

IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES Y RELACIONES EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Jesús Salinas Herrera
Jes54@servidor.unam.mx
UNAM, México

Ernesto A. Sánchez Sánchez
esanchez@cinvestav.mx
CINVESTAV, México

RESUMEN

En este trabajo se reportan los resultados de un estudio acerca de la manera en que alumnos de bachillerato perciben el comportamiento de una figura en un ambiente de geometría dinámica. Se utilizan actividades de cajas negras en Cabri-Géomètre para responder a las preguntas: ¿Se pueden distinguir en las percepciones de los estudiantes diferencias entre propiedades y relaciones? ¿Estas diferencias indican niveles de comprensión de las construcciones por los estudiantes?

ABSTRACT

This study presents the results of an investigation, conducted within high school students, to identify the way they perceive the behavior of a figure in a dynamic geometrical environment. Activities using black boxes in Cabri-Géomètre were employed to answer the following questions: Is it possible to distinguish the differences between properties and relation in students' perceptions? Do these differences indicate different levels of comprehension in students' constructions?

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

Jesús Salinas Herrera y Ernesto A. Sánchez Sánchez (2007). IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES Y RELACIONES EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA, pp. 343-353.

Diversos estudios plantean la necesidad de investigar la percepción de los estudiantes acerca del comportamiento dinámico de una figura en un ambiente de geometría dinámica (Laborde, 1994; Hazzan & Goldenberg, 1997; Goldenberg & Cuoco, 1998; Talmon & Yerushalmy, 2004; Salinas & Sánchez, 2006). La técnica de *cajas negras* es un instrumento potente en este tipo de investigaciones (Laborde, 1994; Laborde & Caponni, 1994).

La característica central de estas actividades es la de permitir explorar el comportamiento dinámico de una figura y la construcción de otra similar, la cual debe reproducir íntegramente dicho comportamiento. Cada una de las figuras dadas es construida previamente y esta relacionada con algún objeto geométrico. De esta manera, para la realización de esta tarea, se espera que los alumnos puedan identificar los elementos dependientes e independientes; describir la dinámica general del diagrama cuando utilizan la herramienta de “arrastrar”; reconocer la propiedad geométrica que se mantiene invariante bajo el arrastre e identificar las relaciones que hay entre los elementos independientes y dependientes.

Las actividades de *cajas negras* en Cabri-Géomètre han mostrado eficacia en el estudio de la evolución de los alumnos de una mera percepción visual de los dibujos a una comprensión de las figuras con base en las propiedades de las que están compuestas. Los “primitivos” del software son los recursos que permiten la construcción de las figuras y han sido divididos en primitivos de diseño puro y primitivos basados en relaciones geométricas (Laborde, 1994, p. 388). Estas nociones permiten un tratamiento y control para distinguir entre *dibujo* y *figura*, respectivamente. Sin embargo, Laborde no considera en su análisis una diferencia entre propiedades y relaciones. Tener en cuenta esta diferencia puede ser relevante cognitivamente ya que su emergencia representó un hito en el desarrollo de la lógica simbólica. La nueva lógica amplía a la lógica clásica con el campo de las relaciones y las funciones proposicionales. “Una lógica de relaciones es necesaria para una lógica de la matemática porque existe una gran cantidad de relaciones que juegan un importante papel en matemáticas. Las relaciones constituyen parte del material de la matemática”. (Nidditch 1995, p. 61).

En consecuencia, en este trabajo se considera la diferencia entre *propiedades* y *relaciones*. Con este objetivo se formulan las siguientes preguntas: ¿Se pueden distinguir en las percepciones de los estudiantes diferencias entre propiedades y relaciones? ¿Estas diferencias indican niveles de comprensión de las construcciones por los estudiantes? Para responderlas se diseñó un estudio cuyas características se describen a continuación.

METODOLOGÍA

Participantes. Un grupo de 42 alumnos de tercer semestre de bachillerato con edades de 15 y 16 años. Los estudiantes poseen cierta familiaridad con el uso de la regla y el compás y se les dio una instrucción inicial en el uso del Cabri-Géomètre. Uno de los autores fue el profesor de la asignatura en la cual se llevaron a cabo las observaciones. Se reportan datos referidos a una muestra de 8 parejas de estudiantes.¹

Procedimientos. La tarea a realizar fue resolver cinco problemas con cajas negras (Laborde & Caponni, 1994), es decir, reproducir una figura en Cabri y su comportamiento dinámico, las cuales fueron previamente construidas. Al término de esta tarea se administró un cuestionario de cuatro preguntas. Las respuestas se elaboraron por parejas de alumnos. Todos

¹ Esta muestra es tomada considerando alumnos con distinto desenvolvimiento desde la fase de construcciones con la regla y el compás, y que se desempeñaron con una asistencia regular y una actitud de cierto interés en las actividades.

los alumnos resolvieron los tres primeros problemas. Algunas parejas resolvieron además el problema 4 o el 5 y, sólo dos parejas resolvieron los 5 problemas.

Instrumento. Las propiedades dinámicas están gobernadas por la manera en que se construyen las figuras y deben ser descubiertas por el estudiante.

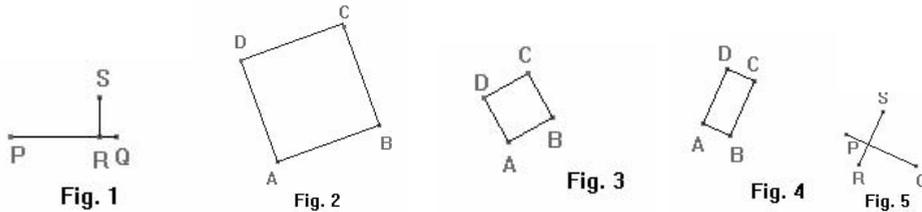


Figura 1. Cajas negras

Una vez que reprodujeron la figura en Cabri, se les preguntó: 1.- ¿Cuáles son los elementos independientes y dependientes?; 2.- ¿Qué observas al arrastrar los elementos independientes?; 3.- ¿Qué propiedades geométricas están orientando la construcción?, y 4.- ¿Qué relación hay entre los elementos independientes y dependientes? Las respuestas a estas preguntas son analizadas en este trabajo.

¿Cómo distinguimos propiedades de relaciones?

Las propiedades son enunciados de la forma Pa donde a es un objeto geométrico y P es un predicado; las relaciones tienen la forma Pab, donde a y b son objetos geométricos y P es un predicado que relaciona a y b. También es conveniente distinguir las propiedades y relaciones geométricas que no dependen de las posibilidades dinámicas del software de aquellas que sí dependen de la dinámica, las cuales se marcarán con el signo (*) en la siguiente tabla, en la cual se resumen las principales relaciones y propiedades que emergen en los problemas.

	Propiedades	Relaciones
Problema 1	R es punto. PQ es segmento. RS es segmento. (* P es independiente. (* Q es independiente.	R está sobre el segmento PQ. RS es perpendicular a PQ. (* R se mueve a lo largo de PQ. (* El tamaño de RS varía con la posición de R en PQ. (* El punto S describe una semicircunferencia cuyo diámetro es PQ, conforme P recorre PQ.
Problema 2	La figura ABCD es un cuadrado. (* El punto B es independiente.	DC // AB y AD // BC. DC ⊥ AD AB ⊥ BC (* El punto B se mueve alrededor de un círculo con centro A y radio constante.
Problema 3	La figura ABCD es un cuadrado. (* El punto A es independiente. (* El punto B es independiente	DC // AB y AD // BC. DC ⊥ AD AB ⊥ BC (* Al arrastrar A o B, la figura ABCD se mantiene como cuadrado, pero cambia su tamaño y posición.

Problema 4	La figura ABCD es un rectángulo. (* Los puntos A, B, y D son independientes. (* El segmento AD aumenta o disminuye.	DC // AB y AD // BC. DC \perp AD AB \perp BC (* D está en la recta perpendicular a AB que pasa por A
Problema 5	P, Q y R son independientes.	PQ \perp RS. Los segmentos PQ y RS son perpendiculares. (* El segmento RS se mueve perpendicularmente al segmento PQ y varía su dimensión.

Categorías de análisis. Para distinguir las características de las respuestas de los alumnos, utilizamos las siguientes puntuaciones:

a. Identificación de elementos independientes y dependientes.

2. Señalan todos o casi todos los elementos solicitados.
 1. Señalan pocos o alguno de los elementos solicitados.
 0. Confunden o no identifican elementos dependientes e independientes.
- b. Tipo de “objetos” o fenómenos que perciben los alumnos con el arrastre.
2. Distinguen el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura; y además propiedades que permanecen invariantes.
 0. Identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante.
 0. No describen aspectos en que cambia la figura o partes de ella.

c. Identifican alguna relación o propiedad geométrica en el comportamiento de la construcción.

2. Señalan explícitamente relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de la figura.
1. Señalan sólo propiedades que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura.
1. No señalan alguna propiedad o relación que este orientando el comportamiento dinámico de la figura.

d. Establecen alguna relación geométrica entre elementos independientes y dependientes.

2. Señalan explícitamente alguna relación geométrica entre dichos elementos.
1. Expresan alguna idea vaga de que existe alguna relación geométrica entre dichos elementos.
0. No expresan ningún tipo de relación geométrica entre dichos elementos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se ejemplifica la aplicación de los criterios utilizados para asignar la puntuación a las respuestas en cada categoría.

Con relación a la primera categoría, la identificación de elementos independientes y dependientes, el reconocimiento de dichos elementos habla de la percepción que tienen los alumnos de una relación funcional entre elementos específicos de la figura. El siguiente caso

ilustra el tipo de respuesta² que se considera expresa relaciones, y que obtiene una puntuación de 2.

- Brenda y Victoria (Problema 1)

cuando el punto P se mueve entonces es independiente de los demás puntos, y de ese movimiento dependen los punto R, Q, S, el segmento SR y el segmento PQ. Cuando el punto R se mueve es independiente de todos los puntos, y de ese movimiento dependen el punto S y el segmento SR. Al mover el punto Q es independiente de los demás puntos, y de este movimiento dependen los puntos R, P, S, el segmento PQ y el segmento SR.

En la respuesta anterior se observa la relación funcional que los alumnos describen entre los elementos independientes y dependientes de la figura, derivada del movimiento que “producen” unos sobre otros. Si traducimos sus expresiones a un formato en donde se puedan separar los términos y los predicados, se ve que los enunciados equivalentes expresan relaciones entre diverso número de elementos. Por ejemplo, algunas de las ideas anteriores pueden ser escritas con enunciados que tienen la siguiente forma:

“El punto P es independiente de los puntos R, Q, S, el segmento SR y el segmento PQ”, la cual sería una relación con seis términos.³

Ahora bien, surge la pregunta de si esto es suficiente para pensar que los alumnos pueden estar percibiendo alguna relación estructural entre elementos de la figura. Si la respuesta es sí, entonces tenemos evidencia experimental de que el Cabri contribuye en este rasgo cognitivo fundamental para poder realizar una demostración. Pero, si la respuesta es no, entonces es necesario comprender mejor que tipo de aspectos están en juego en esta situación. Por ello, incursionaremos más en tal dirección.

Una hipótesis que se propone para tener una primera aproximación, es la siguiente: conviene distinguir entre la descripción que realizan los alumnos de un hecho geométrico, según si los predicados están basados en la percepción visual (fenomenológicos) o en los “primitivos geométricos” del Cabri (perpendiculares, paralelas, etc.) (Laborde, 1994), los cuales incluso pueden estar asociados al tipo de pregunta que se formula, y no reflejar directamente un rasgo cognitivo. Así, en la descripción anterior se describen fenómenos visuales, por lo cual se puede afirmar que los alumnos no necesariamente están percibiendo relaciones estructurales del dibujo Cabri cuando formulan tales respuestas. Sin embargo, es muy importante hacer notar que el uso del Cabri propicia el empleo de un lenguaje que describe relaciones y que opera como un instrumento psicológico, el cual eventualmente les permitirá a los alumnos, mediante su gradual apropiación, acceder a otro nivel de abstracción.⁴

2 En todos los casos se indican seudónimos de las parejas de alumnos y el número del problema que responden. La transcripción aparece en cursivas y siempre es fiel a la redacción de los propios estudiantes, salvo correcciones ortográficas.

3 Ahora bien, para poder observar los aspectos que interesa es necesario antes caracterizar con precisión los componentes de una proposición. Un sujeto, desde el punto de vista lógico, es el nombre o descripción de un individuo u objeto particular (y corresponde en el lenguaje común a un nombre propio o a la descripción de un objeto único). Desde un punto de vista lógico, crea mayores dificultades decir que es un predicado, pero una idea básica es que el predicado es el resto de la oración, la cual dice algo acerca del sujeto. En un nivel muy elemental de la lógica simbólica se puede decir que un predicado es un nombre que designa propiedades atribuidas a los individuos o relaciones que existen entre individuos (Agazzi, 1979).

4 El empleo de instrumentos psicológicos es un requisito para su apropiación o internalización. Así, el Cabri pro-

Las respuestas que señalan pocos o alguno de los elementos solicitados, y a las cuales se les asignó la puntuación de 1, fueron del siguiente tipo:

- Dimas y Natalia (Problema 1)
El elemento independiente es el segmento PQ y el dependiente el segmento SR.

Se observa que en este caso los enunciados equivalentes son conjunciones de enunciados simples, por ejemplo: “PQ es elemento independiente” y “el segmento SR es elemento dependiente”. Además, cada uno de los enunciados simples tiene un formato de una relación más simple, que es equivalente a la forma tradicional sujeto-predicado. En general, los alumnos están más familiarizados con el uso de este tipo de enunciados, lo cual refleja una mayor apropiación o internalización de este instrumento de mediación semiótica.

Finalmente, las respuestas con puntuación de 0, las cuales confunden elementos dependientes e independientes, son como la siguiente:

- Clara y María (Problema 1)
Los elementos independientes, son: los puntos S y R, y el elemento dependiente es el segmento PQ.

En este caso los enunciados que se pueden escribir también son equivalentes al esquema tradicional sujeto-predicado en el que se expresan propiedades o clases de objetos. Por ejemplo: “Los puntos S y R son elementos independientes”, “P y Q son puntos dependientes”. Sin embargo, los predicados “es un elemento independiente” y “es un elemento dependiente” están mal utilizados. Así, en estos casos sólo hay un intento de descripción, pero los alumnos no entienden en realidad que se está demandando.

A continuación se presenta una tabla con los resultados generales en esta primera categoría.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problema 1	2	1	2	2	2	2	0	0	11
Problema 2	2	0	1	1	1	2	2	2	11
Problema 3	2	1	2	2	2	2	2	2	15
Problema 4		2	2	2	1			2	9
Problema 5	2		2	2			2		8
Total	8	4	9	9	6	6	6	6	

Tabla 1. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría a.

Con respecto a la identificación de elementos independientes y dependientes, los resultados que se resumen en las tablas anteriores, muestran que todos los alumnos manifiestan alguna habilidad para indicar todos o casi todos los elementos solicitados. De un total de

picia el uso de un lenguaje en el que se expresan “naturalmente” relaciones. “La intervención de los instrumentos psicológicos engendra nuevas funciones psicológicas que tienen un origen sociocultural y cuya naturaleza es supraindividual. La adquisición de instrumentos psicológicos de orden superior constituye el requisito necesario para que la enseñanza formal tenga éxito (Kozulin, 2000, pp. 103-104).

31 respuestas que se obtuvieron, en 24 ocasiones tienen la mayor puntuación, es decir, que señalan todos o casi todos los elementos solicitados.

El análisis que se realiza también muestra que cuando los alumnos realizan una descripción del comportamiento de la figura sus ideas se pueden escribir como propiedades o relaciones, sin embargo, dichas relaciones no son necesariamente estructurales.

El segundo rasgo cognitivo se refiere al tipo de “objetos” o fenómenos que perciben los alumnos con el arrastre. La percepción no se remite al aspecto meramente visual, sino que implica una interpretación o lectura que se basa en ciertos conocimientos. Estos pueden corresponder más a una racionalidad empírica o teórica, según el acento que los alumnos den a estos aspectos, es decir, la diferencia es sólo de grado. Por consiguiente, se pueden distinguir tales racionalidades o enfoques como de sentido común o de carácter geométrico.

Un ejemplo de respuesta en donde los estudiantes distinguen el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura; y además propiedades que permanecen invariantes, se dan a continuación. A estas respuestas se asignó la puntuación de 2.

➤ Irán (Problema 3)

Se observa que la figura cambia de tamaño al mover y arrastrar los puntos independientes, cambia de tamaño pero no de forma, sigue conservando las propiedades y sigue siendo un cuadrilátero.

En este caso, hay una conjunción del aspecto fenomenológico y geométrico, distinguen entre la forma y el tamaño de la figura. La forma de la figura la asocian con la propiedad de ser un cuadrilátero. Es claro que la propiedad aquí la entienden como una cualidad o atributo geométrico y no como una relación entre elementos.

En esta misma categoría, la puntuación de 1 corresponde al tipo de respuestas que identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante. Un ejemplo es el siguiente:

➤ Nadia y Liz (Problema 3)

Al arrastrar el punto B el cuadrado se cierra y se abre cambiando el valor de sus medidas, al arrastrar el punto A el cuadrado da vueltas disminuyendo el tamaño del mismo.

En este caso, al no describir ninguna propiedad invariante los alumnos sólo hacen una descripción fenomenológica del comportamiento de la figura. No hay alguna descripción de propiedades geométricas.

En la tercera opción de esta categoría, cuando los alumnos no describen aspectos en que cambia la figura o partes de ella, se les asignó la puntuación de 0, como ocurrió en el siguiente caso:

➤ Karla y Ernesto (Problema 2)

Si arrastramos estas elementos la figura puede moverse al mismo tiempo mueve a las dependientes.

En este caso los alumnos ni siquiera describen el comportamiento dinámico de la figura, sólo asocian el movimiento con los elementos independientes.

La siguiente tabla contienen los resultados generales relacionados con la segunda categoría. Se ve claramente que en la mayor parte de respuestas los alumnos identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante. Así, sólo en 8 casos de las 32 respuestas, los alumnos expresan propiedades que permanecen invariantes. La destreza que revelen los alumnos con respecto a la categoría anterior es menor.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problema 1	1	2	2	1	1	2	1	1	11
Problema 2	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Problema 3	1	1	1	1	2	1	1	1	9
Problema 4		1	2	1	1			1	6
Problema 5	1		2		2		1		6
Total	4	5	8	4	7	4	4	4	

Tabla 2. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría b.

La tercera categoría corresponde a la identificación de alguna relación geométrica en el comportamiento de la construcción. Cuando los alumnos señalaron explícitamente relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de la figura se les asignó la puntuación de 2. El siguiente caso ejemplifica esta situación:

- Emilio y Dora (Problema 4)
La propiedad que mantiene es la relación de paralelismo, ejemplo de que AB es paralela a DC y DA es paralela CB sin importar la deformación que sufra la figura siempre guardara esta relación.

En este caso se señala claramente propiedades invariantes de la figura, las cuales son equivalentes a un enunciado en el que aparecen explícitamente relaciones, a saber: “AB es paralela a DC”; “DA es paralela a CB”. Asimismo, cuando dicen que los segmentos de la figura siempre conservan la propiedad de ser perpendiculares, el predicado “conservan la propiedad de ser perpendiculares”, necesariamente se refiere a la relación entre dos términos. En este caso claramente se indican relaciones estructurales.

Si la respuesta señala sólo propiedades que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura se les da la puntuación de 1. Por ejemplo:

- Emilio y Dora (Problema 1)
La propiedad geométrica de esta construcción se da entre los elementos R y S siendo R independiente y S su dependiente; muestra un movimiento circular, aumentando o disminuyendo su distancia en cuanto a su avance en el segmento PQ.

Los alumnos señalan explícitamente como propiedad geométrica una relación entre dos puntos, y además la asocian con una trayectoria geométrica que indica su comportamiento (La propiedad señalada es una relación entre R y S descrita por la trayectoria del punto S

mientras R se desplaza por el segmento PQ). Esta es una situación que indica claramente la focalización de los alumnos hacia un aspecto geométrico del dibujo.

Por último, si los estudiantes no mencionan alguna propiedad geométrica que este orientando el comportamiento dinámico de la figura se le da la puntuación 0.

- Nadia y Liz (Problema 3)
Básicamente las propiedades son que al mover los puntos A y B la figura gira en ese vértice pero al mismo tiempo va disminuyendo la figura, ya que se va cerrando conforme va dando vueltas la figura.

Las alumnas confunden las propiedades geométricas con el comportamiento dinámico de la figura. De esta manera entienden que la propiedad que tiene la figura es la manera de comportarse dinámicamente. Esta idea refleja una acepción muy personal del término “propiedad”. Los resultados generales de la tercera categoría se presentan en la siguiente tabla.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problema 1	2	2	2	2	1	1	1	0	11
Problema 2	1	1	2	1	2	1	0	0	7
Problema 3	2	2	0		2	1	0	0	6
Problema 4		2	2	1	2		1	0	7
Problema 5	2				2				4
Total	7	7	6	4	6	3	2	0	

Tabla 3. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría c.

En 5 de 8 parejas (62.5), los estudiantes señalan relaciones geométricas que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura. Sólo hay un caso de alumnos que no logran señalar alguna propiedad que este orientando el comportamiento dinámico de las figuras dadas. Incluso, en catorce ocasiones identifican relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de las figuras dadas.

Finalmente, con relación a la cuarta categoría, cuando los alumnos señalaron explícitamente alguna relación geométrica entre los elementos independientes y dependientes se les asignó la puntuación de 2, como ocurrió en los siguientes casos:

- Irán (Problema 1)
Que el elemento independiente al moverlo, los demás puntos se mueven en relación a este y el dependiente conserva su propiedad [el punto S siempre forma una perpendicular].

El alumno claramente establece una relación funcional entre un elemento independiente y uno dependiente. Sin embargo, también percibe una relación estructural al indicar una propiedad invariante. Tal relación estructural es más bien una propiedad en términos del atributo que le asigna a un elemento (“*el punto S siempre forma una perpendicular*”), y no una relación entre elementos de la figura.

Si los alumnos sólo expresaron alguna idea vaga de que existe alguna relación entre dichos elementos se dio la puntuación de 1. La siguiente respuesta ilustra esta situación.

- Brenda y Victoria (Problema 3)
Al mover los elementos independientes, éstos provocan un cambio en los elementos dependientes, en este caso cambia el tamaño de los lados del cuadrado.

En este caso las alumnas pueden mencionar una relación funcional pero no logran precisar una relación estructural. Hablan de que “cambia el tamaño de los lados del cuadrado” pero no indican que relación hay entre los elementos independientes y dependientes.

Por último, cuando los alumnos sólo parafrasean lo que se entiende por elemento independiente y dependiente en un ambiente de geometría dinámica, se evalúa con 0.

- Brenda y Victoria (Problema 1)
Las características de los elementos dependientes siempre van a ser de acuerdo a como estén colocados los elementos independientes, nunca van a poder cambiar forma a la figura si un elemento independiente no se mueve.

Los resultados generales sobre esta cuarta categoría se resumen en la siguiente tabla.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problema 1	0	0	0	1	2	1	1	0	5
Problema 2	0	0	1	1	1	0	0	0	3
Problema 3	1	0	0	0	0	1	1	0	3
Problema 4		0	0	0	0			2	2
Problema 5	0				0		0		0
Total	1	0	1	2	3	2	2	2	

Tabla 4. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría d.

Es importante destacar que este rasgo cognitivo, desde el punto de vista del conocimiento geométrico que se pretende, es el que consideramos el más importante y difícil de percibir con plena conciencia. Como se puede observar, parecen existir severas dificultades para que los alumnos establezcan alguna relación geométrica entre elementos independientes y dependientes. Sin embargo, en esta población observada en dos casos hacen tal señalamiento, y en otros 8 más intentan expresar alguna idea de que existe alguna relación geométrica entre dichos elementos.

CONCLUSIONES

Es posible inferir de las respuestas de los estudiantes que perciben diferencias entre propiedades y relaciones. También se observa que es más fácil para ellos percibir las propiedades y luego las relaciones; lo cual puede ser un indicador de un proceso de evolución en la comprensión de las características geométricas de las figuras. Esta evolución se caracteriza por un desplazamiento de la atención en los aspectos visuales hacia los aspectos teóricos-geométricos, y se manifiesta en diferentes niveles de comprensión de las construcciones por parte de los estudiantes.

Dicha evolución es propiciada por tres elementos de mediación que operan en el desarrollo de las actividades: 1. El software de Cabri; 2. El lenguaje (analizado aquí en las expresiones de propiedades o relaciones) y 3. Discusiones entre parejas y con el profesor. Lo anterior es compatible con el marco teórico de Vygotsky que postula que el desarrollo cognitivo se produce por un proceso de mediación semiótica en el que interviene herramientas culturales, instrumentos psicológicos y la interacción social.

REFERENCIAS

- Agazzi, E. (1979). *La lógica Simbólica*. Editorial Herder, Barcelona.
- Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A., (1998). What is Dynamic Geometry?, en R. Leherer & D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 351-368.
- Hazzan, O & Goldenberg, E. P., (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1(3)*, 263-291.
- Kozulin, A. (1998). *Psychological Tools*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- Laborde, C. & Caponni, B., (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2) 165-210.
- Laborde, C. (1994). Les rapports entre visuel et géométrie dans un eiao. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnigot, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. La Pensée Sauvage, Paris, France.
- Nidditch, P. H. (1995). *El desarrollo de la lógica Matemática*. Ediciones Cátedra. Madrid.
- Salinas, J & Sánchez E., (2006). Interpretation of the Cabri dragging in a learning experience. *Proceedings of the Twenty eight annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics Education, Vol. 2*, 427-429.
- Talmon, V. & Yerushalmy. M., (2004). Understanding dynamic behavior: parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics 57*, 91-119.