RECME Editorial Smart Smath Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA Revista Colombiana de Matemática Educativa

Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula

Pedro Javier Rojas Garzón & Rodolfo Vergel Causado
rodolfovergel@gmail.com; pjrojasgarzon@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia, CO

Resumen:

En este escrito presentamos una síntesis de resultados de investigación relacionada con el pensamiento algebraico, vinculada con procesos de generalización y simbolización. Describimos algunas dificultades que encuentran los jóvenes para abordar actividades asociadas a dichos procesos, y planteamos tareas para orientar el trabajo en el aula con niños y jóvenes, las cuales potencian el desarrollo el pensamiento algebraico y, en particular, los procesos de generalización. Adicionalmente exponemos algunas consideraciones que pueden alimentar reflexiones sobre una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos de generalización (por ejemplo, desde el trabajo con patrones).

Palabras clave:

Pensamiento algebraico, álgebra temprana, símbolos literales, generalización, simbolización.

Abstract:

In this paper we present a synthesis of research results related to algebraic thinking, linked to processes of generalization and symbolization. We describe some difficulties encountered by young people to deal with activities associated with these processes, and we propose tasks to guide work in the classroom with children and young people, which enhance the development of algebraic thinking and, in particular, the processes of generalization. Additionally we expose some considerations that can feed reflections on a dialectic between forms of algebraic thinking and processes of generalization (for example, from working with patterns).

Keywords:

Algebraic thinking, early algebra, literal symbols, generalization, symbolization.

Resumo:

Neste escrito apresentamos uma síntese dos resultados de investigação relacionada com o pensamento algébrico, vinculada com processos de generalização e simbolização. Descrevemos algumas dificuldades que os jovens encontram para abordar atividades associadas a estes processos e propomos tarefas para orientar o trabalho em aula com crianças e jovens, as quais potencializam o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, dos processos de generalização. Adicionalmente expomos algumas considerações que podem alimentar reflexões sobre uma dialética entre formas de pensamento algébrico e processos de generalização (por exemplo, a partir do trabalho com padrões).

Palavras-chave:

Pensamento algébrico, álgebra dos anos iniciais, símbolos literais, generalização, simbolização.

1 Introducción

Son variadas las investigaciones que ponen en evidencia las dificultades que encuentran los niños y jóvenes en el proceso de transición aritmética–álgebra (Wagner & Kieran, 1989; Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora, 1999; Kieran, 2007; Rojas, 2015; Radford, 2010a, 2010b, 2011, 2012; Vergel 2013, 2015a, 2015b). Estas investigaciones se han preocupado, entre otras cuestiones, por aportar aproximaciones a caracterizaciones del razonamiento algebraico y por poner en evidencia algunos datos experimentales y justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra desde la escuela primaria (6/7-10/11 años).

En el contexto escolar, el álgebra –asumida en forma restrictiva como lenguaje simbólico–, aparece de manera abrupta en la educación secundaria (11/12-16/17 años), orientada básicamente al estudio de los polinomios y a la resolución de ecuaciones. En la mayoría de los casos, el álgebra así entendida, se presenta sin continuidad con los tópicos de aritmética, de medida y de geometría abordados en la educación primaria. A esta aproximación podría atribuirse las dificultades que encuentran los jóvenes en el trabajo algebraico, así como también a “las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria” (Carraher & Schliemann, 2007, p. 675).

En Rojas y Vergel (2013) destacamos algunas de las dificultades antes referidas y resaltamos, por ejemplo, lo usual que resulta escuchar a estudiantes (y profesores) hablar sobre dificultades para aprender (y enseñar) álgebra, particularmente en grados 8° o 9° (13/14, 14/15 años). Estas dificultades están asociadas al uso de símbolos literales o “letras” y al significado que se le asigna a dichas “letras” en contextos matemáticos. De hecho muchos estudiantes, que durante los siete u ocho años anteriores habían tenido un buen desempeño en matemáticas, manifiestan después su extrañeza por tener que trabajar con “letras” en matemáticas, y se escuchan expresiones como: “¿…y por qué tengo que trabajar con letras?”, o, “¿sí ve?, ¿de qué sirvió todo lo anterior? … ¡para que ahora no entienda nada!”, o, incluso, “aparecieron las malditas letras”.

En relación con el uso de “letras” en contextos matemáticos, consideramos importante resaltar que la denominación usual de “letra”, utilizada en nuestras aulas, podría ser fuente de dificultades, en tanto posibilitaría, por parte de los estudiantes, interpretaciones no deseables sobre el sentido que se le asigna a estos símbolos literales en dichos contextos. Por ejemplo, asignar un valor numérico a la “letra”, de acuerdo con el orden lexicográfico, se constituye en una manera de dar algún sentido numérico a ésta, que en principio se reconoce como objeto de un alfabeto, no como representante de un número no fijo, de un número desconocido (objeto del álgebra).

Mientras en el contexto de la lengua natural las letras son “signos gráficos”, objetos que constituyen el alfabeto, en contextos matemáticos son usadas como representantes de objetos –de otra naturaleza–, sin que exista una relación directa entre esta forma de representación y los objetos matemáticos representados (números, puntos en el plano, funciones, entre otros), es decir, son símbolos, en el sentido que el signo utilizado es “arbitrario”, pues podríamos haber usado otro, un cuadrado o una letra de otro alfabeto (por ejemplo, el griego).

Ahora bien, aun cuando desde el punto de vista de las matemáticas se impone un rigor en la manera de tratar con los objetos matemáticos a través de un lenguaje especializado (que a su vez impone unas maneras de hablar), lo cual pone en evidencia una relación epistemológica, en la cotidianidad escolar, y dependiendo del área de la matemática, la manera de referirnos a las “letras” cambia, pues los profesores e incuso los investigadores hacen un uso diferente de la manera de nombrar los objetos. Por ejemplo, en geometría decimos: “tomemos el punto A”, y con esta expresión se hace referencia a tomar un objeto de la geometría, el punto, representado por el símbolo literal A; en álgebra, sin embargo, decimos: “tomemos a” y sumémosle 2, esto es, $a+2$, sin explicitar que lo que tomamos es un número desconocido, y que a es el símbolo mediante el cual representamos dicho objeto del álgebra. Queremos enfatizar que, en tanto representación arbitraria, dicho símbolo *no es* el objeto en sí mismo sino una representación de éste. Quizás, en el trabajo del álgebra escolar, y desde un punto de vista didáctico, en el ejemplo anterior sería más adecuado decir tomemos el *número* representado por a, o de manera abreviada, “tomemos el *número* a” y sumémosle 2, esto es, $a+2$, donde se explicita que el objeto de referencia no es la “letra” sino el “número” representado por a .

En relación con la aritmética y el álgebra consideramos importante explicitar nuestro reconocimiento de la existencia de un "continuo" entre estos dos campos. Las relaciones aritméticas, de por sí, cuentan con un carácter algebraico (Rojas et al., 1999); desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad (que además posibilita una relación con la geometría), desde el reconocimiento y uso de "unidades múltiples", que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula. En este sentido, la aritmética y el álgebra no son "completamente distintos" (Carraher & Schliemann, 2007, p. 669) y las posibles "rupturas" entre estos campos obedecen más a hechos sociales y culturales.

Al respecto, existen propuestas desde las cuales se plantea considerar "la multiplicación como cambio de unidad" como un objeto de la transición aritmética-álgebra (Mora & Romero, 2004; Mescud, 2006; Rojas, Romero, Mora, Bonilla, Rodríguez y Castillo, 2011), reconociendo que tal reconceptualización de la multiplicación permite entender que:

> cuando se multiplica, lo que esencialmente se hace es expresar una cantidad o magnitud –no necesariamente entera– de cierta cantidad o magnitud unidad, en términos de otra unidad, y que, para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitización o de normación. (Rojas et al., 2011, p. 58)

En términos de Rojas et al. (2011), la *unitización* es el proceso y el efecto de construir, a partir de unidades dadas, nuevas unidades de referencia permitiendo ver simultáneamente ambos tipos de unidad; y, la *normación* se entiende como el proceso y el efecto de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad establecida, o con un sistema de relaciones entre unidades de referencia.

Desde estas asunciones es posible proponer un camino de relaciones entre aritmética y álgebra, que posibilita el logro de mejores aprendizajes, utilizando ideas culturalmente sedimentadas involucradas en los procesos de unitización y normación.

Kieran (1989, 1992, 2007) destaca que las dificultades con que se encuentran los estudiantes en el "tránsito de la aritmética al álgebra" tienen que ver con el uso que se hace de las "letras" y con un cambio notable en las convenciones usadas inicialmente en aritmética. Más específicamente, esta autora destaca tres cambios significativos cuando se trabaja el álgebra: la concatenación de símbolos, el uso de paréntesis y los usos del signo igual; reconociendo además otras dificultades, relacionadas con diversas interpretaciones de las "letras", así como el reconocimiento y uso de las estructuras, que esta autora llama superficial y sistémica. Planteamos algunos ejemplos que hemos explicitado en Rojas y Vergel (2013):

Concatenación de símbolos. En el contexto aritmético, concatenar dos símbolos, esto es, poner uno a continuación de otro, es asociado a una suma: $25 = 20 + 5 \; o \; 25 = 2 \; decenas + 5 \; unidaddes$; $3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$, mientras en el contexto del álgebra escolar, concatenar dos símbolos usualmente es asociado a una multiplicación: $2a = 2 \times a$. Por lo anterior, no resultaría extraño que, en principio, y desde un marco aritmético de referencia, la expresión $2a$ sea considerada por los estudiantes igual a $2 + a$, o, incluso, igual a $20 + a$.

Uso de paréntesis. ¿A qué es igual $2 + 3 \times 4$? Es usual que los estudiantes propongan, al menos, dos respuestas diferentes: 20 y 14, obtenidas mediante los siguientes procedimientos, respectivamente: $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$ y $2 + (3 \times 4) = 14$. ¿Qué haría que una de ellas fuese considerada equivocada? ¿Por qué? De hecho, si no se hace uso de paréntesis o previamente no se explicita una jerarquía entre estas dos operaciones binarias, tales procedimientos podrían considerarse igualmente válidos y, entonces, sería pertinente decidir si $2 + 3 \times 4$ debería considerarse como una expresión aritmética válida.

Usos del signo igual. Frente a preguntas como ¿$8 = 8$? o ¿$3 + 4 = 5 + 2$?, algunos estudiantes responden que dichas igualdades son "falsas", y afirman que, en el primer caso, "sería verdadera si se escribiera $8 + 0 = 8$ o $8 \times 1 = 8$" y, en el segundo, "$3 + 4$ es 7 y no 5, y falta completarlo: $3 + 4 = 7 + 2 = 9$". ¿Qué explica tales respuestas? En el primer caso, para algunos estudiantes de quinto grado (10/11 años) el uso que hicieron de la palabra "falso" no fue como lo opuesto a verdad, sino más como "no usado", en tanto interpretan el signo igual como "orden de operar" o como "separación" entre un proceso y otro, no como relación de equivalencia, lo cual puede evidenciarse en el segundo caso, en el que además se observa que agregan otro signo igual (después de la operación $7 + 2$ que han construido) y realizan el proceso que consideran hace falta para dar la respuesta.

Algunos estudios en el contexto colombiano, en relación con dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado asignado por estudiantes alumnos de grado 8° y 11° al uso de las "letras" en álgebra (Rojas et al., 1999; Agudelo, 2000; Agudelo y Vergel, 2009), sugieren la necesidad de profundizar en el estudio del currículo del área de matemáticas; necesidad que también se manifiesta en los resultados de estudios internacionales, como el TIMMS,[1] que dan cuenta del escaso desarrollo del pensamiento matemático construido a través del aprendizaje del álgebra.

Un trabajo reciente (Rojas, 2015) presenta evidencias sobre elementos que permiten explicar posibles causas de la no articulación de *sentidos* asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático. Precisamos, de acuerdo con Wertsch (1988), que sentido y significado expresan potenciales semióticos diferenciados, pues mientras que el significado de las palabras puede habilitar modalidades de uso descontextualizado de instrumentos de mediación, el sentido porta la potencialidad de hacer uso contextualizados de los mismos. Las posibles causas de no articulación de sentidos aludidas están relacionadas con tres hechos fundamentales:

1. los estudiantes «manejan» las propiedades básicas de los sistemas numéricos, a partir de las cuales realizan las transformaciones de tratamiento requeridas para establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, pero no por ello articulan los diversos sentidos asignados a las expresiones dadas;
2. existe una tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta, y
3. se evidencia una «mirada» básicamente icónica de las expresiones algebraicas.

Ahora bien, las dificultades que reportamos podrían estar más relacionadas con la escasa tematización que se hace desde el contexto escolar en relación con la generalización, y con lo no determinado o lo desconocido; en este sentido, podríamos pensar que se trata más de dificultades de tipo curricular o didáctico, que de dificultades de tipo cognitivo. De hecho, los niños, desde temprana edad, reconocen y trabajan lo general (Carraher & Schliemann, 2007) e, incluso, pueden tematizar lo desconocido.

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo esto, necesariamente, demanda el desarrollo de una perspectiva amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar, que requiere "un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico" (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012, p. 487), que considere, por ejemplo, una relación dialéctica entre las formas de pensamiento algebraico y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones (Vergel, 2015a).

2 Álgebra escolar y currículo.

En un trabajo anterior (Rojas y Vergel, 2013) resaltamos algunos de los elementos planteados en los estándares curriculares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Norteamérica (NCTM) y los planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia. Particularmente, subrayamos la posición que asumen respecto a la pregunta sobre la posibilidad o la necesidad de trabajar álgebra en niveles tempranos, así como opciones explícitas para hacerlo.

Si bien desde el NCTM (2000) no se plantea explícitamente un trabajo en los primeros grados de primaria en relación con la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, sí reconocen la importancia de trabajar desde estos cursos tareas y actividades orientadas a la búsqueda y generalización de patrones, así como realizar experiencias significativas con números y sus propiedades, como fundamento para un trabajo posterior, comprensivo, con símbolos y expresiones algebraicas (Rojas y Vergel, 2013). Plantean además que se

[1] En el estudio TIMSS, conocido inicialmente como '*Third International Study in Mathematics and Science*' (1995), contó con la partición de 41 países, incluido Colombia (estudiantes de los Grados 7°, 8° y 11°). Este estudio se ha realizado en años posteriores (1999, 2003, 2007, 2011), pero ahora conocido como *"Trends in International Mathematics and Sciencie Study"*, cuenta ahora con la participación de 70 países.

requiere prestar menos atención a manipular símbolos, memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones, así como también el no enfatizar la resolución de problemas rutinarios de un solo paso, o problemas prototipo cuyo razonamiento no dependa claramente del estudiante.

En el contexto canadiense, para plantear otro caso, el currículo ha sido algebrizado, y el álgebra aparece desde el primer año de escuela primaria; sin embargo, tal *algebrización* no ha sido en el sentido propuesto por Kaput (2000) de integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Siguiendo ideas de Radford (2012), en el programa de estudios de matemáticas de Ontario (Canadá) la diferencia entre la aritmética y el álgebra no es clara, no se sabe si ciertos contenidos prescritos están todavía dentro de lo que debería considerarse aritmética o ya están dentro de lo que sería álgebra.

Se plantea así la necesidad de prestar más atención a identificar y usar relaciones funcionales, desarrollar y usar tablas, gráficas y reglas para describir situaciones, realizar interpretaciones entre diferentes representaciones (verbales, gráficas, numéricas, tabulares, figurales, simbólicas), además de proponer problemas abiertos y tareas ampliadas, en diferentes contextos, que incorporen el uso de métodos informales en la resolución de problemas e investigar y formular preguntas a partir de situaciones problema.

En el caso del NCTM (2000) se plantearon expectativas específicas, por grupos de grados, desde preescolar hasta el Grado 12. Por ejemplo:

- PreKinder-Grado 2: Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar una comprensión de notaciones "simbólicas", inventadas y convencionales.
- Grados 3-5: Describir, extender y hacer generalizaciones acerca de patrones geométricos y numéricos; Representar y analizar patrones y funciones usando palabras, tablas y gráficas.
- Grados 6-8: Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas.
- Grados 9-12: Generalizar patrones usando explícitamente funciones definidas y definidas recursivamente.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, desde los documentos curriculares de matemáticas (MEN, 1998, 2006), propone nuevos elementos teóricos y metodológicos con el propósito de actualizar la estructura curricular de la educación matemática en nuestro país.[2] En particular, en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) se identifican dos elementos importantes:

- la introducción de los diferentes tipos de Pensamiento Matemático: Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Aleatorio, y
- un llamado de atención con respecto a la importancia de implementar al interior del aula procesos como la modelación, comunicación, la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos.

En las recomendaciones del documento de Lineamientos se propone una restructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar, enfatizada desde el pensamiento variacional, que ponga el acento en los procesos de generalización, la comunicación, la argumentación y la modelación de situaciones de cambio, como ejes fundamentales en la construcción del pensamiento algebraico (Rojas y

[2] No obstante, el MEN divulgó una propuesta que denominó "Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)" para el área de matemáticas, la cual generó, en su momento, diversas reacciones de la comunidad académica, no sólo por el uso inadecuado de la palabra "derecho" para hacer referencia a enunciados sobre temas de trabajo, sino también por plantear algunos ejemplos de tareas que ponen de manifiesto errores matemáticos en los enunciados e, incluso, desconoce resultados de investigación en el campo de la Educación Matemática, por lo que podría constituirse en un retroceso con respecto a los avances logrados en las últimas dos décadas. En particular, la propuesta DBA reduce a una lista de ejercicios de carácter mecánico y rutinario aspectos como los referidos a los pensamientos y sus desarrollos, los procesos de comunicación y la resolución de problemas. Es más, este último aspecto se desvirtúa, en tanto no parece ser considerado como el foco continuo que moviliza tanto la actividad matemática de los estudiantes como sus procesos de aprendizaje, pues en la propuesta se evidencia un énfasis en el uso de fórmulas, reglas y hasta leyes sobre el uso de algoritmos, propiedades y teoremas. Sin embargo, el MEN está trabajando en una nueva versión de esta propuesta que recoge las observaciones y críticas de miembros de la comunidad nacional de Educación Matemática.

Vergel, 2013). Además de motivar el estudio de la variación y el cambio, de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, como elementos asociados al pensamiento algebraico, se plantean sugerencias explícitas sobre actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria:

> Analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, p. 67)

Este breve contexto curricular que hemos planteado tendría, a nuestro juicio, que discutir también la relación entre álgebra escolar y currículo, la cual podría visibilizarse a través de las maneras como materializamos en el trabajo de aula alguna idea de álgebra o actividad algebraica (e incluso alguna idea de pensamiento algebraico, tal y como lo discutiremos en el apartado 4. *Sobre el pensamiento algebraico*) o combinaciones de ideas de álgebra. Nos parece pertinente señalar, al menos desde el punto de vista teórico, algunas caracterizaciones de álgebra que podrían estar operando cuando abordamos el trabajo de aula en matemáticas:

- El álgebra es un método para operar sobre formas generales, mientras que la aritmética es un método para operar sobre números concretos (Viète, 1591).
- El simbolismo alfanumérico no es una condición para pensar algebraicamente (Mason, Graham, Pimm & Gowar, 1985).
- El punto de vista del álgebra como una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación (Kieran, 2007).
- El álgebra es inherente a la aritmética [...] la aritmética tiene ya un carácter algebraico" (Carraher & Schliemann, 2007, p. 17).
- La actividad simbólica es algebraica. Aquellas actividades en las cuales la generalización es expresada a través de otros sistemas simbólicos no son consideradas genuinamente algebraicas (son llamadas cuasi-algebraicas) (Kaput, Blanton & Moreno, 2008).
- El álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma (Subramaniam & Banerjee, 2011, p. 87).

3 Álgebra Temprana

El Álgebra Temprana (ó Early Algebra) se posiciona cada vez más como una propuesta de cambio curricular que enfatiza la idea de Kaput (2000) sobre la *algebrización* del currículo de matemáticas. Esto es, como ya lo hemos señalado, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Esto significa que los estudios e investigaciones han abordado el problema de la incorporación del Álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas.

En términos generales, la propuesta del Álgebra Temprana considera el álgebra desde una concepción amplia, que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; citados en Socas, 2011).

Cabe señalar que en el contexto internacional se reconoce otra perspectiva, la *Pre-Álgebra*, desde la cual se plantea la necesidad de abordar un trabajo previo al estudio del álgebra formal; una transición desde la Aritmética al Álgebra, que toma como referencia las dificultades y los errores de los alumnos en Álgebra, las cuales dan cuenta de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la Educación Primaria. En este sentido, esta perspectiva curricular se diferencia de la propuesta del Álgebra Temprana o Early Algebra.

Algunos aportes que han robustecido esta perspectiva de cambio curricular de Álgebra Temprana están relacionados con lo que en el contexto internacional ha dado por llamarse *pensamiento relacional* (Molina, 2009). Tal y como lo plantea esta autora:

> Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas —algebraicas—, consiste en la actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas —algebraicas—, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (Molina, 2009, p. 141).

Como puede observarse, este tipo de pensamiento refiere a modos flexibles de abordar una situación o problema matemático y focaliza su interés en las relaciones y elementos claves que definen dicha situación para construir una estrategia de resolución (Molina, 2009). En otras palabras, las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional representan un cambio fundamental de un foco aritmético —procedimental, centrado en el cálculo de respuestas— a un foco algebraico —estructural, centrado en examinar relaciones— (Molina, 2009, p. 143). Nos parece importante señalar que los estudiantes puedan reflexionar sobre propiedades de las operaciones, la manipulación *fundamentada* de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación llega a afectar a las expresiones, aspectos que son centrales y característicos en este tipo de pensamiento.

La perspectiva de Álgebra Temprana convoca a los docentes de todos los niveles a posibilitar en el trabajo de aula de matemáticas la observación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también, por supuesto, que practiquen y ejerciten habilidades de cálculo (Blanton & Kaput, 2005).

4 Sobre el pensamiento algebraico

Entendemos *pensamiento* como un proceso de actividad humana, lo cual sugiere un proceso en constante movimiento y cambio. En tal sentido, aceptamos que el movimiento es una categoría ontológica fundamental. Según Davydov (1981, p. 279), el pensamiento de un hombre "es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél". En estos términos, el pensamiento se considera un movimiento de la civilización humana y de la sociedad. Esto sugiere, según Vergel (2014), que las maneras como nuestros estudiantes llegan a conocer, y lo que conocen, llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento.

Desde hace varias décadas, Kieran (1989) había sugerido profundizar en la investigación sobre la naturaleza del pensamiento algebraico, y a partir de este llamado, surgió una doble preocupación en la comunidad nacional e internacional. Por un lado, la preocupación se manifiesta en términos de la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los alumnos de primaria elaboran generalizaciones, y por otro, el llamado a promover desde los primeros grados de la educación primaria el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otra parte, a partir de los trabajos de Viète (1591/1983) y Descartes (1637/1954), podemos afirmar que en el pensamiento algebraico no hay diferenciación entre números conocidos y desconocidos. Esta es la razón por la cual Viète y otros matemáticos en el siglo XVI (Radford, 2010b) se referían al álgebra como un arte analítico. Se infiere, entonces, que la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede darse en términos de notaciones, como a menudo se piensa. Coincidimos con Radford en afirmar que el simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente, en tal sentido, "el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno" (Radford, 2012, p. 677). Este autor argumenta, por ejemplo, que los matemáticos chinos antiguos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones. Así mismo, relata que escribas babilonios utilizaron diagramas geométricos para pensar algebraicamente.

En otras palabras, para pensar algebraicamente no es una condición necesaria, ni suficiente, el uso de "letras". Como lo sostiene Radford (2012, p. 677), "nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo". El surgimiento del simbolismo algebraico fue una manera de reflexionar acerca del mundo, una manera que fue pensable en el contexto de un mundo en el que máquinas y nuevas formas sociales de distribución del trabajo transformaron radicalmente la experiencia humana. Según Serfati (1999), la gran ventaja del simbolismo de Bombelli y Viète reside en que éste hace posible "un fuerte automatismo en los cálculos", de ahí que el concepto de eficiencia en los cálculos algebraicos tiene razón de ser como un concepto cultural. Es decir, se manipulan los símbolos como manipular productos manufacturados, en tanto no es necesario saber cuáles son los objetos o qué representan, lo que interesa, en este caso, es operar con ellos, manipularlos.

Consideramos que la objeción según la cual las notaciones son una manifestación del pensamiento algebraico, abre posibilidades o nuevas vías para la investigación de las formas de pensamiento algebraico temprano, como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Más aún, reconocemos el pensamiento algebraico como un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que fue refinado sucesivamente a lo largo de siglos antes que alcanzara su forma actual. En este sentido, y siguiendo ideas de Radford (2010a, 2013a), entendemos el pensamiento algebraico como un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente; de hecho, su idea de *Saber como movimiento*, pura posibilidad, está constituida de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Compartimos con este autor que el Saber algebraico es una síntesis evolutiva (sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa) y culturalmente codificada (como patrones de acción) de hacer y reflexionar en términos analíticos (i.e., la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido que comporta procesos de deducción) sobre números indeterminados y conocidos.

Para Radford (2010b), una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas: (a) *el sentido de indeterminancia* (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos de manera analítica (i.e., un proceso de deducción en tanto que se parte de premisas y se llega a ciertas conclusiones); y (c) la *designación simbólica o expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Para este autor (Radford, 2010b, 2011) la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o regla que permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño, es decir, el sentido de la indeterminancia refiere a una sensación de indeterminación que es propio de los objetos algebraicos básicos como incógnitas, variables y parámetros.

Desde lo propuesto por Radford (2010a), reconocemos tres formas de pensamiento algebraico o *estratos* caracterizados por los *medios semióticos de objetivación* movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural. Estos medios semióticos no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de nuestros actos intencionales y portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de generaciones precedentes (Vergel, 2015a).

La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres componentes analíticos que lo caracterizan. Además queremos destacar el papel preponderante de las *tareas*, en tanto vendrían a funcionar como elementos claves de la *actividad* en la aparición de formas más complejas de pensamiento algebraico. Describimos a continuación la tipología propuesta por Radford (2010a):

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala dos figuras en una secuencia y dice "más dos".

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total". Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n-1$. En este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra (Radford, 2010a, p. 8).

5 Tareas y actividades para orientar el trabajo en el aula

En esta sección presentamos tareas que pueden orientar actividades en el aula de clase en la dirección sugerida en el presente escrito. En algunas de ellas plantearemos sugerencias para orientar la actividad en el aula, en otras solo enunciaremos la tarea. Consideramos que las tareas y las actividades que puedan suscitarse a partir de ellas imponen dos retos. Por una parte, contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico, y, de otra parte, constituirse en unidades de análisis para interpretar la actividad matemática de los estudiantes. En relación con esto último, vale la pena señalar que, en particular, los procesos de generalización en secuencias de patrones son objeto de estudio en la didáctica del álgebra y sería deseable estar sensible a las producciones de los estudiantes con el fin no solo de valorarlas y analizarlas sino también de potenciarlas. Mason, Graham, Pimm & Gowar (2014) sostienen que:

> Antes de iniciar su etapa escolar, los niños han desplegado el poder necesario para pensar algebraicamente y darle sentido matemático al mundo en que viven; se espera, entonces, que la escuela promueva y facilite la continuación del desarrollo de estas potencialidades de los niños, pues la capacidad para identificar y expresar regularidades y relaciones matemáticas involucradas en éstas (i.e., patrones) reside en el corazón del pensamiento matemático. (p. ix)

En este sentido, los elementos teóricos expuestos en este trabajo fungen como herramientas analíticas que nos permiten no solo orientar las tareas propuestas sino también interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes en las actividades desarrolladas.

5.1 *Dobleces de papel y proceso de generalización*

Tomemos una tira de papel, y realicemos la acción de unir los respectivos extremos (doblar por la mitad), realizando el doblez respectivo (una marca sobre la tira de papel); reiterando esta acción, siempre en el mismo sentido; por ejemplo, al realizar dos veces la acción de doblar por la mitad se obtienen 3 dobleces y a la tercera 5 dobleces. ¿Cuántos dobleces se obtienen al realizar 5 veces la misma acción? ¿7 veces? ¿15 veces? ¿100 veces?

El trabajo a partir de material concreto motiva a los estudiantes a abordar el trabajo, pues manipular la tira de papel les posibilita responder adecuadamente a la primera pregunta e incluso cuando se realiza 6 veces la misma acción, pero poco a poco la dificultad para manipular lo concreto hace que se abandone la tira de papel y centren su mirada en lo abstracto, en las relaciones posibles, ya sea entre las respuestas a las acciones anteriores, o entre las veces que se realiza la acción y el número de dobleces que se obtendrían. Si bien muchos estudiantes identifican un patrón y logran generalizar, no siempre logran "capturarlo" mediante una expresión algebraica. De hecho, según Godino et al. (2012, p. 490), "hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad". English y Warren (1998), citados por Godino et al. (2012), consideran que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

5.2 *De las configuraciones con baldosas a las relaciones área-perímetro*

Tomando como referencia la figura dada, en la cual cada par de baldosas debe estar unida al menos por uno de sus lados, ¿Es posible añadir baldosas de manera tal que el perímetro de la nueva configuración de baldosas sea 18 unidades?, ¿cuál sería el número mínimo de baldosas requeridas?, ¿cuál sería el máximo?

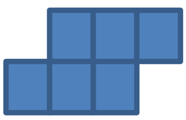

Figura 1

Explorar esta situación, y encontrar las diversas configuraciones que cumplan la condición planteada, posibilita que los estudiantes reconozcan que añadir una baldosa no implica que el perímetro de la nueva configuración aumente, pues podría mantenerse e, incluso, disminuir; así como reconocer expresiones que le posibiliten resumir los diversos hallazgos, en particular, las relaciones entre área y perímetro.

5.3 *Secuencia de figuras, áreas y búsqueda de patrones*

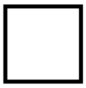
Figura 1

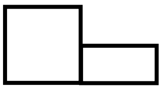
Figura 2

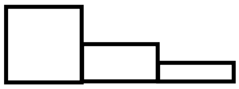
Figura 3

Si cada figura se obtiene de la anterior adicionando un rectángulo a la derecha ésta, el cual mantiene un lado con longitud igual al lado del cuadrado de la Figura 1 y el otro lado corresponde a la mitad del rectángulo a su izquierda, ¿cuál sería el área de la Figura 5?, ¿de la figura 100?, ¿de la Figura n? Esta tarea, en particular, posibilita, además de relacionar diversos sistemas de representación el figural, el numérico y el algebraico, proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias (Radford, 2013b). Es posible que los estudiantes fijen su atención en la forma de las figuras, la cantidad de rectángulos que constituyen cada una de estas figuras, etc. Desde algunos estudios (ver, por ejemplo, Radford, 2013b; Vergel, 2015a, 2015b), esta escogencia de similitudes y diferencias la podrían hacer los estudiantes según la comprensión que se hacen del objeto de la actividad de generalización. En este caso, el objeto de la actividad es reconocer una manera histórica y culturalmente constituida de razonar algebraicamente sobre secuencias.

Otras situaciones

- Encuentre todas las parejas de números cuyo producto sea 6.
- ¿Es posible encontrar una figura cuya área sea 1 cm^2 y su perímetro sea superior a 4cm?, ¿y con perímetro superior a 1000 cm? ¿superior a un millón?, ¿y con perímetro igual a 1000 cm?
- Halle una expresión que permita encontrar la suma de tres números consecutivos cualesquiera.
- Llamaremos *hexarecto* a todo hexágono cuyos lados consecutivos siempre forman ángulo recto. Construya dos hexarectos diferentes de perímetro 24cm. De todos los hexarectos con perímetro 24cm, ¿cuál es el de área máxima?
- Induzca una ley general para calcular el producto: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
- Investigue sobre el proceso de construcción de la *curva de Köch*, ¿cuál sería la longitud de la curva en cada paso (1°, 2°, 3°,…)? ¿cuál en el paso n?

6 Consideraciones finales

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes es un aspecto que continúa generando interés en el campo de la investigación en Educación Matemática. En particular, la generalización de patrones puede verse como una actividad clave para introducir el álgebra en la escuela. El término *algebrización* del currículo introducido por Kaput (2000) nos parece necesario y pertinente, pues potenciar maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, puede ser una ruta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con comprensión y significado.

Consideramos importante estar muy sensibles a la actividad matemática de los estudiantes y, en particular, al trabajo de expresar algebraicamente las generalizaciones. Reconocemos en esta actividad producciones de los alumnos que no contienen signos alfanuméricos del álgebra. No podríamos afirmar categóricamente que no hay características asociadas al pensamiento algebraico y a su desarrollo. Los tres componentes analíticos del pensamiento algebraico que hemos señalado en el apartado 4 (sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica) de hecho podrían estar presentes a través de una actividad multimodal, en la cual intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural (Radford, 2013b; Vergel, 2015a, 2015b), por lo que es necesario reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas (Godino et al., 2012).

Lo que queremos señalar, en términos epistemológicos, es que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas.

En razón de lo anterior, sugerimos ampliar la perspectiva sobre la naturaleza del álgebra escolar. Esta perspectiva debería considerar, entre otras cuestiones, una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos de generalización (por ejemplo, desde la actividad con patrones), tal y como lo hemos discutido en este trabajo.

7 Referencias Bibliográficas

Agudelo, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico.* Tunja: UPTC.

Agudelo, C. y Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE - *Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital.* Informe final – Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP, Bogotá.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perpectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Davydov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza.* La Habana: Pueblo y Educación.

Descartes, R. (1954). *The geometry.* New York: Dover [Original published 1637].

English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166 – 171.

Godino, D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511.

Grupo Mescud (2006). *Razonamiento multiplicativo: un camino posible.* Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kaput, J.J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D.W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). New York: Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/ roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el/Raíces del Álgebra.* 2ª Edición (C. Valderrama, Trad.). Ibagué: Universidad del Tolima (Original publicado en 1985).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia –MEN- (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: MEN.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Mora, L. & Romero, J. (2004). ¿Multiplicación y división "o" cambio de unidad? Rojas, P. (Comp.). *Memorias del Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 13-20). Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303-322). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.

Radford, L. (2013a). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Comares.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 151-165.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J. Castillo, E. & Mora, L. –Grupo Pretexto (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital–Gaia.

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J. & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. In: Gallego P. (Editora) (2013). *Revista Científica, Edición especial*. 760-766.

Serfati, M. (1999). La dialectique de l'indéterminé, de viète à frege et russell. In M. Serfati (Ed.), *La recherche de la vérité* (pp. 145- 174). Paris: ACL – Les éditions du kangourou.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, 77*, 5-34.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*, pp. 87-107. Berlín: Springer-Verlag.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). In: Gallego P. (Ed.) (2013). *Revista Científica, Edición especial*, 234-240.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65-76.

Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 20*(68), 9-17.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [Original publicado en 1591].

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: NCTM-LEA.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

RECME Editorial Smart math Alianza ASOCOLME - Grupo Editorial GAIA Revista Colombiana de matemática educativa

Como citar este artículo:

Rojas G, P. J.; Vergel C., R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 3(1), 19-30.

Presentado: 15/10/2016
Aprobado: 15/11/2108
Publicado: 31/12/2108