

ESTADO DEL ARTE ALREDEDOR DE LA COMPRENSIÓN CONCEPTUAL DE LA DERIVADA

Dilan Fabián Saraza Sosa

Universidad Francisco de Paula Santander-Colombia

Estudiante de Licenciatura en Matemáticas. Integrante del Semillero de Investigación en Educación Matemática.

Correo electrónico: dilanfabianss@ufps.edu.co

Raúl Prada Núñez

Universidad Francisco de Paula Santander-Colombia

Magister en Educación Matemática

Correo electrónico: raulprada@ufps.edu.co

Resumen

En este estado del arte se clasifican 30 investigaciones realizadas entre el 2000 al 2017 referentes al tema de la *derivada*, tema que se imparte en cursos de Cálculo Diferencial. Se aplicaron diversos criterios de clasificación dentro de los que se destacan: el tipo de enfoque metodológico utilizado, población de estudio y propuesta metodológica. De los principales hallazgos se resalta que se encontró que existe pocas investigaciones que utilizaron un enfoque cualitativo en el momento de realizar su investigación y a su vez más investigaciones que toman un enfoque cuantitativo en la determinación de las dificultades de los estudiantes, existe un predominio de investigaciones que se enfocaron en la construcción del concepto de derivada en los estudiantes, pocas que se enfocan a la práctica y los conocimientos de los profesores. También se determinó deficiencia que poseen los estudiantes en el momento de comprender el tema de la derivada y su relación con la gráfica de una función derivada.

Introducción

En la Educación Matemática siempre se ha presentado una bifurcación entre la enseñanza en la cual se tiene en cuenta en como el docente transmite sus diferentes saberes a sus estudiantes utilizando herramientas didácticas y metodologías que ayuden y faciliten este proceso, y el aprendizaje que es como el estudiante adquiere y se apropia de los diferentes saberes de los cuales se le están orientando. Rodríguez (2014) la matemática desde sus fundamentos siempre ha presentado problemáticas en el aprendizaje y la enseñanza en todas sus diferentes disciplinas.

El cálculo diferencial no se aleja de esta clasificación en la cual presenta problemáticas en su aprendizaje y enseñanza, Esta investigación se centró principalmente a uno de sus temas más conocidos como lo es el de la derivada ya que como lo define Hashemi (2014) La derivada es un tema esencial en los fundamentos de las matemáticas universitarias, esta sirve como conocimiento previos para entender y comprender temas en cursos superiores.

Los estudiantes generalmente presentan dificultades en la comprensión y conceptualización de la derivada, ya sea por dificultades en los conocimientos previos o por el no entendimiento gráfico y algebraico

que esta puede tener, teniendo así una mayor incomprensión en su concepto, grafica de la función y grafica de la función derivada. Se tiende a comprender la derivada como un procedimiento algebraico y algorítmico necesario para hallar la pendiente o la solución del ejercicio planteado sin comprender la esencia de lo que se está realizando como la razón de cambio instantánea o la pendiente de la recta tangente que atraviesa la función. Hashemi (2014), Orhun (2012) y Amaya (2009). Los motivos más frecuentes en las falencias del entendimiento de la derivada de los estudiantes son causados por dos variables a tener en cuenta, el discurso tradicional del docente el cual se basa en la enseñanza de la derivada como un proceso algorítmico o de aplicación de fórmulas de derivación y la descripción que se da en los libros de texto en el concepto sin darle lugar a situaciones en la cuales se evidencien su aplicabilidad. González & Chavez (2016)

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente se realizó dicho estado del arte para evidenciar qué planteamientos, indicadores, estrategias y soluciones que se han planteado los diferentes autores en las dificultades de enseñanza y aprendizaje que presentan en el tema de la derivada.

Materiales y Métodos

Para el desarrollo del respectivo estado del arte se realizó una investigación descriptiva a nivel documental entorno a la dificultades de comprensión y conceptualización que tienen los docentes (enseñanza) y estudiantes (aprendizaje) en el tema de la derivada, por ello se desarrolló la búsqueda de artículos de investigación referente a este tema en un periodo de tiempo del 2000 al 2017, recurriendo a recursos digitales con el fin de encontrar antecedentes que sustentaran estas problemáticas. Se

utilizaron bases de datos como en Google Académico, ScienceDirect, Microsoft Academic, Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (redalyc), Revista Colombiana de Matemática Educativa.

Resultados

Las 30 investigaciones encontradas en el presente estado del arte tienen como objetivo indagar sobre la comprensión del concepto de la derivada las cuales tenían diferentes enfoque o métodos utilizados los cuales se utilizaron para clasificarlas:

1. Clasificación por el método utilizado.



Grafica 1. Clasificación por método investigativo

Fuente: Autor

Tomando como criterio el método investigativo utilizado se pueden realizar una clasificación de las 30 investigaciones en tres grupos: enfoque cuantitativo, enfoque cualitativo y enfoque mixto. Se puede evidenciar que existe predominio en investigaciones cuantitativas en comparación a las otras dos clasificaciones, en estas se enfocaron más en determinar el nivel de comprensión de la derivada, en comparación a los cualitativos en los cuales se pregunto acerca de las concepciones de la derivada y temas relacionados con su comprensión, mientras que las

investigaciones mixtas que se utilizaron cuestionarios y entrevistas.

En el enfoque cuantitativo se realizó más a nivel experimental aplicando test, cuestionarios y pruebas en la cuales se describían el nivel de comprensión que tenían los estudiantes a los cuales se les aplicaba dicho instrumento. En algunas de estas investigaciones se comparaban el nivel de comprensión de los estudiantes alrededor del concepto de la derivada, la función, la función derivada y la gráfica, con una prueba diagnóstica y una prueba final que se realizaba después de recibir una metodología de enseñanza la cual era creada para facilitar la comprensión de los temas mencionados.

Artículos de investigación de tipo cuantitativo como el de Carabús (2009) en el cual aplicó instrumento de 11 ítems para evaluar los aprendizajes alrededor del concepto de la derivada de 100 estudiantes de ciencias y tecnologías aplicadas, clasificando el nivel de comprensión objetivo en cuatro niveles intuitivo (operatorio), declarativo (comunicativo), argumentativo (validativo) y estructural (institucionalizado), sus principales resultados fueron que los estudiantes tiene una mayor facilidad para la resolución formal, operatoria y algorítmica de los problemas de la derivada.

Pero contrariamente el estudiante presenta dificultades cuando se le pregunta la fundamentación teoría y práctica de lo que se hizo para encontrar responder las preguntas realizadas. Aspecto similar a lo realizado por Orhun (2012) en una escuela de secundaria aplicando 5 pruebas diagnóstico a 100 estudiantes acerca de la función de la original y la función derivada, concluyendo que se presenta una fortaleza en el nivel operatorio de los estudiantes al evaluarse en temas de la derivada y solo

dificultades cuando se les pide la relación existe que entre estas dos funciones. En las investigaciones de tipo cuantitativo muy pocas quedaron en el nivel descriptivo pues todas realizaba aplicación de una prueba.

En las investigaciones de tipo cualitativo recurrieron a la entrevista para determinar las concepciones que presentaban los estudiantes o profesores acerca de la derivada, en investigaciones realizadas a estudiantes resaltamos las Hashemi (2014) aplicando la entrevista de 4 preguntas abiertas como herramienta investigativa para identificar las falencias conceptuales que presentaban 63 estudiantes de la universidad islámica de Azad de Shiraz entorno a la derivada, encontró que los estudiantes poseen dudas al responder preguntas relacionadas con el concepto de la derivación y una mayor debilidad al realizar comparaciones con las respectivas gráficas.

Córdoba & Ruiz (2015) realizaron una investigación de tipo cualitativo en el cual realizaron una observación al proceso de la comprensión de la derivada de una función a través de los límites y el entendimiento geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a estudiantes de grado 11 utilizando como herramienta digital el programa de GeoGebra, sus conclusiones fueron que las herramientas tecnológicas ayudan a facilitar la comprensión geométrica de la derivada.

Jiménez, Azcárate & Font (2011) analizaron el nivel de comprensión de 5 profesores de secundaria de instituciones educativas del departamento de Atlántico Colombia, a través de los esquemas de comprensión de Piaget (intra, inter y trans). Su conclusión principal fueron que entres los profesores existe pluralidad en el nivel de comprensión que tienen referente a la derivada de una

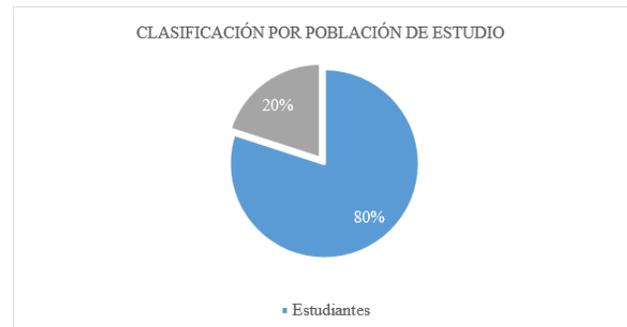
función $f'(x)$ y la función derivada de una constante $f'(a)$.

El enfoque mixto fue utilizado por muy pocas investigaciones de las cuales se puede resaltar las de Matamoras, García & Llinares (2013) en la cual se aplicaron 3 cuestionarios y una entrevista a 50 estudiantes que cursaban primer grado de bachillerato a los que se les aplicó un instrumento para determinar el nivel de comprensión la derivada de una función en un punto $f'(a)$. 50 estudiantes que cursaban segundo grado de bachillerato a los cuales se les aplicó un instrumento relacionado con la segunda derivada (f'') y 50 estudiantes de primer curso de licenciatura en matemáticas pero a un nivel más avanzado en temas relacionados con la derivada.

El objetivo de esta investigación fue caracterizar el nivel de comprensión teniendo en cuenta el esquema de desarrollo de Piaget (intra, inter y trans) y así caracterizar el desarrollo que poseen los estudiantes cuando se les enseña el concepto de la derivada en estos niveles educativos.

Los principales resultados muestran que los estudiantes crean relaciones lógicas entre los elementos matemáticos pero poseen dificultades en el momento de la resolución de problemas, también se describe que en cada uno de estos niveles educativos los estudiantes moldean, relacionan y asimilan de una forma más estructurada el concepto de la derivada.

2. Clasificación por tipo de población.



Grafica 2. Clasificación por población de estudio
Fuente: Autor

Según la población de estudio se puede hacer una respectiva clasificación entre docentes y estudiantes, en la mayor parte de investigaciones se optó por estudiar las dificultades conceptuales que presentan los estudiantes cuando se les orienta en el tema de la derivada, En cambio algunas investigaciones que se realizaron a profesores se optó por estudiar la comprensión que poseían estos en este tema y la didácticas utilizadas.

Los artículos de investigación que tomaban como población a los profesores generalmente se les realizaban una entrevista o cuestionarios con preguntas abiertas. García, Azcarate & Moreno (2006) estudiaron las creencias y concepciones de 6 profesores que ejercían en programas de ciencias económicas, determinando que estos teniendo una metodología de enseñanza tradicional se enfocaban más a la enseñanza de lo matemático enfocado a la resolución algorítmica de problemas sin relacionar la interpretación de la derivada a lo económico.

En cambio Pino, Godino & Font (2015) realizó un estudio con una población diferente, analizando la comprensión

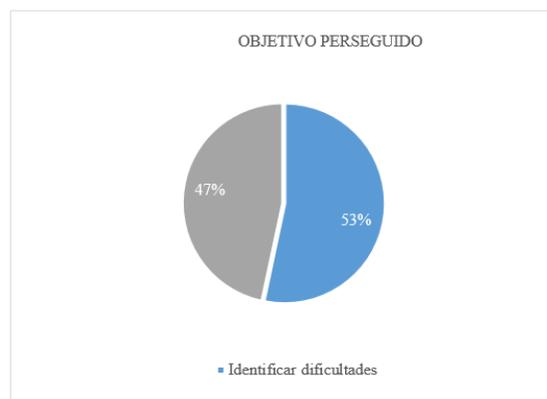
didáctico-matemático que poseían 53 estudiantes de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática que había ejercido en estudiantes de bachillerato, en el cual se concluye que estos poseen dificultades en la resolución de problemas relacionados con la definición formal de la derivada pero tienen una mejor comprensión cuando la relacionan como la pendiente de la recta tangente de la función.

En cuanto a la comprensión que poseían los estudiantes en temas de la derivación Vega, Carrillo & Soto (2014) realizaron su enfoque investigativo hacia el rendimiento que poseen los estudiantes cuando entran a estudios superiores de Cálculo, indagándose acerca de la construcción y el nivel de aprendizaje que poseían estos a partir de un modelo cognitivo APOS de Ed Dubinsky, creando un entorno de enseñanza por módulos de clases y talleres utilizando como herramienta digital los computadores, en los resultados los estudiantes presentaban dificultades cuando se les preguntaba acerca de la derivada en un punto y respectiva comprensión geométrica que posee la derivada, para asimilar estas conceptualizaciones se generaba un aprendizaje construyendo una mayor relación del concepto de la derivada y temas relacionados.

Otros artículos con unos resultados similares como el de Ariza (2009) utilizó como población de estudio a estudiantes tanto en bachillerato como en universidad indicando que en sus conclusiones que los alumnos poseen facilidad en el momento del proceso algebraico de la derivación pero presenta mayor dificultad en la comprensión de la derivada cuando se relaciona con la gráfica. Matamoros, García & Llinares, (2013) mencionado anteriormente también realizó su investigación con estudiantes de bachillerato y universidad, con otra

metodología de caracterización y resultados diferentes.

3. Clasificación según el objetivo perseguido



Grafica 3. Clasificación por objetivo perseguido
Fuente: Autor

Los artículos en el presente estado del arte presentan otra clasificación, cuando tiene su enfoque a solo determinar las dificultades, concepciones y falencias que presentan los estudiantes y profesores en el tema del Cálculo Diferencial a través de un instrumento evaluativo de tipo objetivo y cuando se realiza una secuencia didáctica para facilitar la comprensión de este tema.

En la gráfica 3 se evidencia que existió predominio en artículos enfocados a solo a caracterizar el nivel de comprensión del estudiante sobre la utilización de una propuesta didáctica para la intervención pedagógica. Rodríguez (2014) caracterizó el nivel de comprensión que poseían 40 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el tema de la *derivada* relacionándolos a su parte geométrica a partir de los niveles de razonamiento geométrico del modelo Van Hiele, mostrando así que los estudiantes presentan dificultades en el momento de hacer dicha relación. Similar a lo realizado

por investigaciones ya mencionadas, contrario lo realizado por Cervantes, Camarena & Pinet (2008) quienes ejecutaron una propuesta para el aprendizaje de la derivada a través de didácticas con relación a la Matemática en contextos, eliminando el enfoque tradicional en el cual se enseñan conocimientos de forma abstracta y utilizando el un enfoque por modelación en situaciones donde la derivación entra en contexto.

Gutiérrez, Buitrago & Ariza (2017) caracterizaron las falencias que poseen los estudiantes de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada en la derivada de una función real, en los resultados identifica falencias en procedimientos algebraicas, aritméticas y la interpretación de límites a partir de esto propone un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) para la enseñanza la derivada y sus conocimientos previos.

Conclusiones

Con respecto al método de investigación utilizado en la investigaciones existe predominio de enfoques cuantitativas, con el fin de determinar objetivamente el nivel de comprensión de los estudiantes entorno a la derivada, pero en estas no se le realizan preguntas a los estudiantes para determinar en qué parte en la que siempre presentan más dificultades por lo tanto se requiere realizar más investigaciones de tipo cualitativo que determinen el nivel de comprensión que poseen de los estudiantes en este tema.

Respecto a la población estudiada existe superioridad de investigaciones realizadas a los estudiantes que a profesores que imparten los cursos del cálculo diferencial. Por lo tanto se recomienda estudiar también a estos para así evaluar sus conocimientos teórico-prácticos que estos poseen, Y del

mismo modo evaluar el tipo de metodología que estos utilizan en el momento de realizar su práctica docente.

En la clasificación por la propuesta metodológica podemos concluir que existen investigaciones que proponen didácticas para la comprensión de la derivada saliendo de lo formal y llevándolo a contextos o situaciones modelo que faciliten su comprensión.

También en algunas investigaciones se resaltan las falencias que poseen los estudiantes con la interpretación gráfica de la función y función derivada, también en la interpretación geometría de la pendiente de la recta tangente, lo cual sugiere realizar investigaciones para abordar esta problemática.

Referencias Bibliográficas

E.G Rodríguez. El concepto de derivada y el modelo Van Hiele en estudiantes de licenciatura en matemáticas e informática de la Universidad Francisco de Paula Santander. *Eco.Mat.* 2015;6(1): 43-49

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate students' difficulties in conceptual understanding of derivation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 143, 358-366.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in Mathematics education: Derivative functions and students' difficulties. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 55, 679-684.

Amaya, C. S., Rojas, H. D., & Ballen, M. B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (26).

González, J. L., Chávez, O. R., Ochoa, E. J. L., López, J. V. B., & Álvarez, M. C. S. (2016). Comprensión del concepto de la

derivada como razón de cambio. *CULCyT*, (51).

Carabús, O. (2009). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. *Colección Digital Eudoxus*, (11).

Córdoba, Y., Ruiz, K. Y., y Rendón, C. E. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra como propuesta didáctica. *RECME*, 1(1), 125-130

Badillo Jiménez, E. R., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 0191-206.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Boletim de Educação Matemática*, 27(45).

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 85-116.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisis de las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas/A Proposal for the Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Practices on Derivatives. *Bolema*, 29(51), 60

Vega Urquieta, M. A., Carrillo Yañez, J., y Soto Andrade, J. (2014). Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. *Boletim de Educação Matemática*, 28 (48), 403-429.

Ariza, Á. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27(1), 121-136.

Cervantes, M., Camarena, P., y Pinet, R. (2008). La derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. *Científica*, 12 (4), pp. 167-173.

Gutiérrez, L., Buitrago, M. A., y Ariza, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdoba*, 15 (20), pp. 137-153.