como una destreza propia e individual, la cual está influenciada por la formación y el contexto social en el que está inmerso y se desempeña cada persona (Castro, 2008; Courtney, 2012; Whitacre et al., 2017).

La **Tabla 4** elaborada por Bernabé (2008) compila los investigadores que han definido al constructo sentido numérico como habilidad o conjunto de habilidades.

Tabla 4. *Posturas del sentido numérico como habilidad.*

Investigador	Ideas
Greeno (1991)	En términos generales **se refiere a varias capacidades** importantes de los sujetos, "incluyendo cálculo mental flexible, estimación numérica y razonamiento cuantitativo"

McIntosh, Reys y Reys (1992) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	Se refiere a una comprensión de los números y las operaciones. **Es una habilidad** y propensión para usar está comprensión en formas flexibles para hacer juicios cuantitativos, para desarrollar estrategias eficientes con los números y las operaciones. El sentido numérico es un amplio campo en el que se estima y se desarrollan estrategias de cálculo.
Greenes, Shulman y Spungin (1993) Contexto: Resolución de problemas.	**Una habilidad** para investigar y tomar decisiones inteligentes basadas en una clara comprensión de las relaciones matemáticas y el contexto de la situación problemática; una profunda comprensión de las relaciones entre los números y las cantidades.
Reys y Der Ching Yang (1998) Contexto: Estimación.	**Habilidad** que forma parte de una comprensión flexible para hacer juicios matemáticos, para desarrollar diversas estrategias para el tratamiento de los números y de las operaciones. Una comprensión de los números y las operaciones.
Llinares (2001)	El sentido numérico entendido como una forma de pensar sobre los números (**habilidad** para operar con números de manera flexible) , y cuyo dominio de aplicación abarcan diferentes tipos de números y relaciones (fracciones, decimales, enteros, razón, proporcionalidad, tantos por ciento, etc) y diferentes dominios de contenido curricular (numeración, "magnitud de los números", cálculo mental y estimación en cálculo)
Godino, Font, Konic y Wilhelmi (2009)	El logro de un "buen sentido numérico" **implica la adquisición de destrezas** relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los números, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas. (…) El sentido numérico se refiere, por tanto, a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y operaciones junto con **la capacidad** para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos. **Implica**, por tanto, **la posesión de una competencia** que se desarrolla gradualmente. (pp. 177-178)

Fuente: Bernabé (2008), complementada por los tesistas.

Desde la perspectiva de los investigadores relacionados en la tabla anterior, el sentido numérico se puede identificar a través de las acciones que realiza una persona al manipular números y realizar operaciones entre ellos para interpretar o comunicar información numérica y resolver situaciones de la cotidianidad. Acciones como reconocer números, contar, ordenar, realizar cálculos o estimaciones de maneras flexible y no algorítmica, son algunas de las habilidades asociadas al constructo mental. A diferencia de la postura anterior, la visión del sentido numérico como habilidad o conjunto de capacidades, implica que se puede desarrollar o potenciar a partir del estudio formal, la práctica o el entrenamiento cotidiano.

Pero, ¿se pueden desarrollar habilidades o destrezas sin la ayuda de un conocimiento específico básico? Algunos teóricos (Hedrén, 1998; Díez Lozano, 2011; Courtney, 2012; Bracho et al., 2014) consideran que el sentido numérico no sólo es una habilidad o un conjunto de habilidades, también es una comprensión conceptual, pues para que una persona pueda resolver con destreza situaciones numéricas requiere de un buen conocimiento conceptual sobre los números y las operaciones, conocimiento que le permita realizar o establecer conexiones entre los números, operaciones, propiedades de las operaciones y estrategias de cálculo a usar en la situación específica. Al respecto Baroody, Lai & Mix (2006) comentan que: "La comprensión conceptual puede ayudar al uso apropiado y eficiente de las habilidades y es probablemente crítica para su uso flexible" (p. 188). Esta perspectiva del sentido numérico es la que denominan "red conceptual" o "proceso cognitivo complejo" investigadores de la educación matemática.

Tabla 5. *Posturas del sentido numérico como proceso cognitivo complejo.*

Investigador	Ideas
Sowder, Judith (1988) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	Se refiere a una **sólida organización de redes conceptuales** respecto a habilidades relacionadas a las propiedades de los números y de las operaciones con ellos; las cuales son funcionales para resolver problemas a través de formas flexibles y creativas.
Greeno, James (1991) Contexto: Cognición.	Es un conocimiento profundo de los números y cantidades, siendo un ejemplo de **conocimiento de experto cognitivo**, entendido como: conocimientos que son el resultado de una extensa actividad en un campo a través del cual las personas aprenden a interactuar sucesivamente con varias habilidades del mismo campo: conocimiento de las habilidades en el ambiente dado, el conocimiento con la finalidad de descubrir habilidades y usarlas en sus actividades, percibir y comprender sutilmente patrones, solucionar problemas ordinarios o rutinarios, y generar nuevas"intelecciones".
Resnick, Lauren (1992) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	Se trata de **un alto orden de pensamiento**. Es una **forma de razonamiento y pensamiento** en el que se puede ayudar a entretejer procesos matemáticos con los números.
Van de Walle y Browman (1993) Contexto: Concepto de número	**Tiende a ser complejo**. Hay una regulación en los procesos de pensamiento matemáticos.
Trafton y Hartman, (1997) Contexto: Estrategias de cálculo	Desarrollan **conexiones entre los números** como resultado del trabajo con ellos, es una **forma de pensamiento** en donde una persona integra imágenes mentales, mismas que se interconectan y favorecen la lectura numérica. "Una persona que posee cierto sentido numérico integra mentalmente diversos "mapas" de ciertas partes del mundo de los números y de las operaciones, es hábil para utilizarlos con flexibilidad en todos los campos de acción.

Zanocco, Baeza, León y Riveros (2006) Contexto: Enseñanza de las matemáticas	"Lo podemos definir como **una red conceptual bien estructurada**, que nos brinda la posibilidad de relacionar las propiedades de los números con las de las operaciones. Se refiere no sólo a la capacidad de hacer cálculos sino a la de establecer relaciones numéricas y a las competencias necesarias que nos brindan la posibilidad de usar estos conocimientos en una forma flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias para resolver problemas, progresivamente más exigentes"

Fuente: Bernabé (2008) complementada por los tesistas.

Las ideas de los investigadores referenciados en la **tabla 5** llevan a interpretar el sentido numérico como el puente entre el conocimiento numérico y operacional, el cual permite que una persona reflexione sobre los conceptos, saberes o nociones aritméticas y conecte todo ese conocimiento para ponerlo en práctica en situaciones que se le presenten. Así que, aunque un estudiante posea un amplio conocimiento acerca de los números, las operaciones y sus propiedades, si no desarrolla sentido numérico no podrá establecer conexiones entre dichos saberes, lo cual puede consolidarse en un conocimiento poco duradero e inerte (Cortés, 2001; Molina, 2006).

En el contexto nacional, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) conciben sentido numérico como comprensión general y capacidad de uso de la comprensión (planteamiento de McIntosh et al., 1997), además se enfatiza que sentido numérico y pensamiento numérico son dos constructos distintos:

> Respecto al desarrollo de pensamiento numérico (…), diríamos que algunos aspectos fundamentales estarían constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. (…) Es de anotar que para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema. (MEN, 1998. p. 17)

Lo anterior indica que el sentido numérico integra o hace parte de un concepto más amplio y complejo, el pensamiento numérico, éste último requiere del primero para ser potenciado. Esta postura también se refleja en los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2008) de donde se interpreta que el pensamiento numérico está vinculado a una serie de conceptos, proposiciones, estructuras, modelos, teorías y procesos, no sólo del contexto numérico.

Para cerrar este apartado, se presenta la **ilustración 3**, la cual se elaboró con el propósito de sintetizar las posturas o concepciones teóricas descritas sobre el sentido numérico.

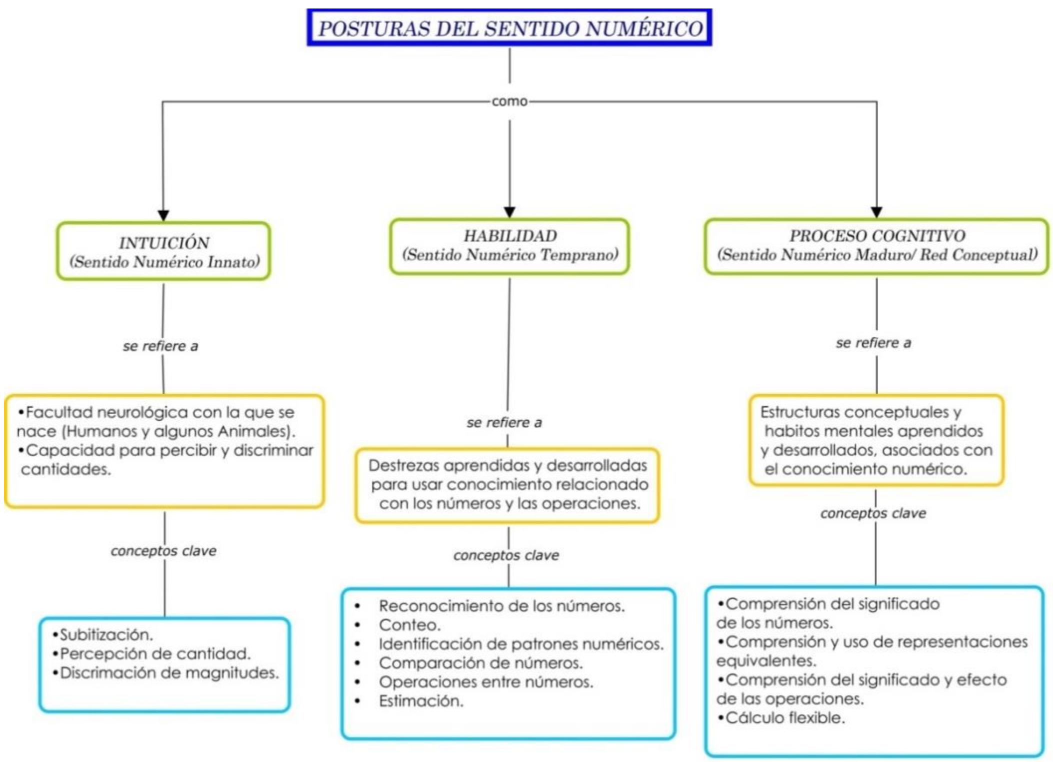


Ilustración 3. *Concepciones y/o posturas teóricas del Sentido Numérico*
Fuente: Adaptación de Bernabé (2008) y Whitacre et al., (2017)

2.1.1.2 Componentes y/o características del sentido numérico.

Las diferentes posturas o concepciones teóricas de los investigadores en psicología cognitva y educación matemática no han permitido consolidar una definición general de sentido numérico, sin embargo se evidencia mayor coincidencia o acuerdos en la caracterización del constructo mental. (Bruno, 2000; Castro, 2008)

En la revisión de literatura, se encontró que al sentido numérico se le asocian múltiples componentes o características. Berch (2005) en su atículo "*Making sense of Number Sense: Implications for children with mathematical disabilities"* llegó a listar 30 componentes, pero en el listado habla de capacidades, destrezas o habilidades de manera general (hecho que impide captar la esencia del sentido numérico) y en otros puntos del compilado simplemente hace referencia a interpretaciones o concepciones.

Desde el ámbito educativo McIntosh, Reys y Reys (1992) propusieron un marco para caracterizar el sentido numérico en el cual plantean tres componentes principales, a saber:

- Conocimiento y facilidad con los números.
- Conocimiento y facilidad con las operaciones.
- Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones.

Cada uno de los componentes señalados hacen referencia a otros conocimientos particulares, habilidades o destrezas, las cuales son explicadas y ejemplificadas por los autores en su ártículo investigativo.

Tabla 6. *Principales componentes del sentido numérico*

Definición de sentido numérico: Una propensión y habilidad para usar números y métodos cuantitativos como un medio para comunicar, procesar e interpretar información. Consolida una expectativa de que los números son útiles y que las matemáticas tienen cierta regularidad (Crear sentido)		
1. Conocimiento y facilidad con los números	1.1 Sentido de orden de los números.	1.1.1 Valor posicional 1.1.2 Relación entre tipos de números 1.1.3 Ordenar números del mismo o diferente tipo.
	1.2 Múltiples representaciones de los números	1.2.1 Gráfica/Simbólica 1.2.2 Equivalencia numérica (Composición y descomposición) 1.2.3 Comparar con puntos de referencia
	1.3 Sentido del valor relativo y absoluto de	1.3.1 Comparar con referentes físicos 1.3.2 Comparar con referentes

	los números	matemáticos
	1.4 Sistemas o puntos de de referencia	1.4.1 Matemáticos 1.4.2 Personales
2. Conocimiento y facilidad con las operaciones	2.1 Comprensión del efecto de las operaciones	2.1.1 Operar con número enteros 2.1.2 Operar con fracciones / decimales
	2.2 Comprensión de las propiedades de las operaciones.	2.2.1 Conmutativa 2.2.2 Asociativa 2.2.3 Distributiva 2.2.4 Identidad 2.2.5 Inversa
	2.3 Comprensión de la relación entre operaciones	2.3.1 Adición/Multiplicación 2.3.2 Sustracción/División 2.3.3 Adición/Sustracción 2.3.4 Multiplicación/División
3. Aplicación del conocimiento y facilidad con los números y operaciones en contextos de cálculo.	3.1 Comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario	3.1.1 Reconocer datos exactos o aproximados 3.1.2 Conocimiento de que las soluciones pueden ser exactas o aproximadas
	3.2 Conocimiento de la existencia de múltiples estrategias	3.2.1 Habilidad para crear y/o inventar estrategias 3.2.2 Habilidad para aplicar diferentes estrategias 3.2.3 Habilidad para elegir una estrategia eficiente
	3.3 Inclinación para usar una representación y/o método eficiente	3.3.1 Facilidad con varios métodos (mental, calculadora, papel y lápiz) 3.3.2 Facilidad para elegir números eficientes
	3.4 Inclinación para revisar los datos y resultados.	3.4.1 Reconocer la razonabilidad de los datos 3.4.2 Reconocer la razonabilidad de los cálculos

Fuente: McIntosh, Reys & Reys (1992)

Aunque los autores del modelo anterior manifestaron, en su momento, que el marco propuesto debia asumirse como punto de partida, éste ha sido tomado como referente en múltiples trabajos investigativos en educación matemática; Sowder (1992), Markovits y Sowder (1994), Yang (2003), Yang, HSU & Huang (2004), Yang, Li & Lin (2008), Yang, Reys & Reys (2009), Veloo(2012), Almeida y Bruno (2014), Almeida, Bruno y Perdomo (2014), Almeida y Bruno (2016), por relacionar algunos. Además de ser un insumo teórico para investigaciones, la caracterización de McIntosh et al. (1992), también ha sido referente conceptual en politica educativa para la construcción de orientaciones y documentos curriculares (por ejemplo en los Lineamientos Curriculares de Colombia y documentos oficiales de la SEP de México).

Una interpretación de los planteamientos de McIntosh y sus colaboradores (1992), permite inferir que bajo este modelo el sentido numérico se consolida como red conceptual (pese a que los autores no lo definieron así) dado que establece conexiones entre conocimientos conceptuales y habilidades o destrezas procedimentales. La **ilustración 4**, donde los autores relacionan los tres componentes principales del sentido numérico y su postura sobre lo que significa poseer un fuerte sentido numérico, constituyen argumentos para la elección de la concepción teórica. “Una persona con buen sentido numérico está pensando y reflexionando sobre números, operaciones y los resultados que producen” (p. 212)

Ilustración 4. *Interconexión entre los principales componentes del sentido numérico.*
Fuente: McIntosh et al., (1992)

2.1.1.3 Consideraciones para potenciar el sentido numérico.

Desde las concepciones del sentido numérico como habilidad o red conceptual, se admite que el constructo se puede desarrollar, promover o potenciar. Para Markovits y Sowder (1994), Veloo (2012), Almeida y Bruno (2016) con el desarrollo del sentido numéríco se busca en términos globales que los estudiantes:

- Construyan conexiones entre sus conocimientos conceptuales y procedimentales relacionados con la aritmética.

- Puedan realizar cálculos de manera flexible.
- Sean más hábiles en el manejo de los números, dentro y fuera del contexto escolar.
- Sean más reflexivos y críticos al momento de interpretar, comprender y comunicar información numérica y resolver situaciones del contexto.

Estudios e investigaciones empíricas con estudiantes de básica primaria y secundaria han demostrado que la enseñanza tradicional no contribuye al logro de los objetivos señalados anteriormente, debido al enfoque centrado en la memorización y reproducción de conceptos, reglas y algoritmos estándar de cálculo (Kamii, 1996; Hedrén, 1998; Parmjit, 2009; Kamii & Dominick, 2010). Para fortalecer el sentido numérico diversos investigadores plantean condiciones, ideas, estrategias y sugerencias metodológicas para implementar en el aula de clases.

Sowder y Schappelle (1994 citados por Courtney, 2012) indican que las actividades de enseñanza deben enfocarse a la toma de decisiones conscientes en torno al uso de los números, para ello se requiere brindar espacios o momentos donde los estudiantes "expliquen, elaboren y defiendan sus propias posiciones para que puedan integrar y elaborar el conocimiento de nuevas maneras" (p. 32).

Así mismo, dado que el sentido numérico no es un contenido o unidad temática, Trafton (1989 citado por Courtney, 2012) y Bruno (2000) coinciden en que su desarrollo debe ser un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas. Para Bruno (2000), se deben plantear actividades interesantes que le permitan a los escolares "explorar, cuestionar, verificar y buscar significado" por tal razón también se debe crear un ambiente de aula "abierto y flexible" al dialogo y la discusión entre las personas que hacen parte del proceso formativo.

Howden (1989 citado por Parmjit, 2009) afirma que el sentido numérico “se desarrolla gradualmente como resultado de explorar números, visualizarlos en una varidad de contextos y relacionarlos de formas que no están limitadas por algoritmos tradicionales” (p. 11). Parmjit (2009) ratifica que el entorno de aprendizaje debe fomentar la curiosidad y la exploración.

Markovits & Sowder (1994) consideran que el modelo de “instrucción” debe estar compuesto por: **tareas** interesantes e intelectualmente desafiantes, **un entorno de aprendizaje** que fomente la exploración y la construcción de conocimientos y **un discurso** moldeado por las tareas y el entorno.

Griffin (2004) expresa que una instrucción que pretenda promover el sentido numérico debe: “proporcionar actividades ricas para hacer conexiones; explorar y discutir conceptos y asegurar una secuencia apropiada de conceptos” (p. 40)

Por su parte Burns (2007) propone estrategias concretas de enseñanza para el aula:

- Modelar diferentes métodos de cálculo.
- Solicitar regularmente a los estudiantes que realicen cálculos mentales.
- Tener discusiones en clase sobre estrategias de cálculo.
- Hacer de la estimación una parte integral del cálculo.
- Preguntarle a los estudiantes sobre cómo razonan numéricamente.
- Plantear problemas numéricos que tengan más de una respuesta posible. (pp. 24-26)

La visión del estudiante como un sujeto activo dentro del proceso formativo, bajo la convicción de que puede construir significados y conexiones de su conocimiento conceptual y el papel de la interacción social entre personas, donde se destaca que la discusión y el intercambio de significados también aportan al aprendizaje, constituyen ideas del constructivismo social.

2.2.2. Tarea y actividad en educación matemática.

En didáctica de la matemática se enfatiza que los términos tarea y actividad hacen referencia a dos conceptos distintos, por tanto no deben confundirse (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997; Goñi, 2008; Penalva & Llinares, 2011).

Para Ponte et al. (1997) y Goñi (2008) las tareas son las “propuestas de trabajo” que el educador plantea a los estudiantes, mientras que la actividad hace alusión a las distintas acciones (mentales o físicas) que el educando realiza para resolver los cuestionamientos solicitados mediante las tareas. Desde esta perspectiva, la tarea se percibe como el recurso primordial para generar o promover la actividad en el estudiante.

Por su parte Penalva y Llinares (2011) conciben la Actividad como el conjunto integrado por las tareas y las “acciones cognitivas” que realizan los estudiantes, de manera individual o grupal. La **ilustración 5** sintetiza las posturas sobre la relación tarea – actividad.

Ilustración 5. *Noción y relación entre Actividad y Tarea.*
Fuente: Producción de los tesistas a partir de las posturas de Penalva y Llinares (2011).

A partir de las ideas de Ponte et al. (1997), Goñi (2008) y Penalva & Llinares (2011); ejercicios, problemas, juegos, investigaciones, exposiciones, proyectos y demás propuestas de trabajo pueden considerarse tareas matemáticas. Los investigadores relacionados concuerdan con otros (Solar, 2009; García Quiroga et al., 2013) en que el dúo tarea y actividad constituye un "elemento clave" en el proceso educativo, debido a que: promueve el aprendizaje y desarrollo de competencias e incita la interacción comunicativa entre estudiantes y docente, es decir favorece la discusión en el aula, lo cual es fundamental para el intercambio y compartir de conocimientos, nociones y significados construidos sobre los objetos matemáticos.

2.2.2.1 Niveles de complejidad de las tareas.

Según Ponte et al. (1997), cada tarea tiene su "potencialidad específica", es decir, pueden ser adecuadas o no para alcanzar determinados propósitos. Para hablar del potencial de las tareas, otros investigadores acuñan el término "demanda cognitiva" para referirse al grado o nivel de pensamiento que una tarea exige al resolutor (Smith & Stein, 1998; Penalva & Llinares).

Smith y Stein (1998) en su artículo "*Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice"* plantean cuatro categorias de "demanda cognitiva" para clasificar las tareas.

Tabla 7. *Categorías de demanda cognitiva para las tareas.*

Niveles de demanda cognitiva	Características de las tareas
Memorización (Demanda de nivel inferior)	- Involucran la memorización y reproducción exacta de hechos, definiciones, reglas o fórmulas aprendidas previamente. - No existe ambigüedad sobre lo que se debe hacer. - No generan conexión con los significados que subyacen a los hechos, reglas, fómulas o definiciones aprendidas.
Procedimientos sin conexiones (Demanda de nivel inferior)	- Son algorítmicas. Implican el uso irreflexivo de procedimientos. - La ambigüedad sobre lo que se debe hacer y cómo hacerlo es poca. - No generan conexión con los conceptos o significados detrás de los procedimientos que se usan. - Están enfocadas a producir respuestas correctas en lugar del desarrollo del a comprensión. - No requieren explicaciones o sólo se central en describir el procedimiento usado.
Procedimientos con conexiones (Demanda de mayor nivel)	- Concentran la atención del resolutor en el uso de procedimientos con el propósito de promover la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. - Sugieren seguir vías explicitas o implícitas, que son procedimientos generales que tienen conexiones con ideas conceptuales. - Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden usar procedimientos generales, no se pueden seguir sin pensar. - Requieren que el resolutor establezca conexiones con las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos para realizarlas.

Hacer matemáticas (Demanda de mayor nivel)	- Exigen un pensamiento complejo y no algorítmico: no sugieren explícitamente un camino para ser resueltas. - Requieren que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos matemáticos. - Exigen que los estudiantes tengan acceso a conocimientos y experiencias relevantes y hacer uso apropiado de ellos. - Requieren que los estudiantes analicen y examinen activamente las condiciones y/o restricciones que determinan las posibles estrategias y soluciones.

Fuente: Construcción de los tesistas a partir de la teoría de Smith & Stein (1998).

Otro marco para clasificar tareas matemáticas según su potencialidad, es el propuesto por el programa PISA de la OCDE. En la evaluación de matemáticas de PISA se plantean tres grupos o niveles de complejidad (OCDE, 2005):

- ***Reproducción***: Implican la memorización y aplicación de conocimientos practicados, fórmulas, procesos básicos y algoritmos estándar. Las tareas de este nivel se consideran propias del contexto cercano del resolutor (ejercicios cotidianos o rutinarios).
- ***Conexión***: Las tareas de este nivel requieren mayor interpretación, además exigen que el resolutor establezca conexiones entre conceptos, ideas y procedimientos matemáticos. Aunque siguen siendo parte del contexto familiar del estudiante las situaciones ya no son sencillamente rutinarias.
- ***Reflexión***: Las tareas requieren del resolutor mayor comprensión y reflexión en torno a los conceptos y procedimientos matemáticos a usar, así como creatividad para relacionarlos. También exigen que el estudiante explique, justifique y generalice creando formulas o modelos matemáticos.

Como puede verse en la **ilustración 6**, los marcos propuestos por Smith & Stein (1998) y OCDE (2005) para clasificar las tareas según su demanda cognitiva o nivel de complejidad tienen mucho en común.

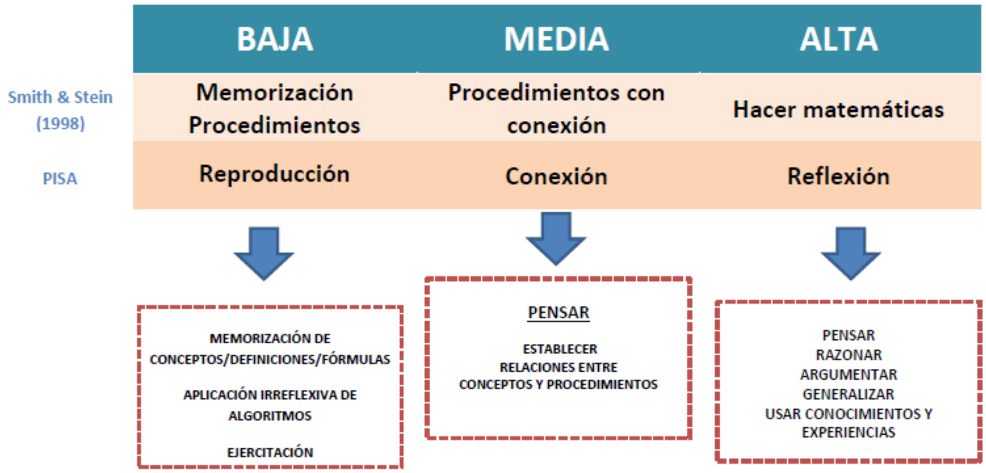


Ilustración 6. *Marcos teóricos para categorizar tareas según su demanda cognitiva*
Fuente: Elaboración de los tesistas a partir de Smith & Stein (1998) y OCDE (2005)

2.2.2.2 **Consideraciones sobre las tareas.**

A continuación se relacionan y contextualizan (al propósito del fortalecimiento del sentido numérico) las características que según algunos investigadores (Ponte et al., 1997; Goñi, 2008; Penalva & Llinares, 2011) deberian tener las tareas matemáticas, entendiendo que el tipo de actividad que generan y la "demanda cognitiva" que exigen en el estudiante, inciden en los aprendizajes que alcanzan los escolares, así como en el desarrollo de habilidades.

- Ser coherentes con los objetivos de formación y/o aprendizaje.
- Activar conocimientos numéricos previos y permitir la aplicación de los mismos.
- Promover la reflexión y generación de conexiones entre conocimientos conceptuales y procedimentales relacionados con la aritmética.
- Promover el razonamiento más que la evocación de conceptos o procesos.
- Ser desafiantes e interesantes para los estudiantes.
- Propiciar el intercambio de ideas en torno a conceptos matemáticos y estrategias de cálculo de cara a la resolución de situaciones numéricas.

2.2.3. Objeto matemático: los números naturales.

En didáctica de la matemática, el análisis de contenido es considerado una herramienta o recurso técnico que permite estudiar y analizar distintos temas del currículo escolar con el propósito de identificar y organizar la variedad de significados de objetos o conceptos matemáticos.

Según Cañadas y Gómez (2012) el análisis de contenido está conformado por tres organizadores del currículo íntimamente relacionados entre sí; la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Con el primer organizador citado, se pretende identificar los conceptos y procedimientos propios de un determinado tema, así como las relaciones existentes entre ellos. La estructura conceptual de un objeto matemático se aborda desde dos ámbitos, el conceptual y el procedimental.

2.2.3.1 Estructura conceptual de los números naturales.

Aunque en el documento de Cañadas y Gómez (2012) se establece que no existe un orden predeterminado para estudiar el contenido de un tópico, se sugiere empezar por las unidades más básicas, ser "sistemático", ir trascendiendo y no perder de vista lo que se pretende alcanzar, que en este caso es determinar los conceptos y procedimientos que caracterizan al Conjunto de los Números Naturales y las relaciones entre ellos.

CAMPO CONCEPTUAL.

Según Díez Lozano (2011) dentro del campo conceptual de cualquier objeto matemático se encuentran tres categorías a saber: Hechos, Conceptos y Estructuras.

i. Hechos.

En esta categoría se puede decir que existe una analogía o similitud con los postulados en una teoría axiomática, desde el sentido de considerar a los hechos como las unidades más simples de información de un tópico matemático. “Los hechos se subdividen en términos, notaciones, convenios y resultados” (Cañadas & Gómez, 2012, p. 3).

a) Términos.

- Cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve.
- Unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil, centenas de mil, unidades de millón, decenas de millón,… billón, trillón…
- Anterior a, antecesor a, siguiente a, posterior a, sucesor a.
- Igual a, diferente a, mayor que, menor que, mayor o igual a, menor o igual a.
- Adición, suma, sustracción, resta, producto, multiplicación, división, cociente.

b) Notaciones.

La simbología con la que usualmente se representan los términos del inciso anterior es:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
- u, d, c, um, dm, cm, uM, dM, cM, umM,…
- 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7,…, 10^n; con *n* natural.
- $=, \neq, >, <, \geq, \leq$
- $+, -, \times, \div$

c) Convenios.

- El conjunto de los Números Naturales se nota con el símbolo $\mathbb{N}$ y un elemento del conjunto con la letra *n*.
- El cero (0) es el primer número natural.
- El sistema de numeración está dividido en clases: Unidades, Miles, Millones, Miles de millones, Billones, Miles de Billones, Trillones… Dentro de cada clase existen tres órdenes, las cuales son periódicas, (udc).

…	**BILLONES**			**MILES DE MILLONES**			**MILLONES**			**MILES**			**UNIDADES**		
…	15°	14°	13°	12°	11°	10°	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°

…	cB	dB	uB	cmM	dmM	umM	cM	dM	uM	cm	Dm	um	c	D	u

Ilustración 7. *Clases y órdenes de las cifras en el SND*
Fuente: Elaboración de los tesistas.

- Principio de agrupación sucesiva. Diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden superior inmediato.
- Así, 10 unidades de tercer orden o diez centenas formarían 1 unidad de cuarto orden, es decir una unidad de mil.
- Los números se leen de izquierda a derecha indicando las órdenes respectivas.
- $10^0 = 1$, $10^1 = 10$
- Ubicación de los términos para realizar operaciones aritméticas con números naturales.

d) Resultados.

- Las cifras de un número tienen diferente valor, de acuerdo a la posición que ocupen.
  Así en el número 4.323 aunque encontremos el dígito 3 dos veces, su valor es diferente en cada caso, pues el 3 del primer orden representa tres unidades, mientras que el 3 del tercer orden equivale a 300 unidades.
- Todo número natural tiene un sucesor o elemento siguiente.
  Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n+1) \in \mathbb{N}$ donde $(n+1)$ representa el sucesor de n.
- El conjunto de los números naturales es infinito.
- Todo número natural, excepto el cero (0) tiene un antecesor o elemento anterior.
  Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n-1) \in \mathbb{N}$; $n \neq 0$ donde $(n-1)$ representa el sucesor de n.
- Para comparar números naturales se observan el tamaño o las cifras de mayor orden.
- Relaciones de orden entre los naturales. Ley de tricotomía.

ii. Conceptos.

Para Cañadas y Gómez (2012) los conceptos son el conjunto de hechos y relaciones entre sí. Analizando el tema de interés, se encuentra que existe una gran cantidad de conceptos que se podrían relacionar, no obstante, es conveniente delimitar el trabajo lo cual se logra de cierto modo con la selección de aquellos conceptos más trascendentales; lo que algunos investigadores denominan focos prioritarios.

- **Usos y/o significados de los números naturales.**

“Secuencia Verbal, Conteo, Cardinal, Ordinal, Medición, Símbolo, Tecla para pulsar” (Castro et al., 1996; MEN, 1998; Rico et al., 2008).

- **Sucesión Numéricas.**

Secuencia ordenada de números naturales que siguen un patrón de formación o disposición. 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

- **Sistema de Numeración Decimal.**

Sistema de numeración que con diez símbolos y unas reglas permite representar los números naturales.

- **Orden.**

En cualquier subconjunto de los naturales se puede establecer relaciones de orden entre sus elementos. $a = b;\ a < b;\ a > b$

- **Operación.**

Las operaciones en aritmética, hacen referencia a acciones, transformaciones y relaciones que se pueden realizar entre objetos físicos, mentales o abstractos (Castro et al., 1996; Molina, 2006, Mastachi, 2015). Las operaciones aritméticas básicas en los naturales son la adición y la multiplicación.

- **Propiedades de las operaciones.**

Las operaciones básicas satisfacen las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, elemento neutro, distributiva.

- **Clausuratividad:** Al operar dos números naturales el resultado hace parte del mismo conjunto.

$$\boldsymbol{Si}\ a, b \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{y}\ a + b = c\ \boldsymbol{entonces}\ c \in \mathbb{N}$$

$$\boldsymbol{Si}\ a, b \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{y}\ a \times b = c\ \boldsymbol{entonces}\ c \in \mathbb{N}$$

- **Conmutatividad:** Se obtiene el mismo resultado al alternar el orden de los números a operar.

$$\boldsymbol{Si}\ a, b \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{entonces}\ a + b = b + a$$

$$\boldsymbol{Si}\ a, b \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{entonces}\ a \times b = b \times a$$

- **Asociatividad:** Al operar tres o más números naturales, por ser las operaciones básicas binarias, es posible asociar términos dos a dos, de diversas maneras obteniendo siempre el mismo resultado.

$$\boldsymbol{Si}\ a, b, c \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{entonces}\ a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$\boldsymbol{Si}\ a, b, c \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{entonces}\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- **Existencia del elemento neutro:** El cero (0) y el uno (1) son los elementos neutros para las operaciones adición y multiplicación respectivamente. Todo número operado con dichos números da como resultado el mismo número.

$$\forall\ a \in \mathbb{N}, \qquad a + 0 = a$$

$$\forall\ a \in \mathbb{N}, \qquad a \times 1 = a$$

iii. Estructuras.

Rico et al., (2008) listan las siguientes estructuras que constituyen relaciones entre el campo conceptual y procedimental.

- $(\mathbb{N}\ , +)$ $Semigrupo\ Abeliano\ o\ conmutativo.$
- $(\mathbb{N}\ ,\ \times)$ $Semigrupo\ Abeliano\ o\ conmutativo.$

Un Grupo se llama conmutativo o Abeliano si la operación de la estructura algebraica cumple la propiedad conmutativa en el conjunto numérico. (Lewin, 2013, pág. 75)

- $(\mathbb{N}, \leq)$ $Orden\ Total\ y\ Arquimediano$.

  Al comparar dos números naturales a y b se puede dar una y sólo una de las siguientes relaciones, que en conjunto se denominan ley de la tricotomia: $a = b,\ a < b,$ ó $a > b$.

- $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ $Semianillo\ Arquimediano$.

  Según Lewin (2013) un conjunto con dos operaciones constituyen un semianillo, si las operaciones implicadas cumplen las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, distributiva y de identidad, explicadas arriba.

Con el listado anterior se cierra el acercamiento al campo conceptual del objeto matemático. A continuación se identifican las destrezas, razonamientos y estrategias que se tienen en cuenta en el tratamiento de los números naturales.

CAMPO PROCEDIMENTAL

i. Destrezas.

Se consideran fundamentales las siguientes habilidades que están relacionadas o dan cuenta del conocimiento de los números naturales como sistema numérico:

- Escritura de números naturales.
- Lectura de números naturales.
- Usos de los números.
- Clasificación de números naturales.
- Comparación de números naturales.
- Descomposición polinomial de números naturales.
- Aplicación de algoritmos operacionales.
- Uso de la jerarquía de las operaciones.
- Resolución de problemas aritméticos.

ii. Razonamientos.

Los razonamientos a los cuales se apelan para comprender los conceptos relacionados con los números naturales pueden ser de carácter:

- **Argumentativo:** En la justificación de propiedades de los números y operaciones.
- **Deductivo:** Partir de reglas generales para deducir o elaborar conclusiones concretas o particulares. Se puede usar para la comprensión de las propiedades de las operaciones.
- **Inductivo:** Proceso de Generalización. Cuando con la observación de ciertas regularidades particulares se llega a elaborar una regla o conclusión general.

iii. Estrategias.

Dentro de este nivel del campo procedimental Rico y sus colaboradores (2008) distinguen las siguientes:

- Cálculo mental
- Estimación de los resultados de una operación.
- Reconocimiento de patrones numéricos.
- Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números
- Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla.
- Estrategias de cálculo con la calculadora manual.
- Resolución de problemas aritméticos y numéricos.

2.2.3.2 Sistema de representación de los números naturales.

Siguiendo los trabajos de Castro (1994); Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2007); Rico et al., (2008) y Cañadas & Gómez (2012) los números naturales admiten las siguientes representaciones: verbal, simbólica, gráfico, tabular, manipulativa.

Representación verbal

Esta representación hace alusión al uso del lenguaje natural para expresar los números. El castellano tiene unas reglas lingüísticas que determinan como referirse a esta entidad matemática; especialmente en el contexto ordinal, pues en el cardinal es el sistema de numeración decimal el que reglamenta la lectura de números.

- **Ordinal.** Verbalmente se dice: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto,…, décimo, décimo primer,…, décimo noveno,…, vigésimo, trigésimo, cuadragésimo…
- **Cardinal.** Cuando se pretende secuenciar o contar los elementos de un conjunto, esto es responder de manera verbal la pregunta ¿cuántos hay? O leer una cantidad como 12.543.000. Así, la cifra escrita anteriormente mediante los dígitos, se lee doce millones quinientos cuarenta y tres mil. Esto lo rige las clases y las órdenes del sistema de numeración (unidades, decenas, centenas, unidades de mil,…) y el convenio definido y explicado en la estructura conceptual.

Representación Simbólica

Los símbolos creados para notar los números (dígitos hindú-arábicos en el caso del sistema de numeración decimal), las letras de un determinado alfabeto y además los signos de las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) hacen parte de esta representación.

Los números se construyen de acuerdo a la base y a las características propias del sistema de numeración que se elija, así el símbolo 3 representa el número “tres” en la base diez, pero ese mismo número se escribe 11_2 en el sistema binario y se lee “uno uno” y no once.

Así el número 56 se puede representar de múltiples maneras dentro del mismo registro de representación, proceso que Duval (2004) definió como transformación de tratamiento.

- **Descomposición polinomial**: $56 = 50 + 6 = 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
- **Descomposición factorial**: $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7$
- **Otras relaciones aritméticas**: $56 = 7 \times 8 = 100 - 44 = 7^2 + 7^1 = 168 \div 3$ ...

Representación gráfica.

Referida al uso de puntos, círculos, líneas; en general dibujos para representar números.

Semirrecta Numérica: Esta representación permite visualizar el concepto de número anterior y sucesor, las relaciones de orden (mayor y menor) y comprender el carácter infinito del conjunto.

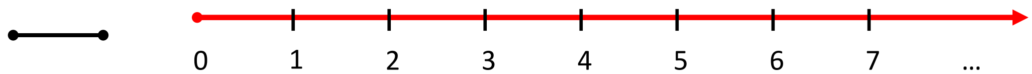


Ilustración 8. *Semirrecta para representar números naturales*
Fuente: Elaboración propia

Herramientas Pictóricas.

Es un recurso valioso que permite mostrar cómo se relaciona el sistema de base diez con otros sistemas de numeración, además contribuye a la comprensión de las órdenes y la agrupación, por ejemplo, para representar el número 11 en base tres (que usa los dígitos 0, 1 y 2 para escribir cualquier número natural) se realizaría el siguiente gráfico.

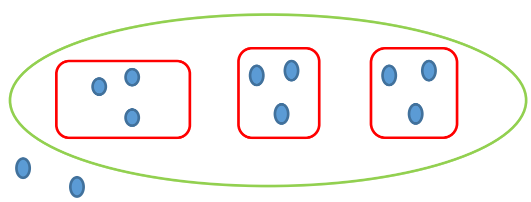


Ilustración 9. *Representación pictórica de un número natural en base tres.*
Fuente: Elaboración propia.

Al relacionar la representación pictórica con la simbólica, transformación de conversión según Duval (2004), el número 11 en base tres se representa simbólicamente como 102_3 , es decir, dos unidades de primer orden, cero unidades de segundo orden y una unidad de tercer orden. El once en base tres se leería “uno cero dos” y no “ciento dos”.

Otro uso de la representación gráfica o pictórica, la propone Encarnación Castro en su tesis de grado doctoral; las configuraciones puntuales como recurso para estudiar los números figurados o poligonales como se ilustra a continuación.

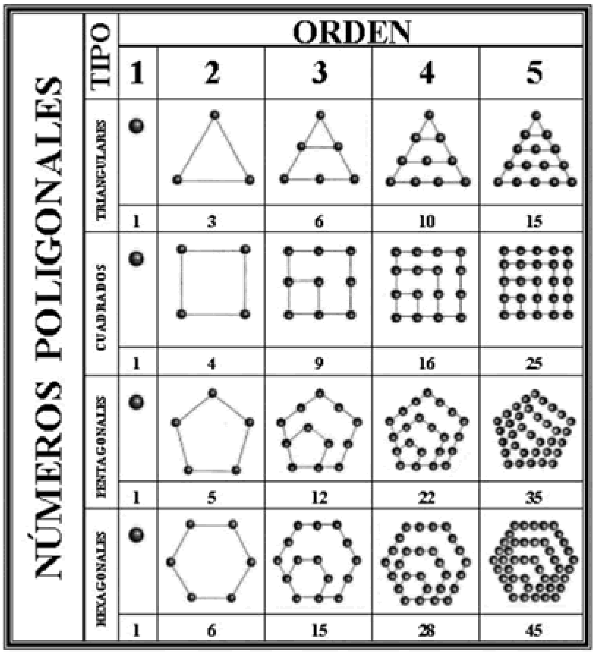


Ilustración 10. *Números poligonales representados mediante configuraciones puntuales.*
Fuente: Cañadas y Gómez (2012)

Representación mediante material manipulativo

Gómez y Cañadas (2012) indican que lo recursos didácticos que disponen de símbolos o signos (en este caso elementos, fichas o piezas) y unas reglas propias que determinen como construir o expresar un concepto, estructura u objeto matemático se pueden considerr un sistema de representación; en ese orden de ideas, se considera material de representación manipulativo a: los ábacos, yupanas, bloques multi-base y regletas de Cussinaire.

Es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de usar diferentes sistemas semióticos de representación, ya que como se mostró en la descripción previa, cada registro devela características o permite comprender, conceptos y propiedades especificas del objeto matemático representado (Duval, 2004; Rico et al., 2007; Rojas, 2014).

2.2.3.3 Fenomenología de los números naturales.

El análisis fenomenológico constituye un importante organizador curricular, ya que los fenómenos dan sentido al aprendizaje de los objetos y conceptos matemáticos (Rico et al., 2008). La fenomenología de cualquier objeto debe tener en cuenta, además de las situaciones que los originan, los contextos y las estructuras en las que se desarrollan.

Rico y sus colaboradores (2008) manifiestan que existen diversos contextos numéricos que el sistema de los números naturales organiza, debido a que estos satisfacen diferentes necesidades e involucran significados distintos según su uso: para contar, medir, ordenar, cuantificar, operar o simbolizar. Cada contexto está ligado a unos fenómenos y unas preguntas que el hombre requiere responder.

2.3 Marco conceptual

A continuación se describe de manera sucinta las posturas e interpretaciones sobre los fundamentos conceptuales y teóricos en los que se basa este estudio.

Respecto a la expresión sentido numérico, se expuso en el marco teórico las tres concepciones o posturas predominantes para definir o caracterizar el término. Con base en los planteamientos de McIntosh et al. (1992), Aguilar et al. (2006) y Castro (2008) en ésta investigación se concibe el **sentido numérico** como la comprensión general que tienen las personas (en este ámbito los estudiantes) sobre conocimientos conceptuales numéricos (números y operaciones); el cual se ve reflejado en la **habilidad** para usar dicha comprensión en la interpretación, comunicación y resolución de situaciones numéricas del contexto en el que se muevan.

Así mismo, es conveniente recordar que como se señaló previamente, el sentido numérico no es lo mismo que pensamiento numérico. Según Castro (2008) el sentido numérico está relacionado con el pensamiento numérico y aporta a su desarrollo. Para este estudio el constructo mental sentido numérico, hace referencia a un conjunto de habilidades, capacidades o destrezas que permiten comprender los conocimientos conceptuales de la aritmética y establecer conexiones con lo procedimental, mientras que el pensamiento numérico se asocia con todo el cúmulo de conocimiento aritmético, integrado por lo conceptual y procedimental con carácter formal.

Para la caracterización del sentido numérico de los estudiantes de grado sexto, se toman tres de los siete componentes que Almeida y sus colaboradores (2014) consideran esenciales dentro del marco propuesto por McIntosh et al. (1992):

- **Composición y descomposición de números:** Se evidencia cuando se escribe o reescribe cantidades numéricas en formas equivalentes para facilitar cálculos.

  Por ejemplo $70 - 56 = (66 + 4) - 56 = (66 - 56) + 4 = 14$

- **Comprensión del efecto relativo de las operaciones:** Implica comprender el significado de las operaciones, saber relacionarlas, usar sus propiedades para facilitar cálculos y reconocer que las operaciones afectan el resultado de una situación o problema numérico.

  Por ejemplo $35 \times 12 = 35 \times (10 + 2) = 350 + 70 = 420$

- **Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta:** Relacionada con la habilidad para identificar y aplicar estrategias eficientes (en términos de economia de esfuerzo y tiempo) según la tarea. También implica identificar si una respuesta tiene sentido o no en el contexto de la situación numérica.

En relación al desarrollo del sentido numérico algunos investigadores manifiestan que la instrucción o las clases tradicionales constituyen un obstáculo para potenciar el constructo mental por tanto se debe implementar una metodología distinta en el aula (Markovits & Sowder, 1994; Kamii, 1996; Kamii & Dominick, 2010; Hedrén, 1998; Parmjit, 2009; Veloo, 2012; Almeida & Bruno, 2014; Almeida et al., 2014).

Conviene en consecuencia caracterizar lo que se entiende por clases tradicionales de artimética desde los investigadores citados haciendo un contraste con las ideas metodológicas a implementar en este estudio.

Tabla 8. *Clase tradicional vs Clase Socio - Constructivista*

Tradicional	Socio – Constructivista
Objetivos: Adquirir o acumular conocimiento conceptual Memorizar hechos, conceptos, reglas, resultados y procedimientos. Dominio del contenido. Obtener respuestas correctas, escribir símbolos matemáticos y reproducir algoritmos.	**Objetivos:** Comprender el contenido conceptual. Construcción propia de los significados de los objetos matemáticos. Desarrollar y/o fortalecer habilidades de pensamiento y razonamiento. Desarrollar habilidades para interpretar, comprender y comunicar información numérica y resolver situaciones del contexto.
Metodología en el aula: - Enseñanza explicita de conceptos - Enseñanza explicita de técnicas de cálculo. - Ejercitación de reglas y algoritmos. - Aplicación de lo estudiado a la resolución de problemas. (Markovits & Sowder, 1994; Kamii, 1996; Courtney, 2012)	**Metodología en el aula:** - Promoción del razonamiento matemático a través de situaciones de la vida cotidiana. - Análisis y resolución de tareas que promueven la reflexión y conexión entre lo conceptual y procedimental. - Trabajo en grupos para compartir e intercambiar significados sobre los objetos y conceptos. - Debates sobre estrategias de cálculo flexible para la solución de problemas. (Kamii, 1996; Bruno, 2000; Burns, 2007)

Fuente: Construcción de los tesistas a partir de los planteamientos de Markovits & Sowder, 1994; Kamii, 1996; Courtney, 2012; Bruno, 2000 y Burns, 2007

Finalmente, dentro de esta investigación las tareas matemáticas (en consonancia con Ponte et al., 1997 y Goñi, 2008) son herramientas planteadas por el docente a sus estudiantes para generar en ellos actividad. Así mismo, se usó el marco de Smith & Stein (1998) para caracterizar o clasificar las tareas según su exigencia o demanda cognitiva.

Ilustración 11. *Acepción de tareas para la investigación.*
Fuente: Los tesistas a partir de Ponte et al. (1997); Goñi (2008) y Penalva & Llinares (2011)

CAPÍTULO III

3. Marco Metodológico

En el presente capítulo se relata el método usado para dar respuesta a las preguntas y objetivos de investigación planteados, así como las técnicas e instrumentos de recolección de datos. De igual forma, se describe el diseño y tipo de investigación y los participantes del estudio.

3.1 Metodología de la investigación

Existen diversos métodos o caminos metodológicos para realizar investigaciones científicas o en las ciencias sociales, cada uno con sus fortalezas, debilidades y potencialidades según el objeto o problema de investigación (Bernal, 2010). En educación, Bisquerra (1989) presenta múltiples criterios para clasificar los métodos de investigación, acotando que éstos "*no son mutuamente excluyentes*" es decir; un estudio puede valerse de uno o más métodos de paradigmas distintos para alcanzar los fines propuestos.

Según Rodríguez & Valldeoriola (2009), la metodología a usar en una investigación está determinada por los objetivos y finalidades del propio estudio. Dado que el objetivo que orienta ésta investigación es el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de grado sexto de una institución en particular, se consideró el enfoque cualitativo como principal paradigma investigativo, pese a que (como se verá más adelante) en la recolección y análisis de datos se usaron instrumentos y técnicas propias del enfoque cuantitativo. A este hecho diversos autores lo denominan complementariedad de métodos (Bisquerra, 1989; Bernal, 2010), aproximación metodológica mixta o simplemente enfoque mixto (Rodríguez & Valldeoriola, 2009; Hernández, Fernández & Baptista, 2014). Desde ésta clasificación moderna se puede decir que la presente investigación se enmarca en el enfoque cual – cuan (integración de los métodos cualitativo y cuantitativo con predominancia del primero). Además se destaca que este estudio hace parte del campo de la didáctica de la matemática y la linea de investigación es el pensamiento numérico.

3.2 Diseño y tipo de investigación

Según Hernández et al. (2014) el diseño de investigación hace referencia al plan ideado para obtener información, el cual incluye "procedimientos y actividades" para dar respuesta a las interregantes del estudio.

Dentro de la perspectiva cualitativa se optó por la **Investigación – Acción** (I – A) porque es el diseño más coherente con los objetivos propuestos en el presente estudio. La I – A se caracteriza por ser un diseño encaminado a la resolución de problemas prácticos. En el ámbito educativo es útil debido a que establece lazos entre la investigación y la acción impactando la realidad estudiada bajo el propósito de promover cambios, mejorar o transformar prácticas (Bisquerra, 1989; Rodríguez & Valldeoriola, 2009; Hernández et al., 2014). Otra razón para elegir el diseño I – A, radica en que los investigadores están implicados en el fenómeno a estudiar, es decir los investigadores son a su vez docentes de la Institución.

Como se señaló en el primer capítulo, los docentes – investigadores vislumbraron una situación problema en una institución específica, la cual se manifiesta en el aula y en los resultados de las pruebas estandarizadas (baja propensión de los estudiantes para dotar de sentido y usar flexiblemente los contenidos asociados con los números y las operaciones). Esa **observación** contribuyó a definir la idea de investigación y a delimitar el problema. La revisión de la literatura sobre el tema y los datos que se recogieron llevaron a los docentes a **reflexionar** (teóricamente) sobre las acciones que pueden contribuir a la solución de la problemática, para pasar a comprobarlas en la práctica, **actuación**. La descripción anterior muestra que en el presente estudio se implementó lo que Hernández et al. (2014) denomina el ciclo de la Investigación Acción: Observar – Pensar – Actuar.

Por otro lado, se eligió el diseño pre – experimental del paradigma cuantitativo debido a su pertinencia (demostrada en otras investigaciones relacionadas en los antecedentes) para el logro de uno de los objetivos específicos: valorar el sentido numérico de los estudiantes de grado sexto. La estrategia Preprueba – Posprueba permite además evaluar el impacto de las acciones implementadas en el aula, ya que antes de la intervención se realizó una prueba diagnóstica que arrojó información sobre el uso de componentes del constructo mental en la resolución de tareas o situaciones numéricas; ésta medida inicial se compara estadísticamente con la valoración final (tras la intervención en el aula) en los apartados análisis e interpretación de la información.

Conviene enfatizar además, que la elección del diseño pre – experimental también se debe a que hubo un control mínimo sobre una de las variables implícitas de la presente investigación: la metodología de enseñanza de los contenidos aritméticos. Dado que el sentido numérico no es un tópico o temática especial a enseñar en el aula (Bruno, 2000; Courtney, 2012), se siguió el plan de área de matemáticas de la institución para el grado sexto, pero con algunas acciones específicas durante dos periodos académicos, veinte semanas:

- En los 10 primeros minutos de cada clase (actividad de exploración), al intermedio (actividad de entremés) o al final (para pensar en casa) se presentó una pregunta, ejercicio, pasatiempo, juego o problema numérico, en el cual los estudiantes debían reflexionar sobre su conocimiento numérico y usar estrategias relacionadas con componentes del sentido numérico para darle solución a las tareas propuestas.

- En la socialización de las tareas planteadas se le solicitó a los estudiantes constantemente explicar cómo encontraron la solución, mostrar otra manera de resolverla y usar estrategias para calcular mentalmente los resultados de operaciones aritméticas.
- Durante el periodo de intervención se plantearon tres actividades grupales donde los estudiantes debían resolver y exponer ante los demás algunas tareas numéricas con contexto. Las estrategias de solución de cada tarea se discutían al interior de cada grupo y frente a todo el curso, para valorar su efectividad y eficacia en términos de ahorro de tiempo y esfuerzo.

3.3 Descripción de la población y muestra

Para el desarrollo de la investigación se tomó a los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Municipal José Eustasio Rivera de Pitalito Huila como población del estudio, teniendo en cuenta la situación descrita en el planteamiento del problema (resultados de los estudiantes de grado quinto en las pruebas saber y aprendizajes por mejorar respecto al componente numérico-variacional).

El grado sexto está conformado por 290 estudiantes (154 en la jornada mañana y 136 en la jornada tarde) los cuales están distribuidos en ocho (8) cursos; cuatro por jornada. La muestra está constituida por 38 estudiantes de la jornada de mañana (22 del género femenino y 16 del género masculino) cuyas edades están entre los 11 y 13 años. Los estudiantes seleccionados corresponden al curso 6-1; grupo donde uno de los investigadores se desempeña como docente del área de matemáticas. La selección del curso se hizo al azar, teniendo en cuenta que los otros tres cursos tienen características similares al grupo elegido, por lo anterior se concluye que la muestra es no probabilística o dirigida.

CAPÍTULO IV

4. Fases de investigación

4.1 Construcción de instrumentos

Para la recolección de información se implementó en primera instancia una prueba diagnóstica, a continuación se realizó una entrevista a seis estudiantes de la muestra (los que obtuvieron mayor y menor porcentaje de acierto en la prueba inicial). Durante la intervención se usó la observación directa, registrando mediante notas de campo, fotografías y videos las evidencias de uso de componentes del sentido numérico por parte de los estudiantes en la resolución de tareas o situaciones numéricas.

4.1.1 Prueba diagnóstica

La prueba inicial tiene como propósito identificar la capacidad de los estudiantes para usar su conocimiento numérico y/o componentes del sentido numérico en la resolución de tareas numéricas; contiene 20 preguntas o situaciones relacionadas con tres de los siete subcomponentes definidos por Almeida & Bruno (2014) y Almeida et al. (2014) como fundamentales: **Uso de la composición y descomposición de números**; **Comprensión del efecto relativo de las operaciones** y **Desarrollo de estrategias adecuadas y valoración de la razonabilidad de las respuestas**. Algunas preguntas de la prueba son adaptaciones de los Test usados por Courtney (2012) y Singh (2010) en sus respectivas investigaciones.

Antes de implementar la prueba diagnóstica, se hizo un pilotaje en el año 2017 con estudiantes de grado sexto, con el propósito de evaluar su pertinencia, claridad y los requerimientos técnicos para su aplicación. Este ejercicio contribuyó a: mejorar el diseño, ajustar las instrucciones, reformular el enunciado de algunas tareas que resultaron ambiguas para los estudiantes y a cambiar otras que implicaban poco o nulo uso de los componentes del sentido numérico a estudiar. Tras las modificaciones se obtuvo la versión final del instrumento diagnóstico, el cual contiene 10 ítems sin contexto y 10 con contexto (ver Anexo A).

La **Tabla 9** muestra la vinculación de cada reactivo de la prueba diagnóstica con los componentes seleccionados del constructo mental.

Tabla 9. *Relación de ítems de la prueba con los componentes del sentido numérico*

COMPONENTE	DIMENSIÓN O SUBCOMPONENTE	ITEMS DE LA PRUEBA
Conocimiento de los números y facilidad con ellos	Composición y descomposición de números	4, 5, 6,7,10
Conocimiento y facilidad con las operaciones	Comprensión del efecto relativo de las operaciones	2, 3, 6, 9, 10, 11, 17
Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones	Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad	1, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20

Fuente: Los tesistas.

4.1.2 Entrevistas

Conscientes de la complejidad del sentido numérico y la limitante de las pruebas escritas en la identificación del uso de algunos de sus componentes (por ejemplo el uso de la estimación o estrategias de cálculo mental), se diseñó una entrevista semiestructurada para recoger información más completa en torno a los procesos realizados por los estudiantes en la resolución de los ítems de la prueba diagnóstica. Esta se construyó tras el análisis estadístico de los resultados de la prueba diagnóstica y se basó en las preguntas en la que se observó menor porcentaje de acierto y menor uso de componentes del sentido numérico para su resolución (ver Anexo B).

4.1.3 Tareas

Para el trabajo de campo se abordó durante cada clase, como se indicó en la metodología, tareas numéricas (ejercicios, juegos, problemas o situaciones contexto) que se pueden resolver mediante estrategias de los componentes del sentido numérico. Algunas de las tareas que se propusieron a los estudiantes fueron diseñadas por los tesistas, otras se seleccionaron, adaptaron y modificaron de libros de texto e investigaciones relacionadas con la valoración del constructo mental (Markovits & Sowder, 1994; Parmjit, 2009; Courtney, 2012; Almeida & Bruno, 2014) consolidando así un banco de tareas para usar durante el periodo académico de intervención (Anexo C)

4.2 Recolección de datos.

La información de ésta investigación se obtuvo de la aplicación de cuestionarios o pruebas pre – post, así mismo de las tareas aplicadas durante la implementación. Para facilitar el tratamiento y posterior análisis de los datos obtenidos, se construyeron tablas de frecuencia y una matriz de análisis para identificar si las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de tareas numéricas corresponden o no a indicadores del sentido numérico.

4.2.1. Datos de las prueba diagnóstica y pos – intervención.

La **Tabla 10** es el recurso usado para organizar y compilar la información que se obtuvo de los 38 estudiantes tras la aplicación de las prueba pre y pos intervención, la cual fue registrada inicialmente en una base de datos en el programa SPSS. Para su construcción se tuvo en cuenta "las categorías y códigos" planteados por Almeida y Bruno (2016), aspectos que se relacionan a continuación.

Tabla 10. *Recolección de datos prueba diagnóstica y pos-prueba*

	Acierto y Tipo de razonamiento						
PREGUNTA	**C**	**I**	**SN**	**PSN**	**NSN**	**NJ**	**NR**

Fuente: Adaptación de los tesistas a partir de los códigos definidos por Almeida & Bruno (2016)

- **C:** Si la respuesta a la pregunta es la esperada se codifica con el número 1.
- **I:** Si la respuesta no es la esperada o no hay respuesta se codifica con el número 0.
- **SN: Evidencia de uso del sentido numérico.** Si en la resolución de la tarea el estudiante usa algunos de los indicadores asociados a los componentes del sentido numérico.
- **PSN: Evidencia parcial del uso del sentido numérico**. Esta categoría se usa cuando la resolución de las tareas combinan indicadores del sentido numérico con reglas memorísticas o aplicación de algoritmos estándar de cálculo.
- **NSN: No hay evidencia de uso del sentido numérico**. Se usa este código cuando se observa un uso exclusivo de reglas o algoritmos de cálculo estándar en la resolución de las tareas.
- **NJ: No justifica**. Si el estudiante no explica cómo llegó a la respuesta.
- **NR: No responde**. Código usado cuando una tarea, ítem o pregunta no se resuelve.

4.2.2. Estrategias usadas en la resolución de tareas.

Para determinar si las estrategias usadas por los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas pueden ser catalogadas como evidencias del sentido numérico se construyó una matriz con indicadores asociados a las tres componentes del constructo mental seleccionados para ésta investigación. No obstante, es conveniente destacar que como fue expresado por McIntosh et al., (1992) y Almeida & Bruno (2014) una tarea puede ser resuelta mediante diferentes componentes del sentido numérico ya que estos no son independientes, al contrario están interrelacionados.

Tabla 11. *Matriz de análisis de procesos y estrategias del sentido numérico*

						TIPO DE RAZONAMIENTOS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN										
SITUACIONES	**TAREAS**	**OBJETO MATEMÁTICO ASOCIADO**	**NIVELES DE COMPLEJIDAD**			**NO SENTIDO NUMÉRICO**	**SENTIDO NUMÉRICO**									
							C1. Conocimiento de los números y facilidad con ellos			**C2. Conocimiento y facilidad con las operaciones**				**C3. Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones**		
							Múltiples representaciones de los números. Composición/descomposición de números.			Comprensión del efecto relativo de las operaciones.				Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad.		
			Reproducción	Conexión	Reflexión	**I0**	**I1**	**I2**	**I3**	**I4**	**I5**	**I6**	**I7**	**I8**	**I9**	**I10**

Fuente: Adaptación de los tesistas a partir de las descripciones de competencia numérica de Giménez (2010) y Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán & Climent (2012).

Componentes del sentido numérico

- C1. Conocimiento de los números y facilidad con ellos.
- C2. Conocimiento y facilidad con las operaciones.
- C3. Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones

Dimensiones o subcomponente del sentido numérico

- Múltiples representaciones de los números. Composición/descomposición de números.
- Comprensión del efecto relativo de las operaciones.
- Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad.

Indicadores del sentido numérico asociados a las dimensiones y componentes.

I0: Aplicar reglas, procedimientos y/o algoritmos estándar de cálculo (no es evidencia de sentido numérico).
I1: Reescribir números en formas equivalentes (mediante la descomposición polinomial, usando principios del SND) para facilitar cálculos.
I2: Comparar cantidades. Identificar el orden de unidad de las distintas cifras de los números.
I3: Reescribir números en formas equivalentes (mediante relaciones aritméticas) para facilitar cálculos.
I4: Relacionar situaciones con operaciones aritméticas.
I5: Identificar y utilizar las relaciones entre operaciones aritméticas (adición-sustracción, adición-multiplicación, multiplicación-división)
I6: Interpretar los efectos de realizar cambios en los números implicados en las operaciones.
I7: Utilizar propiedades de las operaciones para facilitar cálculos.
I8: Usar estrategias de cálculo flexible (cálculo mental, estimativo, escrito, gráfico, razonamiento proporcionales…)
I9: Juzgar la razonabilidad de los resultados de la aplicación de estrategias de cálculo.
I10: Comunicar por escrito y oralmente los procesos y estrategias usadas en la resolución de situaciones numéricas.

4.3 Análisis e interpretación de datos

De la información obtenida mediante las pruebas y tareas aplicadas a los 38 estudiantes de grado sexto, es posible realizar un análisis cuantitativo y cualitativo. El análisis cuantitativo hace referencia al porcentaje de acierto y tipo de razonamiento usado en la resolución de cada una de las preguntas del cuestionario, mientras que el cualitativo se enfoca al análisis de las estrategias de sentido numérico usadas por los estudiantes en las tareas propuestas.

4.3.1. Resultados prueba diagnóstica.

A continuación se presenta el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica, con su respectiva interpretación.

Tabla 12. *Resultados cuantitativos de la prueba diagnóstica.*

	ACIERTO Y TIPO DE RAZONAMIENTO								
PREGUNTA	**C**	**I**	**%C**	**%I**	**SN**	**PSN**	**NSN**	**NJ**	**NR**
1	7	31	18,4	81,6	1	4	30	2	1
2	15	23	39,5	60,5	1	4	30	3	0
3	18	20	47,4	52,6	1	1	31	3	2
4	11	27	28,9	71,1	1	2	32	3	0
5	21	17	55,3	44,7	6	4	23	5	0
6	19	19	50,0	50,0	0	6	30	2	0
7	26	12	68,4	31,6	6	1	27	4	0
8	23	15	60,5	39,5	3	1	31	2	1
9	13	25	34,2	65,8	1	0	35	1	1
10	18	20	47,4	52,6	3	3	27	3	2
11	15	23	39,5	60,5	4	4	25	5	0
12	17	21	44,7	55,3	9	6	18	5	0
13	27	11	71,1	28,9	0	2	31	4	1
14	4	34	10,5	89,5	2	2	23	7	4
15	11	27	28,9	71,1	1	9	18	6	4
16	10	28	26,3	73,7	1	2	22	7	6
17	20	18	52,6	47,4	2	5	27	3	1
18	8	30	21,1	78,9	4	3	27	2	2
19	4	34	10,5	89,5	1	1	28	6	2
20	10	28	26,3	73,7	5	2	25	4	2

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los estudiantes en la Prueba diagnóstica.

Los datos registrados en la **Tabla 12**, permiten interpretar lo siguiente:

- El porcentaje de acierto para las 20 cuestiones de la prueba osciló entre el 10,5% y el 71,1%. El porcentaje más bajo se presentó en las preguntas 14 y 19 (sólo 4 estudiantes de los 38 evaluados dieron una respuesta correcta), mientras que el más alto se dio en la pregunta 13.
- En general, el grupo de estudiantes participantes presentó bajo desempeño en la preguntas de la prueba diagnóstica, como puede verse, el porcentaje de acierto sólo fue superior al 50% en cinco de los veinte ítems planteados (preguntas: 5, 7, 8, 13 y 17), lo que indica que el 75% de las preguntas tuvo un porcentaje de acierto inferior al 50%.
- La observación de los resultados individuales muestra que sólo 9 estudiantes de los 38 (aproximadamente el 24% de los participantes) respondieron de manera correcta 10 o más preguntas de la prueba. El estudiante con mejor desempeño respondió acertadamente 17 ítems de los 20 planteados, mientras que hubo dos estudiantes que sólo acertaron al 10% de las preguntas, esto es 2 tareas de las 20. El promedio de respuesta correctas presentado por los 38 estudiantes fue de 7.8, es decir que la efectividad del grupo en la prueba es aproximadamente del 40%.

Los porcentajes de manifestación de sentido numérico para cada una de las preguntas se obtuvo al comparar las cifras de las categorías SN y PSN con el total de respuestas posibles. La **Ilustración 12** muestra el porcentaje de estudiantes que usó estrategias o razonamientos propios del sentido numérico para resolver cada ítem de la prueba diagnóstica (barras color azul) comparado con el porcentaje de uso de estrategias o razonamientos basados en reglas (**NSN**, no sentido numérico).

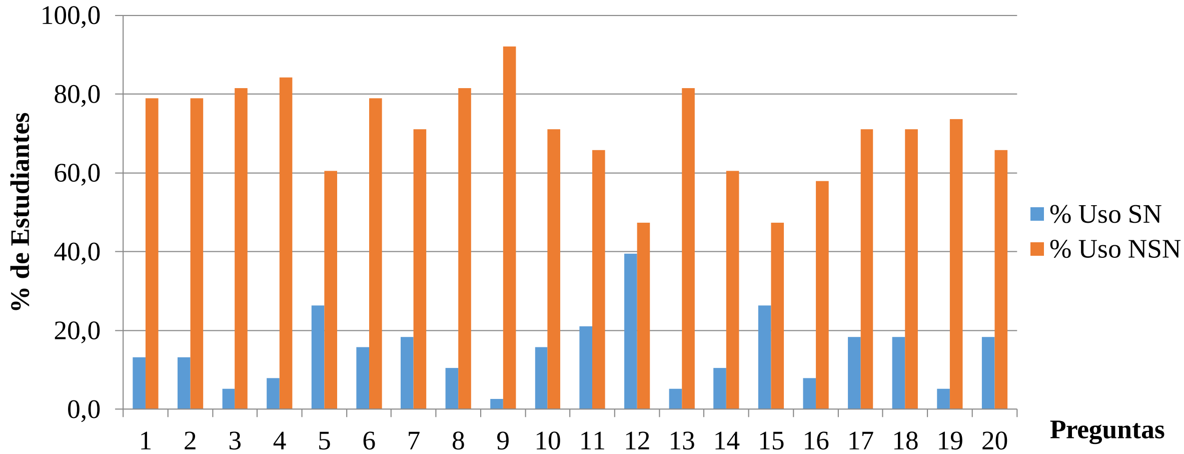


Ilustración 12. *Uso del sentido numérico en la Prueba Diagnóstica.*
Fuente: Justificaciones de los estudiantes a las preguntas de la Prueba diagnóstica.

De los datos e información representada en el diagrama anterior, se concluye que:

- La mayoría de los estudiantes recurrió a la implementación de reglas o algoritmos estándar de cálculo para resolver y justificar las situaciones propuestas. En consonancia con Yang et al. (2008); Parmjit (2009); Kamii & Dominick (2010), Almeida & Bruno (2014) esto puede ser resultado de la tradición formativa a la que han sido expuestos los estudiantes, cuando la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética se ha enfocado a la memorización y reproducción irreflexiva de conceptos, hechos, procedimientos y reglas de cálculo.
- Todas las preguntas de la prueba diagnóstica tienen un porcentaje de uso de estrategias o razonamientos de sentido numérico inferior al 40% por parte de los estudiantes. Esto ratifica que gran parte de los estudiantes se valió de razonamientos basados en reglas para resolver y/o justificar las tareas numéricas.
- Las tareas en la que hubo mayor porcentaje de estudiantes que usó estrategias propias del sentido numérico para su resolución y justificación fueron la número 5, 12 y 15, las cuales superaron la barrera del 20% (26,3% ; 39,5% y 26,3% respectivamente). En las diecisiete preguntas restantes menos del 20% de los estudiantes aplicó razonamientos característicos del constructo mental, siendo los ítems 3, 9, 13, 16 y 19 los de menor

porcentaje. En la pregunta 9 sólo un estudiante de los 38 evaluados demostró sentido numérico y en las cuatro restantes sólo dos estudiantes.

- Del grupo de evaluados, el 26% (10 estudiantes) no reportó SN o PSN en la prueba, es decir no evidencian, en la resolución de las preguntas de la prueba, uso de indicadores del sentido numérico. En la totalidad de las preguntas usaron las reglas estándar de cálculo.

Además de interpretar los resultados numéricos, se realizó un análisis más detallado de las preguntas con mayor y menor porcentaje de acierto y uso de indicadores del sentido numérico. A continuación se presenta las respuestas y razonamientos más destacables del grupo de estudiantes en algunas de las preguntas.

PREGUNTAS SIN CONTEXTO

Pregunta Nº 3: *Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas).*

A. 2.452 × 4
B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465
C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000
D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.

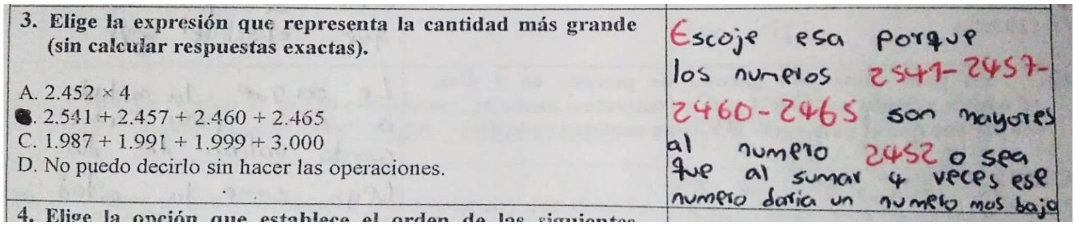
Respuesta correcta o esperada: *Opción B.*

Tabla 13. *Tipos de razonamientos en el ítem 3 de la Prueba diagnóstica.*

Categorías de las Estrategias y/o Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
NO JUSTIFICA	3	7,9	7,9
NO RESPONDE	2	5,3	13,2
NO SENTIDO NUMÉRICO	31	81,6	94,7
PARCIAL SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	97,4
SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	100,0
Total	**38**	**100,0**	

Fuente: Justificaciones de los estudiantes en la Prueba diagnóstica.

Como puede verse en la tabla anterior, sólo dos estudiantes resolvieron la pregunta 3, demostrando indicadores del sentido numérico.

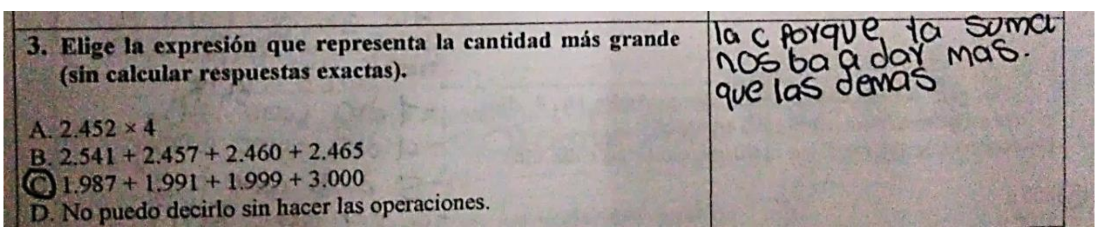


3. Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas). A. 2.452 × 4 B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465 C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	Escoje esa porque los numeros 2541-2457-2460-2465 son mayores al numero 2452 o sea que al sumar 4 veces ese numero daria un numero mas bajo

Ilustración 13. *Manifestación de sentido numérico en la tercera tarea de la prueba diagnóstica.*
Fuente: Justificación del estudiante notado E2.

En la justificación del E2 se observa que inicialmente el estudiante compara el valor absoluto de las cantidades implicadas en las opciones A y B e indica de manera explícita que los números de la segunda opción son mayores que el factor **2.452** de la primera opción. A continuación se puede inferir que realiza una interpretación de la multiplicación **2.452 × 4** como suma reiterada, lo cual evidencia que el estudiante establece una relación entre la operación multiplicación y la adición (indicador del subcomponente *comprensión del efecto relativo de las operaciones.* Ver Tabla 11).

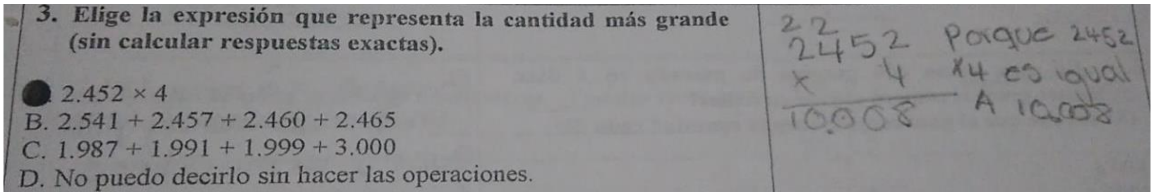
En contraste, las ilustraciones 14 y 15 se perciben razonamientos desprovistos de sentido numérico. El estudiante E6 en su justificación no realiza comparaciones entre las cantidades de cada una de las opciones ni establece relación alguna entre las operaciones implicadas, aspectos que lo llevan a elegir una opción incorrecta.



3. Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas). A. 2.452 × 4 B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465 C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	la c porque la suma nos ba a day mas. que las demas

Ilustración 14. *Respuesta al ítem 3 sin evidencia de sentido numérico.*
Fuente: Justificación del estudiante notado E6.

Por su parte el estudiante etiquetado E35 utiliza el algoritmo tradicional para la multiplicación, aunque en la presentación de la prueba se indicó de manera escrita y oral que debían resolver cada tarea sin usar las reglas estándar de cálculo y en particular la cuestión número 3 enfatiza que no se debe calcular la respuesta exacta. Además, se observa que la respuesta obtenida tras la aplicación del algoritmo es incorrecta, pues el producto de **2.452 × 4** es **9.808** y no **10.008** como lo indica el estudiante. Es posible que el error radique en el resultado de la multiplicación 4 × 4, interpretado como 18.


3. Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas).

A. 2.452 × 4
B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465
C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000
D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.

22
2452
× 4
10008

Porque 2452 x4 es igual A 10008

Ilustración 15. *Respuesta al ítem 3 con el uso de reglas o algoritmos estándar de cálculo.*
Fuente: Justificación del estudiante notado E35.

Pregunta Nº 9: *Si se sabe que 930 x 134 es igual a 124.620*

¿Cuál es el resultado de 930 x 135 ? __________________

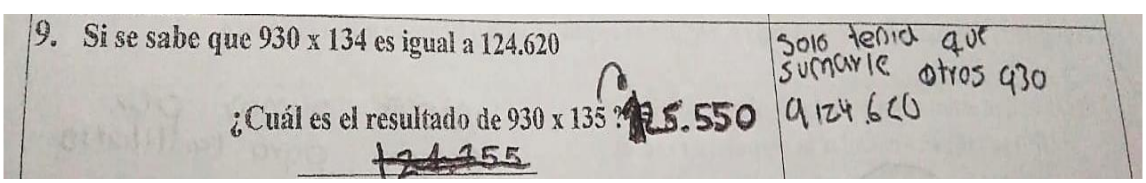
Respuesta correcta o esperada: *125.550*

Tabla 14. *Tipos de razonamientos en el ítem 9 de la Prueba diagnóstica.*

Categorías de las Estrategias y/o Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
NO JUSTIFICA	1	2,6	2,6
NO RESPONDE	1	2,6	5,3
NO SENTIDO NUMÉRICO	35	92,1	97,4
SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	100,0
Total	**38**	**100,0**	

Fuente: Justificaciones de los estudiantes en la Prueba diagnóstica.

En el noveno ítem de la prueba diagnóstica (pregunta abierta sin contexto) 13 estudiantes de los 38 participantes respondieron de manera correcta la pregunta, pero sólo un estudiante de los 13 demostró sentido numérico, el resto usó el algoritmo estándar de la multiplicación.


9. Si se sabe que 930 x 134 es igual a 124.620

¿Cuál es el resultado de 930 x 135 ? 125.550

~~124.355~~

Solo tenia que sumarle otros 930 a 124 620

Ilustración 16. *Manifestación de sentido numérico en el ítem 9 de la prueba diagnóstica.*
Fuente: Justificación del estudiante notado E20.

En la **Ilustración 16** se observa cómo el estudiante aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición para responder la pregunta. Al parecer, el estudiante es consciente de que el uso de la propiedad distributiva permite obtener el producto de manera ágil y eficaz, al indicar que en la multiplicación **930 × 135** basta sumar **930** a **124.620** resultado de la operación **930 × 134**, es decir:

930 × 135 = 930 × (134 + 1) = (930 × 134) + 930 = 126.624 + 930 = **125.550**

Además de la evidencia explicita de uso del tercer indicador del componente Conocimiento y facilidad con las operaciones, se puede inferir que el estudiante ha usado estrategias flexibles de cálculo, específicamente cálculo mental al realizar la adición entre **126.624 + 930**, dado que no aparece en ningún lugar de la prueba aplicación del algoritmo tradicional.

De los 35 estudiantes que aplicaron reglas estándar para resolver el ítem Nº 9, se destaca la respuesta del estudiante etiquetado E27, el cual aplica el algoritmo de la multiplicación de manera correcta pero suma de forma incorrecta. Adicional a lo anterior no juzga la razonabilidad del resultado obtenido (indicador del tercer componente del sentido numérico) pues bajo el proceso realizado el producto de **930 × 135** (75.560) es menor que el de **930 × 134**.

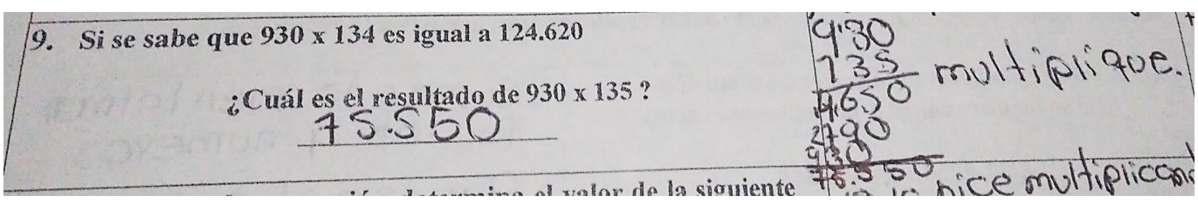


Ilustración 17. *Respuesta al ítem 9 con el uso de reglas o algoritmos estándar de cálculo.*
Fuente: Justificación del estudiante E27

PREGUNTAS CON CONTEXTO

Pregunta Nº 16: Don Raúl ganó $ 78.000 por coger café en la finca La Esmeralda. Si le pagaron $ 6.500 por cada arroba recolectada. ¿Cuántas arrobas recolectó? ___________________

Respuesta correcta o esperada: *12 arrobas.*

Tabla 15. *Tipos de razonamientos en el ítem 16 de la Prueba diagnóstica.*

Categorías de las Estrategias y/o Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
NO JUSTIFICA	7	18,4	18,4
NO RESPONDE	6	15,8	34,2
NO SENTIDO NUMÉRICO	22	57,9	92,1
PARCIAL SENTIDO NUMÉRICO	2	5,3	97,4
SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	100,0
Total	**38**	**100,0**	

Fuente: Justificaciones de los estudiantes en la Prueba diagnóstica.

En este ítem de la prueba, 10 de los 38 participantes dieron la respuesta esperada, sin embargo sólo 3 estudiantes usaron razonamientos o estrategias distintas a la aplicación de reglas de cálculo estándar.

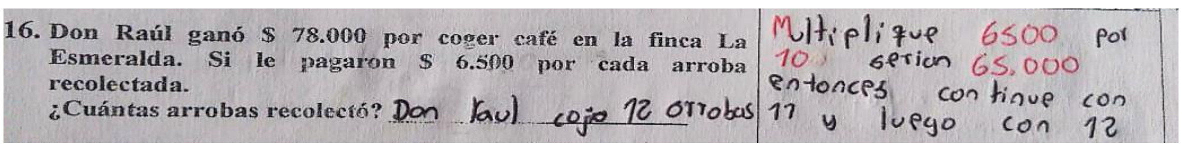
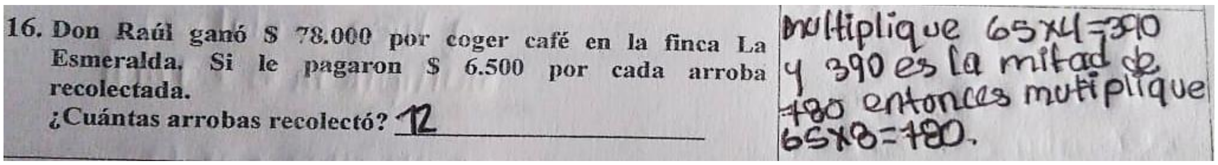


Ilustración 18. *Manifestación de sentido numérico en el ítem 16 de la prueba diagnóstica.*
Fuente: Justificación de E2

La estrategia plasmada por E2 se cataloga como propia del sentido numérico debido a que el estudiante no aplica reglas, procedimientos y/o algoritmos estándar de cálculo para resolver la cuestión (en este caso la regla tradicional de división 78.000 ÷ 6.500), por el contrario evidencia cálculo flexible al indicar que "10 arrobas serían 65.000" (uso de puntos de referencia) y luego sigue sumando hasta llegar al dinero ganado por Don Raúl (cálculo mental, indicador 8 descrito en la matriz para el análisis de estrategias. Ver tabla 11).

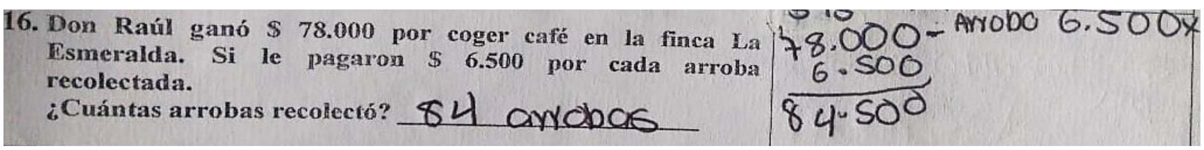
Por su parte E22 demuestra en su justificación que la tarea 16 se puede sin recurrir a la aplicación del algoritmo de la división, aunque en la estrategia usada se percibe un error porque el producto de 65 x 4 es 280 y no 390 como lo manifiesta. Dado que plasma la respuesta esperada, se supone que el razonamiento es usar el hecho de que 65 x 6 es 390, en consecuencia 65 x 12 es 780 ya que como lo indica explícitamente "390 es la mitad de 780". Los indicadores de sentido numérico que se perciben son: el uso de estrategias de cálculo flexible como el cálculo mental (al realizar los productos y duplicaciones sin usar algoritmos) y el razonamiento proporcional, sin embargo no revisó los resultados de los productos, por tal razón se clasifica como uso parcial de sentido numérico.


16. Don Raúl ganó $ 78.000 por coger café en la finca La Esmeralda. Si le pagaron $ 6.500 por cada arroba recolectada.
¿Cuántas arrobas recolectó? 12

multiplique 65x4=390
y 390 es la mitad de
780 entonces mutiplique
65x8=780.

Ilustración 19. *Uso parcial de sentido numérico en el ítem 16 de la prueba diagnóstica.*
Fuente: Justificación de E22

Contrario a las manifestaciones de sentido numérico demostradas por E2 y E22, se observa la estrategia usada por el estudiante E6, la cual está basada en la aplicación del algoritmo estándar de la adición para obtener la suma entre 78.000 y 6.500. Este hecho denota la poca comprensión de la situación.


16. Don Raúl ganó $ 78.000 por coger café en la finca La Esmeralda. Si le pagaron $ 6.500 por cada arroba recolectada.
¿Cuántas arrobas recolectó? 84 arrobas

78.000 + Arrobo 6.500x
6.500
84.500

Ilustración 20. *Respuesta al ítem 16 de la prueba diagnóstica sin evidencia de sentido numérico*
Fuente: Justificación de E6

Como puede verse en la Ilustración 20, el estudiante suma de manera irreflexiva el dinero ganado por Don Raúl con el precio que se paga por recoger una arroba de café. Luego, la cifra obtenida (84.500 que en el contexto de la situación sería el dinero que se obtiene de recolectar 13 arrobas del grano) la interpreta como cantidad de arrobas recolectadas 84. Estas respuestas fueron suministradas por otros escolares y se clasifican por tanto como desprovistas de sentido numérico ya que los estudiantes no juzgan la razonabilidad de los resultados obtenidos.

Pregunta Nº 19: Un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años?________________________

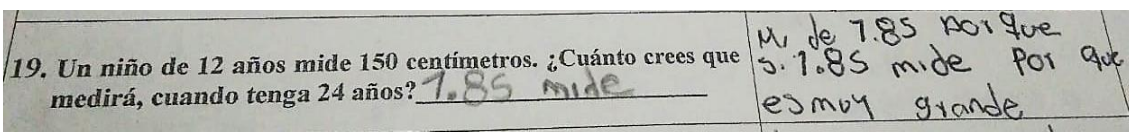
Respuesta esperada: *Entre 170 y 190 centímetros.*

Tabla 16. *Tipos de razonamientos en el ítem 19 de la Prueba diagnóstica.*

Categorías de las Estrategias y/o Razonamientos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
NO JUSTIFICA	6	15,8	15,8
NO RESPONDE	2	5,3	21,1
NO SENTIDO NUMÉRICO	28	73,7	94,7
PARCIAL SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	97,4
SENTIDO NUMÉRICO	1	2,6	100,0
Total	**38**	**100,0**	

Fuente: Justificaciones de los estudiantes en la Prueba diagnóstica.

La pregunta 19 de la prueba inicial pretende que el estudiante haga uso de la estimación. Como puede verse en la **Tabla 16**, sólo dos estudiantes de los 38 participantes demuestran sentido numérico en este ítem.

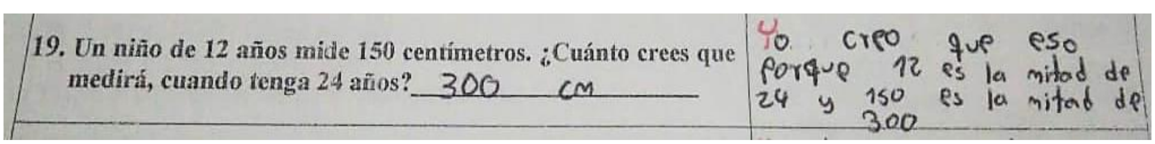

19. Un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años? 1.85 mide

Mi de 1.85 porque
s. 1.85 mide por que
es muy grande

Ilustración 21. *Evidencia de uso del sentido numérico en el ítem 19 de la prueba diagnóstica.*
Fuente: Justificación de E25

Al parecer el estudiante 25 realiza la estimación de 1 metro con 85 centímetros (185 cm), partiendo del hecho dado, para él un niño de 12 años que mida 150 cm tendría que ser alto en la edad adulta y para él medir 185 cm es ser "muy grande" (alto hablando de longitud). Dado que la respuesta dada por el estudiante es razonable en la vida real, se cataloga como sentido numérico.

Por el contrario, el 90% de los estudiantes no demostró sentido numérico en esta pregunta. De los 38 estudiantes que participaron en la prueba diagnóstica, 34 dieron respuestas similares a las producida por E2, la cual se relaciona en la **ilustración 22.**


19. Un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años? 300 cm

Yo creo que eso
porque 12 es la mitad de
24 y 150 es la mitad de
300

Ilustración 22. *Respuesta al ítem 19 sin evidencia de sentido numérico.*
Fuente: Justificación de E2

El estudiante aplica un razonamiento proporcional, suponiendo que si a los 12 años mide 150 cm entonces 12 años después medirá 300 centímetros, el doble de 150 pues 24 es el doble de 12. Este razonamiento proporcional es incorrecto a la luz del contexto de la situación, dado que es improbable que una persona mida 300 cm, es decir 3 metros.

4.3.2. Análisis de las estrategias usadas en las tareas grupales.

Considerando los planteamientos de Markovits & Sowder (1994), Bruno (2000) y Burns (2007) en torno a las condiciones o estrategias de enseñanza necesarias para fomentar el sentido numérico en los escolares, se diseñaron nueve tareas numéricas asociadas a tres situaciones contextualizadas. El objetivo de las tareas fue promover en el aula la exploración de los números y sus operaciones así como la interacción entre estudiantes para construir conocimiento, compartir significados y planear estrategias flexibles de cálculo para la resolución de las situaciones numéricas. Como se indicó en la metodología, cada situación se resolvió en grupos de tres estudiantes (consolidándose doce grupos en total en el curso de muestra), esto con el propósito de fomentar el aprendizaje cooperativo.

A continuación se presenta el análisis de las situaciones con sus respectivas tareas a través de la matriz diseñada para tal fin (tabla 11); el porcentaje de acierto tras la aplicación con los estudiantes y los indicadores de sentido numérico que se hicieron presente en los razonamientos y/o estrategias usadas por los grupos.

4.3.2.1. Situación 1: El día de plaza.

La primera situación, titulada el día de plaza, es una situación cercana a los estudiantes, en ella se plantean cinco tareas relacionadas con el contexto de compra de verduras y frutas en un local de la galería del centro poblado del corregimiento (ver Anexo D).

En el diseño de la situación Nº 1, para cada una de las cinco tareas, se tuvo en cuenta el objeto matemático asociado (operaciones aritméticas), el nivel de complejidad y los indicadores de sentido numérico que se esperan se hagan presentes en los razonamientos o estrategias de los grupos al resolver cada tarea. Conviene destacar que en los procedimientos y/o justificaciones de los estudiantes es posible observar indicadores del constructo mental distintos a los planteados por los investigadores, debido a que los componentes del sentido numérico están íntimamente relacionados (McIntosh et al., 1992 y Almeida & Bruno, 2014).

La situación **"El día de plaza"**, se aplicó el día miércoles 26 de septiembre de 2018. En primera instancia se socializó la metodología de trabajo en grupo, haciendo énfasis en que cada grupo debía consignar con la mayor claridad posible, las estrategias y/o razonamientos que emplearon para dar respuesta a las tareas. A continuación, los grupos hicieron lectura de la situación y sus respectivas preguntas. En términos globales, se vislumbró interés y buena implicación (participación en la actividad) por parte de los escolares.

Culminada la sesión de trabajo grupal, se procedió a analizar las respuestas y razonamientos de los estudiantes, hallándose lo siguiente:

En la **Tarea 1**, el 91,6% de los grupos (11 de 12) obtuvo la respuesta esperada, confirmando así que el nivel de complejidad y demanda cognitiva de la tarea es baja. Respecto a las estrategias usadas, como puede inferirse de la **Tabla 17**, el 66,7% de los grupos (8 de 12) evidenció sentido numérico, es decir, en las justificaciones y/o procesos plasmados en la hoja, se observa presencia de indicadores del constructo mental. El 33% restante (4 de los 12 grupos) aplicó estrategias y suministró justificaciones basadas en algoritmos estándar de cálculo, esto puede indicar que el apego a los algoritmos por parte de algunos estudiante es muy fuerte teniendo en cuenta que la tarea es factible de ser resuelta mediante estrategias de cálculo mental.

Tabla 17. *Análisis de respuestas y estrategias. Tarea 1 de la Situación 1.*

SITUACIÓN EL DÍA DE PLAZA_TAREA 1			
GRUPO	**Respuesta esperada** Alejandro tiene la razón. La cuenta es $19.250	**Indicadores de Sentido Numérico presentes** Esperados: 1,3,4,7,8,9,10	**Observaciones / Comentarios**
1	No. La cuenta es $15.550	4. Asociaron la situación con la adición 8 (Aparentemente usaron cálculo mental)	No ofrecen muchos datos en su justificación. Según el grupo la cuenta da 15.550 pero la respuesta es 19.250, en conclusión hubo error en el cálculo.
2	**Si**	4, 7, 8,10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
3	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
4	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
5	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
6	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la adición
7	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
8	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la adición
9	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la adición
10	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
11	**Si**	4, 7, 8, 10	Usaron la propiedad asociativa para sumar
12	**Si**	1,4,7,8,10	Sumaron los miles, luego los cientos y a continuación las decenas.

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los grupos.

En la tabla anterior, también se observa que todos los grupos lograron relacionar la primera tarea con la operación aritmética implicada, la adición. Además, los ocho grupos que presentaron evidencia de sentido numérico, usaron la propiedad asociativa de la adición para facilitar el cálculo de la suma. A continuación se presentan dos respuestas en las que se percibe sentido numérico.

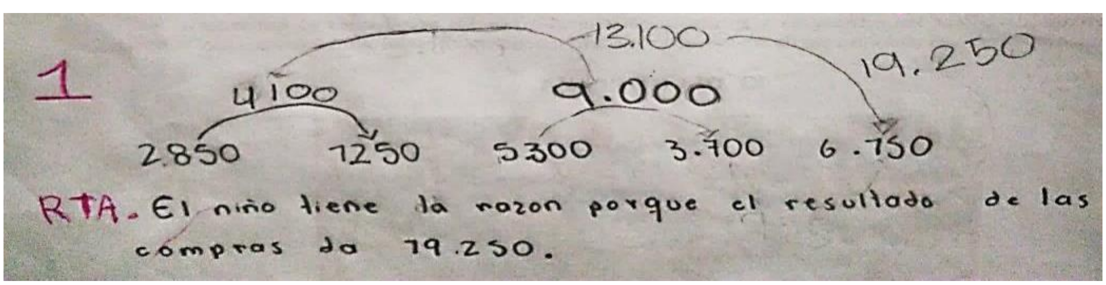


Ilustración 23. *Presencia de sentido numérico en la Tarea 1 de la Primera Situación.*
Fuente: Respuesta del grupo 3.

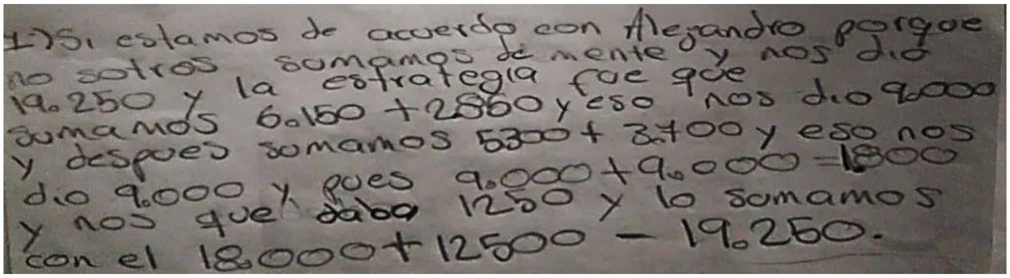

1-) Si estamos de acuerdo con Alejandro porque
no sotros sumamos de mente y nos dio
19.250 y la estrategia fue que
sumamos 6.150 + 2850 y eso nos dio 9.000
y despues sumamos 5300 + 3.700 y eso nos
dio 9.000 y pues 9.000 + 9.000 = 1800
y nos que daba 1250 y lo sumamos
con el 18000 + 12500 — 19.250.

Ilustración 24. *Evidencia de sentido numérico en la Tarea 1, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Respuesta del grupo 11.

Los dos grupos relacionados agrupan pares de números que al sumarse completan millares o cantidades terminadas en doble cero, aspecto que facilita el cálculo. La estrategia usada resulta efectiva para ambos, pese a que en la justificación del grupo 11 se perciben algunas imprecisiones en la escritura de ciertas cantidades.

En la **Tarea 2**, el porcentaje de acierto así como el porcentaje de evidencia de sentido numérico disminuyó respecto a lo presentado en la tarea anterior, pese a que el nivel de complejidad también es de reproducción. El 75% de los grupos (9 de 12) escribió la respuesta esperada y el 58,3% de los grupos demostró sentido numérico en la resolución de ésta tarea. El 41,7% restante aplicó razonamientos basados en algoritmos.

Tabla 18. *Análisis de respuestas y estrategias. Tarea 2 de la Situación 1.*

SITUACIÓN EL DÍA DE PLAZA_TAREA 2			
GRUPO	**Respuesta esperada** $77.000	**Indicadores de Sentido Numérico presentes** Esperados: 1,3,4,5,7,8,10	**Observaciones / Comentarios**
1	No. $62.200	4, 5 (+ y x), 8 (cálculo mental al parecer) y 10	Dado que para el grupo en una semana se gasta 15.550 y no 19.250 (respuesta correcta) en éste ítem no dieron la respuesta esperada, sino 62.200 que es coherente con el valor de cuatro semanas según su adición inicial
2	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la adición
3	**Si**	4, 8	Al parecer multiplicaron de manera abreviada o mental 19.250 por 4
4	No. $85.000	4, 8 (al parecer cálculo mental), 10	Sumaron 4 veces 21.250 valor dado por doña Mary, el cual es errado. La estrategia usada fue la suma reiterada de 21.250 de forma mental
5	**Si**	4, 8	Al parecer multiplicaron de manera abreviada o mental 19.250 por 4
6	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
7	**Si**	4, 8	Al parecer multiplicaron de manera abreviada o mental 19.250 por 4

8	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
9	**Si**	4 y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
10	No	4, 8 (al parecer cálculo mental)	Multiplicaron 19250 x 30 = 577.500 y luego pusieron otra respuesta.
11	**Si**	1, 4, 5, 8 (duplicación y cálculo mental), 10	Sumaron dos veces 19.000 luego dos veces 38.000 y luego cuatro veces 250
12	**Si**	4, 8 (duplicación, cálculo mental), 10	Duplicaron 19.250 y luego el resultado (38.500) lo duplicaron

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los grupos.

Al igual que en la tarea 1, los estudiantes lograron relacionar la segunda tarea con operaciones aritméticas (indicador 4 de sentido numérico). Así mismo, se evidencia que comprenden la relación entre la operación adición y multiplicación, al interpretar que sumar una cantidad cuatro veces es equivalente a multiplicar la cantidad por 4.

Se destaca la solución del grupo 12, en la que se resuelve el producto 19250 x 4 usando la estrategia de duplicación, se percibe que los integrantes de este grupo comprenden que multiplicar por 4 una cantidad determinada es lo mismo que duplicar dos veces dicha cantidad.

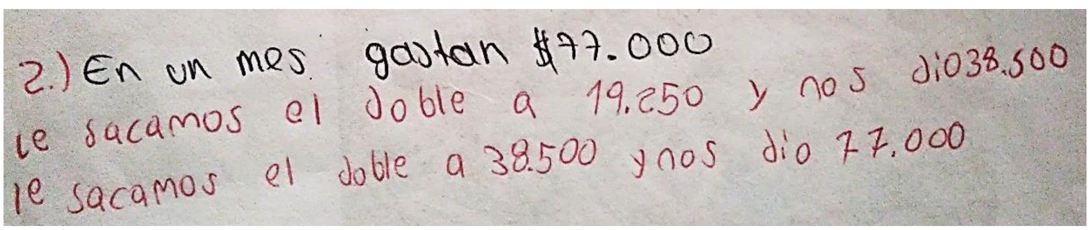


Ilustración 25. *Evidencia de sentido numérico en la Tarea 2, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Respuesta del grupo 12.

En la **Tarea 3**, cinco grupos (41,7%) obtuvieron la respuesta esperada y sólo en el 33,3% de los equipos de trabajo (4 de 12) se presentó evidencia de sentido numérico. El 66,7% restante aplicó razonamientos basados en algoritmos. Al analizar los procesos de los grupos, se observó que la mayoría de los grupos (58,3%) no tuvo en cuenta la información suministrada respecto al número de semanas que tiene un año (52), estos siete grupos supusieron que los 12 meses del año tienen por igual 4 semanas, hecho que imposibilitó que llegaran a la respuesta esperada. Sin embargo, en algunas de las justificaciones con respuesta no esperada, se perciben indicadores de sentido numérico.

De las cuatro respuestas en la que se hizo presente indicadores del sentido numérico se destaca la del grupo 12

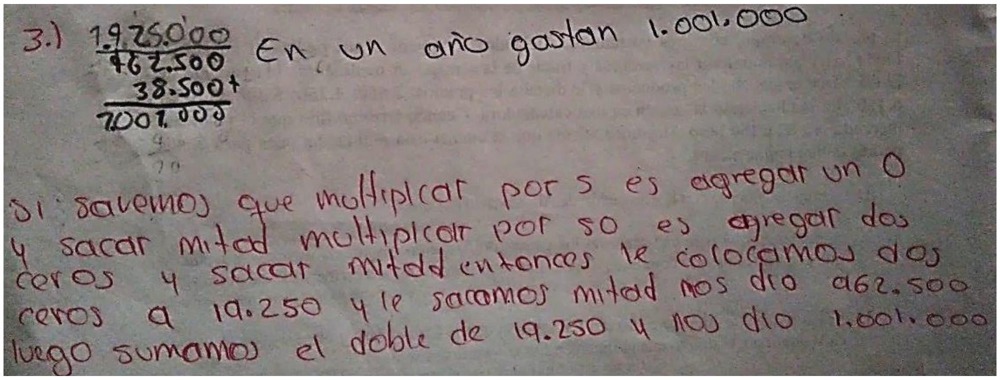


Ilustración 26. *Evidencia de sentido numérico en la Tarea 3, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Respuesta del grupo 12.

De la representación y comunicación escrita, se infiere que multiplicaron 19.250 por 52, este producto lo expresaron como 19.250 x 50 (el cual fue realizado multiplicando 19.250 por 100 y sacándole la mitad) más 19.250 por 2 que es el doble. Luego sumaron los productos parciales. En ésta respuesta se perciben diversos indicadores de sentido numérico:

- **Indicador 1**. **Reescribir números en formas equivalentes (usando principios del SND) para facilitar cálculos.** Cuando se expresa de manera implícita el número 52 como 50 + 2.
- **Indicador 3. Reescribir números en formas equivalentes (mediante relaciones aritméticas) para facilitar cálculos.** Cuando multiplican por 100 y luego sacan la mitad. Se está expresando 50 como 100 ÷ 2.
- **Indicador 4. Relacionar situaciones con operaciones aritméticas.** Al asociar la tarea con la operación multiplicación.
- **I5. Identificar y utilizar las relaciones entre operaciones aritméticas.** Al relacionar la multiplicación y la división.

- **I6. Interpretar los efectos de realizar cambios en los números implicados en las operaciones.** Cuando interpretan que multiplicar por 50 es lo mismo que multiplicar por 100 y luego sacarle la mitad.
- **I7. Utilizar propiedades de las operaciones para facilitar cálculos. A**plicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición al resolver 19.250 x 52 como (19.250 x 50) + (19.250 x 2)
- **I8. Usar estrategias de cálculo flexible.** Se percibe cálculo mental cuando dividen por dos (sacar mitad) y cuando multiplican por dos (duplican).

En la estrategia usada por este grupo (y dos más) para resolver la tercera tarea, también se hizo presente **el uso de puntos de referencia**, indicador emergente del sentido numérico, el cual tiene mucha relación con los indicadores definidos. El uso de puntos de referencia se describe como el uso números con los cuales la persona se siente cómoda operando (Almeida & Bruno, 2014, 2016). Tres de los doce grupos usaron recurrentemente el número 2, 10 y 100 para realizar cálculos agilmente.

Es conveniente aclarar que la presencia e integración de indicadores del constructo mental la percibe el docente en los razonamientos y/o justificaciones de los estudiantes, estos últimos tal vez no sean conscientes de la riqueza de sus estrategias.

Contrario a lo hecho por el grupo 12, se relaciona la solución del grupo 4, la cual ha sido catalogada como desprovista de presencia de sentido numérico.

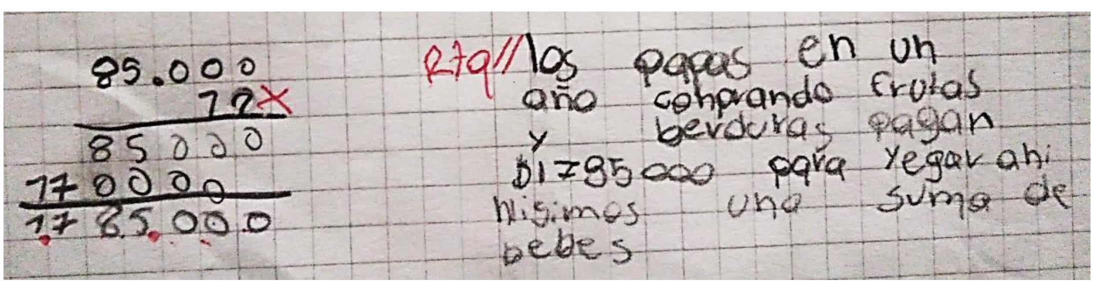


Ilustración 27. *Respuesta sin presencia de sentido numérico. Tarea 3, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Producción del grupo 4.

En la ilustración se observa que la estrategia usada fue la aplicación del algoritmo estándar de la multiplicación. En primera instancia el grupo infiere que en un mes los padres de Alejandro gastan $85.000 en mercado de plaza (producto de 21.250 x 4), ese valor no es el esperado dado que la cuenta corregida es $19.250, por tanto en un mes la familia de Alejandro pagaría $77.000 en frutas y verduras. Por otro lado, el grupo no considera la información suministrada en torno a la cantidad de semanas que tiene un año y deciden multiplicar el gasto de un mes ($85.000) por el número de meses que tiene el año (12) como estrategia para hallar la cantidad de dinero que se invierte en mercado de plaza. Adicional a lo anterior, se evidencia una aplicación incorrecta del algoritmo tradicional (en 85.000 x 12 cambiaron el orden de los productos parciales, multiplicaron 85.000 x 1 luego 85.000 por 20, ello significa que con el uso del algoritmo en realidad obtuvieron el resultado de 85.000 x 21). Como puede verse, se indica que en la resolución de la tercera tarea, el grupo 4 no demuestra sentido numérico pues se enfocaron en la aplicación irreflexiva de un proceso mecánico previamente aprendido.

El análisis de las respuestas en la **Tarea 4**, arrojó que el 50% de los grupos (6 de 12) proporcionó la respuesta esperada. Respecto a las estrategias usadas, en 5 grupos (41,7%) se evidenció sentido numérico, en el 50,3% restante se observó la aplicación de estrategias basadas en algoritmos. Se destaca la respuesta del grupo 4.

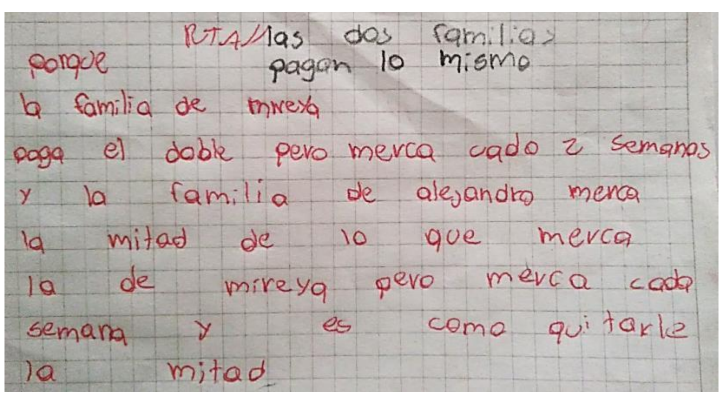


Ilustración 28. *Evidencia de sentido numérico en la Tarea 4, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Respuesta del grupo 4.

Sin recurrir al cálculo del valor a pagar por cada familia (la de Alejandro y la de Mireya) durante un año, los estudiantes del grupo argumentan que ambas familias pagan lo mismo (respuesta esperada) basándose en el hecho de que “pagar el doble” cada dos semanas es equivalente a “pagar la mitad” semanalmente. De su justificación se puede inferir que hay una interpretación implícita de la equivalencia de los productos

19.250 x 52 = 38.500 x 26

ya que aunque el primer factor se duplica, el segundo se reduce a la mitad, razón por la cual el resultado es el mismo. Este razonamiento se presentó en cuatro de los doce grupos que resolvieron la tarea y hace referencia al indicador de sentido numérico: **interpretar los efectos de realizar cambios en los números implicados en las operaciones.**

Se identificó que la comprensión inadecuada de la información suministrada en la tarea 4, respecto a la periodicidad de compra de la familia de Mireya (cada dos semanas) llevó al 50% de los grupos a indicar que ésta familia gasta mayor cantidad de dinero en un año, los seis grupos interpretaron que se pagaba el doble que la familia de Alejandro pero semanalmente, como se percibe en la respuesta del grupo 3.

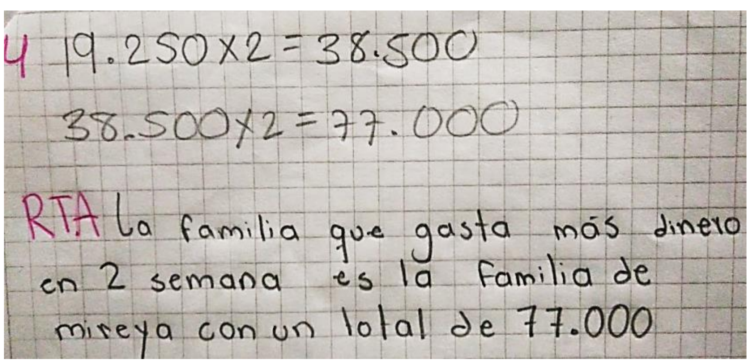


Ilustración 29. *Respuesta incorrecta Tarea 4, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Producción del grupo 3.

En la última tarea de la situación 1, **Tarea** 5, se solicita a los estudiantes plantear un método o estrategia general, que le permita a una familia determinar el dinero que se gastará en mercado de frutas y verduras, suponiendo que cada semana del año se paga una cantidad fija (Anexo D y Matriz de análisis de Tareas Situación 1, **Tabla 26**). Para algunos equipos de trabajo no estaba claro qué se solicitaba, por tal motivo se tuvo que aclarar la tarea, para ello se reformuló la pregunta de la siguiente manera: *¿qué harían para saber cuánto dinero gastará tú familia en mercado en un año si todas las semanas gasta el mismo dinero?*. Tras la aclaración los integrantes de cada grupo procedieron a compartir sus estrategias.

De las respuestas de los grupos se concluye que el 75% (9 de 12 grupos) propone una estrategia válida para la tarea pero sólo 16,7% (2 grupos) proporcionan la respuesta esperada, la cual se ajusta en mayor medida al valor que se pagaría en la realidad: multiplicar el gasto semanal por 52, debido a que un año tiene 52 semanas. Los siete grupos restantes plantearon estrategias válidas pero no tan eficientes como: sumar 52 veces el valor de una semana o poco precisas como multiplicar el gasto de un mes por 12 (de nuevo se obvia el hecho de que no todos los meses tienen la misma cantidad de semanas)

En relación a la presencia de sentido numérico en la tarea 5, se evidenció en el 41,7% de los grupos (5 de 12) mientras que el 50,3% restante (7 grupos) aplicó razonamientos basados en algoritmos. Los indicadores que emergieron en ésta tarea fueron: **I4. Relacionar situaciones con operaciones aritméticas, I5. Identificar y utilizar las relaciones entre operaciones aritméticas (adición – multiplicación)** y **I8. Usar estrategias de cálculo flexible**.

Se destaca de nuevo la respuesta del grupo 12, pues en ella se describe de manera explícita la estrategia general para realizar la multiplicación entre el valor fijo de gasto (cada domingo de plaza) y la cantidad de domingos que se comprará en el año (52 domingos, considerando que un año tiene 52 semanas), estrategia que es usada hábilmente por el grupo en la solución de la tarea 3 de la presente situación.

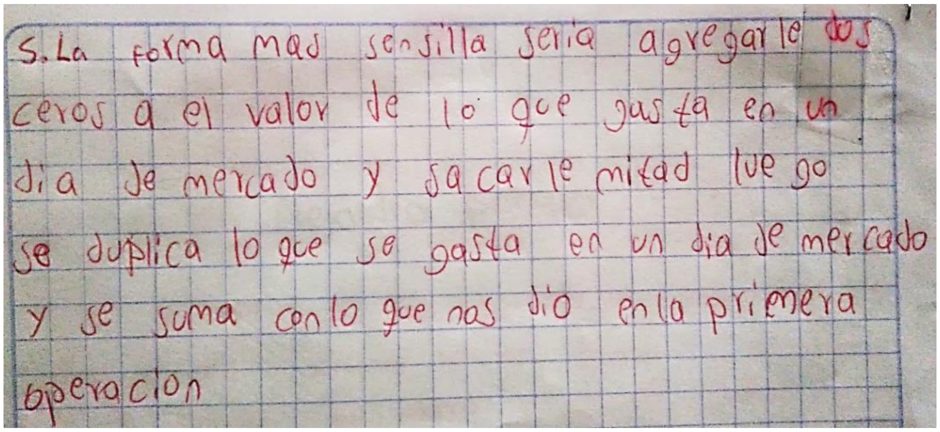


Ilustración 30. *Evidencia de sentido numérico en la Tarea 5, Situación El día de Plaza.*
Fuente: Respuesta del grupo 12.

4.3.2.2. **Situación 2: La Colombia Cafetera del siglo XXI.**

La segunda situación (ver Anexo D), es una situación pública en la que se plantean tres tareas relacionadas con un texto que contiene información sobre el cultivo del café (cantidad de hectáreas sembradas en el país y el empleo que genera el grano). El propósito de la situación y sus respectivas tareas es valorar la capacidad de los estudiantes para interpretar y relacionar datos numéricos presentes en textos informativos, a su vez, identificar indicadores de sentido numérico que puedan emerger al momento de enfrentarse a las tareas.

El conjunto de tareas se aplicó el viernes 28 de septiembre del 2018, al igual que en la sesión anterior, se hizo lectura de la situación, se recordó la metodología para el desarrollo de la actividad. Se percibió que la implicación de los estudiantes en esta sesión fue menor respecto a la situación 1, tal vez por lo poco cotidiano de la situación o la cantidad de información numérica presente en el texto de referencia. A la mayoría de los estudiantes se le dificultó discriminar, extraer e interpretar la información, esto se notó incluso en la primera tarea, la cual fue catalogada en el análisis previo como tarea de reproducción (ver **Tabla 27** del Anexo D).

El análisis cuantitativo y cualitativo de las tres tareas de la situación 2, permite concluir que el desempeño de los escolares fue menor en comparación al presentado en las tareas de la primera situación.

En la **Tarea 1**, de los 12 equipos de trabajo, 8 grupos (66,7%) obtuvieron la respuesta esperada, mientras que el 33,3% restante (4 grupos) demostró no comprender la tarea o plasmó respuestas erradas basadas en la aplicación incorrecta de estrategias de cálculo. En relación a los razonamientos y estrategias empleadas, el 25% de los grupos (3 de 12) evidenció sentido numérico y el 75% restante (9 de 12) usó los algoritmos estándar de cálculo de la adición y la multiplicación para resolver la tarea.

Tabla 19. *Análisis de respuestas y estrategias. Tarea 1 de la Situación 2.*

SITUACIÓN LA COLOMBIA CAFETERA DEL SIGLO XXI_TAREA 1			
GRUPO	**Respuesta esperada 4.740.000**	**Indicadores de Sentido Numérico presentes** Esperados: 3,4,5,6,7,8,10	**Observaciones / Comentarios**
1	No. 14.4800	No hay justificaciones	No hay justificaciones
2	**Si. 4.740.000**	4 (adición) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la adición para sumar 4 veces 948.000
3	**Si. 4.740.000**	4 (multiplicación) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
4	**Si. 4.740.000**	4 (multiplicación) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
5	No. 4.074.000	3, 4, 6, 8 y 10	Multiplicaron por 10 el número 948.000 y luego le sacaron la mitad al resultado (9.480.000) pero al sacar la mitad tuvieron un error.
6	**Si. 4.740.000**	4 (multiplicación) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
7	**Si. 4.740.000**	3, 4, 6, 8 y 10	Indican que multiplicar por 5 es equivalente a multiplicar por 10 y sacar la mitad.
8	**Si. 4.740.000**	4 (multiplicación) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
9	No. 5,2	No hay ninguna estrategia	No hay justificaciones
10	No. 4.640.000	4 (multiplicación) y 0	Multiplicaron 948 por 5 y aumentaron los tres ceros
11	**Si. 4.740.000**	4 (multiplicación) y 0	Usaron el algoritmo tradicional de la multiplicación
12	**Si. 4.740.000**	3, 4, 6, 8 y 10	Indican que multiplicar por 5 es equivalente a multiplicar por 10 y sacar la mitad.

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los grupos.

En la **Tabla 19**, puede verse que sólo los grupos 5, 7 y 12 proponen una estrategia distinta a la aplicación de algoritmos estándar. Para encontrar el producto entre **5** y **948.000** (4.740.000), los tres grupos de forma independiente, deciden agregarle un cero al final al factor **948.000** (lo cual significa multiplicar por 10) y a la cantidad obtenida sacarle la mitad, es decir dividir **9.480.000** entre **2**. Se considera la estrategia como evidencia de sentido numérico porque en ella se perciben indicadores del constructo mental cuando: los estudiantes reescriben números en formas equivalentes para facilitar cálculos (5 = 10 ÷ 2, **Indicador 3**), relacionan situaciones con operaciones aritméticas (**Indicador 4**), interpretan los efectos de realizar cambios en los números implicados en las operaciones (si se multiplica por el doble debe sacarse la mitad, **Indicador 6**) y usan estrategias de cálculo flexible (hallar mentalmente la mitad de 9.480.000, **Indicador 8**).

La siguiente imagen, ilustra la estrategia descrita en el inciso anterior, la cual no fue del todo efectiva dado que el proceso final, escribir la mitad del número 9.480.000 falló y los integrantes no validaron la exactitud de su respuesta.

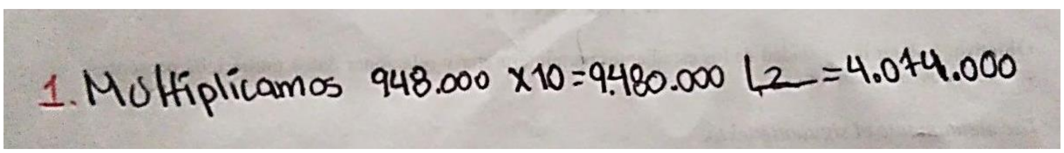


Ilustración 31. *Sentido numérico parcial en la Tarea 1, Situación La Colombia Cafetera.*
Fuente: Respuesta del grupo 5.

La **Tarea 2**, en términos generales también resultó compleja para los participantes. A algunos grupos les generó dificultad deducir en qué cultivo se ocupan más personas e interpretar si la cantidad de empleados del café debía por ejemplo cuadruplicarse o dividirse por cuatro.

En esta tarea el 33,3% de los grupos (4 de 12) obtuvo las respuestas esperadas, los ocho grupos restantes plasmaron respuestas diferentes debido a la interpretación incorrecta de las cifras presentes en el texto informativo y la aplicación imprecisa de reglas de cálculo estándar, en concreto, errores en la ejecución del algoritmo de la división. De igual manera, sólo en el 33,3% de las respuestas y justificaciones de los grupos se notó presencia de indicadores de sentido numérico: **I4**, **I5, I8** e **I10**.

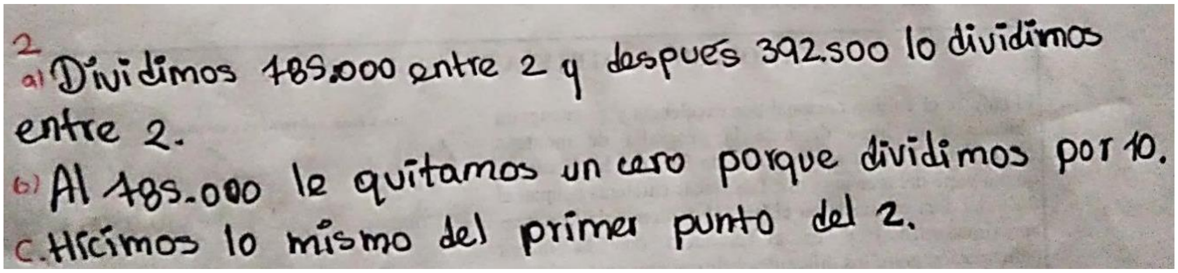

2
a) Dividimos 785.000 entre 2 y despues 392.500 lo dividimos entre 2.
b) Al 785.000 le quitamos un cero porque dividimos por 10.
c. Hicimos lo mismo del primer punto del 2.

Ilustración 32. *Evidencia de Sentido numérico. Tarea 2, Situación La Colombia Cafetera.*
Fuente: Respuestas del grupo 5.

En la justificación del grupo se evidencia de manera explícita que hay una comprensión en torno a que dividir una cantidad entre 4 es equivalente a "sacarle la mitad de la mitad", es decir dividir por 2 dos veces (en cuyo caso hay una representación implícita del 4 como 2 x 2)

La tercera y última tarea de la situación 2, es la tarea con mayor nivel de complejidad (reflexión) según el grado escolar, en ella el resolutor debe deducir del texto cuál es la cantidad de personas que trabajan en el sector agrícola, cuántas personas se ocupan en el sector minero – energético junto con el de construcción, comparar dichas cantidades y determinar cuál es la diferencia entre dichos sectores económicos para poder determinar si el enunciado de la tarea es falso o verdadero. En efecto, de los 12 grupos conformados, **sólo uno** concluye y demuestra que el sector agrícola genera más empleo que los otros dos (respuesta esperada). Sin embargo la diferencia numérica planteada en la respuesta (aunque cercana) no es la esperada, el error al parecer surge de una imprecisión en el cálculo mental.

Tabla 20. *Análisis de respuestas y estrategias. Tarea 3 de la Situación 2.*

SITUACIÓN LA COLOMBIA CAFETERA DEL SIGLO XXI_TAREA 3			
GRUPO	**Respuesta esperada** El Agrícola genera 1.543.750 empleos de más	**Indicadores de Sentido Numérico presentes** Esperados: 1,2,3,4,5,8,10	**Observaciones / Comentarios**
1	**Agrícola.**	No se percibe S.N	No hay justificación.
2	No hay respuesta	No hay estrategias	No hay respuesta.
3	No. El minero y de construcción genera más empleo	No se percibe S.N	Indican que el sector agrícola genera 4.740.000 empleos (cifra de la primera tarea) lo cual es incorrecto pues ese número se refiere a la cantidad de hectáreas de café cultivado en el país.

4	**Sector agrícola genera más empleo.**	No se percibe S.N	Indican que el sector agrícola genera 4.740.000 empleos (cifra de la primera tarea) lo cual es incorrecto pues ese número se refiere a la cantidad de hectáreas de café cultivado en el país.
5	No	No se percibe S.N	No hubo comprensión de la situación interpretaron que el sector agrícola genera el empleo que genera el café, por tanto es la mitad del sector de construcción
6	No hay respuesta	No hay estrategias	No hay respuesta
7	No. El minero y de construcción genera más empleo	No hay estrategias	No hay justificación
8	No. El minero y de construcción genera más empleo	No se percibe S.N	No hubo comprensión de la situación interpretaron que el sector agrícola genera el empleo que genera el café, por tanto es la mitad del sector de construcción
9	No. El minero y de construcción genera más empleo	No hay estrategias	No hay justificación para lo afirmado
10	No. El minero y de construcción genera más empleo	No hay estrategias	No hay justificación para lo afirmado
11	No hay respuesta	No hay estrategias	No hay justificación para lo afirmado
12	**El agrícola genera más. 1.549.750 empleos de más**	2,4,5,8 y 10 0 (algoritmo de la sustracción)	Calcularon la cantidad de empleos que genera el sector agrícola duplicando dos veces el número de empleados del café. Sumaron las personas que trabajan en el sector minero y en construcción (eso les dio 1.591.250 ahí hubo un error en la suma parcial, la cual la hicieron mentalmente) y por último hallaron la diferencia entre el sector agrícola y los otros sectores (mediante el algoritmo estándar de la sustracción)

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los grupos.

Gran parte de las respuestas incorrectas tienen su base en la comprensión errada de la información numérica, por ejemplo considerar la cantidad de personas que se dedican al café como la cifra de ocupación que genera la agricultura (olvidando las otras cifras de ocupación de productos como el arroz, maíz, papa, palma africana y caucho, citadas en el texto). También se interpretó como tal, la cifra referida a las hectáreas de café cultivado. Por otro lado, se percibe que cuando la comprensión de la tarea es baja, priman las estrategias basadas en la aplicación de algoritmos o reglas estándar de cálculo. Sólo el grupo que obtuvo la respuesta esperada, mostró presencia de sentido numérico en su justificación.

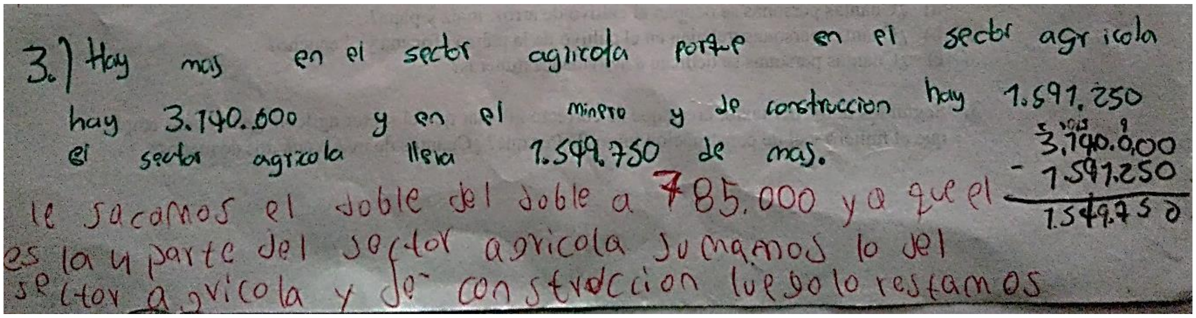


Ilustración 33. *Evidencia de Sentido numérico. Tarea 3, Situación La Colombia Cafetera.*
Fuente: Respuesta del grupo 12.

4.3.2.3. **Situación 3. El cultivo de lulo.**

La tercera situación tiene relación con el contexto laboral de muchas familias del corregimiento, en ella se plantea una sóla tarea, llamada “A cuidar el lulo”, donde los estudiantes deben comparar precios de fungicidas, insecticidas y mano de obra requerida para proteger de plagas y enfermedades dos héctareas de lulo. Finalmente cada equipo de trabajo debe elegir las opciones más favorables en términos económicos. Con la tarea se busca identificar el uso del sentido numérico (de los estudiantes) en la resolución de situaciones numéricas reales del contexto agrícola y su capacidad para tomar decisiones.

La tarea se aplicó el 3 de octubre de 2018 y en el trabajo de los grupos se observó buena implicación en la actividad. Al parecer a los estudiantes les pareció interesante decidir qué comprar, qué contratar y buscar la combinación que permite obtener el mayor ahorro de dinero.

En esta situación seis equipos de trabajo (50%) resolvieron la tarea de manera correcta, sin embargo sólo el 16.7% (2 grupos de 12) obtuvo la respuesta esperada, confirmando que el nivel de complejidad y demanda cognitiva de la tarea es alta (para el grado escolar).

Una de las razones más recurrentes que lleva a los estudiantes a respuestas no esperadas, es la comprensión de la situación o la interpretación incompleta de la información que se suministra. Por ejemplo algunos grupos tuvieron en cuenta en la situación para una hectárea de lulo se requiere 5 litros de insecticida y 5 kilos de fungicida, pero se les olvidó considerar la cantidad de hectáreas cultivadas que tiene Don José (2 ha), omisión que conduce a una solución incorrecta de la tarea (pues sólo se protegería de plagas la mitad del cultivo) y que se evidencia la interacción entre dos estudiantes que conforman el grupo 7 (**E13** y **E19**) y el docente investigador (**DI**).

DI: *"¿Qué fue lo que hicieron?"* (Tras el llamado de los estudiantes manifestando que terminaron)

E1: *"Nosotros miramos acá* (señalando precios de los productos) *y lo que estábamos mirando aquí, entonces nosotros primero sumamos cinco de esos* (insecticida Exalt por litro) *para ver cuánto nos daba…"*

E2: *"Multiplicamos"*

E1: *"O también lo multiplicamos y después sumamos esté* (señalando insecticida Cebofrut por 4 litros) *más éste* (insecticida Exalt por litro) *y miramos que nos da más barato comprar cinco litros de Exalt"*

DI: *"Bueno, pero yo tengo una pregunta, ¿cuántos litros de insecticida él necesita?"*

E1: *"Cinco"*

E2: *"Cinco"*

DI: *"¿Cinco? Leamos acá de nuevo* (señalando información de la texto), *¿qué dice?"*

E2: (Realiza la lectura) "*él sabe que por cada hectárea necesita cinco litros de insecticida y cinco kilos de fungicida"*

E1: *"ahhhh ya"*

DI: *Listo, por cada hectárea él necesita cinco litros de insecticida. Ustedes compraron cinco litros de insecticida, ¿Cuántas hectáreas tiene él?*

E1- E2: (Responden al tiempo) *"dos"*

DI: *"Entonces ¿cuántos litros de insecticida necesita él?"*

E2: *"diez"*

E1: *"porque por cada hectárea cinco litros y si son dos dos hectáreas pues diez litros"*

DI: *"Ah bueno, entonces tenía que comprar ¿cuántos litros?"*

E2: *"Diez litros"*

DI: *"Y de fungicida ¿cuántos kilos?"*

E1: *"Diez"*

DI: *"Diez, Y ustedes ¿cuántos compraron?"*

E1- E2: *"Cinco"*

DI: *"Faltó interpretar eso verdad"*

E1: *"Si, debemos corregir".*

Respecto a las estrategias usadas, el 66,7% de los grupos (8 de 12) evidenció sentido numérico, es decir, en las justificaciones y/o procesos, se observa presencia parcial de indicadores del constructo mental, en general en esta tarea a los escolares se les dificultó un poco plantear estrategias flexibles de cálculo. El 33% restante aplicó estrategias y/o suministró justificaciones basadas en algoritmos estándar de cálculo, esto puede indicar que el apego a los algoritmos por parte de algunos estudiantes es muy fuerte teniendo en cuenta que la tarea es factible de ser resuelta mediante estrategias de cálculo mental.

En las ilustraciones **34** y **35** se expone la respuesta del grupo 5 a la tarea propuesta. En la **Ilustración 34** puede verse, que el grupo eligió la cantidad necesaria de insecticida y fungicida para el cuidado de dos hectáreas de lulo (10 litros y 10 kilos respectivamente). Además, de las múltiples formas de comprar la cantidad requerida, seleccionaron la combinación esperada, es decir aquella que genera el menor gasto.

Artículo	Cant.	Valor
Insecticida Exalt	10. Litros	205.000
Fungicida Antrasin P.C.	2 frascos de 1 kilos	55.000
fungicida novicure	2 bolsas de 4 kilos	170.000
	Total	430.000

Ilustración 34. *Factura de compra de productos. Tarea "A cuidar el Lulo", Situación 3.*
Fuente: Producción estudiantes grupo 5.

De igual manera, como se observa en la **Ilustración 35**, el grupo logra identificar que la mano de obra más económica para la labor de fumigación es la opción 2, pagar doce jornales (12 x 25.000) y alquilar la misma cantidad de fumigadoras (2 x 15.000)

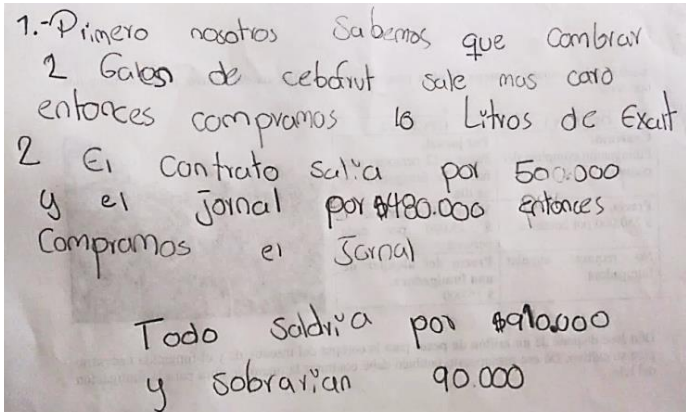

1.-Primero nosotros Sabemos que Combrar 2 Galon de cebafrut sale mas caro entonces compramos 16 Litros de Exalt
2 El Contrato salia por 500.000 y el Jornal por $480.000 entonces Compramos el Jornal
Todo saldria por $910.000 y sobrarian 90.000

Ilustración 35. *Respuesta esperada en la Tarea "A cuidar el Lulo", Situación 3.*
Fuente: Producción del grupo 5.

En el análisis de las respuestas, se observa que todos los grupos lograron relacionar la tarea con las operaciones aritméticas implicadas: la adición, multiplicación y sustracción. Los grupos 7 y 12 presentaron evidencia explícita de indicadores de sentido numérico. Se destaca la respuesta del grupo 12 en el que se percibe razonamiento proporcional y cálculo mental (Indicador 8) para determinar el valor a pagar por el jornal de 12 trabajadores y el alquiler de 12 fumigadoras.

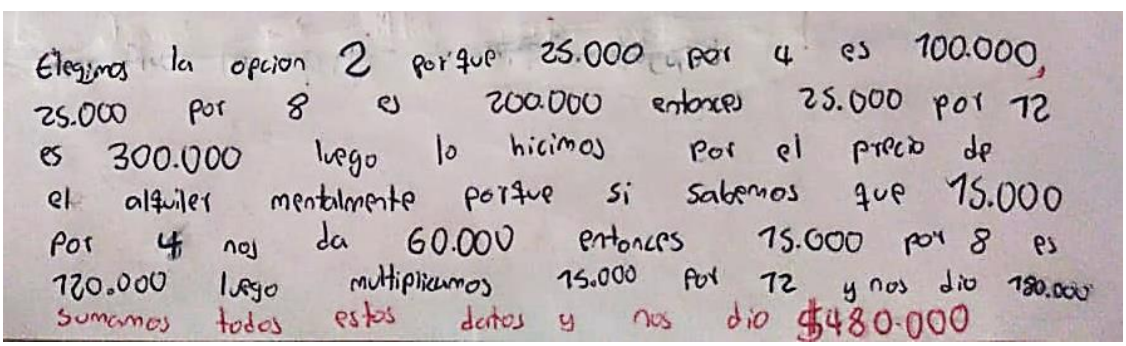

Elegimos la opcion 2 porque 25.000 por 4 es 100.000, 25.000 por 8 es 200.000 entonces 25.000 por 12 es 300.000 luego lo hicimos por el precio de el alquiler mentalmente porque si sabemos que 15.000 por 4 nos da 60.000 entonces 15.000 por 8 es 120.000 luego multiplicamos 15.000 por 12 y nos dio 180.000
sumamos todos estos datos y nos dio $480.000

Ilustración 36. *Presencia de sentido numérico en la Tarea "A cuidar el Lulo", Situación 3.*
Fuente: Producción de los estudiantes del grupo 12.

4.3.3. Resultados Prueba Final o PosTest.

Con el propósito de valorar el impacto de la intervención pedagógica en el fortalecimiento del sentido numérico de los participantes en la presente investigación y en concordancia con el plan de trabajo descrito en el marco metodológico, se aplicó una prueba final similar a la prueba diagnóstica realizada el 28 de febrero de 2018. La prueba final (ver Anexo A) contiene 20 ítems asociados a los componentes y dimensiones de sentido numérico definidos para el estudio y se aplicó el día 19 de octubre de 2018, ocho meses después de la prueba incial. En la prueba final, participaron 35 estudiantes del grupo seleccionado, tres menos de los que resolvieron la prueba diagnóstica, los cuales se retiraron de la institución entre febrero y octubre por diferentes razones.

A continuación se presenta los porcentajes de acierto y la presencia de sentido numérico en cada tarea de la prueba final y se contrasta con lo observado en la prueba diagnóstica.

Tabla 21. *Resultados cuantitativos de la Prueba Final.*

ACIERTO Y TIPO DE RAZONAMIENTO									
PREGUNTA	**C**	**I**	**%C**	**%I**	**SN**	**PSN**	**NSN**	**NJ**	**NR**
1	7	28	20,0	80,0	0	6	26	3	0
2	26	9	74,3	25,7	6	10	15	3	1
3	16	19	45,7	54,3	5	4	23	3	0
4	5	30	14,3	85,7	0	2	28	4	1
5	21	14	60,0	40,0	9	1	19	5	1
6	6	29	17,1	82,9	1	0	29	3	2
7	24	11	68,6	31,4	5	2	24	3	1
8	15	20	42,9	57,1	8	2	16	6	3
9	26	9	74,3	25,7	7	7	17	4	0
10	11	24	31,4	68,6	6	0	22	4	3
11	12	23	34,3	65,7	9	1	19	5	1
12	16	19	45,7	54,3	3	7	18	6	1
13	22	13	62,9	37,1	3	1	21	6	4
14	18	17	51,4	48,6	1	8	15	9	2
15	16	19	45,7	54,3	7	5	13	7	3
16	10	25	28,6	71,4	2	2	21	6	4
17	6	29	17,1	82,9	3	5	11	10	6

18	7	28	20,0	80,0	2	6	11	15	1
19	21	14	60,0	40,0	4	2	14	13	2
20	11	24	31,4	68,6	0	4	21	7	3

Fuente: Los tesistas a partir de las respuestas de los estudiantes en la Prueba Final.

Los datos numéricos de la tabla anterior comparada con los de la **Tabla 12** (resultados de la prueba diagnóstica) permiten afirmar lo siguiente:

- El rango de acierto en las 20 preguntas de la prueba final osciló entre el 14,3% y el 74,3% (menor – mayor porcentaje de acierto). Se observa un cambio respecto al rango que se presentó en la prueba inicial (10,5% – 71,1%).
- Aunque en la prueba final hubo un mayor número de preguntas que superaron el 50% de acierto (7 ítems de 20) comparado con la cantidad de la prueba diagnóstica (5 de 20 ítems), el desempeño general de los participantes en la prueba final es bajo, ya que en 13 de las 20 preguntas (65% de los ítems) menos de la mitad de los estudiantes dio la respuesta esperada.
- Los resultados individuales de la prueba final muestran que el 28,6% de los participantes (10 estudiantes de 35) respondió de manera correcta diez o más preguntas. En este aspecto también se percibe una mejora respecto a la prueba diagnóstica, en ella el 24% de los escolares tuvo 10 aciertos o más. El promedio de respuesta correctas presentado por los 35 estudiantes fue de 8,5 (efectividad del 42,5% en la prueba) el cual es mayor al promedio del pretest (7,8 equivalente al 39% de efectividad).

En relación a la presencia de indicadores de sentido numérico en las respuestas, procedimientos, estrategias y/o justificaciones de los estudiantes a los ítems de la prueba final, también se percibió un aumento respecto al porcentaje de presencia del constructo mental en la prueba diagnóstica.

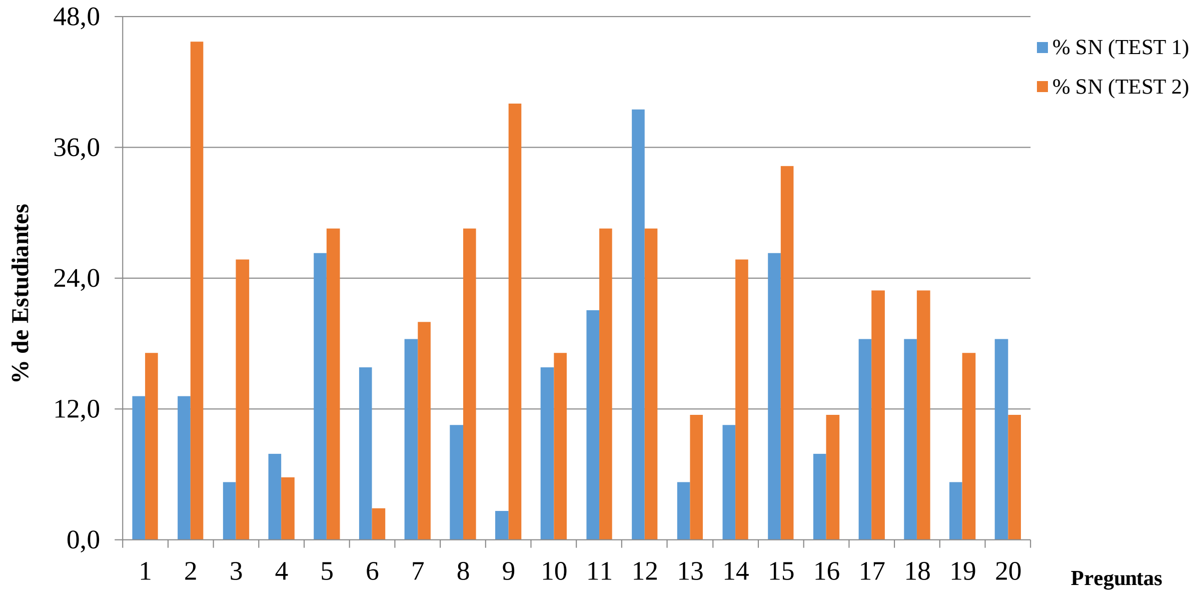


Ilustración 37. *Presencia de sentido numérico (Comparación entre Pre y Pos Test)*
Fuente: Justificaciones de los estudiantes a las preguntas de la Prueba diagnóstica y Final.

La **Ilustración 37** muestra el porcentaje de estudiantes que en la resolución de cada una de las preguntas de las dos pruebas aplicadas (diagnóstica y final) evidenció indicadores de sentido numérico. Las barras de color azul representan el porcentaje de estudiantes que usó razonamientos propios del constructo mental en la prueba diagnóstica y las de color naranja se refieren a la prueba final.

En el gráfico se observa que en 16 de los 20 ítems (80% de las preguntas), las barras naranjas superan a las azules, esto conlleva a inferir que el porcentaje de estudiantes que demuestra sentido numérico en la prueba final es mayor al de la prueba diagnóstica. Sin embargo, pese a que en la prueba final se percibe una mejora respecto a la prueba inicial, debe decirse que el uso de estrategias propias del constructo mental en la solución de tareas numéricas sigue siendo bajo, pues en todas las preguntas menos de la mitad de los participantes revela presencia de indicadores de sentido numérico (el porcentaje máximo es del 45,7% reportado en la segunda pregunta de la prueba final). La **Ilustración 38** confirma la interpretación anterior:

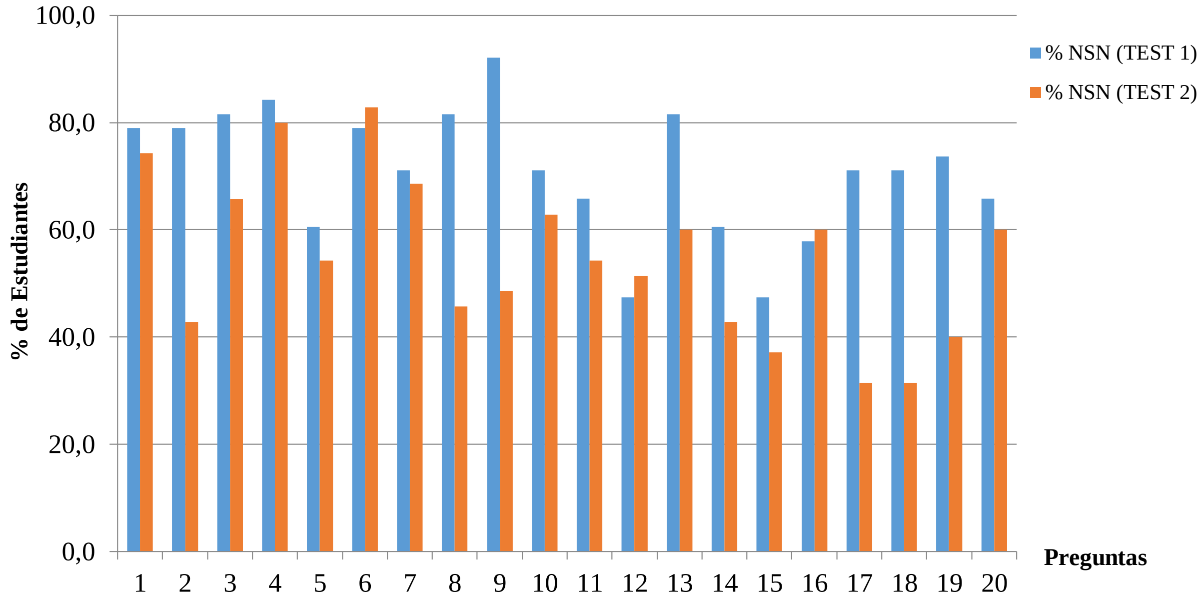


Ilustración 38. *Estudiantes que usan estrategias basadas en algoritmos (PreTest vs PosTest).*
Fuente: Justificaciones de los estudiantes a las preguntas de la Prueba diagnóstica y Final.

La comparación de las longitudes de las barras azul y naranja (prueba inicial y prueba final) del gráfico anterior, indica que aunque en la prueba final se nota una disminución del porcentaje de estudiantes que usó estrategias catalogadas como NSN (sin evidencia de indicadores de sentido numérico) respecto a la prueba diagnóstica, todavía se presenta un procentaje significativo de estudiantes (entre el 31,4% y el 80%) que recurre a la implementación de reglas o algoritmos estándar de cálculo para resolver y justificar las situaciones propuestas.

En las estrategias, procedimientos y/o justificaciones de 8 estudiantes (23% de los participantes aproximadamente) no se encontró presencia de sentido numérico en la prueba final, es decir no evidencian, en la resolución de las preguntas de la prueba, indicadores del constructo mental (en la totalidad de las preguntas usaron reglas estándar de cálculo).

CAPÍTULO V

5. Conclusiones

En éste capítulo, se presentan cuatro apartados con los cuales se concluye la investigación. En las discusiones se confrontan los resultados del presente estudio con investigaciones similares consideradas en los antecedentes. En las conclusiones se analiza el alcance de los objetivos planteados y se describen los hallazgos más relevantes. Finalmente, con base en los hallazgos, los aportes y limitaciones de la investigación se plantean unas recomendaciones y sugerencias para el trabajo en el aula y futuros estudios.

5.1 Discusiones

En Colombia, los referentes nacionales de calidad para la educación matemática (lineamientos curriculares y estándares básicos de competencia) plantean una serie de orientaciones para favorecer el alcance de aprendizajes y potenciar los distintos pensamientos y procesos matemáticos. En los lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se sugiere que la enseñanza de la aritmética debería enfocarse al desarrollo del pensamiento numérico y que dicho pensamiento se puede potenciar a través del sentido numérico. En el ámbito internacional asociaciones de docentes (NCTM, 2003) e investigadores (McIntosh et al., 1992; Bernabé, 2008; Giménez, 2010) coinciden en que el desarrollo del sentido numérico debe ser el objetivo primordial en la enseñanza de la misma.

Sin embargo, de los resultados obtenidos en el presente estudio, se infiere que dichas sugerencias no han sido consideradas o contempladas en gran medida en las prácticas pedagógicas, pese a que las orientaciones han sido emitidas hace dos décadas. En las distintas valoraciones realizadas en el aula al grupo de estudiantes seleccionado, se observó que un gran porcentaje de ellos privilegia el uso memorístico e irreflexivo de hechos, reglas, procedimientos y/o algoritmos estándar de cálculo al momento de resolver situaciones numéricas, incluso en aquellas que no requieren de dichos recursos para ser resueltas. En contraste, un bajo porcentaje de estudiantes demostró indicadores del constructo mental en la pruebas realizadas: en promedio el 15% en la prueba inicial y el 22,3% en la prueba final, hecho que concuerda con lo reportado en investigaciones previas como las de Yang et al. (2008); Parmjit (2009); Veloo (2012) y Almeida & Perdomo (2014).

En esta investigación se observa que en términos generales, la intervención en el aula produjo un pequeño cambio respecto al porcentaje de estudiantes que evidencia indicadores de sentido numérico (esto se constata en la diferencia de porcentajes entre la prueba final y la diagnóstica), lo cual coincide con los planteamientos de Markovits & Sowder (1994) y Veloo (2012) quienes encontraron que una metodología de enseñanza enfocada al desarrollo del sentido numérico mejora las habilidades de los escolares para resolver situaciones numéricas.

Aunque se implementó en el aula una metodología tendiente al desarrollo de habilidades para interpretar, comprender, comunicar información y resolver tareas numéricas mediante estrategias de cálculo flexibles, se sigue presentando un porcentaje significativo de estudiantes que privilegia el uso mecánico de las reglas o algoritmos éstandar de cálculo. En concordancia con las observaciones de Cortés (2001), Yang et al. (2008), Kamii & Dominick (2010) y Almeida & Perdomo (2014) esa resistencia al cambio, indica que la formación a la que han sido expuestos (los escolares implicados) en básica primaria ha sido tan enfocada a la reproducción de algoritmos, que los estudiantes descartan la aplicación de estrategias alternativas (pese a que las conocen) tal vez porque se sienten más seguros con los métodos tradicionales, rechazando con ello la posibilidad de fortalecer sus habilidades de razonamiento y pensamiento.

Por otro lado, al analizar el porcentaje de acierto tanto en los test individuales aplicados como en las tareas grupales, se observó que el uso exclusivo de reglas y algoritmos de cálculo no es garantía de éxito, pues aquellos estudiantes que recurrieron a dichos recursos obtuvieron desempeños bajos, comparados con los escolares que procuraron implementar estrategias de cálculo propias del sentido numérico.

Los hallazgos de ésta investigación, en consonancia con los planteamientos de los autores citados anteriormente, ratifican la idea de que es necesario reflexionar sobre los alcances de las metodologías de enseñanza en las aulas de clase y empezar a considerar la importancia que tiene el constucto mental sentido numérico en el desarrollo del pensamiento numérico, si en realidad se considera que el objetivo del estudio de los conocimientos aritméticos es el desarrollo de habilidades de pensamiento.

5.2 Conclusiones

Para evaluar el alcance del objetivo principal del presente estudio, *promover el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa Municipal José Eustasio Rivera de Pitalito – Huila a través de una estrategia centrada en la resolución de situaciones y tareas*, se analiza el logro de los objetivos específicos.

En primera instancia, la investigación documental permitió identificar las principales posturas o concepciones teóricas (en educación y didáctica de la matemática) sobre el constructo mental sentido numérico. Se concluye que aunque aún no hay acuerdo en torno a si es una intuición, un conjunto de habilidades o un proceso cognitivo complejo, el desarrollo del sentido numérico debe ser un objetivo o propósito de formación en la enseñanza de la aritmética, pues un estudiante que no desarrolle el constructo mental, tendrá dificultades para: desenvolverse a futuro en los ámbitos laboral, social y cultural ante la ausencia de recursos como el lápiz y el papel o herramientas tecnológicas como las calculadora u ordenadores; comprender y comunicar información numérica que circunda en diferentes medios, resolver situaciones del contexto y tomar decisiones que contribuyan a su bienestar económico (McIntosh et al., 1992; Nunes et al., 1993; Kamii, 1996; Bruno, 2000; Cortés, 2001; Aguilar et al., 2006; Bernabé, 2008; Parmjit, 2009; Giménez, 2010; Almeida et al., 2014). Además, el fortalecimiento del sentido numérico cobra mayor relevancia teniendo en cuenta que es un componente del pensamiento numérico (MEN, 1998; Castro, 2008).

Así mismo, la revisión bibliográfica condujo a identificar los componentes, dimensiones e indicadores fundamentales del constructo mental presentes en diferentes marcos conceptuales de distintos investigadores (McIntosh et al., 1992; Berch, 2005; Almeida & Bruno, 2014) hecho que permite comprender en mayor medida las características del sentido numérico además de facilitar su presencia en las producciones de los escolares.

Con la revisión de la literatura se pudo conocer qué tipo de tareas y qué metodología de trabajo debía implementarse en el aula para potenciar el uso de componentes, dimensiones y/o indicadores del sentido numérico. A partir de las consideraciones de Ponte et al. (1997), Goñi (2008) y Penalva & Llinares (2011) sobre las características de las tareas, se diseñaron tres situaciones y nueve tareas relacionadas con el contexto socio – cultural del corregimiento. Sin embargo, es la matríz para el análisis de tareas y estrategias de resolución la herramienta clave para determinar en qué situaciones y tareas hubo mayor presencia de sentido numérico.

En la intervención se logró valorar el sentido numérico de los estudiantes del curso seleccionado a través de una prueba diagnóstica realizada en el mes de febrero del año 2018. El análisis de la prueba que contiene 20 preguntas relacionadas con tres componentes del constructo mental, definidos por McIntosh et al. (1992) y Almeida & Bruno (2014), indicó que el desempeño de los escolares en la resolución de tareas que requieren del constructo mental es bajo. Se encontró, que la adecuada aplicación de reglas y procedimientos estándar de cálculo no garantizan una buen desempeño en pruebas de sentido numérico. Además, en algunos casos se observó una aplicación incorrecta de los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones; esto se presenta cuando no existe una comprensión del por qué funcionan los algoritmos y las acciones tras ellos, en consecuencia los estudiantes tratan de memorizar y reproducir las reglas sin dotarlas de sentido.

En el análisis de los resultados de las tareas mediante la matriz se encontró que en la **primera situación, "El día de plaza"**, el porcentaje de estudiantes que evidenció presencia de indicadores del constructo mental es del **48%**, en la **segunda situación, "La Colombia Cafetera del Siglo XXI"**, **el 22%** y en la **tercera situación, "A cuidar el lulo",** el porcentaje de estudiantes que demostró presencia de sentido numérico en sus respuesta está alrededor del **65%.** Al comparar los porcentajes anteriores con los obtenidos en las pruebas diagnóstica y final se concluye que los estudiantes tuvieron mejor desempeño en las tareas que están inmersas en un contexto cotidiano (por ejemplo el de compra de verduras y frutas u otros artículos), así mismo, que el trabajo cooperativo en el aula propicia el uso de estrategias flexibles de cálculo a través del intercambio de ideas y significados sobre los números y las operaciones.

Otra conclusión que se obtiene del análisis de los resultados es que la comprensión y el nivel de complejidad de las tareas también inciden en la presencia de indicadores del constructo mental. Cuando el nivel de complejidad es alto (tareas de reflexión) o cuando la información de las tareas no se interpreta adecuadamente gran parte de los estudiantes recurrió a la aplicación de reglas, procedimientos y/o algoritmos estándar de cálculo para resolver dichas tareas, de nuevo se percibe que cuando los estudiantes se sienten inseguros o no saben qué hacer, descartan la posibilidad de aplicar estrategias alternas de cálculo.

Respecto a los componentes del sentido numérico se evidenció que los indicadores con mayor presencia fueron:

- **I3. Reescribir números en formas equivalentes (mediante relaciones aritméticas) para facilitar cálculos**. Este indicador se precibió en mayor medida en las tareas grupales y en el postest, donde expresaron por ejemplo el 5 como 10 ÷ 2, el 52 como 50 + 2, el 4 como 2 x 2, el 8 como 2 x 2 x 2, lo cual permite concluir que gran parte de los estudiantes comprende que los números naturales se pueden representar de múltiples formas.
- **I4**. **Relacionar situaciones con operaciones aritméticas.** En la resolución de la mayoría de las tareas grupales, los estudiantes asociaron de manera correcta las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división a las distintas tareas planteadas, demostrando así que existe una comprensión general del significado de cada operación.

En contraste, **I9 Juzgar la razonabilidad de los resultados de la aplicación de estrategias**, es el indicador con menor presencia. Tras obtener la respuesta a las diferentes preguntas o tareas numéricas, pocos estudiantes se detuvieron a pensar si la solución obtenida tenía sentido en el contexto de la tarea, prueba de ello son las respuestas al ítem 19 de la prueba diagnóstica (*Si un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años?*) en la cual 34 de 38 estudiantes respondió 300 centímetros, sin dimensionar que es poco posible que una persona mida 3 metros de altura. Esta tendencia ha sido reportada por McIntosh et al. (1992), Cortés (2001) y Almeida & Bruno (2014) en sus respectivos estudios, comentando que la reacción de los escolares cuando se les solicita que comprueben sus respuestas es realizar de nuevo los procedimientos.

En definitiva, el comparativo del porcentaje de estudiantes que demostró sentido numérico en la prueba diagnóstica [2,6 – 39,5] y en el postest [2,9 – 45,7] permite concluir que el objetivo general de la presente investigación se logró, aunque la diferencia no sea significativamente alta.

5.3 Recomendaciones

Los bajos desempeños de los estudiantes (del presente estudio) en las pruebas, situaciones y tareas numéricas confirman que una formación centrada en el aprendizaje memorístico de hechos, conceptos, procedimientos o la reproducción irreflexiva de algoritmos estándar de cálculo, no contribuye a los propósitos de formación planteados en los referentes nacionales de calidad, es más, constituyen un obstáculo para el desarrollo del pensamiento numérico.

De igual manera, si se tiene en cuenta que en la cotidianidad el ciudadano del mundo requiere habilidades para compender, interpretar, comunicar información numérica y resolver situaciones del contexto de forma ágil y eficaz, se considera necesario potenciar desde los primeros años de escolaridad el desarrollo del constructo mental sentido numérico. Por ende se recomienda a los docentes de básica primaria promover en el aula la reflexión y el razonamiento sobre los conocimientos numéricos así como el uso de estrategias de cálculo flexibles (cálculo mental, estimación, pensamiento proporcional), como alternativa a la aplicación de los rígidos algoritmos de lápiz y papel.

Respecto a la metodología de trabajo en el aula, se sugiere plantear tareas del contexto cercano a los escolares, que propicien la reflexión y conexión entre lo conceptual y procedimental, promover la resolución de tareas en pequeños grupos para que los estudiantes compartan e intercambien significados sobre los objetos y conceptos y debatan sobre estrategias de cálculo flexible para la solución de problemas (aprendizaje cooperativo).

Finalmente, a los directivos docentes de la Institución, a las autoridades responsables de la emisión de orientaciones sobre la educación matemática y a las entidades de formación y actualización docente se sugiere la apertura de espacios para la discusión de las ideas concernientes al desarrollo del sentido numérico y sus implicaciones en el aula.

5.4 Prospectivas

Los resultados y datos empíricos de la presente investigación no deben generalizarse, dado que cada contexto institucional tiene sus particularidades y es diferente, así como el sentido numérico de cada estudiante (el cual está influenciado por su formación escolar y/o las actividades extracurriculares que realiza). En esa línea, sería interesante determinar cuál es el desempeño de estudiantes del mismo grado de otras instituciones del municipio de Pitalito en la resolución de tareas suceptibles de ser resueltas mediante estrategias del constructo mental, y así identificar si los objetivos generales de formación planteados en los Lineamientos curriculares y Estándares básicos de competencia para el área de matemáticas se están alcanzando.

Dado que en el grupo participante se observó un pequeño cambio respecto a la inclinación para resolver tareas numéricas por medio de habildades propias del sentido numérico, valdría la pena evaluar si los cambios se mantendrán en los estudiantes o propenderán de nuevo por el uso irrelfexivo de algoritmos. De igual manera valorar las habilidades numéricas de estudiantes de diversos grados de secundaria (por ejemplo undécimo) en otros sistemas numéricos. Así mismo, valorar otros componentes o dimensiones del constructo mental; estudiar la relación del sentido numérico con los procesos generales y aportar información que contribuya a resolver cuestiones pendientes de investigaciones precedentes (Bernabé, 2008; Almeida & Bruno, 2016) como la relación entre el sentido numérico y el desempeño escolar en matemática.

Teniendo en cuenta el rol que desempeñan los educadores de básica primaria en la formación matemática inicial de los estudiantes podría ser relevante conocer las concepciones de los docentes sobre los propósitos de la enseñanza de la aritmética y sus percepciones sobre el sentido numérico.

6. Bibliografía

Aguilar, M., Navarro, J., Alcalde, C., & Marchena, E. (2006). *El constructo conciencia numérica: Su importancia en la detección y prevención de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.* Cádiz: Universidad de Cadiz.

Almeida, R., & Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. (M. González, D. Codes, D. Arnau, & O. T, Edits.) *Investigación en Educación Matemática, XVIII*, 127 - 136.

Almeida, R., & Bruno, A. (2016). Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria. *PNA, 10*(3), 191 - 217.

Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 9-34.

Baroody, A., Lai, M.-l., & Mix, K. (2006). The Development of Young Children's Early Number and Operation Sense and its Implications for Early Childhood Education. En B. Spodek, & O. Saracho (Edits.), *Handbook of research on the education of young children* (págs. 187-221). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Tomado de https://www.researchgate.net/publication/232576354.

Bautista Díaz, D. A. (2016). *Desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes de grado tercero en la estructura multiplicativa a través del desarrollo de una aplicación móvil.* Bogotá.

Berch, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for children with mathematical disabilities. *JOURNAL OF LEARNING DISABILITIES*, 333-339.

Bernabé, R. (2008). *Desarrollo del sentido numérico y sus vínculos con el rendimiento escolar en aritmética (Tésis de maestría).* Ciudad de México.

Bernal Torres, C. A. (2010). *Metodología de la investigación* (Tercera ed.). Bogotá: PEARSON EDUCACIÓN.

Biquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guía práctica.* Sabadell: Ceac.

Bocanegra Velasco, E. R. (2017). *Desarrollo del pensamiento numérico – variacional en el aprendizaje de porcentajes aplicado a la educación financiera en estudiantes de grado séptimo de básica secundaria del IETI comuna 17 de la ciudad de Cali. Tesis de Maestría.* Santiago de Cali: Universidad ICESI.

Bracho, R., Adamuz, N., Gallego, M., & Jiménez , N. (2014). Alternativa metodológica para el desarrollo integral del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria. (M. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega, Edits.) *Investigación en Educación Matemática, XVIII*, 167 - 176.

Bracho, R., Adamuz, N., Jiménez, N., & Gallego, M. D. (2014). Una experiencia de investigación-acción colaborativa para el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. En J. L. Lupiañez, L. Puig, E. Castro, J. L. González, J. A. Fernández, M. T. Sánchez, & C. Fernández, *Investigaciones en Pensamiento numérico y Algebraico e Historia de las matemáticas y la Educación matemática* (págs. 1-9). Málaga: Departamento de Didáctica de las matemáticas, de las ciencias sociales y expermentales y SEIEM.

Bruno Castañeda, A. (2000). Sentido Numérico. En A. Martinón Cejas, *Las matemáticas del siglo XXI una mirada en 101 artículos.* (págs. 267-270). Madrid.: Universidad de La Laguna: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas: Nivola.

Burns, M. (2007). *About Teaching Mathematics: A K-8 Resource.* (Tercera ed.). Sausalito, CA: Maths Solutions.

Cañadas, M. C., & Gómez, P. (2012). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Castro Martínez, E., Rico Romero, L., & Castro Martínez, E. (1996). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Madrid: Síntesis S.A.

Castro, E. (1994). *Exploraciones de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Tesis doctoral.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (2008). *Pensamiento numérico y educación matemática.* Granada.: Dpto Didáctica de la Matemática.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 95-124). Barcelona.

Colombia. Congreso de la República. (8 de Febrero de 1994). *Ley General de Educación - Ley 115 de 1994.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Contreras, L. C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M., & Climent, N. (Abril de 2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *BOLEMA, 26*(42 B), 433-457.

Cortés, J. (2001). *Análisis de esrategias de cálculo estimativo que utilizan estudiantes de 2º de secundaria en Baja California (Tesís de maestría).* México.

Courtney, M. A. (2012). *Exploring the number sense of final year primary pre-service teachers (Tesis de maestría).* Stellenbosch, Sudafrica.

Dantzig, T. (2005). *Number: The language of science* (Quinta ed.). (J. Mazur, Ed.) New York.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How to mind crates mathematics.* New York: Oxford University Press.

Denzin, & Lincoln. (2000). *The discipline and practice of qualitative research.* (Denzin, & Lincoln, Edits.) Sage publications.

Díez Lozano, Á. (2011). *Evaluación del rendimiento aritmético. Un estudio comparativo (Tésis de doctorado).* Granada, España: Editorial de la Universidad de Granada.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Segunda ed.). (M. Vega Restrepo, Trad.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Er, Z., & Dínç Artut, P. (Abril de 2016). An investigation of elementary school teachers' sense of number. *US-China Education Review B, 6*(4), 205-2017.

Galeano Ramírez, M. Y., & Ortíz Ruíz, D. S. (2008). *El cálculo mental como estrategia para desarrollar el pensamiento numérico. Tesis de Maestría.* Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación del conocimiento matemático: El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales (Tésis de doctorado).* Malaga.

García Quiroga, B., Coronado, A., Montealege Quntana, L., Giraldo Ospina, A., Tovar Piza, B. A., Morales Parra, S., & Cortés Joven, D. D. (2013). *Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje.* Florencia, Caquetá, Colombia: Universidad de la Amazonia.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para apoyar la práctica educativa.* México: INEE.

Giménez Rodríguez, J. (2005). Algunos elementos en la construcción de un sentido numérico en aritmética. *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*, 115-122.

Giménez, J. (Abril de 2010). Potenciando competencia numérica con alumnado de 6 a 12 años. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*(54), 5-13.

Godino, J. D., Font, V., Konic, P., & Wilhelmi, M. R. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso, & M. Peña, *Investigación en el aula de matemáticas: Sentido numérico* (págs. 177-183). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez Alfonso, B. (1996). *Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética: el caso de los algortimos de cálculo.* Valencia, España: Departamento de didáctica de las matemáticas.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA*, 251-292.

González Marí, J. L. (2010). *Investigaciones en Pensamiento numérico: Estructuras numéricas I.* Málaga: Universidad de Malaga.

Goñi Zabala, J. M. (2008). Las tareas a realizar son la clave para el desarrollo de los aprendizajes. En J. M. Goñi Zabala, *3^2-2 Ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática.* (Primera ed., págs. 125-166). Barcelona, España: GRAÓ.

Griffin, S. (2004). Teaching Number Sense. *Educational leadership. Journal of the Department of Supervision and Curriculum Development, N.E.A, 61*(5), 39-42.

Hedrén, R. (1998). The teaching of traditional standard algorithms for the four arithmetic operations versus the use of pupils' own methods. En S. I, *Proceedings of the first conference of the European Society in Mathematics Education* (págs. 233-244). Osnabrück, Alemania: I. Schwank.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). México DF: McGraw-Hill Education.

ICFES. (2016). *Descripción general de los niveles de desempeño de la prueba de matemáticas.* Bogotá.

ICFES. (2016). *Guía de interpretación y uso de resultados de las pruebas saber 3º, 5º y 9º.* Bogotá.

ICFES. (2017). *Reporte histórico comparativo saber 3, 5 y 9 entre los años 2014-2015-2016-2017.* Bogotá. : Ministerio de Educación. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionListaInstituciones.jspx.

Jiménez Díaz, N. A. (2015). *Una trayectoria de aprendizaje de subitización en niños y niñas de educación inicial.* Bogotá, D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Kamii, C. (Marzo de 1996). La teoria de Piaget y la enseñanza de la aritmética. *Perspectivas, XXVI*(1), 107-119.

Kamii, C., & Dominick, A. (Diciembre de 2010). Los efectos negativos de enseñar algoritmos en grados primarios (primero al cuarto). (N. Zambrana, Ed.) *Pedagogía, 43*(1), 59-73.

Lewin, R. A. (2013). *Grupos.* Obtenido de Facultad de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Chile: http://www.mat.puc.cl/~rlewin/apuntes/algebra.pdf

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro, *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 151-175). Madrid: Síntesis.

Loaiza Gómez, A. (2010). Validez y fiabilidad deencuestas cerradas en investigación. *Magazín empresarial, 11*, 55-78.

Markovits, Z., & Sowder, J. (Enero de 1994). Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. (N. C. Mathematics, Ed.) *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4 - 29.

Mastachi Pérez, M. (2015). *Aprendizaje de las Operaciones Básicas en Aritmética a través de la Resolución de Problemas. Tesis de maestría.* Poza Rica, México: Universidad Veracruzana.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. En *Subject Learning in the Primary Curriculum: Issues in English, science and mathematics* (págs. 209-221).

MEN. (2016). *Informe por colegio 2016. Resultados Preubas Saber 3º, 5º y 9º. IE Municipal José Eustasio Rivera.* Bogotá.: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/441551001012.pdf.

MEN. (2017). *Informe por colegio 2017 - Resultados - Pruebas saber3º, 5º y 9º 2016. IE Municipal José Esutasio Rivera.* Bogotá.: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2017/Institucion_Educativa/441551001012.pdf.

Mesa, O. (1990). Camino a la Aritmética: Un enfoque Constructivista. Centro de padagía participativa. Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!.* Obtenido de Colombia aprende la red del conocimiento.: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-167733_archivo.pdf

Molina González, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación priimaria. Tesis doctoral.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM). (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sivilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática de Thales. (versión original 2000).

Nunes Carraher, T., Dias Schliemann, A., & Carraher, D. W. (1993). Street Mathematics and School Mathematics. *Research Gate*.

Obando Zapata, G., & Vásquez Lasprilla, N. (2000). Pensamiento numérico desde preescolar a la educación básica. *9º Encuentro colombiano de matemática edicativa*, 5-24.

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana.* Madrid: Santillana.

Parlamento Europeo. (26 de Septiembre de 2006). *Propuesta de recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*. Obtenido de Parlamento Europeo: http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//TEXT+TA+P6-TA-2006-0365+0+DOC+XML+V0//ES#BKMD-11

Parmjit, S. (2009). An assessment of number sense among secondary school students. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*, 1-27.

Penalva, M. C., & Llinares, S. (2011). Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. En F. Corbalán, J. Giménez, J. M. Goñi, I. López-Goñi, S. Llinares, M. C. Penalva, . . . Y. M. Vanegas, *Didáctica de las Matemáticas* (págs. 27-51). Barcelona: GRAÓ.

Pilmer, D. (2008). *Number Sense.* Nova Scotia: Department of Labour and Workforce Development.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. En J. P. Ponte, A. Boavida, M. Graça, & P. Abrantes, *Didáctica da matemática.* (P. Flores, Trad., págs. 1-25). Lisboa - Portugal: Ministerio da Educação. Departamento do Ensino Secundario.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico, *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (págs. 61-94). Barcelona: Horsori.

Rico Romero, L., & Lupiañez Gómez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. (1996). *Pensamiento numérico.* Granada, España.: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación. 1-14.

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numericas. *Enseñanza de las Ciencias*, 1.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A., & Gómez, P. (2007). *Matemáticas escolares y Análisis de contenido con profesores de secundaria en formación.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/466/1/RicoL07-2848.PDF .

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (junio de 2008). Planificación de las matemática escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*(58), 7-23.

Rodríguez Gómez, D., & Valldeoriola Roquet, J. (2009). *Metodología de la investigación.* Barcelona, España: Universitat Oberta de Catalunya.

Rojas, P. J. (2014). *Relación entre representaciones de objetos matemáticos y sentidos asignados a estas por estudiantes en el aula.* Bogotá: Universidad de los Andes. Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad.

Rueda, F., Cely Rojas, V., Joya Vega, A. d., Salgado Ramirez, D. C., & Romero Roa, J. d. (2007). *Matemáticas 6.* Bogotá: Santillana.

Salinas Portugal, M. J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de magisterio. *Investigación en Educación Matemática XI*, 381-390.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (febrero de 1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*(3), 344-350.

Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso.* Tesis Doctoral, Universitat Autonoma de Barcelona, Bellaterra.

Sood, S., & Mackey, M. (2014). Number Sense Instruction: A Comprehensive Literature Review. *World Journal of Education, 4*(5), 58-67 Recuperado de http://dx.doi.org/10.5430/wje.v4n5p58.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup, *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (págs. 1-51). Hillsdale, New Yersey: Erlbaum.

UNEFA. (2010). *Estructuras Algebraicas. Unidad II.* Mérida.

Velázquez, S. R., & Hesiquio, H. N. (2011). Desarrollo de competencias matemáticas en educación secundaria. Sentido numérico y pensamiento algebraico. *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa 24 (págs. 517-525). Ciudad de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Veloo, P. K. (2012). The development of number sense proficiency: An intervention study with year 7 students in Brunei Darussalam. *The Mathematics Educator, 13*(2), 39 - 54.

Whitacre, I., Henning, B., & Atabaş, Ş. (2017). Disentangling the research literature on “number sense”: Three constructs, one name. (E. Galindo, & J. Newton, Edits.) *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, 203-210.

Yang, D.-C. (enero de 2003). Teaching and Learning Number Sense. An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*(1), 115-134. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/226127207.

Yang, D.-C., HSU, C.-J., & Huang, M.-C. (2004). A study of teaching and learning number sense of sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 407 - 430.

Yang, D.-C., Li, M.-N., & Lin, C.-I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. (N. S. Council, Ed.) *International Journal of Science and Mathematics Education*, 789 - 807.

Yang, D.-C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Numbers sense strategies used by pre-service teacher in Taiwan. (N. S. Council, Ed.) *International Journal of Science and Mathematics Education*, 383-403.

Zanocco, P., Baeza, P., León, I., & Riveros, M. (2006). *Una experiencia de perfeccionamiento en educación matemática modalidad online.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

ANEXOS

A. Pruebas: Diagnóstica y Final (Pretest y Postest)

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL JOSE EUSTASIO RIVERA
PRUEBA DIAGNÓSTICA PARA VALORAR ESTRATEGIAS DE SENTIDO NUMÉRICO
GRADO SEXTO

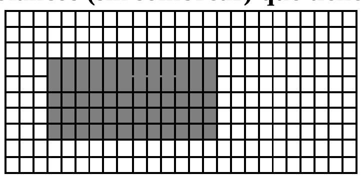
NOMBRES Y APELLIDOS: ____

FECHA: 28 de febrero de 2018

Resuelve el siguiente cuestionario usando tu conocimiento sobre los números y las operaciones. **No es necesario utilizar los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas** para dar respuesta a cada cuestión. Frente a cada punto **debes explicar cómo llegaste a la respuesta**.

1. Elige la mejor estimación para la siguiente adición. **(No se requiere calcular la respuesta exacta)** **4720 + 250 + 1630 + 385** A. 12.500 B. 7.000 C. 5.995 D. 6.000	
2. Sin usar algoritmos, encierra la expresión que representa la cantidad más grande. A. 149 x 4 B. 144 + 146 + 148 + 150 C. 102 + 98 + 200 + 100 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	
3. Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas). A. 2.452 × 4 B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465 C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	
4. Elige la opción que establece el orden de las siguientes cantidades ☼ = 3 × 5 × 6 × 8 ♥ = 15 × 48 ☺ = 24 × 5 × 6 A. ☼ mayor que ♥ mayor que ☺ B. ♥ mayor que ☺ mayor que ☼ C. ☼ igual ♥ mayor que ☺ D. ☼ igual ♥ igual ☺	
5. Sin usar el algoritmo tradicional de la multiplicación, Mayra dice que: 12 x 25 es igual a 6 x 50 Para ti, lo que Mayra ha dicho es: A. Correcto B. Incorrecto C. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	

6. Resuelve sin usar algoritmos **835 + 75 + 66 – 75 = ___________**	
7. Sin aplicar el algoritmo de la multiplicación determina el valor de: **125 x 4 = __________**	
8. Determina el resultado de la siguiente operación (no usar el algoritmo tradicional) **28 x 50 = __________**	
9. Si se sabe que 930 x 134 es igual a 124.620 **¿Cuál es el resultado de 930 x 135 ? __________________**	
10. Sin realizar la operación determina el valor de la siguiente división **8.420 ÷ 4 = ____________**	
11. Un caficultor ha almacenado toda su producción de café por igual en 80 sacos con 40 kilos en cada saco. Ahora necesita volver a empacar todo el café por igual en 40 nuevos sacos. ¿Cuántos kilos de café habrá en cada nuevo saco? A. 2 kilos B. 40 kilos C. 80 kilos D. 120 kilos	
12. Un gato come 600 gramos de pescado en 4 días. ¿Cuántos gramos comerá el gato en 6 días? (Se supone que el gato come la misma cantidad cada día) A. 800 g B. 1000 g C. 600 g D. 900 g	
13. A continuación se presenta el valor a pagar por los servicios públicos del mes de julio de la casa de María y José. **Energía $ 38.430 Agua $ 23.760** **Gas $ 26.340 Teléfono $ 12.300** **José afirma que con $ 100.000 puede pagar lo cuatro recibos, por su parte María dice que ese dinero no alcanza.** Para ti, ¿quién tiene la razón? (No uses el algoritmo tradicional de la suma) A. José B. María C. No puedo decidir sin hacer la suma vertical.	
14. Mónica tenía en su alcancía 380 monedas de $ 500. Si las llevó al supermercado del pueblo para cambiarlas por billetes de $ 2.000 **¿Cuántos billetes le deben entregar?____________________**	
15. Una buseta puede transportar 15 personas. Si 170 estudiantes necesitan ser transportados de Bruselas a Pitalito, calcula cuántas busetas se requieren. _______________________	
16. Don Raúl ganó $ 78.000 por coger café en la finca La Esmeralda. Si le pagaron $ 6.500 por cada arroba recolectada. **¿Cuántas arrobas recolectó? _______________________**	

17. Una caja de chocolatinas jet cuesta $ 12.800. Por motivos del mes del amor y la amistad la empresa anuncia que durante el mes de septiembre, el valor de la caja de chocolatinas estará a mitad de precio. ¿Cuánto debe pagar Andrés si decide comprar dos cajas?_______________________	
18. Una alberca tiene 125 litros de agua. Un agricultor ubica una manguera para verter más agua. El nivel del agua sube a un ritmo de 15 litros por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá en la alberca después de 4 minutos?____________	
19. Un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años?_______________________	
20. El número de cuadros blancos (sin sombrear) que tiene la siguiente figura es: 	

Prueba Final

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL JOSE EUSTASIO RIVERA
POST- PRUEBA PARA VALORAR ESTRATEGIAS DE SENTIDO NUMÉRICO
GRADO SEXTO

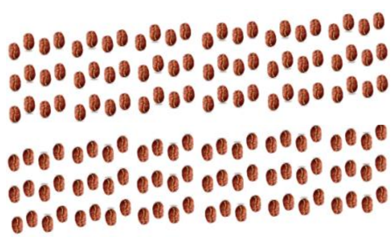
NOMBRES Y APELLIDOS: ____

FECHA: 19 de octubre de 2018

Resuelve el siguiente cuestionario usando tu conocimiento sobre los números y las operaciones. No es necesario utilizar los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas para dar respuesta a cada cuestión. Frente a cada punto debes explicar cómo llegaste a la respuesta.

1. Elige la mejor estimación para la siguiente sustracción. **(No se requiere calcular la respuesta exacta)** **952 – 268** A. 700 B. 614 C. 1.220 D. 716	
2. Sin usar algoritmos, encierra la expresión que representa la cantidad más grande. A. 600 – 216 B. 244 + 156 + 48 + 152 C. 102 + 98 + 200 + 100 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	

3. Elige la expresión que representa la cantidad más grande (sin calcular respuestas exactas). A. 2.452 × 4 B. 40.840 ÷ 4 C. 2.987 + 1.991 + 2.999 + 3.000 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	
4. En cuál de las siguientes expresiones se obtiene el mismo resultado de 25 × 12 A. 15 × 10 × 2 B. (25 × 10) + 25 + 25 C. 5 × 5 × 3 × 4 D. Todas las anteriores	
5. Andrés afirma que: **36 × 12 = 18 × 24** ***Para ti, lo que dice Andrés es*** A. Correcto B. Incorrecto C. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.	
6. Resuelve sin usar algoritmos **846 + 125 + 74 – 125 = ___________**	
7. Sin aplicar el algoritmo de la multiplicación determina el valor de: **150 x 8 = __________**	
8. Determina el resultado de la siguiente operación (no usar algoritmos) **2500 ÷ 2 × 4 = __________**	
9. Si se sabe que 25 x 36 es igual a 900 **¿Cuál es el resultado de 25 x 38 ? __________________**	
10. Sin realizar la operación determina el valor de la siguiente división **128.204 ÷ 4 = ____________**	
11. Este año el terreno de Juan tiene 60 surcos y en cada surco hay 30 árboles de café. Para el próximo año Juan piensa renovar la plantación dejando sólo 30 surcos en el terreno, pero desea tener la misma cantidad de árboles de café que tiene este año. ¿Cuántos árboles de café debe sembrar en cada surco? A. 4 árboles B. 30 árboles C. 60 árboles D. 120 árboles	
12. Si en 4 días de Colegio Alejandra gasta $ 5.400 ¿Cuánto dinero gastará en 6 días? (Suponer que Alejandra gasta la misma cantidad cada día) A. $ 8.100 B. $ 1.350 C. $ 10.800 D. $ 7.100	
13. Alberto va a pagar una muda de vestir que escogió: **Jeans $ 33.500 – Camiseta $ 25.900 – Gorra $ 12.800 y Tenis $ 66.900** **Alberto cree que con $ 130.000 puede comprar todo. ¿Crees que está en lo correcto?** A. Sí. B. No. C. No puedo decidir sin hacer la suma vertical.	
14. La biblioteca tiene 2490 libros. 585 libros están prestados y se perdieron 5 libros. ¿Cuántos libros quedan en la biblioteca? A. 1500	

B. 2000 C. 1900 D. 2500	
15. Javier decide darle a cada uno de sus sobrinos $ 1.500 En total gastó $ 10.500 ¿Cuántos sobrinos tiene Javier?_______________________	
16. Cada fin de semana Felipe recibe de la recogida de café 50.000 pesos y se gasta 26.000 ¿Cuántos fines de semana deben pasar para que ahorre $ 360.000 ? _______________________	
17. Para Halloween Patricia desea regalar 120 dulces. Al leer el anuncio de promoción del supermercado MERKAMÁS decide comprar Choco-Break. Si un paquete tiene 30 dulces ¿Cuánto dinero debe pagar Patricia para comprar la cantidad de dulces que necesita?  	
18. Wilson pago cuatro capuchinos y una torta. Si la cuenta fue de 20.550 y la torta le costó 6.550 ¿Cuánto le costó cada capuchino? _______________________	
19. Mariana tiene 10 años y calza 32. ¿Cuál será la talla de calzado de Mariana cuando tenga 20 años? _______________________	
20. Don José ha seleccionado unos granos de café para moler. El número de granos de café seleccionado por don José es: _____________________ 	

Validez y fiabilidad de instrumentos.

Para determinar el nivel de validez y confiabilidad de la prueba diagnóstica se solicitó a diez expertos (docentes e investigadores con formación postgraduada en educación matemática) realizar el análisis de forma y de contenido del instrumento señalado.

La valoración de la estructura o **análisis de la forma**, buscó recoger la percepción del grupo de expertos en torno a la presentación, redacción, claridad, orden y coherencia del instrumento por medio de una encuesta con escalamiento Likert.

Tabla 22. *Percepción de los expertos sobre la forma de la prueba diagnóstica.*

DATOS_FORMA											
EXPERTO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**SUM**
E1	4	4	4	4	4	4	2	5	4	2	37
E2	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	41
E3	5	5	5	4	5	5	5	4	5	4	47
E4	4	5	4	4	5	4	5	5	4	5	45
E5	5	5	4	5	4	5	4	4	4	5	45
E6	4	4	4	4	4	4	5	4	5	5	43
E7	5	5	4	4	4	4	4	4	5	4	43
E8	4	5	5	3	4	4	4	4	5	3	41
E9	4	4	5	5	5	4	5	5	4	4	45
E10	4	4	5	4	5	5	5	4	5	4	45
MEDIA	4,3	4,5	4,4	4,1	4,4	4,4	4,3	4,3	4,5	4	44
VARIANZA	0,23	0,28	0,27	0,32	0,27	0,27	0,9	0,23	0,28	0,89	7,67

Fuente: Respuestas de los expertos en la encuesta de análisis de forma.

De los puntajes asignados en la escala Likert de la encuesta del análisis de forma y del cálculo de la media y la desviación típica, se obtiene que el instrumento es altamente válido, según los criterios definidos por Loaiza (2010):

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\Sigma\,\mathrm{Med}}{10} = \frac{44}{10} = 4{,}4$$

Tabla 23. *Valores para determinar validez de instrumentos.*

Media	Valoración
1,0 a 1,9	No válido (volver a construir)
2,0 a 2,9	No válido (reformular)
3,0 a 4,0	Válido
4,0 a 5,0	Altamente válido

Fuente: Loaiza (2010).

Así mismo, según Loaiza (2010), al aplicar la fórmula del $alphacronbach$ y contrastar su valor con los datos de la **Tabla 24**, se puede determinar la confiabilidad del instrumento; y en este caso se obtuvo que el instrumento diseñado es fiable.

$$\propto crombach = \frac{k}{k-1}\left[1 - \frac{\sum Vi}{Vt}\right]$$

$$\propto cronbach = \frac{10}{9}\left[1 - \frac{3{,}35555556}{7{,}67555556}\right] \qquad alphacrombach = 0{,}6253619$$

Tabla 24. *Indicadores del Alpha de Cronbach para evaluar confiabilidad de instrumentos.*

RANGO	VALORACION
0 – 0,49	No fiable
0,5 – 0,59	Débilmente fiable
0,60 – 0,79	Fiable
0,80 – 1,0	Altamente fiable

Fuente: Loaiza (2010)

Para la valoración del contenido se realizó un procedimiento similar al descrito con anterioridad, pero en éste ámbito el cuestionario versó sobre la pertinencia y coherencia de las tareas planteadas en la prueba diagnóstica con algunos componentes del sentido numérico.

Tabla 25. *Percepción de los expertos sobre el contenido de la prueba diagnóstica.*

DATOS_CONTENIDO											
EXPERTO	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**	**SUM**
E1	3	5	5	5	4	4	4	4	4	4	42
E2	4	5	5	4	4	4	4	3	4	5	42
E3	5	5	5	5	5	5	4	3	5	5	47
E4	4	5	4	4	5	5	5	4	4	4	44
E5	4	4	5	4	5	5	4	4	4	4	43
E6	5	5	3	4	5	4	4	4	4	3	41
E7	5	4	5	5	5	5	5	4	5	4	47
E8	4	5	5	5	4	4	5	5	5	5	47
E9	5	4	5	4	4	5	5	5	4	5	46
E10	4	5	4	5	5	5	4	5	5	5	47
PROMEDIO	4,3	4,7	4,6	4,5	4,6	4,6	4,4	4,1	4,4	4,4	44,6
VARIANZA	0,46	0,23	0,49	0,28	0,27	0,27	0,27	0,54	0,27	0,49	7,72

Fuente: Respuestas de los expertos en la encuesta de análisis de contenido.

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{\Sigma\,\mathrm{Med}}{10} = \frac{44{,}6}{10} = 4{,}46$$

El resultado anterior indica (según la **Tabla 23**) que el contenido la prueba diagnóstica es altamente válido, a la luz de los datos indicados por los expertos.

Finalmente del cálculo del $alphacronbach$:

$$\propto cronbach = \frac{10}{9}\left[1 - \frac{3{,}26666667}{7{,}72666667}\right] \qquad alphacrombach = 0{,}64135749$$

Y la **Tabla 24** se afirma que la prueba diagnóstica también es fiable en su contenido.

B. Entrevista

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL JOSE EUSTASIO RIVERA
INVESTIGACIÓN DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO
GRADO SEXTO

GUÍA DE ENTREVISTA SOBRE SENTIDO NUMÉRICO

LUGAR: I.EM. José Eustasio Rivera

FECHA: ____________________

HORA DE INICIO: _________ **HORA DE FINALIZACIÓN:** __________

ENTREVISTADO(A): _______

Introducción.

La presente entrevista se plantea con el propósito de conocer las estrategias, características y/o componentes del sentido numérico usadas por algunos estudiantes en el cuestionario de conocimiento sobre los números y las operaciones aplicado en el mes de febrero.

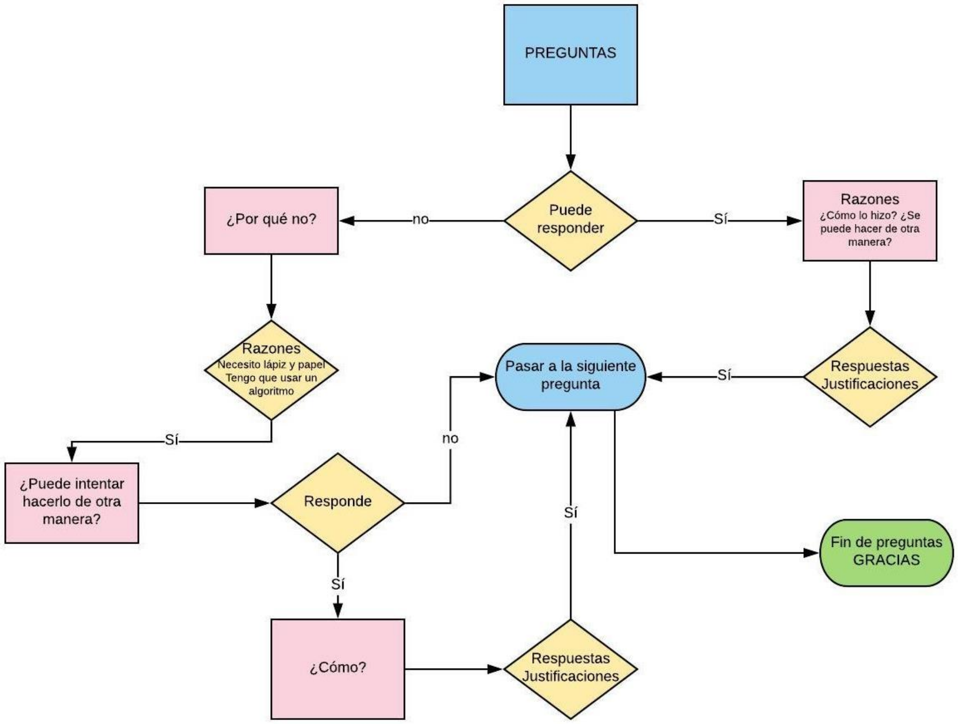
Características de la entrevista.

La información que se recoge de la entrevista es confidencial, el nombre de los estudiantes participantes se protege y se codifica con la letra E seguida de un número natural entre 1 y 38, para ser identificado por los investigadores. La entrevista será grabada (solamente el audio) y tendrá una duración aproximada de 10 minutos.

Instrucciones.

- A continuación se proyectaran de manera individual 8 preguntas de la prueba diagnóstica aplicada en febrero. Le pido que por favor las responda y explique cómo llegó a la respuesta.
- Las preguntas se deben resolver sin ayuda de lápiz y papel.
- Si no puede encontrar una respuesta o resolver alguna situación, por favor explique en qué consiste la dificultad.

El Desarrollo de la entrevista se guía por el siguiente diagrama de flujo.



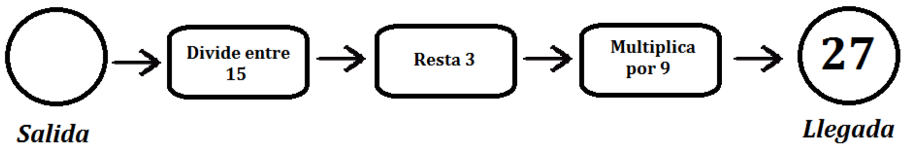
PREGUNTAS PARA LA ENTREVISTA

1. El resultado de la siguiente adición 4720 + 1630 + 250 + 385 está más cercano a: A. 12.500 B. 7.000 C. 5.995 D. 6.000
2. De las siguientes expresiones cuál representa la cantidad más grande. A. 2.452 × 4 B. 2.541 + 2.457 + 2.460 + 2.465 C. 1.987 + 1.991 + 1.999 + 3.000 D. No puedo decirlo sin hacer las operaciones.
3. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? 28 x 50
4. Si se sabe que 930 x 134 es igual a 124.620 ¿Cuál es el resultado de 930 x 135 ?
5. Mónica tenía en su alcancía 380 monedas de $ 500. Si las llevó al supermercado del pueblo para cambiarlas por billetes de $ 2.000 ¿Cuántos billetes le deben entregar?
6. Una buseta puede transportar 15 personas. Si 170 estudiantes necesitan ser transportados de Bruselas a Pitalito, calcula cuántas busetas se requieren.
7. Don Raúl ganó $ 78.000 por coger café en la finca La Esmeralda. Si le pagaron $ 6.500 por cada arroba recolectada.¿Cuántas arrobas recolectó?
8. Un niño de 12 años mide 150 centímetros. ¿Cuánto crees que medirá, cuando tenga 24 años

C. Banco de Preguntas

Algunas de las Tareas abordadas en los momentos (inicio, intermedio o para casa)

- Hallar el número que debe ir en el círculo de salida, de forma que al seguir las instrucciones se obtenga el número de la llegada.



- ¿Cuál es el resultado de las siguientes adiciones? (aplica cálculo mental y propiedades)
  58 + 18 + 22 + 44
  450 + 320 + 135 + 150 + 125 + 180
  210 + 90 + 765 + 55 + 110
- ¿Cuánto es?

125 x 4	64 x 50
125 x 8	92 x 50
28 x 50	75 x 50

- ¿Cuánto cuestan 48 panes de $500?
- Karina compró cinco productos. En la caja registradora ella vió las siguientes cifras: 35.800 – 22.500 – 18.200 – 65.500 – 43.500 ¿Cuánto dinero debe pagar Karina?
- José recogió café los primeros cuatro meses del año. El primer mes recolectó 36 libras, en febrero 207 libras, en marzo 9 libras y en abril 1.035 libras. La cantidad de libras recolectada por José en los cuatro meses laborados es:___________
- José vendió 678 sacos de café. Si en la bodega había 907 sacos ¿Cuántos sacos quedaron finalmente?
- María tiene sembradas cinco hileras de árboles de manzana, y en cada una hay doce árboles. Además tiene seis hileras de pinos, cada una con 16 árboles ¿Cuántos árboles en total tiene María entre manzanos y pinos?
- En un lavadero de autos le pagan a los empleados $30.000 diarios por turno diurno y $35.000 por cada turno nocturno ¿Cuánto dinero ganó José en un mes que trabajó 17 días de día y 4 de noche?
- En un terreno libre se autoriza la construcción de una cancha múltiple de 6 metros de largo y 4 metros de ancho. Si las dimensiones del terreno son de 16 metros por 11 metros ¿Qué área quedará disponible para la zona verde?
- Si el Salario Mínimo Mensual Legal Vigente (SMMLV) en Colombia para el 2018 es de $781.350 ¿A cuánto equivale el Salario Mínimo Diario Legal Vigente? ¿Si Margot trabajó quince días, cuánto dinero recibirá? (**Ayuda:** un mes laboral equivale a 30 días)
- Según la Federación Nacional de Cafeteros de Colombia, el precio que ofrecen para la compra de la carga de café pergamino en la ciudad de Neiva, es de **$710.750** Si se sabe que una carga equivale a 10 arrobas y que una arroba tiene aproximadamente 25 libras ¿Cuál es el valor del kilogramo de café pergamino en la ciudad de Neiva, teniendo en cuenta el precio de compra dado por la Federación Nacional de Cafeteros?

D. Situaciones, tareas grupales y análisis previo de las tareas

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL
JOSE EUSTASIO RIVERA

SITUACIÓN Nº 1

Objetivo: Identificar las estrategias y razonamientos usadas por los estudiantes al enfrentarse a situaciones numéricas susceptibles de ser resueltas mediante componentes del sentido numérico.

EL DÍA DE PLAZA

El pasado domingo, como es costumbre, Alejandro acompañó a sus padres al puesto de Doña Mary para comprar las verduras y frutas de la semana. A medida que el ayudante de Doña Mary empacaba los productos y le dictaba los precios: **2.850; 1.250; 5.300; 3.700 y 6.150** ella iba haciendo la cuenta en una calculadora. Cuando terminó dijo que el valor del mercado era **$21.250** pero Alejandro afirma que la cuenta está mal hecha pues para él sus padres deben pagar menos.

1. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Alejandro? ¿Por qué?

2. Suponiendo que para cada semana los padres de Alejandro pagan en verduras y frutas lo que pagaron el pasado domingo ¿Cuánto dinero gastan en un mes en mercado de plaza?
(Usualmente un mes tiene cuatro semanas)

3. Si los padres de Alejandro mercan todo el año donde Doña Mary y el precio es el mismo cada domingo, el dinero que gastaran en frutas y verduras será: ____________________.
(Un año tiene doce meses, pero el número de semanas que hay en un año es 52)

4. Si la familia de Mireya paga el doble de lo que pagan los padres de Alejandro, pero mercan cada dos semanas ¿Cuál de las dos familias destina más dinero al año a la compra de verduras y frutas? ¿Por qué?

5. ¿Para ustedes cuál sería la forma más ágil de calcular el dinero que invierte al año, en mercado de plaza, una familia que destina para cada semana un valor fijo?

Tabla 26. *Análisis previo de las tareas de la situación 1: El día de plaza.*

						TIPO DE RAZONAMIENTOS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN										
SITUACIONES	TAREAS	OBJETO MATEMÁTICO ASOCIADO	NIVELES DE COMPLEJIDAD			NO SENTIDO NUMÉRICO	SENTIDO NUMÉRICO									
							C1. Conocimiento de los números y facilidad con ellos			C2. Conocimiento y facilidad con las operaciones				C3. Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones		
							Múltiples representaciones de los números. Composición/descomposición de números.			Comprensión del efecto relativo de las operaciones.				Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad.		
			Reproducción	Conexión	Reflexión	I0	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
EL DÍA DE PLAZA. El pasado domingo, como es costumbre, Alejandro acompañó a sus padres al puesto de Doña Mary para comprar las verduras y frutas de la semana. A medida que el ayudante de Doña Mary empacaba los productos y le dictaba los precios: 2.850; 1.250; 5.300; 3.700 y 6.150 ella iba haciendo la cuenta en una calculadora. Cuando terminó dijo que el valor del mercado era $21.250 pero Alejandro afirma que la cuenta está mal hecha pues para él sus padres deben pagar menos.	**1.** ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Alejandro? ¿Por qué?	Operación Adición	X			X	X		X	X			X	X	X	X
	2. Suponiendo que para cada semana los padres de Alejandro pagan en verduras y frutas lo que pagaron el pasado domingo ¿Cuánto dinero gastan en un mes en mercado de plaza?	Adición y/o Multiplicación	X			X	X		X	X	X		X	X		X
	3. Si los padres de Alejandro mercan todo el año donde Doña Mary y el precio es el mismo cada domingo, el dinero que gastaran en frutas y verduras será:________.	Adición y/o Multiplicación		X		X				X	X		X	X		X
	4. Si la familia de Mireya paga el doble de lo que pagan los padres de Alejandro, pero mercan cada dos semanas ¿Cuál de las dos familias destina más dinero al año a la compra de verduras y frutas? ¿Por qué?	Adición y/o Multiplicación		X		X			X	X	X	X		X		X
	5. ¿Para ustedes cuál sería la forma más ágil de calcular el dinero que invierte al año, en mercado de plaza, una familia que destina para cada semana un valor fijo?	Adición y/o Multiplicación			X					X	X					X

Fuente: Los tesistas.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL
JOSE EUSTASIO RIVERA

SITUACIÓN Nº 2

Objetivo: Valorar la capacidad de los estudiantes para interpretar y relacionar datos numéricos presentes en una textos informativos.

Lee atentamente el siguiente texto.

LA COLOMBIA CAFETERA DEL SIGLO XXI

El café es el cultivo nacional por excelencia y se encuentra ubicado a lo largo de toda la geografía de montaña colombiana. El área sembrada es de 948 mil hectáreas, la quinta parte del área agrícola. Las fincas cafeteras ocupan el 66% del área cultivada en el país (5 millones de hectáreas aproximadamente) y es el producto con la mayor participación entre los diferentes cultivos registrados, lo que pone de presente la importancia del café en el sector agrícola colombiano.

El café cumple un papel prioritario en la generación de empleo rural, toda vez que se ocupan en la actividad 785 mil personas de manera directa, siendo la cuarta parte de la totalidad de empleos en el sector agrícola. Si lo comparamos con otras actividades agropecuarias similares, es 4 veces el empleo generado por cultivos como arroz, maíz y papa, y es 10 veces lo que genera el cultivo de la palma africana y el caucho juntos. Comparándolo con otros sectores, la caficultura genera cuatro veces el empleo del sector minero energético y más de la mitad de los generados en la construcción (1,4 millones). Esto significa que la caficultura es un verdadero motor de desarrollo en la economía rural.

Fuente: Federación Nacional de Cafeteros de Colombia (FNCC).

Tomado y adaptado de Ensayos sobre economía cafetera. Nº 30.

Teniendo en cuenta la información anterior, responde las siguientes cuestiones:

1. Del primer párrafo se puede interpretar que el área agrícola del territorio Colombiano equivale a cinco veces el área sembrada en café (948 mil hectáreas). Entonces el área agrícola de Colombia es de: ______________________

2. De las cifras presentes en el segundo párrafo, donde se compara el empleo generado por el café y por otros cultivos y sectores deducir:
   a) ¿Cuántas personas se ocupan al cultivo de arroz, maíz y papa?
   b) ¿Cuántas personas trabajan en el cultivo de la palma africana y el caucho?
   c) ¿Cuántas personas se dedican a actividades mineras?

3. Según los datos del texto, crees que es correcto afirmar que el sector agrícola genera más empleo que el minero y el de construcción juntos? ¿Por qué? ¿Cuántos de más o cuántos de menos?

Tabla 27. *Análisis previo de las tareas de la Situación 2: La Colombia cafetera del Siglo XXI.*

SITUACIONES	TAREAS	OBJETO MATEMÁTICO ASOCIADO	NIVELES DE COMPLEJIDAD			TIPO DE RAZONAMIENTOS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN											
						NO SENTIDO NUMÉRICO	SENTIDO NUMÉRICO										
							C1. Conocimiento de los números y facilidad con ellos			C2. Conocimiento y facilidad con las operaciones				C3. Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones			
							Múltiples representaciones de los números. Composición/ descomposición de números.			Comprensión del efecto relativo de las operaciones.				Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad.			
			Reproducción	Conexión	Reflexión	I0	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	I10
LA COLOMBIA CAFETERA DEL SIGLO XXI. El café es el cultivo nacional por excelencia y se encuentra ubicado a lo largo de toda la geografía de montaña colombiana. El área sembrada es de 948 mil hectáreas, la quinta parte del área agrícola. Las fincas cafeteras ocupan el 66% del área cultivada en el país (5 millones de hectáreas aproximadamente) y es el producto con la mayor participación entre los diferentes cultivos registrados, lo que pone de presente la importancia del café en el sector agrícola colombiano. El café cumple un papel prioritario en la generación de empleo rural, toda vez que se ocupan en la actividad 785 mil personas de manera directa, siendo la cuarta parte de la totalidad de empleos en el sector agrícola. Si lo comparamos con otras actividades agropecuarias similares, es 4 veces el empleo generado por cultivos como arroz, maíz y papa, y es 10 veces lo que genera el cultivo de la palma africana y el caucho juntos. Comparándolo con otros sectores, la caficultura genera cuatro veces el empleo del sector minero energético y más de la mitad de los generados en la construcción (1,4 millones). Esto significa que la caficultura es un verdadero motor de desarrollo en la economía rural.	**1.** Del primer párrafo se puede interpretar que el área agrícola del territorio Colombiano equivale a cinco veces el área sembrada en café (948 mil hectáreas). Entonces el área agrícola de Colombia es de: __	Adición y/o Multiplicación	X			X			X	X	X	X	X	X	X	X
	2. De las cifras presentes en el segundo párrafo, donde se compara el empleo generado por el café y por otros cultivos y sectores deducir: **a)** ¿Cuántas personas se ocupan al cultivo de arroz, maíz y papa? **b)** ¿Cuántas personas trabajan en el cultivo de la palma africana y el caucho? **c)** ¿Cuántas personas se dedican a actividades mineras?	División		X		X				X	X			X	X	X
	3. Según los datos del texto, crees que es correcto afirmar que el sector agrícola genera más empleo que el minero y el de construcción juntos? ¿Por qué? ¿Cuántos de más o cuántos de menos?	Adición y/o Sustracción			X	X	X	X	X	X	X			X	X	X

Fuente: Los tesistas.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL
JOSE EUSTASIO RIVERA

SITUACIÓN Nº 3

Objetivo: Identificar el uso del sentido numérico (de los estudiantes) en la resolución de situaciones numéricas reales del contexto agrícola y toma de decisiones.

EL CULTIVO DE LULO

El lulo es un arbusto originario de los Andes del Ecuador y Colombia. Produce frutos de pulpa verde, que por su color, sabor y valor nutritivo son muy apetecidos en los mercados nacionales y extranjeros. Su nombre científico es Solanum quitoense Lam., perteneciente a la familia de las solanáceas. En Colombia el lulo se cultiva en 21 departamentos, siendo los mayores productores Huila, Valle del Cauca, Tolima, Boyacá y Nariño. En el Huila, Pitalito es uno de los municipios con más hectáreas cultivadas.

El lulo es una de las especies más susceptibles al ataque de plagas y enfermedades, por tanto es necesario aplicar insecticidas y fungicidas para proteger el cultivo de insectos, hongos, mohos y demás.

Adaptado de *Manejo fitosanitario del cultivo del lulo (Solanum quitoense Lam)*

A CUIDAR EL LULO.

Don José tiene 2 hectáreas de tierra cultivadas con lulo y en éste mes necesita aplicar un insecticida y un fungicida a su cultivo. Él sabe que por **cada hectárea necesita 5 litros de insecticida y 5 kilos de fungicida.**

INSECTICIDA	
Exalt	**Cebofrut**
1 Litro	**1 Galón (4 Litros)**
	
$ 20.500	**$ 82.500**

FUNGICIDA	
Antrasin P.C.	**Novicure**
Frasco de 1 kilo	**Bolsa de 4 kilos**
	
$ 27.500	**$ 85.000**

Además debe contratar la **mano de obra** para realizar la fumigación del cultivo, para ello tiene dos opciones:

OPCIÓN 1	OPCIÓN 2
Contrato. Fumigación completa del cultivo.	**Por jornal.** Pagar a 12 personas para hacer la fumigación en un día.
Precio. $ 250.000 por hectárea.	**Valor del jornal/día.** $ 25.000 por cada persona
No requiere alquilar fumigadora.	**Precio del alquiler de una fumigadora.** $ 15.000

Don José dispone de **un millón de pesos** para la compra del insecticida y el fungicida necesario para su cultivo. De ese presupuesto también debe contratar la mano de obra para la fumigación del lulo.

TAREA

Tu tarea consiste en elegir los artículos que debe comprar Don José y la opción de mano de obra que debe contratar para realizar la fumigación, sin exceder el presupuesto disponible y tratando de ahorrar el mayor dinero posible. (Elabora una lista o factura)

Tabla 28. *Análisis previo de la tarea de la Situación 3: El cultivo de lulo.*

						TIPO DE RAZONAMIENTOS Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN										
SITUACIONES	**TAREAS**	**OBJETO MATEMÁTICO ASOCIADO**	**NIVELES DE COMPLEJIDAD**			**NO SENTIDO NUMÉRICO**	**SENTIDO NUMÉRICO**									
							C1. Conocimiento de los números y facilidad con ellos			**C2. Conocimiento y facilidad con las operaciones**				**C3. Aplicación del conocimiento de los números y las operaciones**		
							Múltiples representaciones de los números. Composición/ descomposición de números.			Comprensión del efecto relativo de las operaciones.				Uso y desarrollo de estrategias apropiadas y valoración de la razonabilidad.		
			Reproducción	Conexión	Reflexión	**I0**	**I1**	**I2**	**I3**	**I4**	**I5**	**I6**	**I7**	**I8**	**I9**	**I10**
EL CULTIVO DE LULO A cuidar el lulo. Don José tiene 2 hectáreas de tierra cultivadas con lulo y en éste mes necesita aplicar un insecticida y un fungicida a su cultivo. Él sabe que por cada hectárea necesita 5 litros de insecticida y 5 kilos de fungicida. Además debe contratar la mano de obra para realizar la fumigación del cultivo, para ello tiene dos opciones. Don José dispone de un millón de pesos para la compra del insecticida y el fungicida necesario para su cultivo. De ese presupuesto también debe contratar la mano de obra para la fumigación del lulo.	Tu tarea consiste en elegir los artículos que debe comprar Don José y la opción de mano de obra que debe contratar para realizar la fumigación, sin exceder el presupuesto disponible y tratando de ahorrar el mayor dinero posible. (Elabora una lista o factura)	Adición, Sustracción, Multiplicación.			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Fuente: Los tesistas.