EXPLORANDO LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA EN EL MODELO DE POINCARÉ

Juan Carlos Avila
Universidad Sergio Arboleda y Grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional
juan.avila@usa.edu.co

Lobachevski desarrolló su geometría sin encontrar contradicciones lógicas y demostrando que el postulado de las paralelas de la geometría euclidiana no es consecuencia de los restantes axiomas de esta. Así, a partir de la geometría de Euclides pudo definir otra geometría en la cual el quinto postulado no tiene lugar. Esta última afirmación es precisamente la que motiva este cursillo: estudiar un modelo de geometría no euclidiana con base en la geometría euclidiana.

INTRODUCCIÓN

Cualquier geometría, como teoría matemática, parte de unos objetos básicos, elementales o primitivos no definidos, a saber: punto, recta y plano. El comportamiento de estos objetos se define con base en los axiomas y los teoremas que cumplen, estos últimos demostrados deductivamente. La forma y naturaleza de los objetos primitivos de cualquier geometría, en una primera instancia y desde un punto de vista formal de las matemáticas, parecieran no tener importancia; sin embargo, cuando la geometría es objeto de enseñanza y aprendizaje, los modelos intuitivos y formales relacionados con estos elementos primitivos cobran preponderancia al proporcionarle a quien los estudia una "cara" sobre la cual trabajar. Así, por ejemplo, pensar que por un punto exterior a una recta no pasa más de una paralela es una idea que, en general, puede considerarse sensata; sin embargo, la historia de las matemáticas ha mostrado que después de veinte siglos, esta idea llegaría a ser precisamente el origen de una geometría no euclidiana, la geometría imaginaria de Lobachevski (1793-1856), después denominada hiperbólica, en la cual, pensar sobre la forma de las rectas y el plano lleva a la necesidad de definir estos objetos, antes primitivos, para precisarlos dentro del modelo.

El logro fundamental de Lobachevski en su geometría fue no encontrar contradicciones lógicas y demostrar que el postulado de las paralelas no es consecuencia de los restantes axiomas de la geometría de Euclides puesto que "conjuntamente con la geometría de Euclides, en la cual dicho postulado se

Avila, J. C. (2017). Explorando la geometría hiperbólica en el modelo de Poincaré. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 29-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

acepta como verdadero, es posible otra geometría, «imaginaria», en la cual el V postulado no tiene lugar" (Efimov, 1984). Esta última afirmación es justamente la que motiva lo que se hará en este cursillo: estudiar un modelo de geometría no euclidiana con base en la geometría euclidiana. Para ello, se recurrirá a algunos conceptos relacionados con circunferencias y, particularmente, a la relación de inversión de un punto con respecto a una circunferencia, transformación que permite definir un tipo de recta en el modelo que se estudiará.

PRELIMINARES

Como primera actividad del cursillo, se proporcionará la definición de una función[1] sobre el conjunto $\alpha - \{A\}$ donde α es un plano y A un punto de este plano, para luego resolver un problema usando un *software* de geometría como GeoGebra:

Considérese la circunferencia H con centro en A y radio a en un plano α. Sea $f: \alpha - \{A\} \rightarrow \alpha - \{A\}$ una función de modo que para cada punto $P \in \alpha - \{A\}$, $f(P) = P'$ tal que:

1. $P' \in \overrightarrow{AP}$

2. $$AP' = \frac{a^2}{AP}$$

Actividad 1. Sin usar opciones de GeoGebra como "segmento de longitud dada" o similares, proponga una construcción con regla y compás (al modo euclidiano) de un punto P' para cada punto P de $\alpha - \{A\}$. Argumente su respuesta.

La idea de esta actividad es que los asistentes se den cuenta de que la condición 2 de la definición puede escribirse como $AP' \cdot AP = a^2$ o como $\frac{AP}{a} = \frac{a}{AP'}$, razón por la cual debe buscarse $P' \in \overrightarrow{AP}$ de modo que la media geométrica entre AP y AP' sea el radio de la circunferencia dada. Esto permite recordar, en primer lugar, la definición de media geométrica de dos números y, en segundo lugar, cómo es posible construir la media geométrica de dos números con regla y compás, y con base en ello, proponer una construcción en

[1] Puede ampliarse al respecto en Moise (1964).

la que se conoce la media geométrica de dos números pero no uno de ellos, en este caso, AP'. Por otra parte, al tener una construcción robusta del punto P' para cada P, es posible definir una macro en el *software*; solo hasta este punto se mencionará que tal función se denomina *inversión* con respecto a una circunferencia y se explorarán sus propiedades.

HACIA UN MODELO DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Una vez establecida la construcción de la inversión de un punto con respecto a una circunferencia H y hecha la exploración de algunas de sus propiedades, se propondrá la siguiente actividad:

Actividad 2. Sea ℓ una recta en el plano α de modo que $A \notin \ell$, ¿cuál es la inversión de ℓ con respecto a H? Intente argumentar su respuesta.

A través de esta actividad, se espera que los asistentes descubran y argumenten que la inversión de una recta que no pasa por A, con respecto a H, es una circunferencia que pasa por A y viceversa[2], esto es, la inversión de una circunferencia que pasa por A con respecto a H es una recta. Por otro lado, esta actividad sugiere preguntarse cuál es la inversión de otras figuras con respecto a la circunferencia H, por tal razón, se propondrá la siguiente actividad:

Actividad 3. Sea una circunferencia C que no pasa por A, ¿cuál es la inversión de C con respecto a H? Intente una justificación.

Como en la Actividad 2, los asistentes descubrirán que la inversión de una circunferencia que no pasa por A es otra circunferencia. Aprovechando el carácter dinámico del *software* y con base en los resultados hallados, se cuestionará sobre lo siguiente:

Actividad 4. ¿Cuál(es) debe(n) ser la(s) característica(s) de una circunferencia $C \neq H$ de modo que su inversión con respecto a H sea la misma circunferencia C? Intente argumentar su respuesta.

Como en la Figura 1, se espera que los asistentes descubran que si la circunferencia C se interseca con H en dos puntos y sus rectas tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares, entonces la inversión de dicha

[2] Una demostración de este hecho puede consultarse en Abella (1994).

circunferencia con respecto a H es ella misma. Diremos que esta circunferencia C es *ortogonal* con H.

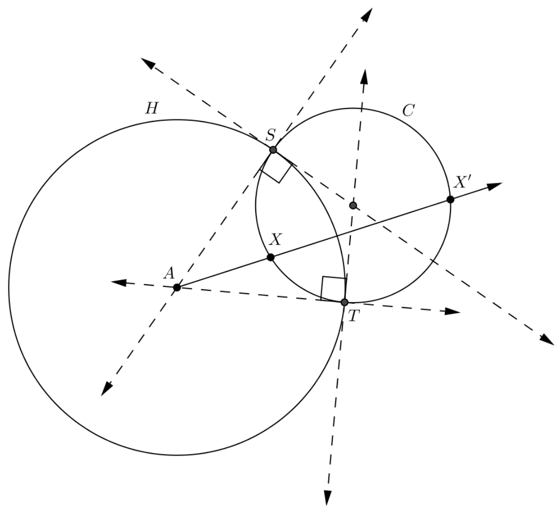

Figura 1. Inversión de una circunferencia C con respecto a H que es la misma C

Este hecho sugiere una de las primeras definiciones importantes en el modelo de geometría no euclidiana que se propondrá, ya que llevará a la definición de una recta no euclidiana. Para esto, se planteará:

Actividad 5. Sea $\mathbb{H}$ el interior de la circunferencia H. Considere A y B dos puntos distintos de $\mathbb{H}$, proponga cómo trazar una circunferencia ortogonal a H que contenga los puntos A y B. Intente justificar su respuesta.

La solución de este problema mostrará que la circunferencia hallada es única, hecho que se parece al *postulado de la recta*[3] de la geometría euclidiana, por tanto se introducirán las siguientes definiciones:

Definición 1: El interior de la circunferencia H, $\mathbb{H}$, se denomina *plano hiperbólico*.

Definición 2: Sean $P, Q \in \mathbb{H}$, si P y Q son colineales con el centro de H (recordemos que es A), entonces la *L-recta*[4] PQ es $\overline{PQ} - \{P, Q\}$. Por otro lado, si P y Q no son colineales con el centro de H, la *L-recta* PQ es la intersección de $\mathbb{H}$ con la circunferencia ortogonal que contiene a P y Q. El conjunto de todas las L-rectas de $\mathbb{H}$ se nota $\mathcal{L}_H$.

[3] En la geometría euclidiana el *postulado de la recta* afirma que por dos puntos distintos dados, existe una única recta que los contiene.

[4] L-recta en honor a Lobachevski.

Luego de desarrollar las actividades previas, es claro que las L-rectas antes definidas satisfacen el postulado de la recta. Así, $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ es también una geometría incidente[5] como la geometría euclidiana, solo que en este caso, no se satisface el postulado de las paralelas; para mostrar esto será necesaria la siguiente actividad:

Actividad 6. Desde un punto de vista visual, es decir, con las opciones que permite GeoGebra, ¿el postulado de las paralelas se cumple en $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$? Ejemplifique su respuesta.

ASUNTOS PARA REFLEXIONAR Y DISCUTIR

En el curso Geometría no Euclidiana de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, las actividades aquí presentadas y otras más se han implementado permitiendo usar los conceptos aprendidos sobre geometría euclidiana en el curso previo y, con ello, profundizar sobre conceptos asociados a las circunferencias, ya que con base en estas se estudia el modelo de geometría hiperbólica. Por otra parte, los siguientes son algunos asuntos observados durante el desarrollo del curso:

- Los estudiantes son continuamente retados al proponerles problemas geométricos que implican: formular preguntas y soluciones, plantear hipótesis, poner a consideración soluciones a los problemas, demostrar las soluciones.
- Generalmente, en la solución de las actividades anteriores, aparece más de una propuesta correcta.
- Continuamente se ponen a prueba las capacidades de creación y argumentación de los estudiantes.
- Los estudiantes amplían sus conocimientos sobre geometría, su historia y fundamentación.
- Se potencia el hecho de que aunque la geometría es visual, los resultados que se obtienen deben ser demostrados.

[5] Una *geometría incidente* es una geometría en la que por cada par de sus puntos pasa una única recta y en el conjunto de puntos existe al menos tres puntos no colineales. Para ampliar, puede revisarse en Millman (1991).

En cuanto al modelo estudiado:

- Este permite reflexionar sobre asuntos como: ¿Cómo definir los "puntos", los "planos", las "rectas" en modelos de geometría euclidiana y no euclidiana? ¿Qué elementos del modelo permiten su definición? Estas preguntas se sustentan en el hecho de que desde un punto de vista sintético de la geometría, los planos, las rectas y los puntos son objetos *no definidos*.
- ¿Cuáles otros axiomas de la geometría euclidiana se satisfacen en el modelo de la geometría hiperbólica?
- ¿Por qué la distancia hiperbólica entre dos puntos se define en la forma en que se hace? ¿Cuál es la historia detrás de esta geometría?
- ¿Cómo se establece la definición de un modelo de geometría analítica de la geometría hiperbólica a partir del modelo estudiado?
- ¿Cómo las ideas dadas en el modelo permitirían definir otros modelos de geometría euclidiana y no euclidianas?

REFERENCIAS

Abella, G. (1994). *Un recorrido por la geometría*. Santafé de Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Efimov, N. (1984). *Geometría superior*. Moscú, Unión Soviética: Mir.

Millman, R. y Parker, G. (1991). *Geometry. A metric approach with models*. New York, EUA: Springer.

Moise, E. (1964). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. EUA: Addison-Wesley.