POLINOMIO DE CONWAY: REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN UN SEMINARIO DE MATEMÁTICAS

Nicol Contreras, William Jiménez, Julián Martínez, Cristián Rojas y Adriana Vega
Universidad Pedagógica Nacional
njcontrerasv@upn.edu.co, wjimenez@pedagogica.edu.co, jdmartinezt@upn.edu.co,
crarojasji@unal.edu.co, alvegac@upn.edu.co

La primera imagen que podemos plantearnos al hablar de nudo es: tener una cuerda, doblarla y manipularla para finalmente unir sus extremos, con la idea de no poder distinguir el punto de unión. Esta imagen tridimensional puede ser manipulada posteriormente sin necesidad de efectuar cambios. En matemáticas, un nudo se define como un subconjunto del espacio tridimensional que es homeomorfo al círculo. El objetivo de este trabajo es manipular estos objetos desde una perspectiva gráfica, abordando así el concepto de invariante y presentar el desarrollo de este proceso en el seminario de matemáticas del programa de Especialización en Educación Matemática cohorte 2016-I de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

DE LA TEORÍA DE NUDOS

La teoría de nudos tiene fundamentos en la topología y se ha desarrollado en torno a ciertas problemáticas específicas, entre las cuales están las tres que se mencionan a continuación. En primer lugar, pasar de la representación tridimensional del nudo a otros tipos de representación (gráfica, verbal, simbólica o matricial), en segundo lugar, la clasificación de estos, y en tercer lugar el estudio de la equivalencia entre nudos.

Históricamente, la teoría de nudos tiene su auge en la teoría atómica (1860), en la cual Lord Kelvin afirmaba que los átomos se podían entender como representaciones anudadas de éter. Años más tarde, en 1885, el trabajo de Peter Tait sobre la clasificación de nudos "equivalentes" permitió establecer una lista de todos los nudos que podían ser dibujados con el menor número de cortes posible. Listado que pasó de nudos de cinco o seis cortes a nudos de diez cortes, gracias al aporte de Charles Little en 1900.

En la actualidad, la teoría de nudos se ocupa del estudio de la inmersión de un espacio topológico en otro (Juárez, 1997, en Vázquez, s.f.) y el problema fundamental de esta es establecer cuándo dos o más nudos son equivalentes,

Contreras, N., Jiménez, W., Martínez, J., Rojas, C. y Vega, A. (2017). Polinomio de Conway: representación gráfica en un seminario de matemáticas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 49-55). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

para lo cual los topólogos han desarrollado lo que se conoce como *invariantes de nudos*.

DE LAS INVARIANTES Y EL POLINOMIO DE CONWAY

Como se mencionó anteriormente una de las preguntas fundamentales en el desarrollo de la teoría de nudos ha sido el identificar cuándo dos nudos son equivalentes. Para responderla han surgido ciertos algoritmos conocidos como invariantes. Entre los más importantes y reconocidos está el denominado movimientos de Reidemeister[1], que consiste en reducir un nudo tanto como sea posible a partir de una secuencia finita de pasos. Otros casos de invariante son el polinomio de Alexander, el polinomio de Jones y el polinomio de Conway, el cual, a diferencia de otros, permite durante el proceso emplear los movimientos de Reidemeister, para facilitar cálculos. A continuación se realiza una breve descripción acerca del polinomio de Conway, en el cual se centra la atención de este documento.

Conway propuso asociar un polinomio como un invariante de los nudos, usando para esto la siguiente definición:

> Una terna (L_l, L_r, L_s) de enlaces orientados en $\mathbb{R}^3$ se dice que es una terna de Conway si los enlaces pueden ser representados por diagramas L_l, L_r, L_s los cuales coinciden por fuera de una vecindad; y dentro de la vecindad son de la siguiente forma (Figura 1). (Hernández, 2011, p. 16)

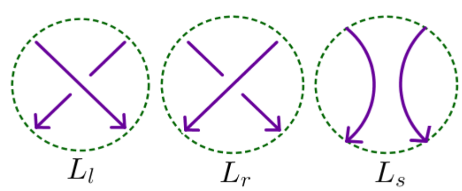


Figura 1. Terna de Conway

Para un enlace orientado L, el polinomio de Conway $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}$ está descrito por los siguientes axiomas:

1. $\nabla_{L_r}(z) = \nabla_{L_l}(z) + z\nabla_{L_s}(z)$.
2. $\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) - z\nabla_{L_s}(z)$.
3. $\nabla_O(z) = 1$ y $\nabla_{OO}(z) = \nabla_{OOO}(z) = \cdots = 0$ siendo O un nudo trivial.

[1] Para ampliar, véase Contreras, Jiménez y Rojas (2017).

4. $\nabla_L(z) = a_0(L) + a_1(L)z + a_2(L)z^2 + \cdots + a_n(L)z^n$ tal que $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Z}$.

De los axiomas se deduce que $\nabla(L_1) = \nabla(L_2)$ si L_1 y L_2 son enlaces equivalentes.

DE LA TEORÍA A LA PRÁCTICA

En el marco del seminario de matemáticas de la Especialización en Educación Matemática (cohorte 2016) de la Universidad Pedagógica Nacional se realizó un trabajo centrado en la introducción a la teoría de nudos y el reconocimiento de ciertos conceptos inmersos en esta. Así pues, se trabajó en torno a algunas de las representaciones de los nudos y a partir de estas, el manejo de ciertas invariantes específicas (polinomio de Jones, de Alexander y de Conway). Así, tomando como punto de partida una representación gráfica (en dos dimensiones) de los nudos, se buscó obtener específicamente el polinomio de Conway que representara dicho nudo.

Inicialmente se pretendía pasar de un nudo en tres dimensiones (hecho en lana) a un dibujo que lo plasmara en dos dimensiones, centrando la atención en lograr representar cuándo las cuerdas que componían el nudo iban por encima o por debajo, aspecto que en dicha representación fue denominado *corte* y fue simbolizado con letras mayúsculas. Además, se trabajó con respecto al recorrido que se realizaba al graficar un nudo, partiendo de un punto de referencia y estableciendo que dicho recorrido sería en el sentido de las manecillas del reloj.

Considerando los aspectos mencionados y el objetivo de obtener el polinomio de Conway, fue necesario definir la orientación de cada uno de los cortes, teniendo en cuenta el recorrido del nudo. Dicha orientación puede clasificarse en positiva (L_r) y negativa (L_l), tal como se observa en la Figura 2.

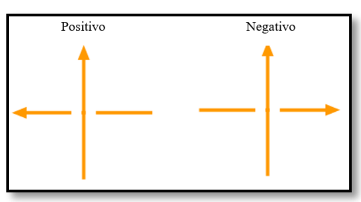


Figura 2. Clasificación de la orientación de cortes

Cabe acotar que dentro del desarrollo histórico que se le ha dedicado al estudio de este invariante, la salvedad del recorrido de la cuerda se ha hecho, al igual que la clasificación de cortes positivos y negativos; esta última cuestión se puede evidenciar en la descripción del polinomio previamente presentada.

A continuación se observa un nudo cuyo sentido de recorrido a partir del punto N, es a favor de las manecillas del reloj y la orientación de sus cortes se clasifica de acuerdo a lo establecido anteriormente (Figura 3).

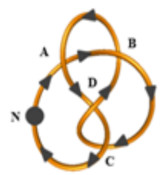
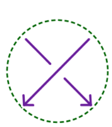
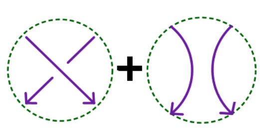
	Cortes Positivos L_r	Cortes Negativos L_l
	A B	C D

Figura 3. Orientación de los cortes de un nudo

Teniendo en cuenta lo mencionado previamente, se sabe que las invariantes de nudos dan respuesta a una de las problemáticas que han sido centro de estudio de la teoría de nudos, la equivalencia entre estos. Para el caso específico del polinomio de Conway se debe tener en cuenta, partir del nudo original y centrar la atención en cada uno de sus cortes (uno a la vez) para aplicar reglas específicas, hasta obtener nudos triviales. Dichas reglas (axiomas) se resumen en dos aspectos: el primero, consiste en cambiar la orientación del corte, y el segundo, en modificar la orientación de este, de manera tal que en el corte que se esté centrando la atención se haga un rompimiento y unión de las cuerdas que conserve siempre el sentido del recorrido.

Es necesario mencionar que durante el trabajo realizado en el seminario, la terna de Conway se utilizó teniendo en cuenta el hecho de que se tenían cortes con orientación positiva y cortes con orientación negativa, de manera que al fijarnos en un corte puntual se relacionaban orientación y terna, y se llevaba a cabo el proceso propuesto por Conway (Figura 4).

Orientación del corte	Enlaces que completan la terna	Proceso realizado
 Positivo	 $\nabla_{L_r}(z) = \nabla_{L_l}(z) + z\nabla_{L_s}(z)$	A partir del corte inicial, se obtienen dos enlaces; el primero, al realizar un cambio de orientación de las cuerdas del corte inicial y el segundo, al realizar un rompimiento de las cuerdas que lo componen y

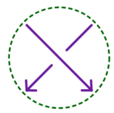
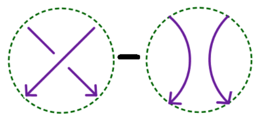
 Negativo	 $\nabla_{L_l}(z) = \nabla_{L_r}(z) - z\nabla_{L_s}(z)$	unirlas nuevamente de tal forma que se mantenga el sentido de recorrido y dicha unión sea diferente a la que se tenía en el corte inicial.

Figura 4. Aplicación de los axiomas 1 y 2 de Conway

A continuación se presenta un ejemplo en el que se determina el polinomio de Conway del nudo presentado en la Figura 3, haciendo uso de los axiomas descritos previamente (Figura 5).

Paso 1: el nudo de la representación (*a*) se obtiene al cambiar de orientación el corte A, y el de la representación (*b*), al realizar el rompimiento de dicho corte y unir los lazos violeta con verde y verde con azul, de forma tal que se mantenga el sentido del recorrido. El signo correspondiente es positivo (+) debido a la orientación del corte A.

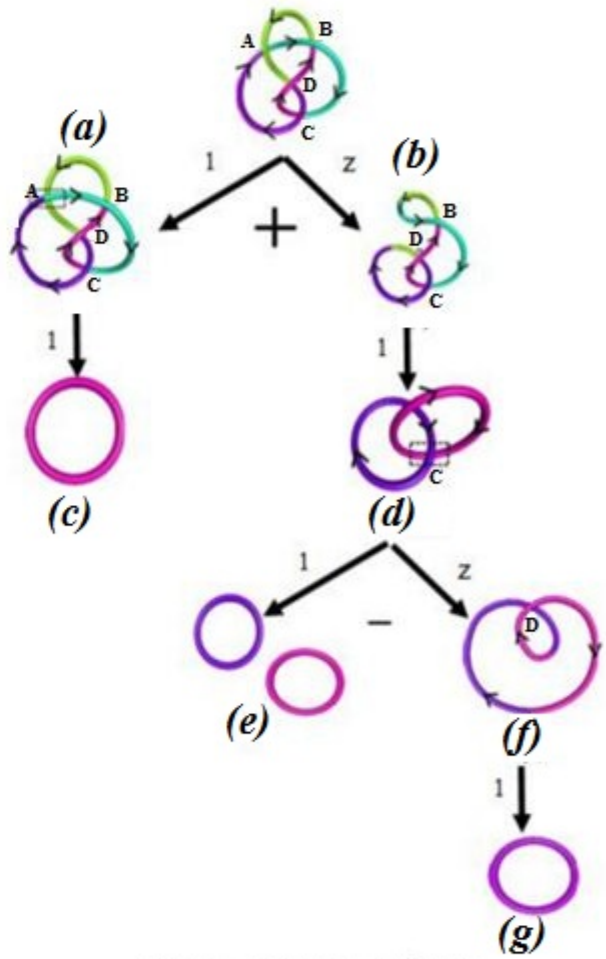
Paso 2: los nudos de las representaciones (*c*) y (*d*) se obtienen respectivamente con los movimientos de Reidemeister aplicados en los cortes A, B y D de la representación (*a*) y aplicados en el corte B de la representación (*b*).

Paso 3: el nudo de la representación (*e*) se obtiene al cambiar de orientación el corte C y el de la representación (*f*), al realizar el rompimiento de dicho corte y unir los lazos violeta y rosado manteniendo el sentido del recorrido. El signo correspondiente es negativo (-) debido a la orientación del corte C.

Paso 4: movimientos de Reidemeister aplicados en el corte D de la representación (*d*).

Paso 5: al aplicar axioma 4 en las representaciones (*c*), (*e*), (*g*) respectivamente y emplear los signos obtenidos durante el proceso se obtiene el polinomio $\nabla_L(z) = 1\nabla(0) + (Z\nabla(OO) - Z^2\nabla(0))$.

Paso 6: al aplicar axioma 3 al resultado obtenido en el paso 5 y usar los signos previamente establecidos, se tiene lo siguiente $\nabla_L(z) = 1 - Z^2$.



Paso 1: axioma 1[2]

Paso 2: movimientos de Reidemeister

Paso 3: axioma 2

Paso 4: movimientos de Reidemeister

$$1\nabla(0) + Z\nabla(OO) - Z^2\nabla(0)$$

Paso 5: axioma 4

$$1 - Z^2$$

Paso 6: axioma 3

Figura 5. Polinomio de Conway de un nudo

CONCLUSIONES

La invariante de Conway es un método que permite asociar las representaciones "geométricas" de los nudos con representaciones algebraicas que facilitan la manipulación del objeto, además de liberar de la ambigüedad pues la repre-

[2] Al usar los axiomas 1 y 2, de izquierda a derecha, las ramificaciones se nombran 1 y *z* respectivamente.

sentación algebraica es única. Asimismo, la invariante de Conway resulta ser un modelo que destaca las características más importantes de los nudos, tales como la orientación, además de incluir de manera explícita resultados destacados de la teoría de nudos, como son los movimientos de Reidemeister.

Se resalta la importancia de las imágenes en el cálculo de la invariante de Conway pues sin las mismas es imposible calcular el polinomio, además de resaltar características esenciales en el nudo como lo es la orientación de los cortes.

REFERENCIAS

Contreras, N., Jiménez, W. y Rojas, S. (en proceso de publicación). *Notación matricial para nudos*. SUMA.

Hernández, L. (2011). *Cálculo del polinomio de Conway de 3-ovillos orientados* (Tesis de maestría). Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., San Luis de Potosí, México. Disponible en:

http://repositorio.ipicyt.edu.mx/handle/11627/150

Vázquez, M. (s.f). *El polinomio de Alexander como invariante de nudos*. Recuperado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:-C8bQ5dKJ2wJ:unipols.sep.gob.mx/politecnologia/index.php/rev1/article/download/35/22+&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=co