GEOMETRÍA DE LA MÚSICA:
UN CAMINO POR LAS SUPERFICIES TONALES

Andrés Villaveces
Universidad Nacional de Colombia
avillavecesn@unal.edu.co

Mostraré cómo usar geometría (superficies tonales) para entender (¡y visualizar!) las progresiones de acordes en música. Primero definiré la acción de ciertos grupos de simetrías sobre superficies tonales, usando ideas de David Lewin (basadas remotamente en trabajos de Hugo Riemann en el siglo XIX), y luego expondré trabajos recientes del musicólogo Dmitri Tymoczko: algo de geometría algebraica aplicado al problema de la estructura en música. En la charla sobrevolaré la conexión entre aspectos *geométricos* de la teoría musical, desde los inicios hasta la configuración de las "superficies tonales" de Tymoczko en la parte final.

¿MATEMÁTICA DE LA MÚSICA?

> La música es el placer que experimenta la mente humana al contar sin darse cuenta de que está contando.
>
> Gottfried Leibniz

Algunos caminos en falso

El inicio remoto de la matemática en occidente está entrelazado con el origen de la música, como es bien conocido. De alguna manera, preguntas sobre el misterio de la estructura del mundo estuvieron mezcladas con intentos de explicación de sistemas numéricos y a la vez con el inicio de la teoría musical. Aspectos puramente *físicos* del mundo (ritmos del cuerpo, respiración, vibración) se mezclan de manera peculiar desde entonces con aspectos *mentales* de nuestro acceso a este (entender razones de números –y sus limitaciones– y a la vez explicar cómo funcionan los ritmos y melodías que son la base de la música). En esta compleja red de relaciones entre el cuerpo y la mente, la música y la matemática juegan un papel peculiar. En esta conferencia exploraré algunas construcciones contemporáneas referentes al tema.

Villaveces, A. (2017). Geometría de la música: un camino por las superficies tonales. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 19-26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Aún así, *caveat emptor*. El camino que tomaré en la charla no es el de la *física de la música*[1], sino uno puramente matemático. Vale la pena enfatizar que el tipo de matemática adecuado para la música **no** responde a preguntas del tipo:

> ¿Existe una ecuación/un modelo matemática/o que *describa* una pieza musical?
>
> ¿Existe una ecuación matemática que *prediga* la continuación, el desenlace, de una pieza musical?

Nos interesa directamente entender la estructura de piezas musicales:

> ¿Qué hace que suene bien la música? ¿Cómo podemos visualizar la música –la evolución de las voces– matemáticamente?

Para esto, hay muchos caminos posibles. Privilegiaré la línea iniciada por Riemann (¡Hugo!) en el siglo XIX, que permitió que en el siglo XX se *algebrizara* la música[2], para llegar a los trabajos más recientes en geometría (principalmente derivados del artículo en *Science* en 2008 de Callender, Quinn y Tymoczko, y luego explicados de manera mucho más detallada en términos más puramente musicales por Tymoczko en su libro *A Geometry of Music* de 2011.[3]

Así, nuestro contexto matemático será *grupos de transformaciones* y sus acciones sobre *clases de notas* y *topología de superficies* (representación de la dinámica musical).

---

[1] Aunque la física de la música es otro tema sumamente interesante, recientemente muy usado en combinación con ciencia de la computación por compositores en su trabajo, este no es el tema nuestro aquí.

[2] Las ideas de H. Riemann se decantarían mucho más adelante en las construcciones de David Lewin (1987), cuyo *Generalized Musical Intervals and Transformations* inspiraría a tantos –Lewin, entre la década de 1960 y 2003, inició el estudio sistemático de *acciones de grupos de simetría* sobre espacios tonales y logró análisis impresionantes de la estructura de muchas obras del Romanticismo tardío–.

[3] Otra línea por contrastar, que por dos razones no incluyo aquí, es la abierta por el suizo Guerino Mazzola (2002) en su famosísimo *Topos of Music*. Las dos razones son: por un lado, el enfoque de Mazzola es "geométrico" en el sentido más general de topoi –muy interesante, pero requiere mucho más tiempo–. Las construcciones de Tymoczko (2011) me parecen más concretas matemáticamente y más naturales desde el punto de vista musicológico –este último punto merecería debate prolongado y sostenido–. Por otro lado, más allá de su uso de teoría de categorías, Mazzola tiene otro aspecto muy interesante pero *adicional* a lo que me interesa exponer aquí.

La hipótesis de Tymoczko – Otros caminos

Resumiendo mil años de historia musical, Tymoczko inicia su matematización aislando los siguientes cinco rasgos presentes en la mayoría de géneros musicales –occidentales o no, pasados y presentes–:

- movimiento melódico conjunto,
- consonancia acústica,
- consistencia armónica,
- macroarmonía limitada,
- centricidad.

Explicaré cómo se matematiza esta hipótesis y conduce a las construcciones geométricas.

ÁLGEBRA DE LA MÚSICA – TRANSFORMACIONES

El primer paso hacia la geometría de superficies de la música está anclado en las acciones de grupos de transformaciones.

Espacio tonal lineal

Ubicamos los tonos posibles en los reales.

El sonido se produce por pequeñas fluctuaciones en la presión del aire. Si el período es t, la frecuencia fundamental es $1/t \in R$. Si un músico no tiene oído absoluto, la melodía (f, g, h, . . .) puede ser cantada en otro momento (αf, αg, αh, . . .) donde α es un real cercano a 1.

Usando logaritmos, y renombrando los tonos, tenemos $p = c_1 + c_2 \log_2(f/440)$.

Lo importante es que ahora la trasposición de las notas es de (p, q, r, . . .) a (p + x, q + x, r + x, . . .). La distancia entre tonos ahora es $|p - q|$ en lugar de f/g. Por ejemplo, si tomamos $c_1 = 69$ y $c_2 = 12$ obtenemos los tonos de las notas del teclado en los enteros: DO central es 60, LA es 69. En este contexto, las notas usuales son números enteros, pero perfectamente podemos ubicar notas en cualquier número real intermedio (Figura 1): DO4 es 60, DO#4 es 61 ... pero podemos pensar en la nota 60, 33 por ejemplo.

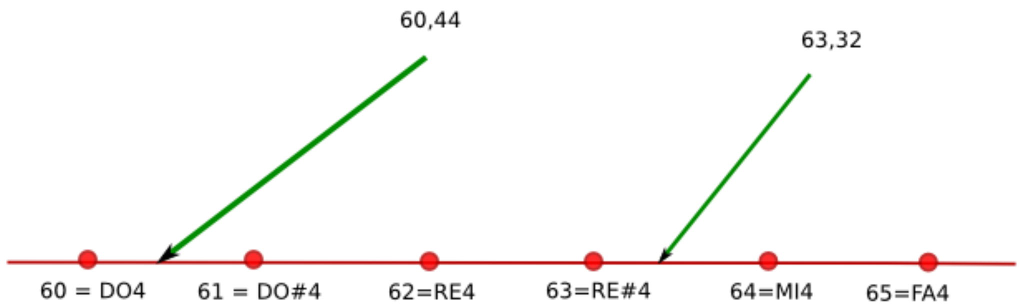

Figura 1. Espacio tonal lineal

El espacio de tonos **circular** se construye “dividiendo” el espacio de tonos lineal por la relación de equivalencia “ser equivalente mod 12” (Figura 2).

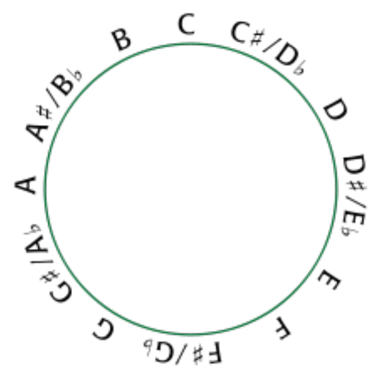

Figura 2. Espacio tonal circular (gráfica tomada de Tymoczko, 2011)

Aquí, las *trasposiciones por n* (n un entero mod 12) son las funciones T_n:Z/12→Z/12 dadas por x → x+n mod 12 y las *inversiones n* son las funciones I_n:Z/12→Z/12 dadas por x → -x+n mod 12.

Podemos representar las trasposiciones y las inversiones en espacio tonal lineal, en espacio tonal circular y en notación musical “clásica”:

Grupos en música: T/I, PLR, dualidades estructurales

Dos grupos importantes son el PLR y T/I –ambos son isomorfos a D_{12}, el diedro de orden 24, pero surgen a partir de transformaciones musicales distintas[4]–.

[4] PLR surge así:

- P(0, 4, 7) = (7, 3, 0): intercambia primera y tercera nota, y cambio el tipo de acorde (de primo a invertido).

Lo importante de lo anterior es que, aun a este nivel tan elemental, la matemática revela una *dualidad* profunda entre distintas transformaciones importantes en música –*a priori*, no era obvio que trasponer e invertir acordes fuera un "hermano gemelo desconocido" de tomar relativas, paralelas y cambios de dominantes en música–. David Lewin explota esta dualidad; en la conferencia exploramos un poco más este tema.

GEOMETRÍA DE LA MÚSICA – SUPERFICIES TONALES

Este es el objetivo primordial de la charla. Aquí construimos las superficies tonales, siguiendo principalmente a Tymoczko.

Grupos neo-riemannianos y su acción sobre toros

La siguiente sucesión de acordes ocurre en la IX sinfonía de Beethoven:

> DO, la, FA, re, SI♭, sol, MI♭, do, LA♭, fa, RE♭, si♭, SOL♭, mi♭, SI, sol♯, MI, do♯, LA

Toda la secuencia se puede obtener mediante aplicaciones de las transformaciones L y R del grupo PLR. Douthett y Steinbach (1998) encuentran patrones (Figura 3) como este camino en un toro, dados por los acordes de la Novena Sinfonía de Beethoven (de hecho, Beethoven rompe la simetría dejando solo 19 de los 24 acordes *–la matemática nos permite examinar rupturas de simetría en distintos compositores–*):

- L es como P, pero intercambiando segunda y tercera nota: L(0, 4, 7) = (11, 7, 4).
- R es como P, pero intercambiando primera y segunda nota: R(0, 4, 7) = (4, 0, 9).

El grupo T/I es simplemente el generado por trasposiciones e inversiones.

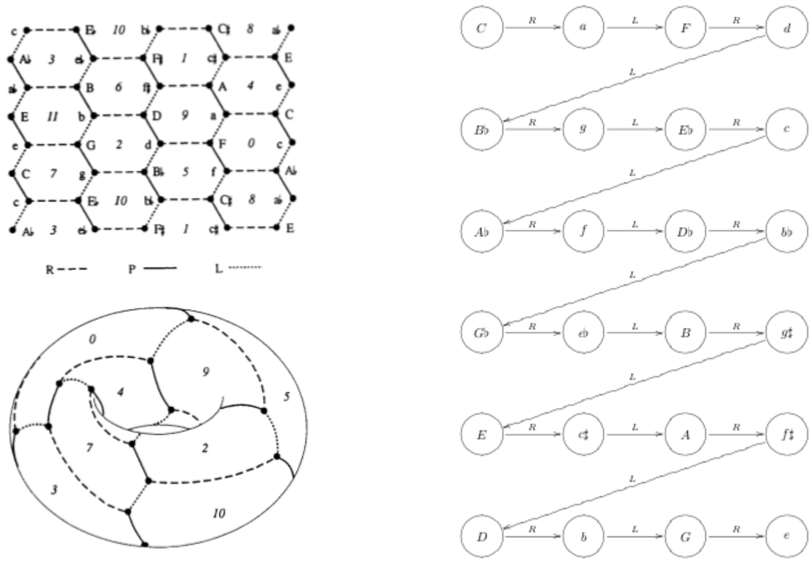

Figura 3. La sucesión de acordes, representada en un toro, y con las transformaciones de PLR (tomada de Tymoczko, 2011)

Espacio tonal

Espacio tonal en dimensión 2

De manera análoga a como hacemos en matemática básica al "ubicar" pares de coordenadas en el plano cartesiano, podemos armar superficies al tratar de ubicar pares de notas... y estudiar el efecto de aplicar las transformaciones que Tymoczko llama O, P, T, I, C[5] sobre estas superficies. El resultado de llevar a cabo esto de manera sistemática, en manos de Tymoczko y otros, ha llevado a:

- superficies tonales (análogas a cintas de Möbius),
- análisis de caminos dados por el movimiento "vertical" (armonía) y "horizontal" (conducción de voces, contrapunto),
- sistemas dinámicos asociados a obras musicales. Exploramos esos temas en el *software Chord Geometries*, de Tymoczko.

Las definiciones explícitas de espacios tonales (en dimensiones arbitrarias) las daremos en detalle durante la charla. También (si el tiempo alcanza) ilustraremos algunas mediante el *software ChordGeometries*.

[5] En teoría musical, dos objetos pertenecen a la misma clase (*set class*) si están relacionados por alguna de las cinco simetrías "OPTIC" (cambio de octava (O), permutación (P), trasposición (T), inversión (I), cambio de cardinal (C)).

La estructura geométrica de los espacios tonales es tipo “orbifold”. Esto responde a simetrías adicionales de los pares de notas. En principio las ubicamos en potencias de los reales (o de los complejos) –sin embargo, cabe recordar que la notación usual es discreta– en las figuras que vienen las parejas tipo (do, mi) corresponden a coordenadas discretas dentro del orbifold.

Los *caminos* dentro del orbifold corresponden a lo que los músicos llaman “progresiones” (de varios tipos). La dimensión del espacio tonal es precisamente el número de notas que van en la progresión. En el caso de dimensión dos, esto corresponde a progresiones de dos notas. Es un caso bastante restringido, pero aún así muchas cosas interesantes se pueden visualizar.

En la charla visualizaremos varios otros de estos caminos en orbifolds musicales.

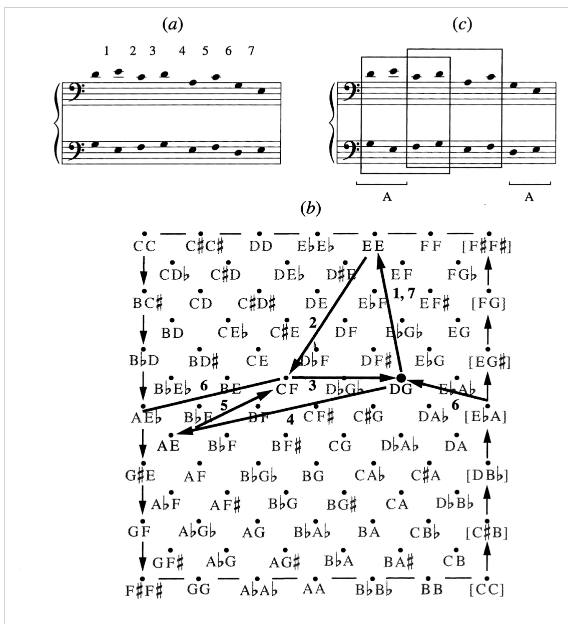

Figure 3.5.1
Plotting a phrase from the *Allelujia Justus et Palma* (*a*) on the Möbius strip (*b*) reveals interesting musical structure (*c*).

Figura 4. Camino de frase del Alleluja Justus et Palma (Tymoczko, 2011)

Espacios tonales en dimensiones arbitrarias

En dimensiones más altas, aunque es más difícil visualizar, es posible hacer cálculos. Esta parte empieza a depender más de invariantes típicos de topología o geometría algebraica, y se aleja más y más de la visualización posible en dimensión 2. El *software* de Tymoczko permite seguir caminos tonales hasta en dimensión 3 –ya mucho más significativos musicalmente–.

Partes enormes de la historia de los últimos mil años en música se pueden comparar usando estas ideas; lo mismo sucede con temas como:

- teoría de escalas (escalas no clásicas se pueden ubicar en variantes de estos espacios y se pueden comparar, buscar simetrías, etc.)
- centralidad tonal … y muchos otros.

Más que un producto final, las ideas de Tymoczko están ahí para incluir muchos otros tipos de comparaciones –a veces visualizables, en teoría musical–. Las conclusiones que se pueden obtener son sorprendentes. Aunque en autores como Mazzola puede haber más sofisticación en herramientas matemáticas, considero que los espacios tonales son *naturales*, *accesibles* y sirven como modo de pensar la música de maneras novedosas y a la vez ancladas en una tradición interesante que nos viene del siglo XIX.

REFERENCIAS

Douthett, J. y Steinbach, P. (1998). Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition. *Journal of Music Theory*, *42*(2), 241-263.

Lewin, D. (1987). *Generalized musical intervals and transformations*. New Haven, EUA: Yale University Press.

Mazzola, G. (2002). *The topos of music: Geometric logic of concepts, theory, and performance*. Basel, Suiza: Birkhäuser Verlag.

Tymoczko D. (2011). *A geometry of music: Harmony and counterpoint in the extended common practice*. New York, EUA: Oxford University Press.